TUTORAGGIO VEN. 8 MAGGIO, ANALISI 2. (MARCO TARSIA) → VEDI DISPENSE ONLINE 1

OTTIMIZZAZIONE (MASSIMI E MINIMI RELATIVI/ASSOLUTI) PER FUNZIONI REGOLARI. $\left(f(x^0) \leq / \geq f(x)\right)$

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^N_x$ APERTO (NON VUOTO), DI CLASSE C^2

$x = (x_1, \ldots, x_N)$

(I) OTTIMIZZ. "LIBERA" DI f (SU TUTTO A): CALCOLO DI GRADIENTE E HESSIANO/A DI f SU A. → TROVARE $x \in A$ T.C. $Df(x) = 0$

UTILI I DUE CRITERI DI:
→ CARTESIO
→ SYLVESTER

PER LO STUDIO DEL "SEGNO" DELL'HESSIANA (NEI PUNTI STAZIONARI). (AUTOVALORI REALI)

NOTA: VANNO SAPUTE ALGEBRA LINEARE E CALCOLO DIFFERENZIALE!

(II) OTTIMIZZ. "VINCOLATA" DI f SU $K \subset A$, K COMPATTO (NON VUOTO):

SCRIVIAMO K NELLA FORMA $K = \overline{\Omega} \equiv \underbrace{\text{int}\,\Omega}_{\text{APERTO}} \cup \overbrace{\underbrace{\partial\Omega}_{\text{CHIUSO E LIMITATO, CIOÈ COMPATTO}}}^{\text{VINCOLO}}$, Df

DOVE $\Omega \subset K$ (NON VUOTO E) LIMITATO.

ALLORA OTTIMIZZARE $f|_K$ È OTTIMIZZARE $f|_{\text{int}\,\Omega}$ E $f|_{\partial\Omega}$

E "CONFRONTARE QUANTO OTTENUTO". ALLORA:

* PER $f|_{\text{int}\,\Omega}$ È OTTIMIZZ. "LIBERA" (int Ω È APERTO!)

* PER $f|_{\partial\Omega}$, → PARAMETRIZZAZIONE VINCOLO: $\partial\Omega = \varphi(I)$ $]0, 2\pi[$
⇒ STUDIARE $f \circ \varphi$ SU I $[0, 2\pi[$

RIPORTI IL PROBLEMA "SU $\mathbb{R}$"

→ MOLTIPLICATORE/I DI LAGRANGE: $\partial\Omega = g^{-1}(0) \equiv \{g = 0\}$

↓ ORTOGONALITÀ CURVE DI LIVELLO E GRADIENTE

$\Rightarrow$ STUDIARE $\overset{\mathcal{L}}{D_{x,\lambda}(f-\lambda g) = 0}$.

SI ANNULLA LA PROIEZIONE DEL GRADIENTE SULLA CURVA DI LIVELLO
(∇ COME DIREZIONE MAX/MIN CRESCITA)

NOTA: SE $\partial\Omega = g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, ALLORA STUDIARE $D_{x,\lambda,\mu}(f-\lambda g-\mu h)=0$.

E COSì VIA ..

$$\nabla f = \lambda^* \nabla g \qquad \nabla f = \lambda^* \nabla g = \mu^* \nabla h$$

$\boxed{\text{OTTIMIZZAZIONE LIBERA}}$ (PER $f \in C^2(A;\mathbb{R})$, $A \subset \mathbb{R}^N_x$ APERTO). MINIMI RELATIVI

$x^* \in A$ SI DICE PUNTO DI MINIMO RELATIVO (O LOCALE) PER f SE ESISTE UN INTORNO (APERTO) $U \subset A$ DI x^* ($x^* \in U$) TALE CHE, $\forall x \in U$,

$$f(x^*) \leq f(x).$$

SI DICE ASSOLUTO SE SI PUÒ PRENDERE $U = A$.

FERMAT: $x^* \in A$ MINIMO RELATIVO PER f $\Rightarrow$ IL GRADIENTE DI f CALCOLATO IN x^* È IL VETTORE NULLO (CIOÈ x^* È PUNTO STAZIONARIO PER f):

$$Df(x^*) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\right)_{i=1,\dots,N} = 0 \quad (\in \mathbb{R}^N).$$

QUINDI I MINIMI RELATIVI VANNO CERCATI TRA I PUNTI STAZIONARI DI f!

ATTENZIONE: NON VALE IL VICEVERSA, NEL SENSO CHE UN PUNTO STAZ. PUÒ NON OTTIMIZZARE f.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ SIA $x^* \in A$ TALE CHE $Df(x^*) = 0$. ALLORA:

$\boxed{\text{I}}$ x^* MINIMO RELATIVO PER f $\Rightarrow$ LA MATRICE HESSIANA DI f VALUTATA IN x^* (CHE È $N \times N$ E SIMMETRICA, QUINDI HA TUTTI AUTOVALORI REALI (complessi a parte immaginaria nulla)) È SEMIDEFINITA POSITIVA, CIOÈ I SUOI AUTOVALORI SONO NON NEGATIVI (≥ 0): "È ≥ 0"

TEO. SCHWARTZ

$$D^2 f(x^*) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \right)_{i,j=1,\dots,N} \geq 0$$

SE DENOTIAMO i SUOI AUTOVALORI $\lambda_{MIN} \doteq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N \doteq \lambda_{MAX}$,

ALLORA $\boxed{\lambda_{MIN} \geq 0}$. $(x,y) \mapsto x^4+y^4 \geq 0$, 0

$\boxed{\text{II}}$ SE $D^2 f(x^*) > 0$, CIOÈ $\lambda_{MIN} > 0$ (DEFINITA POSITIVA),

ALLORA x^* È DI MINIMO RELATIVO PER f.

ATTENZIONE: (1) È ANCHE MINIMO ASSOLUTO? VA VISTO DI CASO IN CASO

(2) LA II È CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA: f PUÒ AVERE UN PUNTO DI MINIMO (RELATIVO) x^* CON $D^2 f(x^*) = 0$ (in $\mathbb{R}^{N^2}$).

MASSIMI RELATIVI ANALOGO (x^* DI MASSIMO RELATIVO PER f $\Leftrightarrow$ x^* DI MINIMO RELATIVO PER $-f$),

SCAMBIANDO "POSITIVA CON NEGATIVA":

$\lambda_{MIN} \geq 0 \;/\; > 0$ DIVENTA $\lambda_{MAX} \leq 0 \;/\; < 0$.

QUINDI, NELLA PRATICA, VANNO STUDIATI (I SEGNI DEGLI) GLI AUTOVALORI DELLA HESSIANA $D^2 f(\cdot)$ NEI PUNTI STAZIONARI DI f.

PER QUESTO, DUE CRITERI:

CARTESIO (POLINOMIO CARATTERISTICO):

$$P_N(\lambda) = \lambda^N + \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^{N-k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$ POLINOMIO CARATTERISTICO DI $D^2 f(x^*)$

$$= \prod_{k=1}^{N} (\lambda - \lambda_k) .$$ ALLORA $\underset{\lambda_{MIN}}{\overset{\parallel}{\lambda_1}} \le \dots \le \underset{\lambda_{MAX}}{\overset{\parallel}{\lambda_N}}$

$\boxed{\lambda_{MAX} < 0} \iff a_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$

$\boxed{\lambda_{MIN} > 0} \iff (-1)^k a_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$

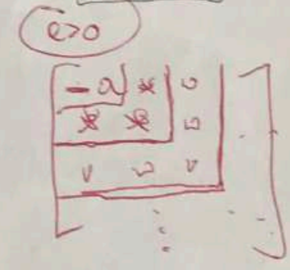
$(a_1 < 0,\ a_2 > 0, \dots)$

SYLVESTER (SOTTOMATRICI PRINCIPALI DI NORD-OVEST):

AUTOVALORI REALI

$$A := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} := D^2 f(x^*)$$

$$\forall k = 1, \dots, N, \quad A_k \doteq (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$$



ALLORA

$\lambda_{min} > 0 \iff \det A_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$

$\lambda_{MAX} < 0 \iff (-1)^k \det A_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, N$

$(a_{11} < 0,\ \det A_2 > 0, \dots)$

ESEMPI / ESERCIZI

$\longrightarrow$

$\boxed{\text{EXC}}$ "ES" $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ $(N=4)$ $\mathbb{R}^4$ 3

$$f(x,y,z,w) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2w^2 + yz - 2xw$$

"SPOILER" $\exists!$ "ESTREMANTE", È UN PUNTO DI MINIMO GLOBALE, ED È L'ORIGINE.

$$f(x,y,z,w) = \overbrace{\left((x-w)^2 + w^2\right)}^{\geq 0} + \underbrace{\left(z^2 + yz + 2y^2\right)}_{\Delta = y^2 - 8y^2 \leq 0 \ (=0)} \geq 0 = f(0,0,0,0)$$

1) $Df(x,y,z,w) = \left(2(x-w),\ 4y+z,\ y+2z,\ 2(-x+2w)\right) = (0,0,0,0)$

$Df(x,y,z,w) = 0 \iff x = w = 0 = y = z$

2) $D^2f(0,0,0,0) \equiv D^2f(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$2>0,\ 8>0$

$\det\left(D^2f(0,0,0,0)\right) = 2\cdot(4\cdot7) - 2(2\cdot7) = 2\cdot2\cdot7 = 28 > 0$

$2\cdot7 = 14 > 0$

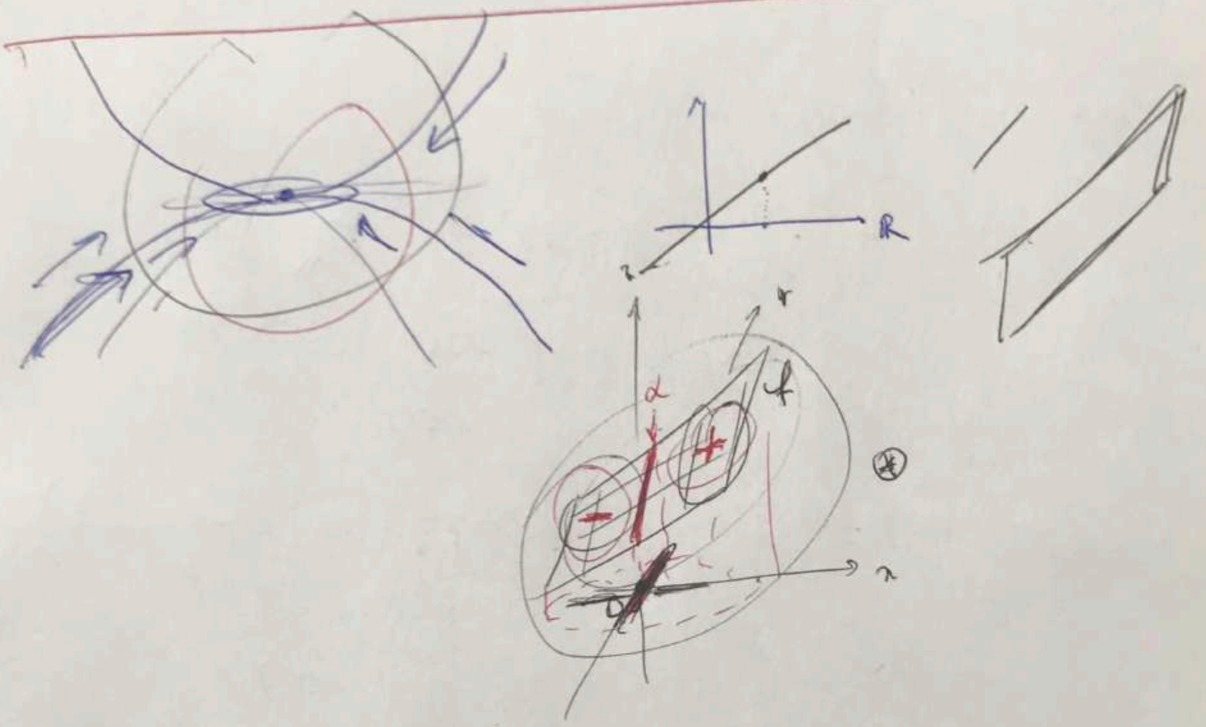
SYLVESTER

$\Downarrow$ $D^2f(0,0,0,0)$ DEF. POSITIVA

CARTESIO : $\det\left(D^2 f(0,0,0,0) - \lambda I_{4\times 4}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\| $$

$$\lambda^4 \underbrace{-12}_{<0}\lambda^3 + \underbrace{47}_{>0}\lambda^2 \underbrace{-66}_{<0}\lambda + \underbrace{28}_{>0}$$



$\boxed{\text{ESC.}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x y^2 \exp(-x^4 - y^2)$ MAX/MIN SU $\mathbb{R}^2$

$Df(x^*, y^*) = 0 \rightarrow$ "SEGNO" $D^2 f(x^*, y^*)$ (H)

$$f \begin{cases} >0 \iff x>0 \\ <0 \iff x<0 \\ =0 \iff x=0 \text{ o } y=0 \end{cases}$$

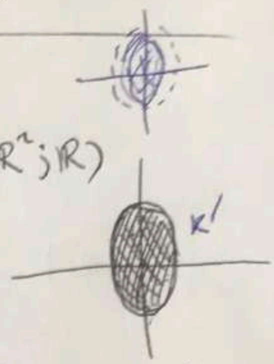
0 PUNTO STAZIONARIO NÉ MAX, NÉ MIN, NÉ SELLA

$\boxed{\text{ESC}}$ (X CASA) $f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz \quad , (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 4

$\boxed{\text{EXC.}}$ / "ES"

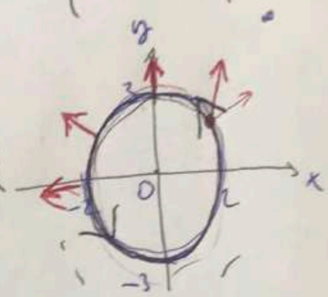
$f(x,y) = x^2 + 3y$ $\qquad Df = (2x, 3) \neq 0 \qquad C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$

$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$



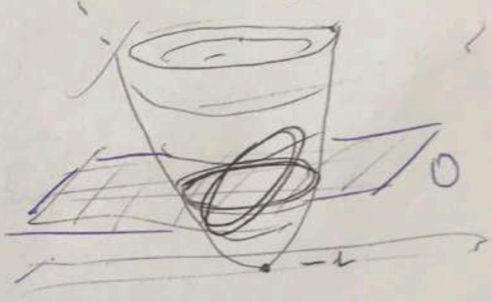
VINCOLO $K \doteq g^{-1}(0) \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$

$= \left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$



$\boxed{\text{MAX E MIN ASSOLUTI DI } f \text{ SU } K}$

(WEIERSTRASS)



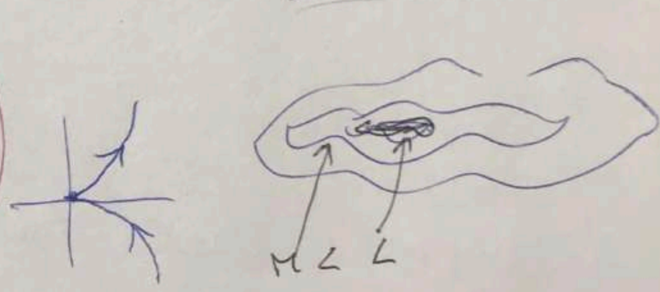
① PARAMETRIZZAZ. VINCOLO

$I \subset \mathbb{R}$

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2, C^1$

$\varphi(I) = K =$

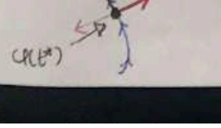
$\varphi' \neq 0$ "SEMPRE"



"gradiente ortogonale a curva":

$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t^*) = Df(\varphi(t^*)) \cdot \underbrace{\varphi'(t^*)}_{\neq 0}$

$= \langle Df(\varphi(t^*)); \underbrace{\varphi'(t^*)}_{\neq 0} \rangle_{\mathbb{R}^2}$

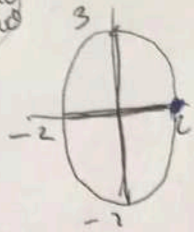


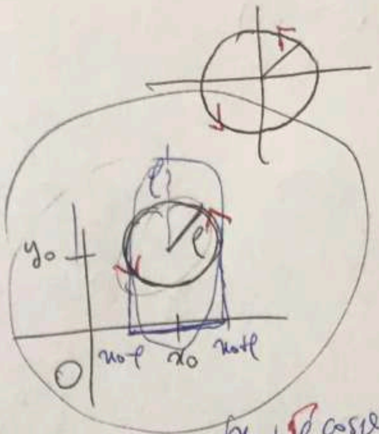
$\uparrow$

$Df(\varphi(t^*)) \perp \varphi'(t^*)$

$I = [0, 2\pi[\ , \ \theta \in I \quad \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$$\varphi(\theta) = \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x(\theta) \\ \leftarrow y(\theta) \end{matrix}$$





$f(\varphi(\theta))\ , \ \theta \in [0, 2\pi[$

$0 \ [\longrightarrow [\ 2\pi$

$(x(0), y(0))$

$$\boxed{f(\varphi(0)) = f(2,0) = 4}$$

$$\varphi(\theta) = \begin{bmatrix} x_0 + r\cos\theta \\ y_0 + r\sin\theta \end{bmatrix}$$

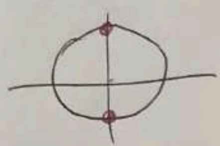
$$\boxed{f(x,y) = x^2 + 3y}$$

$f \circ \varphi \,\big|_{]0, 2\pi[}$

$$\boxed{f(\varphi(\theta)) = 4\cos^2\theta + 9\sin\theta}$$

$$\begin{aligned} \Big(f(\varphi(\theta)) &= f(x(\theta), y(\theta)) \\ &= x(\theta)^2 + 3y(\theta) \\ &= (2\cos\theta)^2 + 3\cdot(3\sin\theta) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(f\circ\varphi)(\theta) &= 8\cdot\cos\theta\cdot(-\sin\theta) + 9\cos\theta \\ &= \cos\theta\,[\underbrace{9 - 8\sin\theta}_{\neq 0}] \end{aligned}$$



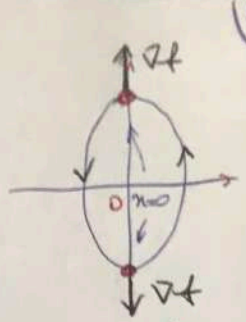
$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}(f\circ\varphi)(\theta) = 0 \iff \cos\theta = 0 \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$$

$$\Rightarrow (x,y) = (x(\theta), y(\theta))\,\Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi}$$

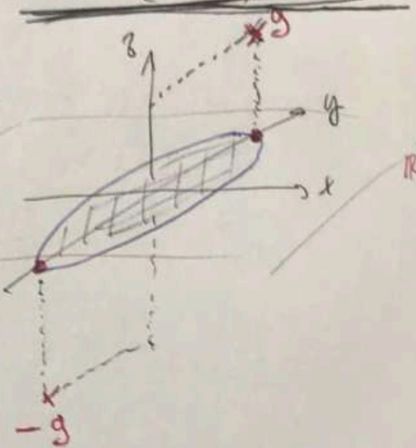
$f(\overbrace{x(\tfrac{\pi}{2}), y(\tfrac{\pi}{2})}^{\varphi(\pi/2)}) = f(0,3) = 9$

$f(\underbrace{x(\tfrac{3}{2}\pi), y(\tfrac{3}{2}\pi)}_{\varphi(\frac{3}{2}\pi)}) = f(0,-3) = -9 \qquad 4 = f(2,0)$



∃! PUNTO DI MAX (assoluto) PER $f|_K$ ED È $(0,3)$ 9

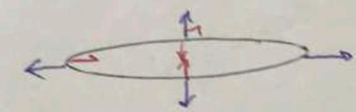
" MIN " $(0,-3)$ -9



$K=\{g=0\}$ $\quad$ ($\cancel{K=\{g=0\}\cap\{h=0\}}$)

2) MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

$$g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad K=\{g=0\}$$



TROVARE $((x,y),\lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(x,y,\lambda) \doteq f(x,y) - \lambda g(x,y)} \quad \cancel{-\mu h(x,y)}$$

$$D\mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) = \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*,y^*) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*) = \lambda^* \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*,y^*) \\ g(x^*,y^*) = 0 \end{cases}$$

$f = x^2 + 3y$

$(\lambda \neq 0)$

$$2x = \frac{\lambda x}{2}$$

$$3 = \frac{2\lambda y}{9}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\frac{y}{3} = \frac{9}{2\lambda} = \frac{9}{8} > 1$

$(0, y) \to (0, \pm 3)$

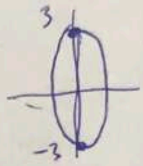
$\cancel{4x = \lambda x}$ SE FOSSE $\boxed{x \neq 0}$, ALLORA $\lambda = 4$

$y = \frac{27}{2\lambda}$

$y = \frac{27}{8} \iff \frac{y}{3} = \frac{9}{8} > 1$

$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} < 1$

$x = 0$



$\boxed{\text{EXC.}}$ $f(x,y,z) = x + 3y - z$, SU $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \\ h(x,y,z) = 2x + 4y - z \end{cases}$$

$K = g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$

MAX E MIN (ASSOLUTI) DI f SU K

$z = x^2 + y^2$ $(g(x,y,z) = 0)$

$z = 2x + 4y$ $(h(x,y,z) = 0)$

$(x, y, z) \in K \iff \begin{cases} (x,y) \text{ t.c.} \\ z \text{ t.c.} \end{cases}$

$0 = x^2 + y^2 - z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$

$\Updownarrow$ $x^2 + y^2 - \cancel{z} = 0 = 2x + 4y - \cancel{z}$ (x,y)

$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 = 0$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ z = 2x + 4y \end{cases}$$

RAGGIO $\sqrt{5}$

VINCOLO

1) PARAM. VINCOLO

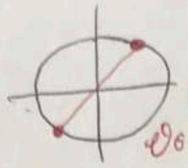
$\theta \in [0, 2\pi[$, $\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = 1 + \sqrt{5}\cos\theta \\ y(\theta) = 2 + \sqrt{5}\sin\theta \\ z(\theta) = 2x(\theta) + 4y(\theta) = 10 + 2\sqrt{5}(\cos\theta + 2\sin\theta) \end{cases}$

$$f(\gamma(\theta)) = -3 - \sqrt{5}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$\boxed{f(\varphi(0))} = f(1+\sqrt{5},\ 2,\ 10+2\sqrt{5}) = -3-\sqrt{5}$$

$$f\circ\varphi\Big|_{]0,2\pi[} \to \frac{d}{d\theta}(f\circ\varphi)(\theta) = \boxed{-\sqrt{5}(-\sin\theta+\cos\theta)} = 0$$

$$\sin\theta = -\cos\theta$$



$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right\}$$

$$f(\varphi(\tfrac{\pi}{4})) = \underbrace{-3-\sqrt{10}}_{\text{VAL. MIN}},\ < f(\varphi(\tfrac{5}{4}\pi)) = \underbrace{-3+\sqrt{10}}_{\text{VAL. MAX}}$$

MOLTIPLICATORI di

2) LAGRANGE

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) \doteq f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z)$$

$$D_{x,y,z,\lambda,\mu}\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} D_{x,y,z} f(x,y,z) - \lambda D_{x,y,z} g(x,y,z) - \mu D_{x,y,z} h(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

(X,Y) DI NUOVO "DISACCOPPIABILE" DALLA Z $\rightarrow$

$$\begin{cases} 1-\lambda(2x)-2\mu = 0 \\ 3-2\lambda y-4\mu = 0 \\ -1+\lambda+\mu = 0 \quad \lambda+\mu = 1 \\ x^2+y^2-z = 0 = 2x+4y-z \end{cases}$$

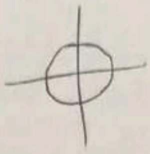
$\boxed{\text{EXCS}}$ (CASA)

① $\begin{cases} f(x,y) = x \cdot y \\ g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$K = g^{-1}(0)$ MAX E MIN f SU K

(LAGRANGE)

② $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$



$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^{N} x_j^2 \\ g(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - 1 \end{cases}$$

$(\{g=0\}$  $)$

$f|_{\{g=0\}}$ MAX E MIN (LAGRANGE)

- - - - - - - - - - - - - - -

Anal. 2 – MARCO TARSIA, INSUBRIA

ANALISI 2 - TUTORAGGIO — 5/6/2020 "RIPASSO GENERALE" (1

EXC. (DIFFERENZIABILITÀ)
(PER CASA)

a) $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ $[n \in \mathbb{N}^*]$. ALLORA, $\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x}) \cdot \int_0^1 f_x(\bar{x}+\theta(x-\bar{x}))\,d\theta .$$

PROD. SCAL. STANDARD (IN $\mathbb{R}^n$)

"f_x" $=: Df$ GRADIENTE DI f

b) $g \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. ALLORA, $\forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = g(\bar{x}) + g_x(\bar{x})\cdot(x-\bar{x}) + (x-\bar{x}) \cdot \int_0^1 \theta\, g_{xx}(x+\theta(\bar{x}-x))\cdot(x-\bar{x})\,d\theta .$$

$D^2 g := g_{xx}$ HESSIANA DI g

EQ. DIFFERENZIALI: RISOLUZIONE ANALITICA.

1) EQUAZ. "ESATTE" (ML FORME DIFF. ESATTE......)

$I =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$

$$A(t,x) + B(t,x)\cdot x' = 0 , \quad t \in I$$

$I \subset \mathbb{R}$ INTERVALLO APERTO ($\Rightarrow$ CONNESSO)

$\forall t \in I$, $A(t,x(t)) + B(t,x(t))\cdot x'(t) = 0$

$A, B \in C^0(I_t \times \mathbb{R}_x;\mathbb{R})$, $x \in C^1(I;\mathbb{R})$.

|| SE ESISTE $F \in C^1(I_t \times \mathbb{R}_x;\mathbb{R})$ T.C., $\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}$,

$$DF(t,x) = (A(t,x), B(t,x))$$

cioè

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = A(t,x) \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = B(t,x)$$

$$I \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \ (I\times\mathbb{R})$$

Allora la curva (su I) $t \mapsto (t, x(t))$ è una curva di livello per F, cioè $\exists\, k\in\mathbb{R}$ t.c., $\forall t\in I$,

$$\boxed{F(t,x(t)) = k}.$$ "forma implicita"

Infatti, per "chain rule" appl. a $t \xrightarrow{\varphi} (t,x(t)) \xrightarrow{F} F(t,x(t))$ (C^1),

$$\forall t\in I \quad \frac{d}{dt}F(t,x(t)) = DF(t,x(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$= A(t,x(t))\cdot 1 + B(t,x(t))\cdot x'(t) = 0$$

OSS. Se F ~~...~~ (esiste ed è) $C^2(I\times\mathbb{R};\mathbb{R})$, allora per Schwarz, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}$ (su tutto $I\times\mathbb{R}$), da cui

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}} \quad (\text{su } I\times\mathbb{R}).$$

(in certi casi, tale cond. è anche sufficiente...).

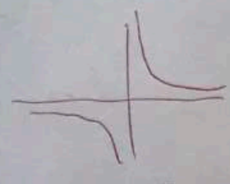
Q) Come costruire F?

x soluz. $\Rightarrow -x$ soluz.

ES. 1 "a occhio" $\quad \underbrace{2tx^3}_{A(t,x)} + \underbrace{3t^2x^2}_{B(t,x)}x' = 0$, $t>0$. $(t<0)$

$(x \equiv x(\cdot))$

$$A(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^2x^3) \quad e \quad B(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(t^2x^3)$$



$$F(t,x) := t^2x^3 \quad C^\infty \Rightarrow \exists k\in\mathbb{R} \text{ t.c.}, \forall t>0,$$

$$F(t,x(t)) \equiv t^2x^3(t) = k \underset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x(t) = k t^{-2/3}}.$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ "METODO" $\quad \frac{x}{t} + (\log(xt)+1)\cdot x' = 0$, $t \neq 0$ e $x(t)\cdot t > 0$, [13]

$xt = |xt|$

È possibile risolvere "a occhio", come prima...

$\boxed{\text{COND. NEC.}}$ "$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}$" cioè $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\log(xt)+1\right)$ ✓

$F \in C^1(I \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ può essere e deve essere

$$\underline{\frac{x}{t} = \frac{\partial}{\partial t} F(t,x)} \quad \left(= \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\right)$$

Allora $\exists\, h \in C^1(\mathbb{R}_x;\mathbb{R})$ tale che $(\forall x \in \mathbb{R})$

$$\boxed{F(t,x) = x \log|t| + h(x)}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\log(xt)+1}_{\log|x| + \log|t| + 1} = \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \log|t| + h'(x)$$

cioè $\boxed{h'(x) = \log|x| + 1}$ cioè (int. per parti)

$$\underline{h(x) = x \log|x| + C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Scegliamo $C = 0$ e allora prendiamo

$$\boxed{\begin{aligned} F(t,x) &= x\log|t| + x\log|x| \\ &= x\log(xt) \end{aligned}}$$

Da cui $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c., $\forall t \ldots$, $\boxed{x(t)\log(t\,x(t)) = k.}$

$\boxed{2}$ RIDUZIONE DELL'ORDINE o METODO DI D'ALEMBERT.

EQUAZ. DIFF. LINEARI "GENERALE" DEL 2° ORDINE E OMOGENEE:

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \quad , \quad t \in I$$

$[u = u(\cdot)]$

$a(\cdot), b(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ CONTINUE. SUPPONIAMO CHE ESISTONO DUE SOLUZIONI C^2 LIN. INDIPENDENTI u_1, u_2 E CHE OGNI ALTRA SOLUZIONE u È COMB. LIN. DI u_1, u_2 : $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ T.C. $u = \alpha u_1 + \beta u_2$.

"WRONSKIANO DI u_1 E u_2" $\equiv u_1 u_2' - u_1' u_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \neq 0$

IN ALMENO UN PUNTO t_0 DI I ($\Leftrightarrow$ SU TUTTO I).

METODO D'ALEMBERT: TROVATA u_1, CERCARE u_2 DELLA FORMA

$$\boxed{u_2(t) = v(t)u_1(t)}, \quad t \in I,$$

DOVE $v' \neq 0$.

$\boxed{\text{ES.}}$ EQ. LEGENDRE $(n = 1 \ldots)$ $\quad$ $0<t<1$ $(o\ -1<t<0)$

$$(1-t^2)u'' - 2tu' + 2u = 0, \quad |t| < 1, \ t \neq 0$$

$u_1(t) := t$ SOLUZ. : CERCHIAMO "$u_2 = v \cdot u_1$". $\quad u_2(t) = v(t) \cdot t$

$u_2'(t) = tv'(t) + v(t) \to u_2''(t) = tv''(t) + 2v'(t)$

SOSTITUENDO

$$\Rightarrow (1-t^2)(tv''(t) + 2v'(t)) - 2t(tv'(t) + \cancel{v(t)}) + \cancel{2v(t)t} = 0$$

DIVIDENDO PER $t(1-t^2)$ $(\neq 0)$

$$\boxed{v'' + \left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1-t^2}\right) v' = 0}, \quad v' \neq 0 \text{ SEMPRE}$$

$$v' =: x \to \boxed{x' = -\left(\frac{2}{t} - \frac{2t}{1-t^2}\right) x} \quad x \neq 0 \text{ SEMPRE}$$

A VARIABILI SEPARABILI

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $|v'| = C \dfrac{1}{t^2(1-t^2)}$.

SUPPONIAMO $v' = c \cdot \dfrac{1}{t^2(1-t^2)}$, $c > 0$, ALLORA

$$\boxed{v(t)} = c \int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = c \int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right) dt$$

$$= \boxed{c\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\log\frac{1+t}{1-t}\right)}$$

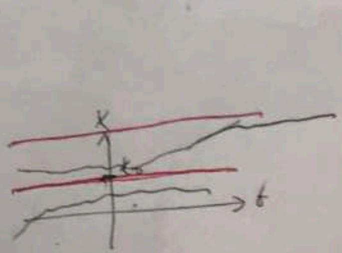
$$\left(\frac{d}{dt}\log\frac{1+t}{1-t} = \frac{1-t}{1+t}\,\frac{1}{(1-t)^2}\{\cdots\} = \frac{2}{1-t^2}\right).$$

$$\boxed{c = 1} \to \boxed{u_2(t) = t \cdot v(t) = -1 + \frac{t}{2}\log\frac{1+t}{1-t}}.$$

(Lin. indip. da u_1!)

DIGRESSIONE: EQUAZ. A VAR. SEPARABILI.

$$\boxed{x' = g(t) f(x)}, \quad t \in I$$



$g, f : I \to \mathbb{R}$ continue.

SE $f(x_0) = 0$, $x(t) \equiv x_0$ RISOLVE.

$$x' = \frac{dx}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt} \qquad \underbrace{\int \frac{dx}{f(x)}}_{F} = \underbrace{\int g(t)dt}_{G}$$

$$\left(x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)\right)$$

UNA FZ. $x(\cdot) \in C^1(I;\mathbb{R})$ TALE CHE

$$\boxed{F(x(t)) = G(t) + \text{Cost}},$$

DOVE $F' = \frac{1}{f}$ E $G' = g$, ~~ALLORA~~ È SOLUZIONE!

ES.

$$\boxed{x' = \underbrace{\left(-\frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\right)}_{g(t)} x}$$

$f(x) = x$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{x}$ $F = \log|x|$

$$G(t) = -2\log|t| - \log|1-t^2|$$

$$= \log\frac{1}{t^2(1-t^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log|x| = \log\frac{1}{t^2(1-t^2)} + \text{Cost}}$$

$$|x| = \text{Cost}\left(\frac{1}{t^2(1-t^2)}\right)$$

$$x = v' \rightsquigarrow v' = C\,\frac{1}{t^2(1-t^2)} \,. \quad \checkmark$$

CALCOLO INTEGRALE (FZ. DI PIÙ VAR.)

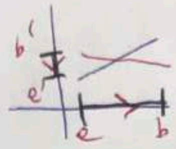
CAMBIO DI VARIABILE PER GLI INT. DOPPI

$n=1$

$$du = \left|\frac{du}{dx}\right| dx$$

$\boxed{\text{TRASF.}}$ DELLE LUNGHEZZE

$(u=u(x))$

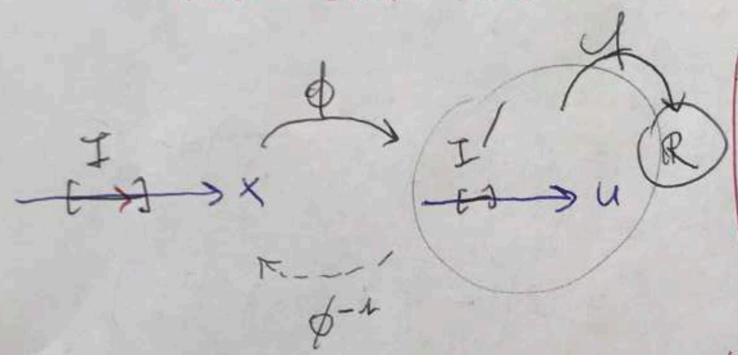


$n=2$

$$du\,dv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy$$

TRASF. DELLE AREE

$\boxed{n=1}$



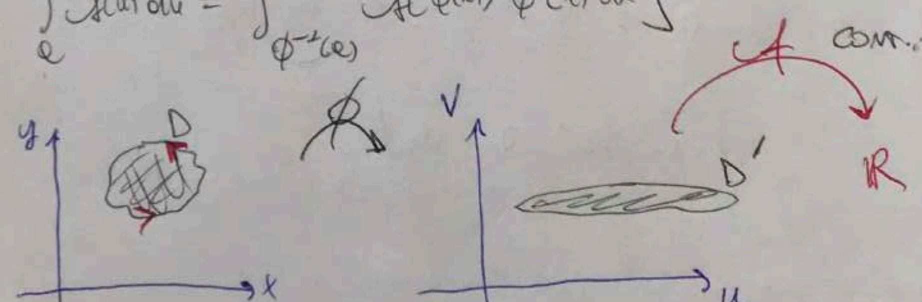
TRASF. DIFFEOMORFA (BIUNIVOCA, C^1, CON INV. C^1)

$\phi(x)=u(x)$

$$f \text{ cont.} \Rightarrow \int_{I'} f(u)\,du = \int_I f(\phi(x))|\phi'(x)|\,dx \equiv \int_I f(\phi(x))\left|\frac{du}{dx}(x)\right| dx$$

$$\left[\int_a^b f(u)\,du = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx\right]$$

$\boxed{n=2}$



$$\iint_{D'} f(u,v)\,du\,dv = \iint_D f(u(x,y),v(x,y)) \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)\right|}_{\text{MODULO DEL DETERMINANTE DELLO JACOBIANO DI } \phi} dx\,dy$$

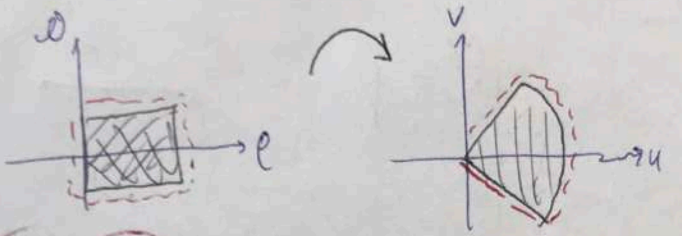
$$\phi : \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

AD ESEMPIO, LA PARAM. IN COORD. POLARI

$$\phi : \begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \rho \in]0, R[, \quad \theta \in]-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}[$$

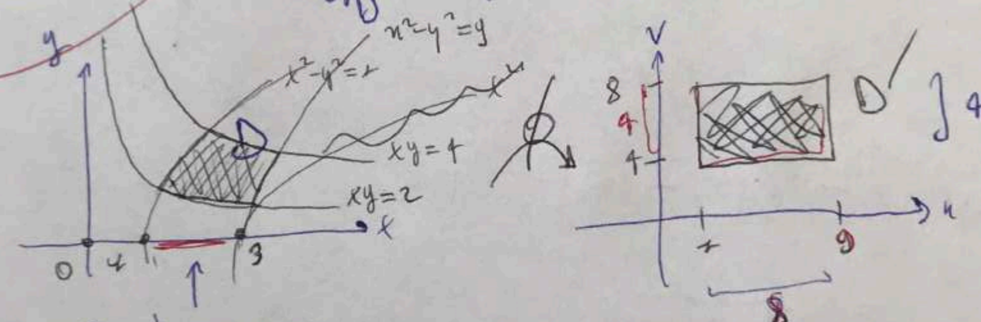
$R > 0$ FISSATO

HA
$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\theta)}(\rho,\theta) \right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho > 0$$



ES. 1 "RADDRIZZARE"

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad \text{DOVE}$$



D È LA REGIONE DELIMITATA DA $xy=2$, $xy=4$, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$

IDEA: x^2-y^2 VARIA TRA 1 E 9
xy VARIA TRA 2 E 4

$$\phi : \begin{cases} u = x^2-y^2 \\ v = 2xy \quad 4 \text{ e } 8 \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) \right| = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \qquad (\text{SU } D \text{ È} > 0)$$

IN CONCL.,

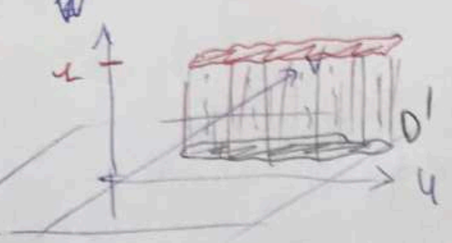
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{4} \iint_D \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y) \right| dx\,dy \underset{f\equiv 1}{\overset{\text{FORMULA}}{=}} \frac{1}{4} \text{Area}(D') = 8.$$

DOVE, INFATTI:

$$\iint_{D'} f(u,v)\,du\,dv \overset{\text{FORMULA}}{=} \iint_D f(u(x,y),v(x,y)) \cdot \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x,y)\right| dx\,dy$$

$f(u,v) \equiv 1 \quad \forall u,v \in D'$

$\iint_{D'} 1\,du\,dv$ "Area(D')"



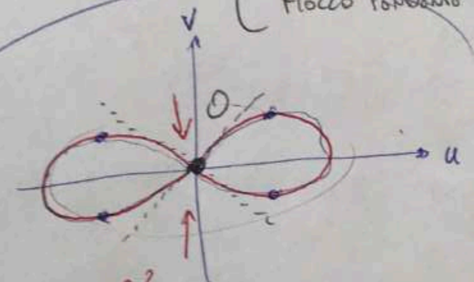
Volume solido: Area D' × altezza ($= 1$)

$\equiv$ Area D'

$$\int_E 1\,d\mu = \mu(E)$$

ES. 2 "COORD. POLARI" PER LA LEMNISCATA DI BERNOULLI: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ...

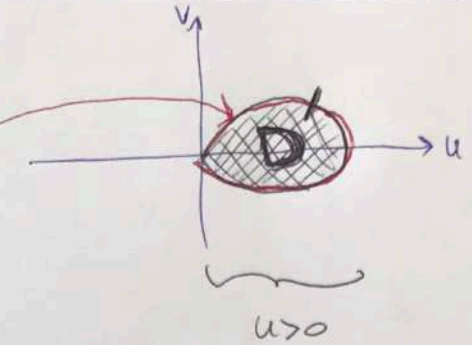
("FIOCCO PENDENTE")



$$(u^2+v^2)^2 - 2a^2(u^2-v^2) = 0 \quad (a>0)$$

"ELLISSE DEGENERE": È IL LUOGO DEI PUNTI (u,v) T.C. IL PRODOTTO DELLE DISTANZE DAI DUE PUNTI "FISSI" $(a,0)$, $(-a,0)$ SIA a^2 (COSTANTE).

SOMMA dovrebbe ~~MA~~ L'ELLISSE. (DUNQUE LA LEMNISCATA È UNA VARIANTE DELL'ELLISSE)



$$\begin{cases} (u^2+v^2)^2-(u^2-v^2)=0 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

$$\iint_{D'} \frac{du\,dv}{(1+u^2+v^2)^2}$$

È NOTO CHE VALE LA PARAM. (diffeomorfa)

$$\Phi : \begin{cases} u=\rho\cos\theta \\ v=\rho\sin\theta \end{cases}, \ \theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[, \ \rho\in\left]0,\sqrt{\cos 2\theta}\right[$$

$\uparrow$ $\rho=\rho(\theta)$

$$(\Rightarrow u^2+v^2=\rho^2)$$

POSTO $D:=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid \theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[, \rho\in\left]0,\sqrt{\cos 2\theta}\right[\right\}$

$$\iint_{D'} \frac{du\,dv}{(1+u^2+v^2)^2} \overset{\text{FORMULA}}{=} \iint_{D} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho\,d\theta$$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \underbrace{\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho}_{\text{(CHE FUNZ. DI } \theta \text{ È PARI)}}$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho$$

$$\overset{(**)}{=} \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho^2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\cos 2\theta}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

$1+\cos 2\vartheta =$
$= 2\cos^2\vartheta$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \frac{1}{2}\left[\tan\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

---

3 FUNZIONI IMPLICITE (TEO. DINI) NEL PIANO

FORMA IMPLICITA $F(x,y)=0$ DI UNA CURVA (algebrica, integrale, ...),
È POSSIBILE PASSARE, ALMENO LOCALMENTE, AD UNA FORMA "ESPLICITA"

$$y = f(x) \qquad \text{o} \qquad x = g(y)$$

QUANDO, PARTENDO DA (x_0,y_0) T.C. $F(x_0,y_0)=0$, IL PIANO TANGENTE IN (x_0,y_0) ALLA SUPERFICIE (GRAFICO) $z = F(x,y)$ DI F

$$z = \cancel{F(x_0,y_0)}^{\,0} + DF(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)^T$$

(nelle var. x,y)

NON È ORIZZONTALE, OSSIA $DF(x_0,y_0) \neq 0$.

THM (DINI) F C^1 IN UN INT. DI (x_0,y_0). SE

$$F(x_0,y_0)=0 \qquad \text{E} \qquad F_y(x_0,y_0)\neq 0$$

ALLORA $\exists\ \alpha,\beta>0$ T.C., $\forall x \in I :=]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, L'EQUAZ.

$$F(x,y)=0$$

ABBIA ESATTAMENTE UNA SOLUZIONE $y = f(x)$ IN $]y_0-\beta, y_0+\beta[$.

Dunque, nell'intorno $\{|x-x_0|<\alpha, |y-y_0|<\beta\}$, $\{F(x,y)=0\}$ è (12

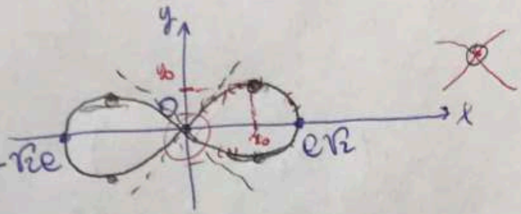
grafico di una funzione $y = f(x)$. Inoltre $f(x_0)=y_0$,

$f \in C^1(I)$ e

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}, \quad x \in I.$$

(f ha la stessa regolarità di F)

$\boxed{\text{EXC}}$ (Lemniscata)



$$F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = 0, \quad e>0$$

(C^∞)

Ritrovare il fatto (noto) che i max, min loc. siano i quattro punti

$$(\sqrt{3}e/2, \pm e/2) \text{ e } (-\sqrt{3}e/2, \pm e/2),$$

$$DF(x,y) = 4\left(x[x^2+y^2-e^2], y[x^2+y^2+e^2]\right)$$

(Notiamo che $DF(0,0)=0 \to$ non si applica Dini in O)
(e infatti non vale)

$\forall y_0 \neq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$, t.c. $(x_0,y_0) \in$ Lemniscata ($F(x_0,y_0)=0$), vale Dini

perché $F_y(x_0,y_0) \neq 0$ $(y^2>0)$. Ma ....

$$f'(x) = -\frac{x(x^2+y^2-e^2)}{y(x^2+y^2+e^2)}, \quad (x,y) \text{ vicino a } (x_0,y_0) \; (y=f(x))$$

Visto che $x \neq 0$ (altrimenti $y=0$)

$f'(x) = 0 \iff x^2 + y^2 = e^2 \Rightarrow$ TORNANDO A $F(x,y) = 0$, 13

$$\boxed{x^2 - y^2 = e^2/2}\,.$$

MAX E MIN VINCOLATI ; MOLTIPL. DI LAGRANGE.

TERMODINAMICA: PARTICELLE CON ENERGIA. :

* $N = n_1 + \dots + n_k$ N° DI PARTICELLE, $\begin{cases} N \text{ "MOLTO GRANDE"} \\ \forall i,\ n_i \text{ "MOLTO GRANDE"} \end{cases}$

* $E = n_1 E_1 + \dots + n_k E_k$ ENERGIA TOTALE (del sistema) DOVE, $\forall i$,

$\begin{cases} E_i \text{ SONO I POSSIBILI LIVELLI ENERGETICI } (>0) \\ n_i \text{ I RISPETTIVI LIVELLI DI "OCCUPAZIONE"} \end{cases}$

(CI SONO n_i PART. DI ENER. E_i)

VERIFICHIAMO CHE LA DISTRIBUZIONE DI ENERGIA "PIÙ PROBABILE" È DATA DALLA DISTR. DI BOLTZMANN: $\forall i$,

$$\boxed{n_i \propto e^{-\mu E_i}} \quad \left(\mu = \frac{1}{KT}\right)$$

DIRETTA PROP. BOLTZ. TEMP. ASSOL.

$(n_1, \dots, n_k)$

LA PROB. DI AVERE n_i PARTIC. (SUL TOTALE DI N), CON ENERG. E_i, $\forall i$, È PROPORZIONALE A ("CASI FAVOREVOLI")

$$\binom{N}{n_1} \cdot \binom{N-n_1}{n_2} \cdot \binom{N-n_1-n_2}{n_3} \cdot \dots \cdot \binom{N-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}} =$$

$$= N! / n_1! \cdots n_k! \quad ?! \ n_i! \ ?!$$

VORREMMO DERIVARE IN n_i .... MA ALMENO n_i È GRANDE! USIAMO LA

FORMULA DI STIRLING: $\boxed{n! \underset{\text{"}n\to\infty\text{"}}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}$

(ANALISI 1)

$$\sim \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\Rightarrow \log(n!) \sim \frac{1}{2}\log n + n(\log n - 1)$$

MINIMIZZIAMO $\log(n_1! \cdots n_k!) =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \log(n_i!)$$

LAGRANGIANA: $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, $n_i > 0$ "GRANDI",

$$\boxed{\mathcal{L}(n_1, \dots, n_k, \lambda, \mu) := \sum_{i=1}^{k}\left[n_i(\log n_i - 1) + \frac{1}{2}\log n_i\right] + \lambda\left[\sum_{i=1}^{k} n_i - N\right] + \mu\left[\sum_{i=1}^{k} n_i \varepsilon_i - E\right]}$$

DERIVIAMO IN n_i:

$$\log n_i \cancel{-1} + \underbrace{n_i \cdot \frac{1}{n_i}}_{\cancel{1}} + \underbrace{\frac{1}{2n_i}}_{\text{NO}} + \lambda + \mu\varepsilon_i = 0$$

$$\log n_i = -\lambda - \mu\varepsilon_i \iff n_i = \exp(-\lambda - \mu\varepsilon_i)$$

$$= \underbrace{e^{-\lambda}}_{a} \cdot e^{-\mu\varepsilon_i}$$

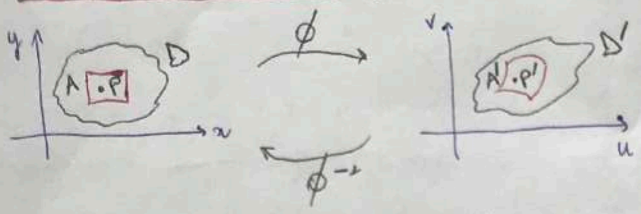
IL MOLTIPLICATORE μ È INV. PROP. ALLA COSTANTE DI BOLTZMANN!

ANALISI 2 — TUTORAGGIO

19/6/2020

[PARTE 2]

① INVERTIBILITÀ LOCALE (DINI — FUNZIONI IMPLICITE) E DINI



$\phi: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$, $\phi: D \to D'$ C^1

$\phi^{-1}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $\phi^{-1}: D' \to D$ C^1

$$\boxed{du\,dv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dx\,dy} \leftarrow \text{TRASFORMAZIONE (DIFFEOMORFA) DELLE AREE}$$

$$\boxed{J := \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \doteq \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \text{DETERMINANTE DELLO JACOBIANO DI } \phi \text{ (calcolato in } (x,y))$$

IL PROBLEMA DELLA RISOLVIBILITÀ DI SISTEMI TIPO $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ (CAMBIO DI COORDINATE / TRASFORMAZ. PIANO), OSSIA DI RIFORMULARLO EQUIVALENTEMENTE/UNIVOCAMENTE COME $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ (INVERSIONE DI UNA FUNZIONE), È PROPRIO CONNESSO AL (DETERMINANTE DELLO) JACOBIANO ASSOCIATO. Ad esempio, se il sistema è LINEARE

$$\begin{cases} u = ax+by \\ v = cx+dy \end{cases}$$

allora è risolvibile univocamente se e solo se $J \equiv \cancel{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$, ed in tal caso la trasformaz. lineare è GLOBALMENTE invertibile. L'ANALOGO RISULTATO RESTA VERO LOCALMENTE.

THM (INV. LOC.) SIA $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ E SIANO u,v ~~C^1~~ SCALARI DI CLASSE C^1 SU UN INTORNO DI (x_0,y_0). SE IL DETERMINANTE $J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, ALLORA ESISTONO INTORNO A DI (x_0,y_0) ED INTORNO A' DI $(u_0,v_0) := (u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ TALI CHE $\phi: \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} : A \to A'$ SIA INVERTIBILE CON INVERSA C^1 $\phi^{-1}: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$. INOLTRE, PER OGNI $(u,v) \in A'$ E POSTO $(x,y) := (x(u,v), y(u,v))$, LO JACOBIANO DI ϕ^{-1} CALCOLATO IN (u,v) È L'INVERSO DELLO JACOBIANO DI ϕ CALCOLATO IN (x,y):

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \equiv J_{\phi^{-1}}(u,v) = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{bmatrix} (x,y).$$

[Ricordiamo che, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $ad-bc \neq 0$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.]

$\boxed{\text{COR}}$ (RECIPROCITÀ DETERMINANTI) $\displaystyle \underbrace{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}_{\text{in } (u,v)} = \underbrace{\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}}_{\text{in } (x,y) = (x(u,v),\, y(u,v))}$.

$\boxed{\text{EXC}}$ DETERMINARE TUTTI E SOLI I PUNTI DI <u>INVERTIBILITÀ LOCALE</u> DELLE SEGUENTI FUNZIONI REGOLARI (sul proprio aperto di definizione).

(a) $\begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (b) $\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (c) $\begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = y - x \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $\begin{cases} u = \sin(x+y) \\ v = \cos(x+y) \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (e)' $\begin{cases} u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \\ v = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, IN UN INTORNO DI $(0,1)$.

[SVOLG. (a) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: INV. LOC. SU TUTTO $\mathbb{R}^2$. (NON È GLOBALE perché, ad es., $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,y) = u(x, y+2\pi)$ e $v(x,y) = v(x, y+2\pi)$.) ✓

(b) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$: INV. LOC. SU TUTTO $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. IN 0 <u>NO</u>, PERCHÉ NON È INIETTIVA IN ALCUN INTORNO DI 0 : (x,y) E $(-x,-y)$ HANNO LA STESSA IMMAGINE. ✓

(c) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x-y & -x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x - y$: INV. LOC. SU TUTTO $\mathbb{R}^2 \setminus$ diagonale. SULLA DIAGONALE NO, PERCHÉ TUTTA LA DIAGONALE VIENE MAPPATA IN 0 (NO INIETTIVITÀ LOCALE). ✓

(d) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{vmatrix} \equiv 0$. IN EFFETTI, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ E $\forall$ INTORNO DI (x,y), LA FUNZIONE NON È INIETTIVA: $(x-\varepsilon, y+\varepsilon)$ HA LA STESSA IMMAGINE DI (x,y), $\forall \varepsilon > 0$. ✓

(e) CON QUALCHE CONTO SI VEDE CHE $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0$, MA SEMPLICEMENTE BASTAVA OSSERVARE CHE, PER OGNI $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ CON $x = 0$, (x,y) HA IMMAGINE COSTANTE $(-1, 0)$: NO INIETTIVITÀ LOCALE ✓ ☒]

$\boxed{\text{EXC}}$ SIA $A \subset \mathbb{R}^2$ UN APERTO (NON VUOTO) E SIANO $u, v \in C^2(A;\mathbb{R})$ CHE VERIFICANO LE <u>EQUAZIONI DI CAUCHY – RIEMANN</u> (SU A):

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (\text{su } A).$$

DIMOSTRARE ALLORA QUANTO SEGUE

(a) u, v SONO ARMONICHE (O DEI POTENZIALI) $\forall$ (SU A), NEL SENSO CHE SODDISFANO L'EQUAZ. DI LAPLACE (PDE) $\forall$ (SU A)

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta v = 0 \end{cases} \quad (\text{SU } A).$$

(b) LA TRASFORMAZ. $\phi : \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ È LOCALM. INV. $\forall$ SU A SE E SOLO SE $Du \neq 0$ SU A, ED IN TAL CASO ANCHE LE COMPONENTI x, y DELL'INVERSA $\phi^{-1} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ SONO ARMONICHE SU A' (SE C^2).

[SVOLG. (a) DATO CHE u, v SONO C^2, VALE CHE (SU A)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x} u_x \overset{\text{HYP}}{=} \frac{\partial}{\partial x} v_y \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \overset{\text{SCHWARZ}}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y} v_x \overset{\text{HYP}}{=} -\frac{\partial}{\partial y} u_y \equiv -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

E LO STESSO PER v.

(b) SE $Du \neq 0$ (SU A), ALLORA $J = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ \underset{-u_y}{v_x} & \underset{u_x}{v_y} \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 \equiv \|Du\|_2^2 \neq 0$ (SU A)

E VALE L'INV. LOC. (SU TUTTO A) ✓

VICEVERSA, SE ESISTE $\phi^{-1} : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $: A \to A'$ $\forall$ C^1, ALLORA $\forall (u,v) \in A'$ SI HA

$$u = u(x(u,v), y(u,v))$$

E COSÌ, $\forall v$ FISSO E DERIVANDO NELLA u $\left(u \mapsto \overset{(x(\cdot),y(\cdot))}{(x(u,v), y(u,v))} \overset{u(\cdot)}{\mapsto} u(\dots\dots) \right)$, $\forall u$ SI HA

$$1 = Du(x(u,v), y(u,v)) \cdot (x_u(u,v), y_u(u,v))$$

DA CUI NECESS. $Du(x(u,v), y(u,v)) \neq 0$ $\forall (u,v) \in A'$. MA ϕ^{-1} È SURIETTIVA, PER CUI

$Du(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in A$. ✓

IN TAL CASO, $\begin{cases} x_u = y_v \\ x_v = -y_u \end{cases}$ (SU A') PERCHÉ, DAL TEOR. D'INV. LOC.,

$$\begin{cases} x_u \overset{\text{TEOR}}{=} \dfrac{1}{J} \cdot v_y \overset{\text{HYP}}{=} \dfrac{1}{J} u_x \overset{\text{TEOR}}{=} y_v \\ x_v \overset{\text{TEOR}}{=} \dfrac{1}{J}(-u_y) \overset{\text{HYP}}{=} \dfrac{1}{J} v_x \overset{\text{TEOR}}{=} -y_u \end{cases} \quad . ✓$$

$\boxed{\text{EXC}}$ (Funzioni armoniche su $\mathbb{R}^2$).
VERIFICARE CHE LA FUNZIONE REGOLARE $u(x,y) = e^x \sin y + \cos x \sinh y + 1$ È ARMONICA SU $\mathbb{R}^2$. $\left(\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \right)$
$\boxtimes$]

$\boxed{\text{EXC}}$ (DINI) SIA $F:]0,\infty[_x \times \mathbb{R}_y \to \mathbb{R}$ $\underline{C^\infty}$ DATA DA $\underline{F(x,y) = y(\log x - 1) - x\cos y + \pi/2}$. DIM. CHE $\underline{F(x,y)=0}$ DEFINISCE UNA CURVA REGOLARE IN UN INTORNO DI $\underline{(1,\frac{\pi}{2})}$ CHE È IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE ~~REGOLARE~~ C^∞ $\underline{x = x(y)}$ E DETERMINARNE LO SVILUPPO DI $\underline{\text{TAYLOR AL } 2^\circ \text{ ORDINE}}$ IN $\frac{\pi}{2}$.

CHE DIRE DI $\underline{(1,\pi)}$?

[$\underline{\text{SVOLG.}}$ ANZITUTTO, $\underline{F(1,\frac{\pi}{2}) = 0}$ MENTRE $F(1,\pi) = 1 - \pi/2 \underline{\neq 0}$: DINI SI APPLICA, BEN CHE VADA, SOLO PER $(1,\pi/2)$. INOLTRE

$$\begin{cases} F_x(x,y) = \dfrac{y}{x} - \cos y \\ F_y(x,y) = \log x - 1 + x\sin y \end{cases} \quad (\forall x>0, \forall y \in \mathbb{R}), \quad \text{DA CUI}$$

$F_x(1,\pi/2) = \pi/2 \neq 0$ MENTRE $F_y(1,\pi/2) = 0$; TRA L'ALTRO, $F_{yy}(x,y) = x\cos y$ HA A SUA VOLTA $F_{yy}(1,\pi/2) = 0$. PERTANTO, DAL TEOR. DI DINI, ESISTONO UN INT. APERTO $I = I_x$ DI 1 E UN INT. APERTO $J = J_y$ DI $\pi/2$ TALI CHE ESISTE (UNICA) FUNZIONE $x \in C^\infty(J;I)$ CON

$\underline{x(\frac{\pi}{2}) = 1}$, $\underline{F(x(y),y) = 0}$ $\forall y \in J$, $\underline{F_x(x(y),y) \neq 0}$ $\forall y \in J$ E, $\forall y \in J$,

$$x'(y) = -\frac{F_y(x(y),y)}{F_x(x(y),y)} \quad \text{E} \quad x''(y) = -\left.\frac{F_{yy}F_x^2 + F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y}{F_x^3}\right|_{(x,y)=(x(y),y)}.$$

ALLORA, LO SVILUPPO RICHIESTO (IN J) È, $\forall y \in J$,

$$x(y) = \underbrace{x(\tfrac{\pi}{2})}_{=1} + \underbrace{x'(\tfrac{\pi}{2})}_{=0!}(y - \tfrac{\pi}{2}) + \underbrace{x''(\tfrac{\pi}{2})}_{=0!}\frac{(y-\pi/2)^2}{2} + o((y-\pi/2)^2)$$

$$= 1 + o_{y\to\pi/2}(y^2). \quad \blacksquare \,]$$

---

② $\underline{\text{MOLTIPL. LAGRANGE \& DISUG. YOUNG.}}$ (BREVE)

PER OGNI $a,b \in \mathbb{R}$, $\underline{ab \lesssim a^2 + b^2}$ DOVE "$\lesssim$" STA PER "A MENO DI COSTANTE" (UNIVERSALE) : INFATTI,

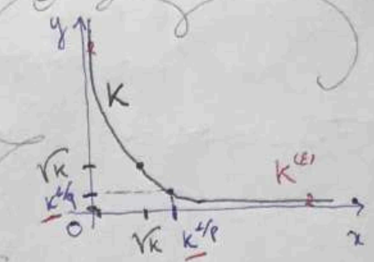
$ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ (PERCHÉ $(a-b)^2 \geq 0$). QUESTO VALE (MOLTO) PIÙ IN GENERALE PER DELLE "COMBINAZ. $\underline{\underline{\text{CONVESSE}}}$" DIVERSE DA "$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$" $(p=q=2)$.

$\boxed{\text{DIS. YOUNG}}$ SIANO $p,q \in]1,\infty[$ CON $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $\left(q = \frac{p}{p-1}, \text{ OSSIA } \frac{p}{q} = p-1\right)$. ALLORA, PER OGNI $a,b \geq 0$ (>0), $ab \lesssim a^p + b^q$: INFATTI, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

[$\underline{\text{DIM}}$. PER $\underline{\underline{\text{CONCAVITÀ}}}$ DEL $\log$, $\forall \alpha,\beta > 0$, $\underbrace{\frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta}_{\equiv \log(\alpha^{1/p}\cdot\beta^{1/q})} \leq \log\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right)$, E COSÌ, $\forall a,b > 0$, BASTA PRENDERE $\alpha := a^p$ E $\beta := b^q$. $\blacksquare$]

EXC. RICAVARE LA DISUG. DI YOUNG APPLICANDO IL METODO DEI MOLTIPL. DI LAGRANGE PER VERIFICARE CHE, $\forall\, k>0$, LA FUNZIONE REGOLARE (C^∞) $f(x,y) \doteq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, SODDISFA $f \geq k$ SUL RAMO D'IPERBOLE $K := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\, y>0,\, xy=k\}$. [$p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, FISSATI] (3)

[SVOLG. K NON È COMPATTO (NON È LIMITATO) E, IN EFFETTI, f È ILLIMITATA SU K (COME SU $\mathbb{R}^2$): $f(x,y)\uparrow\infty$ SIA PER $x\uparrow\infty$ ($y\downarrow 0$) SIA PER $x\downarrow 0$ ($y\uparrow\infty$). TUTTAVIA, $\forall\,\varepsilon>0$, $K^{(\varepsilon)} := \{(x,y)\in K \mid x>\varepsilon, y>\varepsilon\}$ È UN COMPATTO E $f|_{K^{(\varepsilon)}}$ HA (PER WEIERSTRASS) VALORI MAX E MIN: POSSIAMO APPLICARE LAGRANGE.



L'IDEA È CHE f AVRÀ UN VAL. MIN. CHE NON DIPENDA DA ε E CHE QUINDI SIA IL VAL. MINIMO DI f SU TUTTO K (MENTRE I VAL. MAX TENDERANNO A ∞). LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} - \lambda(xy-k), \quad xy>0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{p-1} - \lambda y = 0 \\ y^{q-1} - \lambda x = 0 \\ xy = k \\ (x>0,\ y>0) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{x^{p-1}}{y} = \lambda = \frac{y^{q-1}}{x} \quad \rightarrow \quad x^p = y^q$$

COSÌ $y = x^{p/q} \equiv x^{p-1}$, DA CUI

$$k = xy = x^p \quad \text{E COSÌ} \quad \begin{cases} x = \sqrt[p]{k} = k^{1/p} \\ y = k^{1/q} \end{cases}$$

CHE DEVE ESSERE IL PUNTO DI MINIMO.

DUNQUE, $\forall\, x,y>0$ CON $xy=k$, [$(x,y)\in K$]

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \equiv f(x,y) \geq \underset{\text{MIN. SU } K}{f(k^{1/p},k^{1/q})} = \underset{\underset{xy}{\parallel}}{k} \quad \left(\tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1\right).$$

(PER OTTENERE YOUNG BASTA PRENDERE, $\forall\, a,b\geq 0$, $x\doteq a$ e $y\doteq b$ ($\rightarrow k=ab$).) ■]

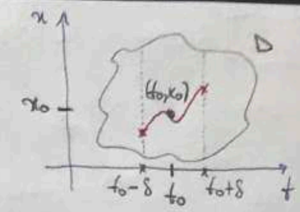
(3) PROLUNGABILITÀ DELLA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA DI CAUCHY (EQUAZ. DIFF.).

THM (CAUCHY) [ESIST. ED UNIC. LOCALI] SIA $D\subset\mathbb{R}^2_{(t,x)}$ UN APERTO (NON VUOTO) E SIA $f: D\to\mathbb{R}$ CONTINUA CON DERIVATA PARZIALE f_x RISPETTO ALLA x CONTINUA [ES. $f\in C^1(D;\mathbb{R})$]. ALLORA, PER OGNI PUNTO $(t_0,x_0)\in D$, PASSA UNA ED UNA SOLA CURVA INTEGRALE DELL'EQUAZ. DEL 1° ORDINE $x' = f(t,x)$: PIÙ PRECISAMENTE, ESISTE $\delta>0$ (dipendente da f e da (t_0,x_0)) tale che sull'intervallo $]t_0-\delta, t_0+\delta[$ sia definita

Una soluzione $x(\cdot)$ del problema di Cauchy (ai valori iniziali)

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in \,]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$$

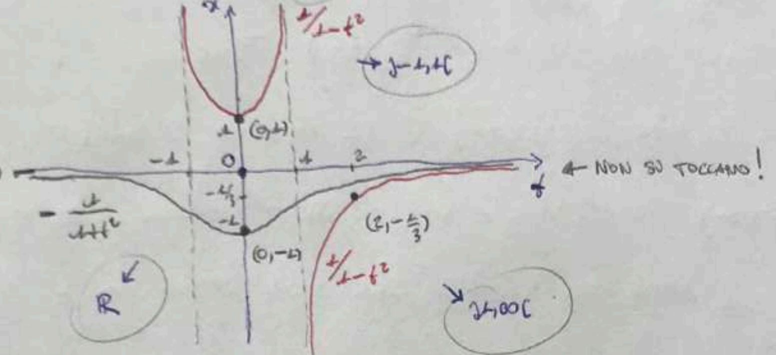
e tale soluzione è unica.



COR. Nelle notaz. e nelle ipotesi del THM, due curve integrali della stessa equazione $x' = f(t,x)$ non possono toccarsi in alcun punto di D.

OSS. Dipendenza di δ, ossia dell'intervallo "massimale" di definizione delle curve integrali: per

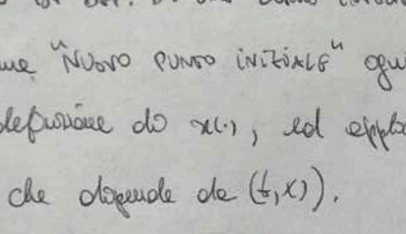
- $x' = 2t x^2$,



Come stabilire quando un intervallo di def. di una curva integrale ne è l'int. massimale? L'idea è che sia possibile assumere come "nuovo punto iniziale" ogni punto $(t,x) := (t,x(t)) \in D$, con t appartenente all'intervallo di definizione di $x(\cdot)$, ed applicare il THM di Cauchy per un prolungamento locale (con nuovo δ che dipende da (t,x)).

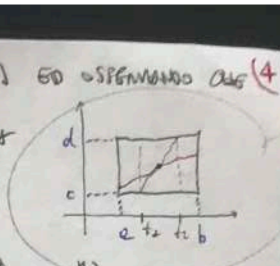
THM (Prolungabilità). Nelle notaz. e nelle ipotesi del THM, per ogni rettangolo compatto R (chiuso e limitato) con $(t_0,x_0) \in R \subset D$, la soluzione locale $x(\cdot)$ di $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ può essere prolungata/estesa ad un opportuno int. chiuso $[t_1,t_2] \supset \cancel{]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[}$ $(\varepsilon \geq 0)$ in modo che i punti $(t_1,x(t_1))$, $(t_2,x(t_2))$ appartengano alla frontiera ∂R di R.

$\Rightarrow$ Possiamo prolungare "oltre" $[t_1,t_2]$ quando $(t_1,x(t_1))$, $(t_2,x(t_2))$ giacciono sui lati sinistro e destro di R rispettivamente (di altezza opportuna), ossia quando $x(\cdot)$ "esce" dai lati SX/DX di R:



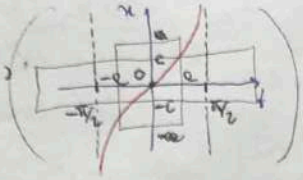
COR. Se esistono $a<b$ e $c<d$ in $\mathbb{R}$ con $(t_0,x_0) \in [a,b]\times[c,d] \subset D$ e se si riesce a dim. una "stima a priori" del tipo $c < x(\cdot) < d$ indipendente da $[a,b]$, allora la soluz. $x(\cdot)$ è "globale" nel senso che è definita su tutto $[a,b]$ (ed oltre).

[Dim. Basta applicare il thm prec. partendo dal rett. (compatto) $[a,b]\times[c,d]$ ed osservando che $x(\cdot)$, non potendo "uscire" da $x=c$ o da $x=d$, deve uscire da $t=a$ e da $t=b$. ■] 4



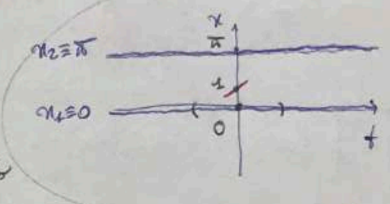
OSS. R dev'essere limitato (nelle ipotesi del thm): per $\begin{cases} x'=1+x^2 \\ x(0)=0 \end{cases}$ (equaz. "autonoma"), osserva

$x(t)=\tan t$, $t\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,



la soluzione esce da ogni rettangolo $|t|\le a$, $|x|\le c$: o esiste per ogni $|t|\le a$, o $|x(\cdot)|>c$ su un sottointervallo (proprio).

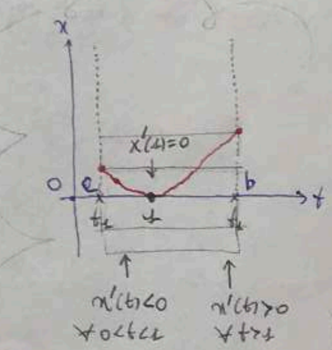
ES. La soluz. di $\begin{cases} x'=x\sin x \\ x(0)=1 \end{cases}$ ← 1 ok esiste su tutto $\mathbb{R}$. Infatti $x_1\equiv 0$ (<1) risolve $\begin{cases} x'=x\sin x \\ x(0)=0 \end{cases}$, mentre $x_2\equiv\pi$ (>1) risolve $\begin{cases} x'=x\sin x \\ x(0)=\pi \end{cases}$, da cui necessariamente (thm. Cauchy) $0<x(\cdot)<\pi$ su ogni intervallo contenente $t_0=0$, ad esempio $[-a,a]$ $\forall a>0$. Allora basta applicare il thm di prolungamento al rett. $[-a,a]\times[0,\pi]$. ✓



EXC (dall'esame del 25/6/19). La soluz. di $\begin{cases} x'=\dfrac{t-1}{t(1+x^2)} & (t\neq 0) \\ x(1)=0 \end{cases}$ ↙ 1 ok esiste su tutto $]0,\infty[$.

[Svolg. Basta mostrare che $x(\cdot)$ non può avere asintoti verticali: in tal caso, infatti, $\forall t_1>0$ ($t_1\neq 1$, per il quale è ok), esiste finito il limite $\lim_{t\to t_1} x(t) \overset{\text{cont.}}{\equiv} x(t_1)\ (\in\mathbb{R})$; e così, per ogni $0<a<1<b<\infty$, applico il thm di prolung. prendendo il rettangolo $R:=[a,b]\times[-(x(a)\wedge x(b)),\, x(a)\wedge x(b)]$ e

$R:=[a,b]\times[-(x(a)\vee x(b)),\, x(a)\vee x(b)]$ per avere le prolung. da ambo i lati (altezze abb. grandi). ✓ Ebbene $x(\cdot)$ non ha asintoti vert., perché se fosse che $\exists\, t_1>0$ ($t_1\neq 1$) tale che $\lim_{t\to t_1}|x(t)|=\infty$, allora $\lim_{t\to t_1} x'(t) = \dfrac{t_1-1}{t_1(1+\infty^2)}=0$, che è assurdo. ■]



EXC (fatto noto) La soluz. dell'equaz. lineare $\begin{cases} x'=a(t)x+b(t) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$, dove $a(\cdot), b(\cdot)$ sono definite e continue su un int. aperto (non vuoto) $I\subset\mathbb{R}$, è definita su tutto I (anche se I è illimitato).

$\boxed{\text{EXC}}$ SIANO $p(\cdot), g(\cdot)$ FUNZIONI DEFINITE E CONTINUE SU $]0,\infty[$ TALI CHE $p(\cdot) \geq c > 0$ (c OPPORTUNO) E $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$. MOSTRARE CHE OGNI SOLUZ. $x(\cdot)$ DI $x' + p(t)x = g(t)$ (DEF. SU $]0,\infty[$) VERIFICA $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

[SVOLG. (PARZIALE) $\forall t>0$, POSTO $P(t) := \int_0^t p(s)ds$, SI HA $x(t) = \dfrac{x_0 + \int_0^t e^{P(s)} g(s) ds}{e^{P(t)}}$, DOVE $P(t) \geq ct > 0$

E, QUINDI, $e^{P(t)} \geq e^{ct}$. ANCHE SE IL NUMERATORE FOSSE ILLIMITATO (SE è limitato, $x(t) \to \frac{L}{\infty} = 0$ ✓),

PER DE L'HÔPITAL ("$\frac{\infty}{\infty}$")

$$\lim_{t\to\infty} x(t) \overset{\text{HÔPITAL}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\cancel{e^{P(t)}} g(t)}{\underbrace{P'(t)}_{p(t)} \cancel{e^{P(t)}}} \;\; \uparrow >0 \;(\neq 0) \;\; = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{p(t)} \overset{\text{ESISTE!}}{=} 0,$$

IN QUANTO $0 \leq \frac{g(t)}{p(t)} \leq \frac{g(t)}{c} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, SE $g(\cdot) \geq 0$. PER $g(\cdot)$ NON NON-NEGATIVA ? ... ▣]

(p(t) potrebbe non ammettere limite per $t\to\infty$, ecc.)

[EASY: DIAMO PER OK IL RISULTATO CON $g(\cdot) \geq 0$ (lo abbiamo dimostrato), E SIA ORA g DI SEGNO QUALSIASI (pur sempre continua su $]0,\infty[$ con $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$). ALLORA OGNI SOLUZ. $\tilde{x}(\cdot)$ DI $\tilde{x}' + p(t)\tilde{x} = |g(t)|$ RIENTRA NEL CASO DIMOSTRATO E, DUNQUE, $\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0$ ($|g(\cdot)|$ RESTA CONT. SU $]0,\infty[$, CON $\lim_{t\to\infty} |g(t)| \overset{\text{CONT}}{=} |\lim_{t\to\infty} g(t)| \overset{\text{IPOTESI}}{=} 0$ E $|g(\cdot)| \geq 0$). MA, ADESSO,

$$|x(t)| \equiv \left| \frac{x_0 + \int_0^t e^{P(s)} g(s) ds}{e^{P(s)}} \right| \leq \frac{|x_0| + \int_0^t e^{P(s)} |g(s)| ds}{e^{P(s)}} = \tilde{x}(t)$$

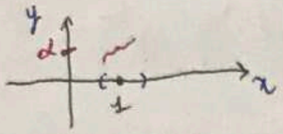
DOVE $\tilde{x}(\cdot)$ È QUELLA TALE CHE $\tilde{x}(0) = |x_0|$: COSÌ $\exists \lim_{t\to\infty} |x(t)| \leq \lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0$. ▣]

ANALISI 2 - TUTORAGGIO

LINEARE 1° ORDINE ($\Rightarrow$ "$\exists$ soluz. massimale") 10 LUGLIO 2020 14

EXC
$$\begin{cases} \boxed{y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{e^{1/x}}{x}}, & x>0 \\ y(1) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\rightarrow$ α TALE CHE $\exists \lim_{x \uparrow \infty} y(x) \in \mathbb{R}$.



SVOLG.

$y' + a(x) y = f(x)$ [a, f continue], $x \in I$ int. aperto,

① $A(x) = \int a(x)\,dx$

② $y(x) = \dfrac{C + \int e^{A(x)} f(x)\,dx}{e^{A(x)}}$

PER NOI, $y' + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y = \underbrace{\frac{e^{1/x}}{x}}_{f(x)}$ $[\, I :=]0,\infty[\,]$

① $A(x) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\log(x) = \log \frac{1}{x}$

$\Rightarrow e^{A(x)} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y(x) = x\left[C + \underbrace{\int \frac{1}{x^2} e^{1/x}\,dx}_{-e^{1/x}} \right] = x\left[C - e^{1/x}\right]$

$y(1) = \alpha \Rightarrow \alpha = y(1) = C - e$, $\boxed{C = \alpha + e}$, quindi

$y(x) \equiv y_\alpha(x) = \underline{x\left[\alpha + e - e^{1/x}\right]}$.

PER $x \uparrow \infty$, $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\left[\leftarrow e^z \overset{z\to 0}{=} 1 + z + \overbrace{\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots}^{o(z)}\right]$

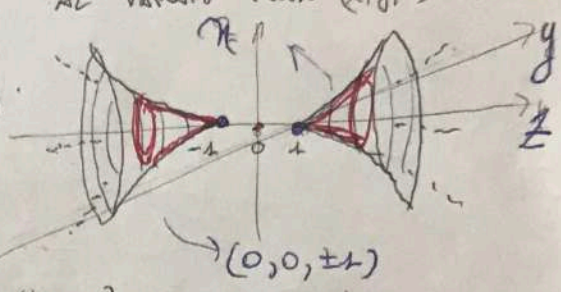
$\Rightarrow$ PER $x \uparrow \infty$, $y(x) = x\left[\alpha + e - 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

OK

QUINDI $\exists \lim_{x\to\infty} y(x) \in \mathbb{R} \iff \alpha+\beta-1=0$, CIOÈ $\alpha = 1-\beta$. ■

$\boxed{\text{EXC}}$ MINIMIZZARE $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ ($\to C^\infty$) AL VARIARE DEGLI (x,y,z) TALI

CHE $g(x,y,z) := \underbrace{z^2 - xy - 1 = 0}_{\text{"VINCOLO"}}$.



SVOLG. $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) \doteq (x^2+y^2+z^2) - \lambda(z^2-xy-1)$

$$(x,y,z,\lambda) \text{ TALI CHE: } \begin{cases} 2x+\lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y = 0 \\ \boxed{2z - 2\lambda z = 0} \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda)x + (2+\lambda)y \equiv (2+\lambda)(x+y) = 0$$

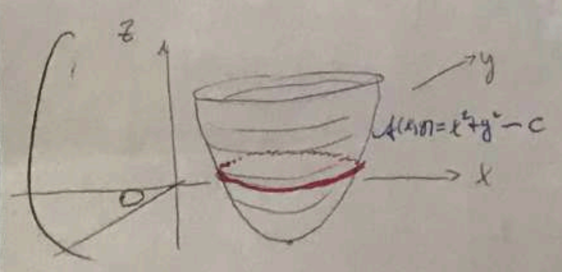
("λ ACCESSORIO")

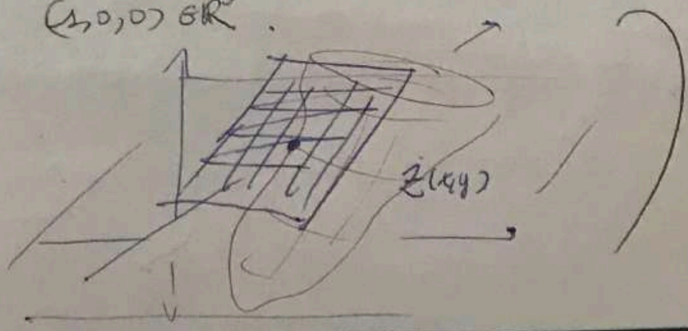
$\boxed{z = \lambda z}$ CASO 1. $\boxed{z=0} \iff xy = -1$ ... $\to \lambda = 2$

(~~"CASO 2"~~: $z=0$ e $\lambda=-2$ NON È POSSIBILE)

CASO 2. $\boxed{z \neq 0}$ $\lambda = 1 \to x = -y$ ... "EASY".

$\boxed{\text{EXC}}$ DIM. CHE L'EQUAZ. $F(x,y,z) = e^z + 2xz + y^2 + y - x^3 = 0$ DEFINISCE IMPLICITAMENTE UNA (ED UNA SOLA) FUNZ. SCALARE $z(x,y)$ DI CLASSE C^∞ SU UN INTORNO APERTO DI $(x_0,y_0) = (1,0)$ CON $z(1,0) = 0$ ("z_0"), A VALORI IN UN INT. APERTO DI $0 \in \mathbb{R}$, E SCRIVERNE L'EQUAZ. DEL PIANO TANGENTE ALLA PROPRIA SUPERFICIE GRAFICO NEL PUNTO $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$.





13

SVOLGO – F è C^∞ su $\mathbb{R}^3$ con $F(1,0,0)=0$ e con

$$\begin{cases} F_x(x,y,z) = -3x^2+2z & \to F_x(1,0,0) = -3 \\ F_y(x,y,z) = 1+2y & \to F_y(1,0,0) = 1 \\ \boxed{F_z(x,y,z) = 2x+e^z} & \to F_z(1,0,0) = 2+1 = 3 \neq 0 \end{cases}$$

DINI

$\Rightarrow$ $\exists$ intorni aperti U di $(1,0)$ in $\mathbb{R}^2$ e V di 0 in $\mathbb{R}$ tali che

esista $z \in C^\infty(U;V)$ con $\boxed{z(1,0)=0}$, $F(x,y,z(x,y))=0$ e

$F_z(x,y,z(x,y)) \neq 0$ $\forall (x,y) \in U$. Inoltre, $\forall (x,y) \in U$,

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} \quad e \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}.$$

$$z_x(1,0) = \frac{3}{3} = 1 \qquad z_y(1,0) = -\frac{1}{3}$$

L'equaz. richiesta è

$$\boxed{z = z(x_0,y_0) + z_x(x_0,y_0)(x-x_0) + z_y(x_0,y_0)(y-y_0)} =$$

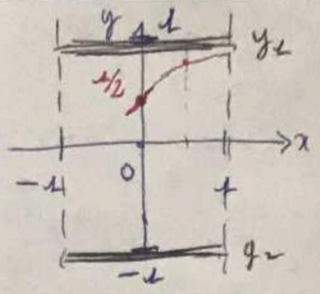
$$= 0 + 1\cdot(x-1) + \left(-\frac{1}{3}\right)(y-0) =$$

$(x_0,y_0)=(1,0)$

$$= x - \frac{y}{3} - 1.$$ ☒

‼ Il concetto di piano tangente ha senso "geometricamente" per $z(\cdot)$ differenziabile (non basta derivabile!). In questo caso è ok, perché z è C^1 (C^∞).

$\boxed{\text{EXC.}}$ $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}, & \boxed{|x|<1} \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$



DIM. CHE $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

(COSA SERVIRÀ: $\forall \boxed{|z|<1}$, $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}\right) = \dfrac{1}{1-z^2}$ ....)

SVOLG. RICORDIAMO CHE:

$\boxed{\dfrac{dy}{dx}} = y' = \boxed{f(y)\,g(x)}$ [f, g regolari ...] , $f \neq 0$, su I

$\Leftrightarrow \dfrac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx$

(come funzioni di x)

$\boxed{\text{THM}}$: "A PARTE" OGNI $y(\cdot) \equiv y_0$ CON $f(y_0) = 0$ (CHE È SOLUZIONE),

È SOLUZIONE OGNI $y(\cdot) \in C^1(I;\mathbb{R})$ TALE CHE

$$F(y(x)) = G(x) + C, \quad x \in I,$$

DOVE $F' = \dfrac{1}{f}$ E $G' = g$.

NEL NOSTRO CASO, $y' = \dfrac{y^2-1}{x^2-1}$ E QUINDI $\begin{cases} f(y) := y^2-1 \\ g(x) := \dfrac{1}{x^2-1} \end{cases}$, $I =]-1,1[$

$\rightarrow$ $y_1 \equiv 1$ E $y_2 \equiv -1$ RISOLVONO, MA NON CI INTERESSANO

($y(0) = \frac{1}{2} \neq \pm 1$); COMUNQUE OGNI ALTRA SOLUZIONE NON

PUÒ TOCCARLE! $\Rightarrow$ $\boxed{|y|<1}$

$\Rightarrow$ ⊙ $F(y) = \int \frac{1}{f(y)}\,dy = \int \frac{1}{y^2-1}\,dy = -\int \frac{dy}{1-y^2}$

$$\overset{|y|<1}{=} -\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

⊙ $G(x) = \int g(x)\,dx = -\int \frac{dx}{1-x^2} \overset{|x|<1}{=} -\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

CERCHIAMO $y(x)$ TALE CHE $F(y(x)) = G(x) +$ costante, cioè

$$\exp\left(\log\frac{1+y(x)}{1-y(x)}\right) = \exp\left(\log\frac{1+x}{1-x} + c\right)$$

$$\boxed{\frac{1+y(x)}{1-y(x)} = K\,\frac{1+x}{1-x}}$$

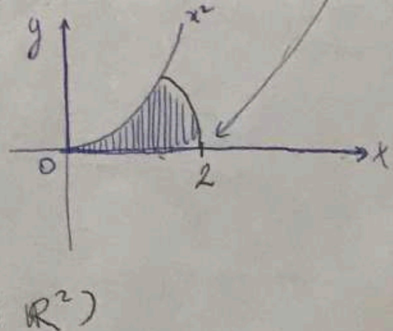
$\to$ SE $y(0)=\frac{1}{2}$, ALLORA $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = K\cdot 1 \iff K=3$.

......

EXC. $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\geq 0,\ 0\leq y\leq x^2,\ x\geq \frac{x^2+y^2}{2}\right\}$ $\left(x=\frac{x^2}{2} \iff x=2\right)$

$\left(\iint_E xy\,dx\,dy\right)$

x e y sono "TROPPO MESCOLATE" PER LAVORARCI BENE!

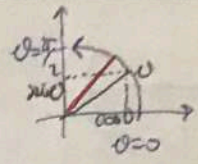


FATTO: il "PASSAGGIO IN COORDINATE POLARI" RAPPRESENTA UN DIFFEOMORFISMO TRA (CERTI APERTI LIMITATI DI $\mathbb{R}^2$)

$E' \doteq \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x>0,\ 0<y<x^2,\ x>\frac{x^2+y^2}{2}\right\}$ $\quad E$

$\tilde{E} \doteq \left\{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \theta\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[,\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}<\rho<2\cos\theta\right\}$ (oss. $\cos\theta>0$!)

Infatti, $\begin{cases} x \doteq \rho\cos\vartheta \\ y \doteq \rho\sin\vartheta \end{cases}$, $\rho > 0$, $\vartheta \in]0, \pi/2[$ (da precisare)



$\Leftrightarrow$ $x > 0$ e $y > 0$. Poi $y < x^2 \Leftrightarrow \rho\sin\vartheta < \rho^2\cos^2\vartheta$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} < \rho$. Inoltre $\dfrac{x^2+y^2}{2} < x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\rho^2}{2} < \rho\cos\vartheta$, $\Leftrightarrow \rho < 2\cos\vartheta$.

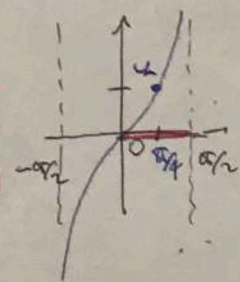
Infine, quando è che $\boxed{\dfrac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} = 2\cos\vartheta}$?

$\Rightarrow 2\tan\vartheta = \dfrac{1}{\cos^2\vartheta} = \sec^2\vartheta = 1 + \tan^2\vartheta$

così $\tan^2\vartheta - 2\tan\vartheta + 1 = 0$

$(\tan\vartheta - 1)^2$

$\Rightarrow$ quando $\tan\vartheta = 1$, ossia $\boxed{\vartheta = \frac{\pi}{4}}$



"ok" stare in $\vartheta \in]0, \pi/4[$.

. . . .

CONTINUITÀ E DIFFERENZIABILITÀ.

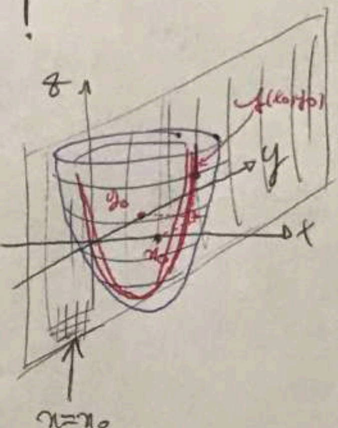
Per una funzione scalare di più variabili l'esistenza delle derivate prime (direzionali) non è di per sé di così grande importanza

Infatti, una funz. derivabile in questo senso potrebbe NON ammettere "geometricamente" il piano tangente al suo grafico e, addirittura, potrebbe NON essere continua.

Perché (?) L'idea è che le operazioni legate al calcolo delle derivate prime si "perdano" la funzione "nel suo insieme"! (localmente)

$$f_x(x_0,y_0) \doteq \lim_{x\to 0} \frac{f(x_0+x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x}$$

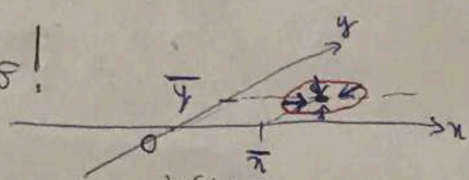
$$f_y(x_0,y_0) \doteq \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y_0+y)-f(x_0,y_0)}{y}$$



La nozione "giusta" è quella di differenziabilità: $f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, A aperto ($\neq\emptyset$), è differenziabile in $(x_0,y_0)\in A$ se è ivi dotata di derivate parziali e risulta

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)-x f_x(x_0,y_0)-y f_y(x_0,y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Quando esiste (unico) $\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} F(x,y)$, allora tale limite è "raggiungibile" da ogni direzione!



In particolare, se f è differ. in (x_0,y_0), allora f è continua in (x_0,y_0) ed inoltre f ammette ogni der. direzionale in (x_0,y_0) e vale la "formula del gradiente":

$\left(e\in\mathbb{R}^2,\ \|e\|=1 \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0) = e\cdot Df(x_0,y_0).$$

prod. scal.

CRITERIO. SE f HA DERIV. PARZIALI IN TUTTO UN INTORNO DI $(x_0,y_0) \in A$ ("$f \in C^1$") E SE QUESTE SONO CONTINUE IN (x_0,y_0), ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0).

$\boxed{\text{EXC.}}$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) \doteq \begin{cases} x \log \dfrac{x^4+3y^4}{x^4+y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{altrimenti. } (f(x,y)=0) \end{cases}$

DIM. CHE f È CONTINUA $\left[\lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y)| = 0 \right]$ MA NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

SVOLG. $0 \leq |f(x,y)| \leq |x| \log 4 \downarrow 0$ PER $(x,y) \to 0$. ✓

$$\left(\frac{x^4+3y^4}{x^4+y^4} = \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^4}}_{\leq 1} + 3\underbrace{\frac{y^4}{x^4+y^4}}_{\leq 1} \leq 1+3 = 4 \right)$$

ORA, DERIVATE PARZIALI (IN $(0,0)$): $\qquad [f(0,0)=0]$

$$\odot \quad f_x(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{f(x,0)}{x}}_{\substack{\| \\ \log 1 = 0}} = 0$$

$$\odot \quad f_y(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\overset{\substack{0 \\ \|}}{\boxed{f(0,y)}}}{y} = 0$$

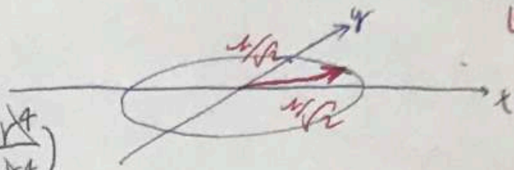
SE f FOSSE DIFFER. IN $(0,0)$, ALLORA OGNI DER. DIREZ. $\dfrac{\partial f}{\partial e}(0,0) = 0$

PER LA FORMULA DEL GRADIENTE $\left[\dfrac{\partial f}{\partial e}(0,0) = e \cdot Df(0,0) = 0 \right]$.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{f(x_0+re_1, y_0+re_2) - f(x_0,y_0)}{r}}$$

$((x_0,y_0)=(0,0))$

SE $e=(e_1,e_2)$ CON $e_1=e_2$ "$=1$",

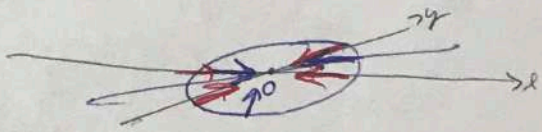


$$\lim_{r\to 0}\frac{f(r,r)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\cancel{r}\log\left(\frac{4\cancel{r^4}}{2\cancel{r^4}}\right)}{\cancel{r}}$$

$$=\log 2\neq 0 .$$

IN EFFETTI, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\equiv\lim_{(x,y)\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\log\frac{x^4+3y^4}{x^4+y^4}$ NON ESISTE!

INFATTI, NELLE DIREZ. $x=0$ e $y=0$,



TALE LIMITE È ZERO.

PERÒ, PER $y=x\neq 0$, $\displaystyle\frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2x^2}}\log 2$

$$=\frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2}}\log 2\neq 0 \quad \boxtimes$$

$$\not\to 0$$

$\boxed{\text{EXC 1}}$ DIRE DOVE LE SEGUENTI FUNZIONI NON SONO CONTINUE E QUALI SONO LE DISCONTINUITÀ ELIMINABILI.

a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=xy\log(xy)$

c) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

d) $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}$

$\boxed{\text{EXC 2}}$ DIRE QUALI FUNZ. SONO DIFFERENZ. IN 0.

a) $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & x>0\\ x+ye^{-x^2}, & x\leq 0\end{cases}$

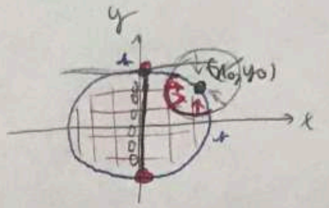
b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = [\arctan(y+1)]^{x+1}$ (d) $f(x,y) = \log_{y+1}(x+1)$

$$\left[\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad \longrightarrow \quad \log_{y+1}(x+1) = \frac{\log(x+1)}{\log(y+1)} \,. \right]$$

$[a,b>0]$

"SVOLGE" (c) DI 1 $\quad f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$



DOMINIO: $x^2+y^2<1$

I PUNTI $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ CON $\boxed{x_0^2+y_0^2=1}$ SONO "DISCONT. ELIMINABILI",

E COSÌ? $\quad \exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \in \mathbb{R}$?

SE ESISTE, "POSSIAMO CALCOLARLO AVVICINANDOCI IN QUALSIASI MODO" $\forall\theta$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{x_0+\rho\cos\theta}{\sqrt{1-\underbrace{[(x_0+\rho\cos\theta)^2+(y_0+\rho\sin\theta)^2]}_{\boxed{x_0^2}+2\rho x_0\cos\theta+\boxed{y_0^2}+2\rho y_0\sin\theta+\rho^2}}}$$

$\boxed{x_0^2}+\boxed{y_0^2} \to 1$

$$\begin{cases} x = x_0+\rho\cos\theta \\ y = y_0+\rho\sin\theta \end{cases}$$

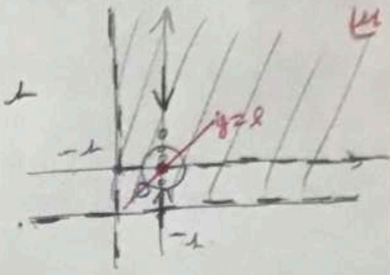
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{x_0+\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2+2\rho[x_0\cos\theta+y_0\sin\theta]}}$$

VALE $+\infty$ PER OGNI $x_0\neq 0$.

COSA DIRE DI $(0,\pm 1)$? COMUNQUE NON ELIMINABILI: ESERCIZIO! :)

41

d i 2 $\quad f(x,y) = \dfrac{\log(x+1)}{\log(y+1)}$, $y \neq 0$, $x,y > -1$



f NON È DIFF. IN $(0,0)$ PERCHÉ NON È CONTINUA IN $(0,0)$ [OSS. $f(0,0)$ "$=$" $\frac{0}{0}$ NON DEFINITA!];

NON HA DISCONT. ELIMINABILE, ~~cioè~~ PERCHÉ $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)$.

INFATTI, $\underset{(y\neq 0)}{f(0,y) = 0}$ MENTRE $f(x,x) = 1$. $\square$

ANALISI 2 - TUTORING

11. 1. 2021

I EQUAZ. DIFF. LINEARI (NON OMOGENEE). FOCUS: 1° ORDINE.

II INTEGRAZIONE MULTIPLA. FOCUS: CAMBIO DI VARIABILI E "DOMINI".

I EQ. 1° ORDINE.
$$\begin{cases} y'(x) + \underset{\text{COEFFICIENTE}}{a(x)}\, y(x) = \underset{\text{SORGENTE}}{f(x)}, & x \in \underset{\text{INTORNO APERTO DI } x_0}{I(x_0)}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a(\cdot), f(\cdot) : I(x_0) \to \mathbb{R}$ SONO CONTINUE

$$\to \quad y(x) = e^{-A(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{A(t)}\, dt \right\}, \quad \text{DOVE}$$

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds .$$

["INTEGRALE GENERALE DELLA OMOGENEA" ["$f \equiv 0$"] + "SOLUZIONE PARTICOLARE"]

IN GENERALE, SI PUÒ PRENDERE $x_0 \in \mathbb{R}$ QUALSIASI E $I(x_0) = \mathbb{R}$.

EQ. 2° ORDINE (COEFF. COSTANTI).
$$\begin{cases} y''(x) + a y'(x) + b y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \end{cases},$$

$x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ QUALSIASI, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA,

$\to$ $y(x)$ = "INTEGRALE GENERALE DELLA OMOGENEA" ["$f \equiv 0$"] + "SOLUZ. PARTICOLARE".

COMBINAZIONE LINEARE DI DUE SOLUZ. INDIPENDENTI (DELL'OMOGENEA)

$\to$ SOMIGLIANZA

$\to$ VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$\to$ $c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, DOVE

$$z_i''(x) + a z_i'(x) + b z_i(x) = 0, \quad i = 1, 2 .$$

E' DOVE
$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in \ldots \text{(NE BASTA UNO).}$$

COME TROVARE $z_1(\cdot), z_2(\cdot)$: PER MEZZO DELLE RADICI (COMPLESSE) DEL POLINOMIO $\underline{\lambda^2 + a\lambda + b}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. RADICI:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left\{-a \pm \sqrt{\Delta}\right\}, \quad \Delta := a^2 - 4b \ (\in \mathbb{R}).$$

(RISP.)

$\boxed{\Delta > 0}$: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \to z_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $z_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

$\boxed{\Delta = 0}$: $\lambda_1 = \underbrace{\lambda_2}_{=-a/2} \in \mathbb{R} \to z_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}$, $z_2(x) = x e^{-\frac{a}{2}x}$.

$\boxed{\Delta < 0}$: $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$

(RISP.)

$\to z_1(x) = \cos(\beta x) e^{\alpha x}$, $z_2(x) = \sin(\beta x) e^{\alpha x}$.

$\boxed{\text{EX.}}$ RISOLVERE, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $y'''(x) + \alpha y''(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(16.7.'19) $[\, y(\cdot) \equiv y_\alpha(\cdot)\,]$ TROVARE, TRA QUESTE, LE $\bar{y}(\cdot)$ TALI CHE
$$\int_0^\infty \bar{y}(t)\,dt = 0 .$$

<u>SOLUZ.</u> $\boxed{\alpha = 0}$ $y(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c - e^{-x} \to \bar{y}(x) = 1 - e^{-x}$.

$\boxed{\alpha = 1}$ $y(x) = ax + b + (x + 2 + c)e^{-x} \to \bar{y}(x) = (x+2+c)e^{-x} - 3 - c$.

$\boxed{\alpha \notin \{0,1\}}$ $y(x) = ax + b + \frac{1}{\alpha - 1}e^{-x} + \frac{1}{\alpha^2}\left(c - \frac{1}{\alpha - 1}\right)e^{-\alpha x}$

$\to \underline{(\alpha > 0)}$ $\bar{y}(x) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(e^{-x} - 1\right) + \frac{1}{\alpha^2}\left(c - \frac{1}{\alpha - 1}\right)\left(e^{-\alpha x} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

$c = 1/\alpha - 1$ ($\alpha < 0 \ldots ?$)

SVOLGIMENTO - (NON L'UNICO POSSIBILE) PONIAMO $z(x) := y''(x)$, COSICCHÉ L'EQUAZ. DIVENTA

$$z'(x) + \alpha z(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

SAPPIAMO CHE

$$z(x) = e^{-\alpha x} \left\{ C + \int_0^x e^{(\alpha-1)t} dt \right\}.$$

$\boxed{\alpha = 0}$ EQUAZ: $z'(x) = e^{-x}$. FORMULA: $z(x) = C + \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x}$

$$= C + 1 - e^{-x}$$

$$\equiv a - e^{-x}$$

MA ORA $a - e^{-x} \equiv z(x) = y''(x)$. QUINDI:

$y'(x) = ax + b + e^{-x}$ $\quad \left[\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x} \right]$.

$\rightarrow y(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + \boxed{c - e^{-x}}$. ✓

PER L'INTEGRABILITÀ: $a = b = 0$, E c TALE CHE $\boxed{\int_0^\infty e^{-x} dx} = c$.

$\left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{\text{"}x=\infty\text{"}} = 1$

$\rightarrow c = 1$ E $\bar{y}(x) = 1 - e^{-x}$. ✓

$\boxed{\alpha = 1}$ $z(x) = e^{-x}\left(c + x\right) \equiv y''(x)$. PER LA PRIMITIVA DI

xe^{-x}, OSSERVIAMO CHE, $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $(N = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\frac{d}{dx}(x+N) \cdot e^{-x} = -(x+N-1)e^{-x}.$$

IN PARTICOLARE, $\frac{d}{dx}(x+1) \cdot e^{-x} = -xe^{-x}$, CIOÈ

$$xe^{-x} = \frac{d}{dx}\left[-(x+1)e^{-x}\right].$$

$$\rightarrow \quad y'(x) = -ce^{-x} - (x+1)e^{-x} + a$$

$$\rightarrow \quad y(x) = \underbrace{ce^{-x}} + ax + \underbrace{b} + \underbrace{(x+2)e^{-x}}. \quad \checkmark$$

Ok per integrabilità!...

$\boxed{\alpha \neq 0,1}$ $$z(x) = e^{-\alpha x}\left\{C + \frac{1}{\alpha-1}\underbrace{\left[e^{(\alpha-1)t}\right]_{t=0}^{t=x}}_{e^{(\alpha-1)x}-1}\right\}$$

$$= \ldots\ldots$$

(COME SU).

$\boxed{\text{II}}$ TRASFORMAZIONE DELLE AREE INFINITESIME:

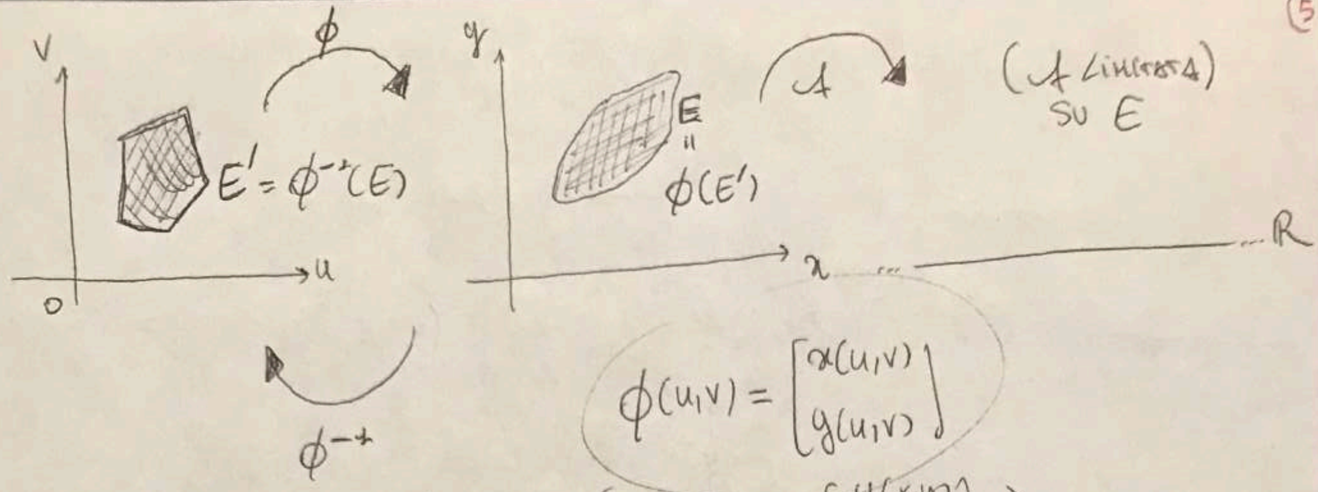
$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv. \quad \text{cioè,}$$

FORMULA, ad es. PER $n=2$ (E PER DOMINI LIMITATI):

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right| dudv$$

$$\equiv \iint_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(u,v)) \cdot |\underbrace{\det J_\phi(u,v)}_{\text{jacobiano di } \phi \text{ (calcolato in } (u,v))}| dudv$$

DOVE



(f LIMITATA SU E)

$$\phi(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$$

$$\left(\phi^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} \right)$$

[ϕ DIFFEOMORFISMO C^1]
(DA E' A/IN E)

E, QUINDI,

$$|\det J_\phi(u,v)| \equiv \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| = \left| \begin{matrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{matrix} \right| .$$

(>0)

$\boxed{\text{EX.}}$ POSTO $E \doteq \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{2}(x-y)^2 + (x+y) - \sqrt{2} \leq 0 \}$,
(15.9.2020)

CALCOLARE $\iint_E (x+y)\,dxdy$.

COMPARE IL DOPPIO PRODOTTO xy!

SVOLGIMENTO (fino al diffeomorfismo).

NON SI APPLICA "BENE" FUBINI — TONELLI ... È "NATURALE", IN QUESTO SENSO (NON AVERE PROBLEMI DI DOPPIO PRODOTTO), PROVARE CON IL DIFFEO. $\phi(u,v)$ (C^∞) TALE CHE

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \qquad \phi^{-1}(x,y) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \begin{matrix} \to u \\ \to v, \end{matrix} \quad \text{CIOÈ } (*)$$

$$\phi(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow x(u,v) \\ \longrightarrow y(u,v) \end{matrix}$$

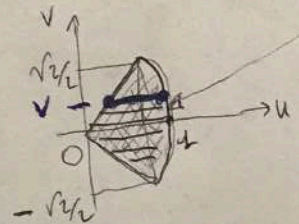
Infatti,

$$E' := \phi^{-1}(E) \overset{def}{=} \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \phi(u,v)\in E\}$$

$$= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{u+v\geq 0}_{v\geq -u},\ \underbrace{u-v\geq 0}_{u\geq v},\ \underbrace{\sqrt{2}v^2+u-\sqrt{2}\leq 0}_{u+\sqrt{2}(v^2-1)\leq 0 \Rightarrow u\leq\sqrt{2}(1-v^2)}\}$$

$$⊛ \left[\ \phi(\phi^{-1}(x,y)) \overset{def}{=} \phi(x+y,\ x-y) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{2} \\ \frac{2y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.\ \right]$$

$$= \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid -u\leq v\leq u\leq \sqrt{2}(1-v^2)\}.$$



Adesso tutto è ok perché possiamo integrare $\underbrace{\ }_{\text{per "fette ordinate"}}$, cioè

$$\forall v\in\,]-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2[\,,\quad u\in\,]v,\ \sqrt{2}(1-v^2)[\,.$$ ✓

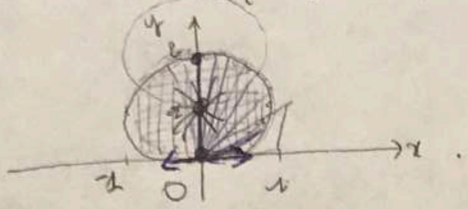
$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}\underbrace{\left[\int_{v}^{\sqrt{2}(1-v^2)} u\,du\right]}_{\int\cancel{x}du \ \ \cancel{-v}\ \ \ \ =\ g(v)} dv.$$

(Ultimo exc.)

EX. (1.9.2020) Posto $E \doteq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{x^2+y^2-2y \le 0}, \ 0 \le z \le x^2+y^2\}$, 17

CALCOLARE $\iiint_E \frac{|x| y}{\sqrt{z}} \, dx\,dy\,dz =: I$.

SVOLGIMENTO. DEFINIAMO $D \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2y \le 0\}$ = "CERCHIO"



ALLORA $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, \ 0 \le z \le x^2+y^2\}$ = "PARABOLOIDE" (LIMITATO)

$$E \quad I = \iint_D \left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{|x| y}{\sqrt{z}} \, dz \right] dx\,dy$$

$$= \iint_D |x| \cdot y \underbrace{\left[\int_0^{x^2+y^2} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right]}_{2[\sqrt{z}]_{z=0}^{z=x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy$$

$$= 2 \iint_D |x| \cdot y \cdot \sqrt{x^2+y^2} \, dx\,dy .$$

← anche la f.z. integranda è "semplice"!

È NATURALE PROVARE CON $\phi(\vartheta, \rho) \doteq \begin{bmatrix} \rho \cos\vartheta \\ \rho \sin\vartheta \end{bmatrix}$, $\rho > 0$,

(COORDINATE POLARI)

CON $(\vartheta, \rho) \in D'$, DOVE

$$D' := \phi^{-1}(D) \equiv \{(\vartheta,\rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(\vartheta,\rho) \in D\}$$

$$= \{(\vartheta,\rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho^2 - 2\rho \sin\vartheta \le 0\}$$

$$\text{"="} \{(\vartheta,\rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \le 2 \sin\vartheta\}$$

MA $D' = \{(\vartheta,\rho) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \vartheta < \pi, \ 0 < \rho < 2\sin\vartheta\}$. (o $\le$)

ANALISI 1 — TUTORING. 18.1.2021

$\boxed{\text{EX.}}$ [1.9.2020]
$$\begin{cases} y''(x) - y(x) = (x+1)e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$
("TANGENTE ORIZZONTALE" (in $x=0$)). RISOLVERLO E [TROVARE $y(x), \forall x \in \mathbb{R}$]

CALCOLARE $y''(1)$.

SVOLG. DALL'EQUAZ., $y''(1) = \left[y(x) + (x+1)e^x\right]_{x=1} = y(1) + 2e$. .

$\boxed{\text{OMOGENEA}}$ $z''(x) - z(x) = 0$. POLINOMIO CARATT.: $\lambda^2 - 1 = 0$, cioè

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \longrightarrow z(x) = c_1 e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 e^{\lambda_2 \cdot x} \equiv c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

$\boxed{\text{SOLUZ. PART.}}$ DELLA FORMA $\bar{y}(x) = (ax^2 + bx + c)e^x = \ldots$
$$= \frac{1}{4}x(x+1)e^x$$

[QUA POTREBBE ESSER PRESO $c \in \mathbb{R}$ QUALSIASI: NOI SCEGLIAMO $c = 0$.]

Si ottiene $\bar{y}''(x) = [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c]e^x$, ecc. ... ...

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{INT. GENERALE}}$ $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4}x(x+1)e^x$.

DETERMINIAMO c_1 E c_2: Si TROVA CHE $y(0) = y'(0) = 0$ EQUIVALE

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè } (\ldots) \quad -c_1 = c_2 = \frac{1}{8}, \text{ cioè}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{e^x}{8} + \frac{e^{-x}}{8} + \frac{1}{4}x(x+1)e^x}. \quad \text{DUNQUE,}$$

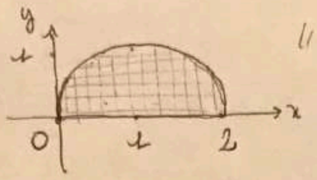
$$y''(1) = y(1) + 2e = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2\right)e + \frac{1}{8e} = \frac{19e}{8} + \frac{1}{8e}. \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{EX.}}$ POSTO $E \doteq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2-2x\leq 0\}$,

[16.7.2020] CALCOLARE

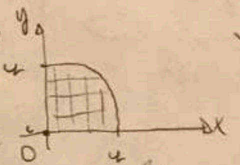
$$\iint_E \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}dx\,dy .$$

SVOLGIM. ANZITUTTO, "$E =$



" (SEMI-CERCHIO). IL PUNTO È CHE LA FUNZIONE $f(x,y) \doteq \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ (LIMITATA ⊛) $\cancel{\leq \max_{\text{int}(E)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ VADA MEGLIO SPECIFICATA SU E.

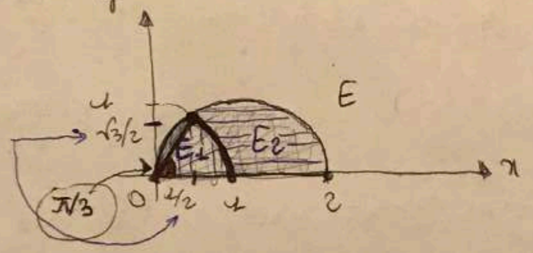
VISTO CHE $1 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \iff x^2+y^2\leq 1$ (



), ($\frac{1}{4}$ CERCHIO)

È NATURALE VEDERE $E = E_1 \dot{\cup} E_2$, DOVE

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \end{cases} \quad [x,y>0]$$



CON ⊛
$$\begin{cases} E_1 \doteq \{(x,y)\in E \mid x^2+y^2\leq 1\} \to f(x,y)\equiv 1 \quad \forall (x,y)\in E_1 \\ E_2 \doteq \{(x,y)\in E \mid x^2+y^2> 1\} \to f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y)\in E_2 \end{cases}$$

ALLORA, PASSANDO A COORDINATE POLARI:

$$E_2' \doteq \{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid \rho>0,\ (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\in E_2\}$$

$$\equiv \{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid \rho>0,\ 0\leq\theta\leq\pi/3,\ \overbrace{\rho^2-2\rho\cos\theta\leq 0}^{\rho^2\geq 1}\}$$

$$= \{(\theta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq\theta\leq\pi/3,\ 1\leq\rho\leq 2\cos\theta\};$$ ✓

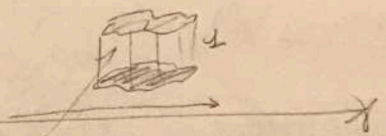
MENTRE,

$$E_1' \doteq \{(\vartheta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid \rho>0,\ (\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta)\in E_1\}$$

$$= \{(\vartheta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le\vartheta\le \pi/3,\ 0\le\rho\le 1\} \ \cup$$

$$\cup\ \{(\vartheta,\rho)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi/3\le\vartheta\le \pi/2,\ 0<\rho\le 2\cos\vartheta\}.$$

... ☒



$\boxed{\text{EX.}}$ CALCOLARE IL "VOLUME" DI $\left[\mathrm{Vol}(E)\doteq \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz.\right]$

[22.6.2015]

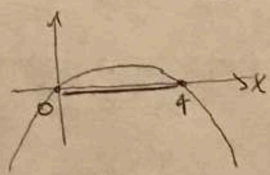
$$E \doteq \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-4x+z^2\le 0,\ |y|\le 2x^2+z^2\}.$$

SVOLG. [Fubini-Tonelli] ANZITUTTO,

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 4,\ z^2\le 4x-x^2,\ |y|\le 2x^2+z^2\}.$$

INFATTI, $\supseteq$ È EVIDENTE. RESTA $\subseteq$: $\forall (x,y,z)\in E$,

$0\le z^2\le 4x-x^2=(4-x)x$



$\Rightarrow 0\le x\le 4.$

(OSS. E È LIMITATO!) APPLICHIAMO F.-T.:

$$\mathrm{Vol}(E)\doteq \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^4 \left\{ \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \left[2\int_{\cancel{-(2x^2+z^2)}\ 0}^{2x^2+z^2} 1\,dy \right] dz \right\} dx$$

FUNZIONE PARI (NELLA y)

$$= 2\int_0^4 \left\{ 2\int_{\not{-\sqrt{4x-x^2}}\ 0}^{\sqrt{4x-x^2}} \underbrace{(2x^2+z^2)}_{\text{FUNZIONE PARI (NELLA } z)}\,dz \right\} dx$$

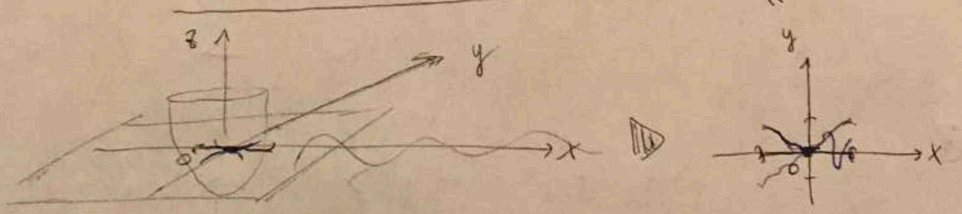
$$= \dots$$

$\boxed{\text{EX.}}$ SIA $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ DEFINITA PONENDO, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,

[1.9.2020]

$$F(x,y) \doteq x^2 - 3y + e^{xy} - 1.$$

[DUNQUE, $F(0,0) = 0$.] VERIFICARE CHE, IN UN INTORNO DI $x_0 = 0$, L'INSIEME DEGLI ZERI DI F È GRAFICO DI UNA FUNZIONE (IMPLICITA) $y(\cdot)$ DI CLASSE C^∞ E CHE x_0 NE È UN PUNTO STAZIONARIO. DI CHE NATURA È?



SVOLG. $\begin{cases} F_x(x,y) = 2x + ye^{xy} \\ F_y(x,y) = -3 + xe^{xy} \end{cases}$ E COSÌ, MENTRE $F_x(0,0)=0$,

SI HA $F_y(0,0) \doteq -3 \neq 0 \overset{\text{(DINI)}}{\Longrightarrow}$ ESISTONO INTORNI (APERTI) I_x, J_y DI 0 TALI CHE, $\forall x \in I$, $\exists!\ y \doteq y(x) \in J$ TALE PER CUI

$$F(x,y(x)) = 0 \quad \text{E} \quad F_y(x,y(x)) \neq 0$$

$\left(\Rightarrow y(0) = 0 \right)$ ED INOLTRE TALE FUNZIONE [IMPLICITA] $y(\cdot): I \to J$ È

DI CLASSE C^∞ (COME F) E, $\forall x \in I$,

$$y'(x) = -\frac{F_x}{F_y}\bigg|_{(x,y)=(x,y(x))} \quad \text{E} \quad y''(x) = -\frac{F_{xx}(F_y)^2 + F_{yy}(F_x)^2 - 2F_{xy}F_xF_y}{(F_y)^3}\bigg|_{(x,y)=(x,y(x))}.$$

CI INTERESSA LA COPPIA $(x,y) = (0,y(0)) = (0,0)$. MA, INFATTI,

$$y'(0) = -\frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = 0 \,. \quad \checkmark$$

INOLTRE,

$$y''(0) = -\frac{F_{xx}(0,0)}{F_y(0,0)} = \frac{1}{3} F_{xx}(0,0) \,.$$

CALCOLIAMO:

$$F_{xx}(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial x} F_x(x,y) = 2 + y^2 e^{xy} \to F_{xx}(0,0) = 2$$

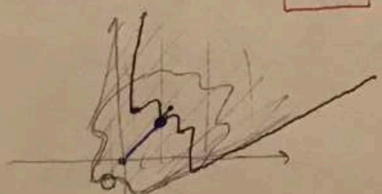
$$\to y''(0) = \frac{2}{3} > 0 \to x_0 = 0 \text{ MINIMO RELATIVO (LOCALE)}. \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{EX.}}$ POSTO $E \doteq \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2+y^2,\ x+y+z \leq 1 \}$, CALCOLARE

[1.9.2020]

$$\min_{(x,y,z)\in E} (\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\geq 0}) \,. \quad \left(d_{st.}((x,y,z),(0,0,0)) \equiv \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} \right)$$

SVOLG. $0 \in E \to \min = 0$. $\boxed{\widetilde{\text{EX.}}}$ $E \doteq \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2,\ x+y+z = 1 \}$.



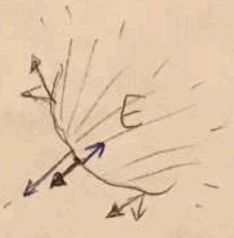
Si tratta di minimizzare $f(x,y,z) \doteq x^2+y^2+z^2$ sul vincolo

$$E = g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0) \quad , \text{ dove}$$

$$g(x,y,z) \doteq x^2+y^2-z \quad \text{e} \quad h(x,y,z) \doteq x+y+z-1$$

$$\left(f, g, h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \right).$$

$\boxed{\text{LAGRANGIANA}}$ ($\nabla f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ "$= \lambda \nabla g + \mu \nabla h$" ortogonale ad E.)



Troviamo i punti stazionari $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ di

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) \doteq f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) - \mu h(x,y,z).$$

$[(x,y,z,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^5]$

Gradiente nullo di $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 0 \\ 2z + \lambda - \mu = 0 \quad (2z = -\lambda + \mu) \\ x^2+y^2-z = x+y+z-1 = 0 \end{cases} \qquad (\lambda - 1)(x-y) = 0$$

$\boxed{\lambda \neq 1}$ per forza ~~(Altrimenti: $\mu = 0 \to z = \frac{1}{3} \to x+y=\frac{1}{2}$, cioè $y = \frac{1}{2} - x \to \frac{1}{2} = x^2 + (\frac{1}{2}-x)^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x + x^2 = 2x^2 - x + \frac{1}{4}$, cioè $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$, cioè $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$: $\Delta = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$ ... ecc)~~

(Altrimenti: $\mu = 0 \to z = -\frac{1}{2} \to x^2+y^2 = z < 0$ assurdo!)

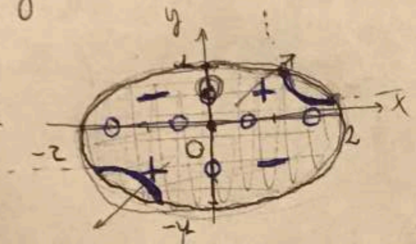
Dunque, $\boxed{x=y}$. $\Rightarrow$ $x = y = \boxed{\frac{1-z}{2} \doteq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{z}}$

↳ $z^2 - 4z + 1 = 0 \iff z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \to x = y = (-1+\sqrt{3})/2$.
$[z_2 < z_1]$

☒ $\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$\boxed{\text{EX.}}$ POSTO $E \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$, TROVARE
[15.9.2020] IL VALORE MAX ED IL VALORE MIN DI

$f(x,y) \doteq xy e^{-xy}$ SU E.

SVOLG. $E =$ 

(ELLISSE COMPATTA)

ANZITUTTO,

$$f(x,y) \begin{cases} >0 \iff xy > 0 & (x,y \text{ CONCORDI}) \\ =0 \iff x = 0 \text{ o } y = 0 \\ <0 \iff xy < 0 & (x,y \text{ DISCORDI}) \end{cases}$$

($\Rightarrow$ OGNI PUNTO (x_0,y_0) CON $x_0 = 0$ o $y_0 = 0$ È NÉ MIN-NÉ MAX!) $[f = 0]$

DOBBIAMO ANALIZZARE f SU $\text{int}(E)$ (APERTO) E SU ∂E (COMPATTO).

$\boxed{\text{int}(E)}$ (GRADIENTE & LAGRANGIANA) $\begin{cases} f_x(x,y) = y e^{-xy}(1-xy) \\ f_y(x,y) = x e^{-xy}(1-xy) \end{cases}$

SI ANNULLA SE, E SOLO SE, $x = y = 0$ OPPURE $xy = 1$.

MA $(0,0)$ NON È ESTREMANTE (NEANCHE LOCALE), DUNQUE

TUTTI E SOLI i PUNTI STAZ. DI $f|_{int(E)}$ SONO GLI (x,y)

IN $int(E)$ CON $\boxed{xy=1}$ $(\Rightarrow x\neq 0, y\neq 0)$, DUNQUE $\boxed{y=\frac{1}{x}}$.

MA $xy=1 \rightarrow f(x,y)=\frac{1}{e}>0$ ($\Rightarrow$ NON SONO PUNTI DI MINIMO!). IN EFFETTI, SONO DI MASSIMO (SU/IN $int(E)$):

SI CALCOLA, INFATTI, CHE L'<u>HESSIANA</u> DI f IN $(x,\frac{1}{x})$ VALE

$$D^2 f(x,\tfrac{1}{x}) = \begin{bmatrix} -1/x^2 & 1/e \\ 1/e & -x^2 \end{bmatrix} \qquad (\dots)$$

CHE HA $\begin{cases} \det D^2 f(x,\frac{1}{x}) = 1 > 0 & [\text{autovalori} \neq 0 \text{ concordi}] \\ \text{traccia } D^2 f(x,\frac{1}{x}) < 0 & [\text{somma autov. è negativa}] \end{cases}$

$\rightarrow$ AUTOVALORI NEGATIVI ($D^2 f(x,\frac{1}{x})$ DEFINITA NEGATIVA)

$\rightarrow$ TUTTI GLI $(x,\frac{1}{x}) \in int(E)$ SONO PUNTI DI <u>MASSIMO</u> PER $f|_{int(E)}$. ✓

$\boxed{\partial E}$ (MIN E MAX) (LAGRANGIANA) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) \doteq f(x,y) - \lambda g(x,y)$, DOVE

$$g(x,y) \doteq x^2+4y^2-4$$

$$\left(\partial E = g^{-1}(0) \right).$$

$$\begin{cases} y e^{-xy}(1-xy) - 2\lambda x = 0 \\ x e^{-xy}(1-xy) - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

. Intanto, ogni punto $(x,y) \in \partial E$ di minimo ~~max~~ per $f|_{\partial E}$ (anzi, $f|_E$), è t.c.

$\boxed{xy < 0}$ ~~>0~~ (x, y discordi) $\Rightarrow 1 - xy > 0$ ~~<0~~. Inoltre, allora,

$\boxed{\lambda \neq 0}$ (altrimenti, $x = y = 0$ che è assurdo). Anzi,

$\boxed{\lambda < 0}$: infatti, $y e^{-xy}(1-xy) = 2\lambda x$

	y	e^{-xy}	$(1-xy)$	$2\lambda x$
(x,y) min	$\uparrow$ $y>0 \Leftrightarrow x<0$	>0	>0	$\uparrow$ $x>0 \Leftrightarrow y<0$
~~(x,y) max~~				

Lo possiamo determinare: dal sistema,

$$x = \frac{y e^{-xy}(1-xy)}{2\lambda} \quad e \quad y = \frac{x e^{-xy}(1-xy)}{8\lambda} \quad \overset{\text{(vincolo)}}{\Longrightarrow}$$

$$\boxed{4} = x^2 + 4y^2 = \frac{4y^2 e^{-2xy}(1-xy)^2}{16 \cdot 4 \lambda^2} + \frac{x^2 e^{-2xy}(1-xy)^2}{16\lambda^2}$$

$$= \frac{\underbrace{(x^2+4y^2)}_{4} e^{-2xy}(1-xy)^2}{16\lambda^2}$$

$$= \boxed{\frac{e^{-2xy}(1-xy)^2}{4\lambda^2}}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{e^{-2xy}(1-xy)^2}{16} \overset{\lambda<0}{\Longleftrightarrow} \boxed{\lambda = -\frac{e^{-xy}(1-xy)}{4}}$$

$\rightarrow \boxed{-x = 2y}$, OSSIA $\boxed{-y = x/2}$ $\xrightarrow{\text{VINCOLO}}$ $\boxed{|y| = \sqrt{2}/2 \ , |x| = \sqrt{2}}$

$\rightarrow \boxed{x \cdot y = -1} \rightarrow f(x,y) = -e$ VAL. MINIMO.

VERIFICARE CHE COMUNQUE $\max_{E} f = \frac{1}{e}$. ☒

("IN BOCCA AL LUPO" PER GLI ESAMI!)