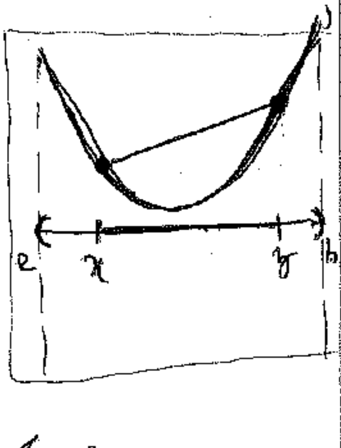
APV "2" (SPAZI L^p)

$-\infty \le a < b \le \infty$, $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$;

φ CONVESSA $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\; a < x, y < b$, $\forall\; 0 \le \lambda \le 1$, $\varphi\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \le (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda \varphi(y)$

cioè, $\forall\; 0 \le \lambda_1, \lambda_2 \le 1$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$\varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) \le \lambda_1 \varphi(x) + \lambda_2 \varphi(y).$$



Ciò equivale a: $\forall\; a < s < t < u < b$,

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \le \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

Allora

$$\boxed{\varphi \text{ convessa su } (a,b) \Rightarrow \varphi \text{ continua su } (a,b)}$$

(! è essenziale che (a,b) sia aperto:).

ES.: $\varphi(x) = e^x$ è convessa su $(-\infty, \infty)$ ($\varphi := \exp$).
(e anche x^p, $p \ge 1$, su $(0, +\infty)$)

Altra def.: χ CONCAVA $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $(-\chi)$ convessa.

ES.: $\chi(x) = \log x$ è concava su $(0, \infty)$. (e anche $x^{1/p}$, $p \ge 1$, su $(0, +\infty)$)

p, q reali > 0 ESPONENTI CONIUGATI $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$p + q = p \cdot q \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$\Rightarrow p, q \ge 1$, e $p = \infty$ o $q = \infty$ $\Leftrightarrow$ $(p,q) = (1, \infty)$ o $(p,q) = (\infty, 1)$; inoltre

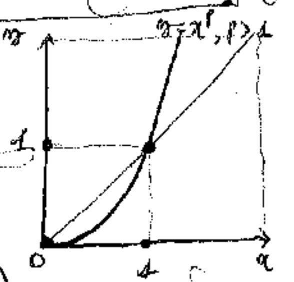
$p = q \Leftrightarrow p = q = 2$.

In ogni caso $0 \le 1/p,\; 1/q \le 1$.

$\forall\, p > 1$ (∞), $\exists!\, q > 1$ (∞) coniugato a p: è $q := \frac{p}{p-1}$!

DIS. DI YOUNG: $p, q > 1$ (cioè $< \infty$), $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$

$\forall a, b \geq 0$ (anche $+\infty$!), $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.



DIM: per $a = 0$ o $b = 0$ (ma anche per $a = +\infty$ o $b = +\infty$!) è ovvio; per $a, b > 0$ ($+\infty$?): $\forall \alpha, \beta > 0$,

$$\log(\alpha^{1/p} \beta^{1/q}) = \frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta \overset{\text{CONC. }(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)}{\leq} \log\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right),$$

cioè $\alpha^{1/p}\beta^{1/q} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}$; ma $\forall \alpha, \beta > 0$, $\exists$ $a, b > 0$ tali che $\alpha = a^p$, $\beta = b^q$. $\square$

(NOTA: vale l'"=" $\Leftrightarrow a^p = b^q$! [cioè $\alpha = \beta$: infatti $\frac{1}{p}\log\alpha + \frac{1}{q}\log\beta = \log(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}) \Leftrightarrow \alpha = \beta$ PER STRETTA CONCAVITÀ DI $\log$ PIÙ L'IPOTESI $0 \lneq \frac{1}{p}, \frac{1}{q} \lneq 1$.])

$\forall n \geq 1$, sia $\mathcal{M}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ la σ-algebra su $\mathbb{R}^n$ dei Lebesgue-misurabili e sia $\mathcal{L}^n$ la misura di Lebesgue su tali misurabili.

Notiamo che, $\forall E \in \mathcal{M}^n$, $\mathcal{L}^n(E) = 1 \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}$ (specie $r \neq 0$!), $r = \int_E r \, dx$.

DIS. DI JENSEN: $-\infty \leq a < b \leq \infty$,

$E \in \mathcal{M}^n$ con $\mathcal{L}^n(E) = 1$, $f : E \to (a, b)$ misurabile tale che $\int_E |f(x)| dx < \infty$ ($\Rightarrow a < \int_E f(x) dx < b$) $\Rightarrow$

$\forall \varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ CONVESSA ($\Rightarrow$ continua, $\Rightarrow \varphi(f)$ mis.),

$$\varphi\left(\int_E f(x) dx\right) \leq \int_E \varphi(f(x)) dx$$

(e anche infinito!)

($\Leftrightarrow \forall \psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ CONCAVA, $\int_E \psi(f(x)) dx \leq \psi\left(\int_E f(x) dx\right)$).

(2)

Dim: posto $t := \int_E f(x)dx$, usando che

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R} : \forall a < s < b, \ \varphi(s) \geq \varphi(t) + c(s-t)} \ (*)$$ (t è scelto!)

(convessità di φ!), vale allora che, $\forall x \in E$,

$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + c(f(x) - t)$, da cui la tesi (integrando su E!) ($\mathcal{L}^n(E) = 1$). $\square$

[(*): usando che, $\forall a < s < t < u < b$, $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \overset{D.}{\leq} \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$,

considero $c := \sup_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ e t scelto; allora

$$\begin{cases} \forall a<s<t, \ \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \overset{def.}{\leq} c \quad (\text{cioè } \varphi(t)+c(s-t) \leq \varphi(s)) \\ \forall t<u<b, \ c \overset{D}{\leq} \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} \quad (\text{cioè } \varphi(t)+c(u-t) \leq \varphi(u)) \\ \text{per } s=t, \ \varphi(t) \geq \varphi(t) + \underset{(\uparrow c \in \mathbb{R} \text{ QUALSIASI!})}{0} \end{cases}$$ $\square$]].

(YOUNG)

DIS. DI HÖLDER: $p, q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$,

$E \in \mathcal{M}^n$ ($\mathcal{L}^n(E) > 0$) $\Rightarrow \forall f, g : E \to [0,\infty]$ mis.,

$$\int_E f(x)\cdot g(x)dx \leq \left\{\int_E f(x)^p dx\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_E g(x)^q dx\right\}^{1/q}$$

("Dis. di SCHWARZ" se $p=q=2$). (Usando YOUNG, Hölder è con "=" $\Leftrightarrow \exists c>0$ tale che $g^q \overset{q.o.}{=} c f^p$!)

Dim: $\forall t>0$, $fg = (tf)(t^{-1}g) \overset{Y.}{\leq} \frac{t^p f^p}{p} + \frac{t^{-q} g^q}{q}$ per ipotesi, $\Rightarrow \int_E f(x)g(x)dx \leq \frac{t^p}{p}\int_E f(x)^p dx + \frac{t^{-q}}{q}\int_E g(x)^q dx$:

mentre per $f=0$ q.o. o $g=0$ q.o. la tesi è ovvia (ed è un "=") , in tutti gli altri casi la ottengo facendo $t := \left\{\frac{\int_E g(x)\,dx}{\int_E f(x)\,dx}\right\}^{\frac{1}{p+q}}$ nella dis. precedente (e OSS. che $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{q}$ (o $\frac{q}{p+q} = \frac{1}{p}$) e che $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ (o $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$)) . □]

[RICORDARE CHE $f \geq 0 \Rightarrow \int_E f(x)\,dx \geq 0$ e $\int_E f(x)\,dx = 0$ ($\mathcal{L}^m(E)>0$) $\Leftrightarrow f=0$ q.o. !!] ~~E~~ $f > g \geq 0$ q.o. (e $\mathcal{L}^m(E)>0$) $\Rightarrow \int_E f(x)\,dx > \int_E g(x)\,dx$)

(HÖLDER)

DIS. DI MINKOWSKI : p (o q) > 1 , ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) ($p<\infty$)

$E \in \mathcal{M}^m$ ($\mathcal{L}^m(E)>0$) $\Rightarrow \forall f, g : E \to [0,\infty]$ mis. ,

$$\left\{\int_E (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_E f(x)^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_E g(x)^p\,dx\right\}^{1/p}$$

(per $p=1$ è ovvia! (ed è "=" della linearità dell'$\int$!))

[Dim : $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f\cdot(f+g)^{p-1} + g\cdot(f+g)^{p-1} \overset{H.}{\Rightarrow}{}^{*}$

$$\int_E (f(x)+g(x))^p\,dx \leq \left\{\int_E (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/q}\left[\left\{\int_E f(x)^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_E g(x)^p\,dx\right\}^{1/p}\right]$$

(OSS. che $(p-1)q = p$) ;

mentre per $f=0$ q.o. o $g=0$ q.o. la tesi è ovvia , in tutti gli altri casi la ottengo dividendo entrambi i membri della dis. precedente per $\left\{\int_E (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/q}$ (e OSS. che $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$) . □]

(*NOTARE che di nuovo Minkowski è un "=" $\Leftrightarrow g = cf$, con $c>0$: il $\leq$ dopo "$\overset{H.}{\Rightarrow}$" è un "=" $\Leftrightarrow$ (positività) ovvero "=" entrambe le "$\leq$", e ora è evidente!)

Fissato $E \in \mathcal{M}^n$ ($\mathcal{L}^n(E)>0$), $\forall\, 1\le p<\infty$ e $\forall f:E\to\mathbb{R}$ mis.

Definiamo
$$\|f\|_p \doteq \left\{\int_E |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \quad \left(\|f\|_1=\int_E|f(x)|\,dx\right) \quad (\ge 0)$$
$$\|f\|_\infty \doteq \inf\{0\le c\le\infty \mid |f(x)|\le c \text{ q.o.}\}$$
(qui non lo metto e uso $\inf(\emptyset)=+\infty$)

$\forall\, 1\le p\le\infty$, $f\in L^p \Leftrightarrow |f|\in L^p$, perché $\|f\|_p=\||f|\|_p$!

e, $\forall\, 1\le p\le\infty$, $L^p := L^p(E) := \{f:E\to\mathbb{R} \text{ mis.} \mid \|f\|_p<\infty\}/\sim$ (o $L^p_{\mathbb{R}}(E)$) (dove $f\sim g \Leftrightarrow f=g$ q.o.)

per cui $\|\cdot\|_p : L^p \to [0,\infty)$. Allora,

$$\boxed{\forall\, 1\le p\le\infty,\ (L^p,\|\cdot\|_p) \text{ è un } \mathbb{R}\text{-sp. vett. NORMATO,}}$$

cioè $\|\cdot\|_p$ verifica (I) $\forall f\in L^p$, $\|f\|_p\ge 0$ e $\|f\|_p=0 \Leftrightarrow f=0$ q.o. (ECCO PERCHÉ QUOZIENTARE!); (II) $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\|\lambda f\|_p=|\lambda|\,\|f\|_p$; e (III) $\forall f,g\in L^p$, $\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p$ (SERVE ANCHE PER LA VERIFICA DI $\mathbb{R}$-SP. VETT.!).

[OSS. anzitutto che $\|f\|_\infty$ è in realtà un minimo, cioè $\boxed{|f|\le\|f\|_\infty \text{ q.o.}}$ (perché, considerata $(c_n)_{n\ge1}$ in $[0,\infty]$ $\downarrow$ a $\|f\|_\infty$ tale che $|f|\le c_n$ q.o.), $\{\|f\|_\infty<|f|\}=\bigcup_{n\ge1}\{c_n<|f|\}$ è trasc.). □]

allora

	$1\le p<\infty$	$p=\infty$
(I)	ovvie	ovvie
(II)	ovvie	ovvie
(III)	DIS. DI MINKOWSKI	△

△ (osservato che $\|f+g\|_p=\left\{\int_E|f(x)+g(x)|^p dx\right\}^{1/p} \overset{\text{dis. tr.}}{\le} \left\{\int_E(|f(x)|+|g(x)|)^p dx\right\}^{1/p}$!)

Riassumiamo secondo le nuove terminologie le ultime due fondamentali disuguaglianze :

HÖLDER: $p,q \geq 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$ e $\underset{(\int_E |fg|\,d\mu)}{\|fg\|_1} \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

MINKOWSKI: $1 \leq p \leq \infty$; $f,g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow$ $f+g \in \mathcal{L}^p$ e $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Dim: restano solo i casi $(p,q)=(1,\infty)$ e $(p,q)=(\infty,1)$ per Hölder; per $(p,q)=(1,\infty)$, $|fg| = |f||g| \leq |f|\|g\|_\infty$ q.o., ed è evidente che per $(p,q)=(\infty,1)$ sia analogo. □

TEOREMA: $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ è un $\mathbb{R}$-spazio DI BANACH, cioè $\mathcal{L}^p$ è un $\mathbb{R}$-spazio metrico COMPLETO rispetto alla metrica indotta da $\|\cdot\|_p$ $d_p(f,g) := \|f-g\|_p$.

Dim. $\boxed{1 \leq p < \infty}$: sia $(f_n)_{n\geq 1}$ di Cauchy in $\mathcal{L}^p$; provare l'esistenza di $f \in \mathcal{L}^p$ tale che $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, cioè $\|f_n - f\|_p \to 0$, equivale a far ciò ma rispetto ad una sottosuccessione di $(f_n)_{n\geq 1}$ (fatto generale ed elementare!!). Ebbene, dalla proprietà di Cauchy
$[\|f_m - f\|_p \leq \|f_m - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p \dots]$
"$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \bar{n} \geq 1 : \forall\, m,n \geq 1$, $m,n \geq \bar{n} \Rightarrow \|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon$"

Dimostriamo che $\exists\, (f_{n_k})_{k\ge 1} = (f_k)_{k\ge 1}$ sottosucc. tale che, $\forall k \ge 1$, $\|f_{k+1}-f_k\|_p \le 4^{-k} = 2^{-2k}$ (sfruttando AC!). Posto allora, $\forall k\ge 1$, $A_k := \{|f_{k+1}-f_k| \ge 2^{-k}\}$, è ($\forall k \ge 1$)

$$2^{-kp}\cdot \mathcal{L}^M(A_k) \overset{\text{def } A_k}{\le} \boxed{\int_{A_k} |f_{k+1}-f_k|^p\,dx} \le \overbrace{\int_E |f_{k+1}-f_k|^p\,dx}^{=\|f_{k+1}-f_k\|_p^p\,!} \le 2^{-2pk},$$

$\Rightarrow \forall k \ge 1$, $\mathcal{L}^M(A_k) \le 2^{-pk}$, per cui $A := \limsup_m A_m = \bigcap_{m\ge 1}\bigcup_{k\ge m} A_k$ ha $\mathcal{L}^M(A) = \inf_{m\ge 1} \mathcal{L}^M\left(\bigcup_{k\ge m} A_k\right) \le$

$$\le \inf_{m\ge 1}\sum_{k\ge m} 2^{-pk} \left(= \inf_{m\ge 1} \frac{2^{-mp}}{1-2^{-p}}\right) \overset{\text{conv.!}}{=} 0,$$

cioè è trascurabile $\left(\forall c\in\mathbb{R} \text{ con } |c|<1,\ \forall m \ge 0,\ \sum_{k\ge m} c^k = \frac{c^m}{1-c}\right)$, cioè, per q.o. $x \in E$ (quelli in $E\setminus A$), $x \in A_k^c$ da un certo k in poi, cioè, per q.o. $x\in E$, $|f_{k+1}(x)-f_k(x)| < 2^{-k}$ definitivamente $\Rightarrow$ per q.o. $x \in E$, $\sum_{k\ge 1} |f_{k+1}(x)-f_k(x)| \overset{\text{confronto!}}{<} \infty$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ per q.o. $x\in E$, $(f_k(x))_{k\ge 1}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, $\overset{\text{completezza } \mathbb{R}!}{\Rightarrow}$ $f_k(x) \to f(x)$ in $E\setminus A$; detto $f := \begin{cases} 0 & \text{in } A \\ f & \text{in } E\setminus A\end{cases}$.

Allora $f \in \mathcal{L}^p$ (è lim.!) (misurabile $E\to\mathbb{R}$!): $\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\,dx = \int_{E\setminus A} |f(x)|^p\,dx =$

$$= \int_{E\setminus A} \left|\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right|^p dx \overset{\text{cont.}}{=} \int_{E\setminus A} \lim_{k\to\infty} |f_k(x)|^p \overset{\text{FATOU!}}{\le} \liminf_k \int_{E\setminus A} |f_k(x)|^p =$$

$= \liminf_k \|f_k\|_p^p < \infty$. Inoltre, osservato che, $\forall k < k'$ $(\mathbb{N})$, $\|f_{k'}-f_k\|_p \le \sum_{h=k}^{k'-1} \|f_{h+1}-f_h\|_p \le \sum_{h\ge k} 4^{-h}$ $(<\infty)$, analogamente vale che $f_k \xrightarrow{L^p} f$: $\forall k$, $\|f-f_k\|_p^p = \int_E |f(x)-f_k(x)|^p dx$

$= \int_{E\setminus A} |f(x)-f_k(x)|^p dx = \int_{E\setminus A} |\lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'>k}} f_{k'}(x) - f_k(x)|^p dx \overset{\text{cont.}}{=}$

$= \int_{E\setminus A} \lim_{\substack{k'\to\infty \\ k'>k}} |f_{k'}(x)-f_k(x)|^p dx \overset{\text{FATOU}}{\leq} \liminf_{k'>k} \int_{E\setminus A} |f_{k'}(x)-f_k(x)|^p dx =$

$= \liminf_{k'>k} \|f_{k'}-f_k\|_p^p \leq \Big(\sum_{h\geq k} 4^{-h}\Big)^p$ $(<\infty!)$ $\Rightarrow \forall k \geq 1$,

$\|f-f_k\|_p \leq \sum_{h\geq k} 4^{-h} \xrightarrow[(k\to\infty)]{} 0$. $\square$

in effetti NON importava la analisi di $f \in L^p$ (e tutto ciò NON serviva $\|f-f_k\|_p$!): $|f| \leq |f-f_k| + |f_k| \Rightarrow \{\int_E |f|^p dx\}^{1/p} \leq \{\int_E (|f-f_k|+|f_k|)^p dx\}^{1/p}$ E ORA USO MINKOWSKI ("classico")!

$\boxed{p=\infty}$: sia $(f_n)_{n\geq 1}$ di Cauchy in L^∞, cioè tale che

$\forall \varepsilon>0, \exists \bar{m} \geq 1 : \forall n,m \geq 1,\ n,m \geq \bar{m} \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$;

ma per q.o. $x \in E$ $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, esattamente fuori dal trascurabile $\{\|f_n - f_m\|_\infty < |f_n - f_m|\}$: il mis.

$A := \bigcup_{k,n,m\geq 1} (\{|f_k| > \|f_k\|_\infty\} \cup \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\})$ ha $\mathcal{L}^n(A) =$

$= 0$ e per q.o. $x\in E$ (quelli in $E\setminus A$) è $\begin{cases} |f_k| \leq \|f_k\|_\infty \\ |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \end{cases}$

$\forall k,n,m \geq 1$. In particolare, per q.o. $x \in E$, $(f_n(x))_{n\geq 1}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, $\overset{\text{compl. } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $f_n(x) \to f(x)$ per $x \in E\setminus A$, la quale f estendo e 0 su A. Osservato che

$\| (f_n)_{n\geq 1}$ di Cauchy in $L^\infty \Rightarrow \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_\infty < \infty \;\|$

(considero altrimenti $n,m \geq \bar{m}(\varepsilon)$, fisso m, e faccio la dis. $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty + \|f_m\|_\infty$), dimostriamo

che $f \in L^\infty$: $|f| \leq |f-f_m| + |f_m| \overset{m \text{ abb. grande}}{\leq}$

$\leq \varepsilon + \underbrace{\|f_m\|_\infty}_{(<\infty) \text{ comunque}} \leq \varepsilon + \sup_{m\geq 1} \|f_m\|_\infty < \infty$ (anzi è ovunque limitata OVUNQUE!).

Infine $f_n \xrightarrow{L^\infty} f$, perché da qui sottosucc. di $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geq 1}$ è possibile estrarre un'ulteriore sottosucc. $\to 0$ grazie al fatto che $f_n \xrightarrow{q.o.} f$: infatti ogni sottosucc. $(f_{n_k})_{k\geq 1} =: (f_k)_{k\geq 1}$ è ne anche $f_k \xrightarrow{q.o.} f$, cioè $\forall \varepsilon > 0$ vale q.o. $|f_k - f| \leq \varepsilon$ definitivamente; ma allora $\exists\, (f_{k_h})_{h\geq 1} =: (f_h)_{h\geq 1}$ sottosucc. tale che, $\forall h \geq 1$, $|f_h - f| \leq \frac{1}{h}$ q.o. (AC!), $\Rightarrow$ $\|f_h - f\|_\infty \leq 1/h$. □ (ANZI DIRETTAMENTE: da $m = m(\varepsilon)$ in poi $|f_m - f| \overset{q.o.}{\leq} \varepsilon \overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ definitivo $\|f_m - f\|_\infty \leq \varepsilon$!)

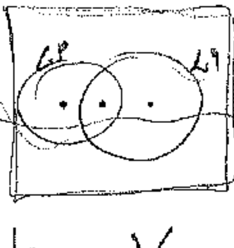
NOTA: $\mathcal{L}^n(N) = 0 \Rightarrow \forall\, 1 \leq p \leq \infty$, $L^p(E \cup N) = L^p(E)$!

(•) $(0<)\, \mathcal{L}^n(E) < \infty \Rightarrow \forall\, 1 \leq p < q \leq \infty$, $\exists\, c > 0$: $\forall f : E \to \mathbb{R}$ mis., $\|f\|_p \leq c\,\|f\|_q$,

$$\Rightarrow \quad L^q \subseteq L^p$$

(anzi $L^q \xrightarrow{\ \|\cdot\|_q \to \|\cdot\|_p\ } L^p$ con CONTINUITÀ)

(•) $\mathcal{L}^n(E) = \infty \Rightarrow \forall\, 1 \leq p < q \leq \infty$, L^p e L^q sono in generale NON CONFRONTABILI.



$\boxed{q = \infty}$: considerato $A := \{f > \|f\|_\infty\}$ ($\mathcal{L}^n(A) = 0$!), $\forall p \geq 1$

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\,dx = \int_{E \setminus A} |f(x)|^p\,dx \leq \|f\|_\infty^p \underbrace{\mathcal{L}^n(E \setminus A)}_{= \mathcal{L}^n(E)}, \text{ cioè}$$

$$\|f\|_p \leq \mathcal{L}^n(E)^{1/p}\, \|f\|_\infty .$$

$\boxed{q < \infty}$: siano $p' := \frac{q}{p}\ (>1)$, cioè tale che $pp' = q$ e $\frac{1}{p'} = \frac{p}{q}\ (<1)$, e q' tale che $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p'}, = \frac{q-p}{q}\ (<1)$, per cui $p', q' > 1$

e $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$; allora $\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p dx = \int_E |f(x)|^p \cdot 1\, dx \overset{H.}{\leq}$

$\overset{H.}{\leq} \left\{ \int_E |f(x)|^{p \cdot p'} dx \right\}^{1/p'} \cdot \left\{ \int_E 1^{q'} dx \right\}^{1/q'} = \|f\|_q^p \cdot \mathcal{L}^n(E)^{\frac{q-p}{q}}$, cioè

$$\|f\|_p \leq \mathcal{L}^n(E)^{\frac{q-p}{qp}} \|f\|_q$$

(e notiamo che "giustamente" $\mathcal{L}^n(E)^{\frac{q-p}{qp}} = \mathcal{L}^n(E)^{1/p} \cdot \mathcal{L}^n(E)^{-1/q} \xrightarrow[q \to \infty]{} \mathcal{L}^n(E)^{1/p}$).

! Naturalmente in generale $\mathcal{L}^q \subsetneq \mathcal{L}^p$ (sempre con $\mathcal{L}^n(E)<\infty$): se $n=1$ e $E=(0,1]$, $f(x):= x^{-1/q} \in \mathcal{L}^p \setminus \mathcal{L}^q$ $\forall\, 1 \leq p < q < \infty$, e per lo più $f \in \mathcal{L}^p \setminus \mathcal{L}^\infty$ ($\forall\, 1 \leq p < q < \infty$) ; per un esempio migliore rispetto a quest'ultimo ,

$\boxed{q=\infty}$: se $n=1$ e $E=\mathbb{R}$, $\forall\, 1 \leq p < \infty$

$$\begin{cases} f(x) := \log(x)\, I_{(0,1]}(x) \in \mathcal{L}^p \setminus \mathcal{L}^\infty \\ g(x) := 1 \quad \in \mathcal{L}^\infty \setminus \mathcal{L}^p \end{cases}$$

~~(andrebbe bene anche (0,1]!)~~ ;

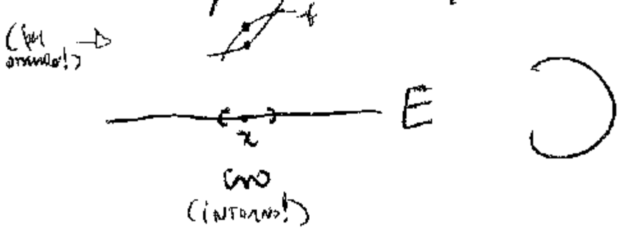
$\boxed{q<\infty}$: $\forall\, 1 \leq p < q < \infty$, ($p/q<1$, $q/p>1$)

$$\begin{cases} f(x) := x^{-\frac{1}{q}}\, I_{(0,1]}(x) \in \mathcal{L}^p \setminus \mathcal{L}^q \\ g(x) := x^{-1/p}\, I_{(1,\infty)}(x) \in \mathcal{L}^q \setminus \mathcal{L}^p \end{cases}$$

[abbiamo usato che, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 x^{-\alpha} dx < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1$ ($= \frac{1}{1-\alpha}$), mentre $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_1^\infty x^{-\beta} dx < \infty \Leftrightarrow \beta > 1$ ($= \frac{1}{\beta - 1}$) ; inoltre che, $\forall\, n \underset{(0)}{\geq} 1$, $\int_0^1 \log^n(x)\, dx = (-1)^n \cdot n! < \infty$.]

OSS.: $\forall\, 1 \le p \le \infty$, ci sono funzioni in $\mathcal{L}^p$ MA NON CONTINUE (come effetto, per $n=1$ e $E=\mathbb{R}$, $f(x) := x^{-\frac{1}{q}} I_{(0,1]}(x)$ $\forall (1\le) p < q < \infty$, mentre $\mathcal{L}^\infty$ non contiene $f(x) := I_{(0,1]}(x)$ semplicemente).

→ A PROPOSITO: $\forall\, 1 \le p \le \infty$, le generica classe d'eq. in $\mathcal{L}^p$ ha al più una sola funzione continua a meno di "punti isolati" (perché $f, g : E \to \mathbb{R}$ CONTINUE tali che $f = g$ q.o. $\Rightarrow f = g$ a meno di punti isolati:



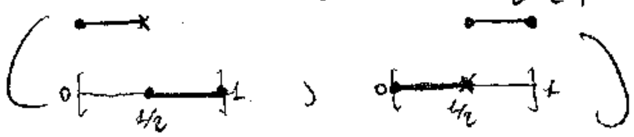
).

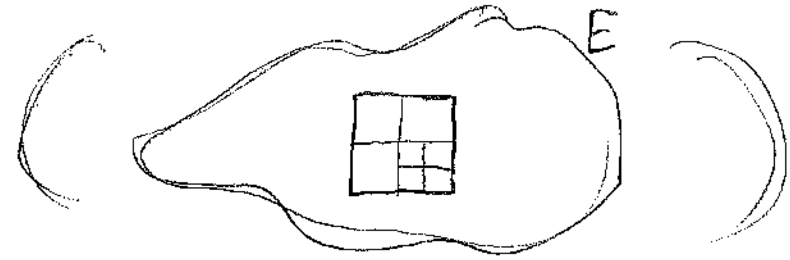
ANALOGAMENTE: per f, g CONTINUE, $f \le g$ q.o. $\Rightarrow f \le g$ (a meno di punti isolati).

$\boxed{\forall E \in \mathcal{M}^n \ (\text{di } \mathcal{L}^n(E) > 0),\ \forall\, 1 \le p \le \infty,\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^p = \infty}$:

consideriamo infatti un chiuso e limitato in E, cioè COMPATTO, "tipo cubetto", e $\forall m \ge 2$, m indicatrici di m ulteriori cubetti partizionanti ($\in \mathcal{L}^\infty \Rightarrow \mathcal{L}^p\ \forall\, 1 \le p \le \infty$) (E SONO LIN. INDIP.!);

esempio: $n = 1$, $E = \mathbb{R}$, compatto $[0,1]$, $m = 2$ e $I_1 := I_{[0,1/2)}$, $I_2 := I_{[1/2,1]}$.





Per $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^E$ mis. $(E \in \mathcal{M}^n,\ \mathcal{L}^n(E)>0)$,

"$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f$" $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{L}^n\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

(CONVERGENZA IN MISURA (di L.))

① se $\mathcal{L}^n(E)<\infty$, allora $f_n \xrightarrow{q.o.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f$;

$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \Rightarrow \exists (f_{n_k})_{k\geq 1} =: (f_k)_{k\geq 1}$ sottosucc. STRETTA in generale tale che $f_k \xrightarrow{q.o.} f$, brevemente

$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{"sotto-q.o."}} f$; (ANCHE $\mathcal{L}^n(E)=\infty$!)

② $f_n \xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{q.o.} f$ $\left(\overset{\text{(se } \mathcal{L}^n(E)<\infty\text{!)}}{\Rightarrow} \xrightarrow{\mathcal{L}^n}\right)$ MA in generale, $\forall 1 \leq p < \infty$, $f_n \xrightarrow{L^p} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{q.o.} f$; però, $\forall 1 \leq p \leq \infty$, $f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f$ $\left(\Rightarrow \xrightarrow{\text{sotto q.o.}}\right)$;

③ (SEVERINI –) EGOROV: $\mathcal{L}^n(E)<\infty$ e $f_n \xrightarrow{q.o.} f \Rightarrow \forall \bar{\varepsilon}>0$, $\exists \underset{(\subseteq E)}{E'} \in \mathcal{M}^n$ tale che $\mathcal{L}^n(E') \leq \bar{\varepsilon}$, $E \setminus E'$ è CHIUSO (*) e $f_n \xrightarrow{\text{UNIF. in } E\setminus E'} f$

(CONV. UNIF. "quasi-q.o."!)

~~$\left(\overset{q.o.}{\Rightarrow} \not\Rightarrow \xrightarrow{L^p}\right.$ (altrimenti $\Rightarrow \xrightarrow{\mathcal{L}^n}$, NEL CASO $\mathcal{L}^n(E)=\infty$; nel caso $<\infty$ vale comunque ...)~~

$\boxed{1}$ • $\forall n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{M}^n \Rightarrow \forall n\geq 1$, $\mathcal{L}^n(A_n) < \infty$;

d'altra parte anche $\liminf_n A_n = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n \geq m} A_n$ è $\subseteq E \cap \mathcal{M}^n$,

$\Rightarrow \mathcal{L}^n(\liminf_n A_n) < \infty$; ma cioè $I_{\liminf_n A_n} = \liminf_n I_{A_n}$ è INTEGRABILE, per cui vale FATOU:

$\liminf_n \mathcal{L}^n(A_n) = \liminf_n \int_E I_{A_n}(x)\,dx \overset{F}{\leq} \int_E \liminf_n I_{A_n}(x)\,dx =$

$= \int_E I_{\liminf_m A_m}(x)\,dx = \mathcal{L}^n(\liminf_m A_m)$; riassumendo:

$$\boxed{\forall (A_m)_{m\geq 1} \text{ in } \mathcal{M}^n,\ \mathcal{L}^n(A_m)<\infty \text{ e } \mathcal{L}^n(\liminf_m A_m)<\infty \Rightarrow \limsup_m \mathcal{L}^n(A_m) \leq \mathcal{L}^n(\limsup_m A_m)} .$$

Allora $0 \leq \limsup_m \mathcal{L}^n\{|f_m - f| > \varepsilon\} \leq \mathcal{L}^n(\limsup_m \{|f_m - f| > \varepsilon\})$

$= 0$, $\forall \varepsilon > 0$, per ipotesi di conv. q.o. . □

(⚠ $n=1$, $E=\mathbb{R}$, $f_m := I_{[-m,m]} \xrightarrow{q.o.} 1$ ma, $\forall\, 0<\varepsilon<1$,
$\mathcal{L}^1\{\underbrace{1 - I_{[-m,m]}}_{= I_{[-m,m]^c}} > \varepsilon\} \overset{(\varepsilon<1)}{=} \mathcal{L}^1([-m,m]^c) = \infty\ \forall m\geq 1$.)

⊙ $f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \overset{(AC)}{\Rightarrow} \exists\, (f_{m_k})_{k\geq 1} =: (f_k)_{k\geq 1}$ sottosucc. tale che, $\forall k\geq 1$,
$\mathcal{L}^n\underbrace{\{|f_k - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} \leq 2^{-k}$; ma allora $A :=$

$:= \limsup_k A_k$ ha $\mathcal{L}^n(A) = \inf_{k\geq 1} \mathcal{L}^n(\bigcup_{h\geq k} A_h) \leq \inf_{k\geq 1} \sum_{h\geq k} \mathcal{L}^n(A_h)$

$\leq \inf_{k\geq 1} \sum_{h\geq k} 2^{-h} \overset{(conv.)}{=} 0$, $\Rightarrow$ per q.o. $x \in E$,

$|f_k(x) - f(x)| \leq 1/k$ definitivamente in k . □

⚠ $n=1$, $E=[0,1]$, e $f_1 := I_{[0,1]} = 1$, $f_2 := I_{[0,1/2]}$, $f_3 :=$
$:= I_{[1/2,1]}$, $f_4 := I_{[0,1/4]}$, $f_5 := I_{[1/4,1/2]}$, $f_6 := I_{[1/2,3/4]}$, ... ,
$f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^1} 0$ ma NON q.o. : $\mathcal{L}^1\{f_m > \varepsilon\} = \begin{cases} 0 & \text{per } \varepsilon \geq 1 \\ \xrightarrow{m\to\infty} 0 & \text{per } 0<\varepsilon<1 \end{cases}$,
mentre, $\forall x \in [0,1]$, $f_m(x) > 0$ per infiniti m . OSS. di

$f_n \xrightarrow{L^p} 0 \quad \forall\, 1 \le p < \infty$, ma eppure NON q.o. . $\left.\right)$

$\boxed{2}$ ⊙ $\forall \varepsilon > 0$, da un certo $\bar{n}$ in poi $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, da un certo $\bar{n}$ in poi $|f_n - f| \le \varepsilon$ q.o. , sempreché $|f_n - f| \le \|f_n - f\|_\infty$ q.o. . □

⊙ $\forall \varepsilon > 0, \forall \varphi \ge 0$, $\boxed{\varepsilon^p I_{\{\varphi \ge \varepsilon\}} \le \varphi^p}$ $\forall\, 1 \le p < \infty$ (**) (ovvia!)

$$\Rightarrow \left\| \mathcal{L}^n\{\varphi > \varepsilon\} \le \mathcal{L}^n\{\varphi \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^p} \int_E \varphi(x)^p dx = \frac{\|\varphi\|_p^p}{\varepsilon^p} \right\| ;$$

allora, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{L}^n\{|f_n - f| > \varepsilon\} \le \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Big($ALTRIMENTI: $\int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx \ge \int_{E_n} |f_n(x) - f(x)|^p dx \ge$
$E_n := \{|f_n - f| > \varepsilon\}\ (\subseteq E)$

$\ge \varepsilon^p \mathcal{L}^n(E_n) \Big)$. □ [(**) Il caso $p=\infty$ è banale: $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{L}^n\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ perché addirittura è DEFINITIVAMENTE 0, in quanto $\forall \varepsilon > 0$ da $n \ge \bar{n}$ in poi $|f_n - f| \overset{q.o.}{\le} \|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$. ✓]

$\boxed{3}$ $\forall \delta > 0, \forall n \ge 1$, $A_n^\delta := \{|f_k - f| > \delta$ per almeno un $k \ge n\}$

Ma $\boxed{\mathcal{L}^n(A_n^\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$ $(\forall \delta > 0)$ PER IPOTESI DI $\mathcal{L}^n(E) < \infty$ + CONV. q.o. Usando Fatou come prima, essendo $\mathcal{L}^n(\limsup_n A_n^\delta) = 0 \quad (\forall \delta > 0)$; ciò significa che,

$\left\| \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists\, \bar{n} := \bar{n}(\varepsilon, \delta) : n \ge \bar{n} \Rightarrow \mathcal{L}^n(A_n^\delta) \le \varepsilon . \right\|$

ALLORA, $\forall \bar{\varepsilon} > 0, \forall h \ge 1$, scelti $\varepsilon := \bar{\varepsilon} 2^{-h}\ (>0)$ e $\delta := \frac{1}{h}\ (>0)$, $\exists\, \bar{n} : n \ge \bar{n} \Rightarrow \mathcal{L}^n(A_n^{1/h}) \le \bar{\varepsilon} 2^{-h}$, $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^n(A_{\bar{n}}^{1/h}) \le \bar{\varepsilon} 2^{-h}$. Dunque

$$\rightarrow E' := \bigcup_{h \ge 1} A_{\bar{n}}^{1/h} \quad \text{Ma}$$

$$\mathcal{L}^n(E') \le \sum_{n\ge 1} \mathcal{L}^n(A^{1/n}_{\bar m}) \le \bar{\varepsilon}\cdot 1 = \bar{\varepsilon}$$ (sarebbe APERTO se

~~se $(f_m)_{m\ge1}$~~ fossero CONTINUE $\left(A^{1/n}_{\bar m} = \{|f_k - f| > 1/n \text{ per almeno un } k \ge \bar m\} = \right.$

$= \left.\bigcup_{k\ge\bar m} \{|f_k - f| > 1/n\} \right)$, e $E \setminus E' =$

$= \bigcap_{n\ge1} (A^{1/n}_{\bar m})^c = \bigcap_{n\ge 1} \{|f_k - f| \le 1/n \ \forall k \ge \bar m\}$ (CHIUSO!) $\Rightarrow$

$\forall x \in E\setminus E'$, $f_m(x) \xrightarrow{\text{UNIF.}} f(x)$ (nel senso effettivo, $\forall n \ge 1$,

$|f_k - f| \le 1/n \ \forall k \ge \bar m$ INDIP. da x !!! . $\square$)

$(\forall \varepsilon>0, \ \exists \bar m \ge 1 : \forall x \in E\setminus E', \dots)$

NOTA: $f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \Leftrightarrow$ (SE $\mathcal{L}^n(E) < \infty$) $\forall$ sottosucc. di $(f_m)_{m\ge1}$, $\exists$ ulteriore sottosucc. $(f_k)_{k\ge1}$ tale che $f_k \xrightarrow{q.o.} f$)

$\Rightarrow$ la convergenza q.o. NON è indotta da una topologia (altrimenti "$\forall$ sottosucc. $\exists$ sottosucc. $\xrightarrow{q.o.}$" $\Rightarrow f_m \xrightarrow{q.o.} f$, mentre da esempi abbiamo visto un caso opposto come $f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f$ MA NON q.o.) .

$\boxed{\Rightarrow)}$: $f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \Rightarrow$ ogni sua sottosucc. $\xrightarrow{\mathcal{L}^n} f$, $\Rightarrow$ se ne può estrarre un'ulteriore $\xrightarrow{q.o.} f$ (FATTO!) . ✓

$\Leftarrow)$: $\cancel{f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^n} f} \Leftrightarrow \exists$ sottosucc. $(f_{m_k})_{k\ge1} =: (f_k)_{k\ge1}$, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, tali che $\mathcal{L}^n\{|f_k - f| > \varepsilon\} > \delta$, $\Rightarrow$ OGNI ulteriore sottosucc. di $(f_k)_{k\ge1}$, soddisfacendo tale proprietà, NON può convergere a f in misura, QUINDI (${\mathcal{L}^n(E)<\infty}$!) tantomeno q.o. a f)

quindi otteniamo la negazione della delle ipotesi, che è assurdo. □

⚠ Lo stesso esempio $n=1$, $E=\mathbb{R}$, $f_n := I_{[n,n+1]}$ mostra la necessità di $\mathcal{L}^n(E)<\infty$

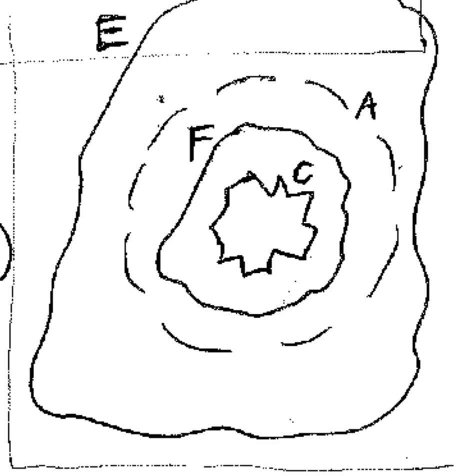
APPROSSIMABILITÀ.

(su $E\in\mathcal{M}^n$, $\mathcal{L}^n(E)>0$) (e $p<\infty$)

I) $\forall\, 1\le p<\infty$, $F\in\mathcal{M}^n$ LIMITATO $\Rightarrow$ $\exists\,(\varphi_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^E$ CONTINUE A SUPPORTO COMPATTO ("poco più grande di F") tali che (anzi in $[0,1]^E$)

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} I_F .$$

(in effetti sono in $\mathcal{L}^p$!)



Per misura di $\mathcal{L}^n$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ $C:=C_\varepsilon$ CHIUSO $\subseteq F\subseteq A:=A_\varepsilon$ APERTO (limitato) $(\subseteq E)$ tale che $\mathcal{L}^n(A\setminus C)\le\varepsilon$, e anzi C è anche LIMITATO (essendolo F), cioè COMPATTO; in questa situazione,

$$\varphi:=\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \varphi(x) := \frac{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\setminus A)}{\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^n\setminus A)+\operatorname{dist}(x,C)}$$

è CONTINUA (...), effettivamente in $[0,1]$ essendo minimo 0 su $\mathbb{R}^n\setminus A$ (chiuso!) e massimo 1 su C, e dunque è CONTINUA A SUPPORTO (COMPATTO) $\subsetneq A$; rinominandola $\varphi:=\varphi|_E$, ha tali stesse proprietà, per cui

$\forall\, 1 \le p < \infty$, $\|I_F - g\|_p^p = \int_E |\underbrace{I_F(x) - g(x)}_{\substack{=0 \text{ sia su } \mathbb{R}^n\setminus A \\ \text{sia su } C}}|^p\,dx = \int_{A\setminus C} |I_F(x) - g(x)|^p\,dx \le$

$\le \int_{A\setminus C} 1^p\,dx = \mathcal{L}^n(A\setminus C) \le \varepsilon$; per la precisione, prendo

infine prendere, $\forall m \ge 1$, $g_m := g_{1/m}$. $\square$]

⚠ Per $p = \infty$ ciò NON può valere : infatti

$f : E \to \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$

(effetto "norma del sup" o "della convergenza uniforme"!)

[$|f| \le \|f\|_\infty$ q.o. $\overset{\text{CONT.}}{\Rightarrow} |f| \le \|f\|_\infty$ OVUNQUE (a meno di punti isolati), per cui la "migliore" $\|f\|_\infty$ DEVE essere il $\sup_E |f|$]

$\Rightarrow$ g_m CONTINUE $\xrightarrow{\mathcal{L}^\infty} g$ si avrebbe conv. uniformemente, dunque g ed essere CONTINUA ; allora ad esempio $n = 1$, $E = [0,1]$, $F := [0, 1/2]$ (⟝—×⟶) contraddice.

II $\forall\, 1 \le p \le \infty$, $\forall G \in \mathcal{M}^n$, $\mathcal{L}^n(G) < \infty \Rightarrow$
$\exists\, (F_k)_{k\ge 1}$ in $\mathcal{P}(G) \cap \mathcal{M}^n$ LIMITATI tali che

$$I_{F_k} \xrightarrow{\mathcal{L}^p} I_G ,$$

quindi, $\forall\, 1 \le p < \infty$, $\exists\, (g_m)_{m\ge 1}$ CONTINUE A SUPPORTO COMPATTO tali che $g_m \xrightarrow{\mathcal{L}^p} I_G$. (anche in $\mathcal{L}^p$!)

[$\forall k \ge 1$, $B_k := B(0,k) \Rightarrow F_k := G \cap B_k$ $(\in \mathcal{P}(G) \cap \mathcal{M}^n)$ $(\subseteq B_k)$

è LIMITATO $\forall k\ge 1$, e $\forall\, 1\le p<\infty$

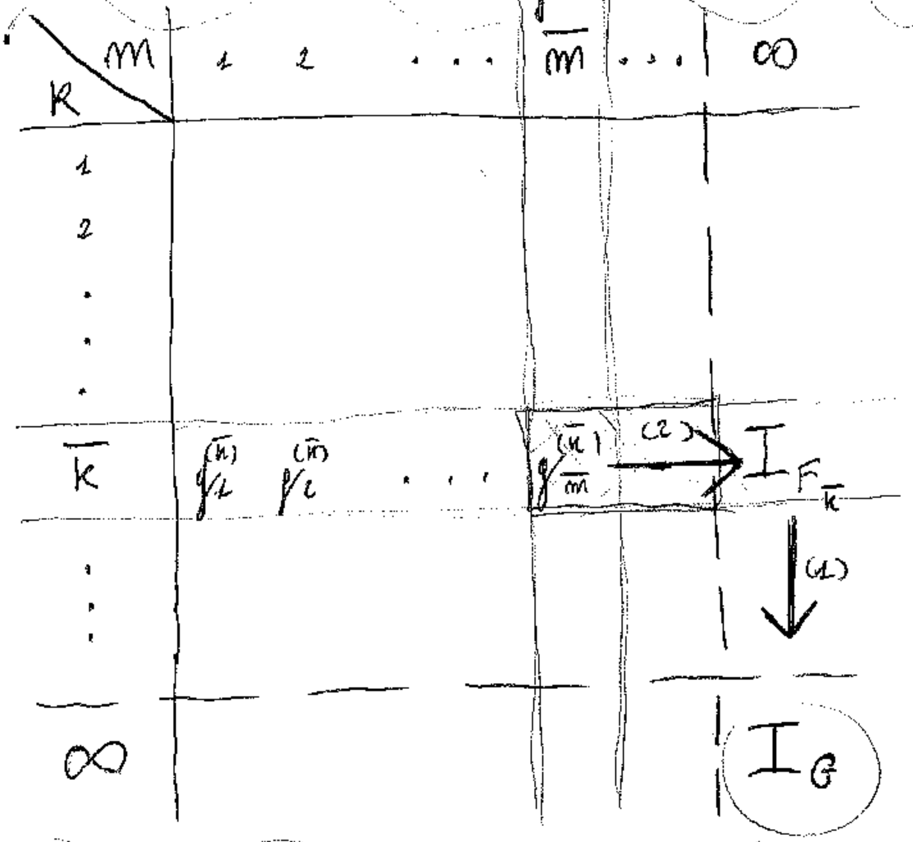
$$\|I_G - I_{G\cap B_k}\|_p^p = \int_E |\underbrace{I_G(x)-I_{G\cap B_k}(x)}_{=I_{G\setminus B_k}(x)}|^p\,dx = \int_E I_{G\setminus B_k}(x)\,dx =$$

$= \mathcal{L}^n(G\setminus B_k) \downarrow \mathcal{L}^n(\emptyset)=0$ in quanto $(G\setminus B_k)_{k\ge1}$ è famiglia (strett.) DECRESCENTE e $\bigcap_{k\ge1}(G\setminus B_k) = G\setminus\left(\bigcup_{k\ge1} B_k\right)=\emptyset$

|| CON $\mathcal{L}^n(G\setminus B_1)\le \mathcal{L}^n(G)<\infty$ ||.

~~[$\boxed{p=\infty}$: $\forall x\in E$, $I_{G\cap B_k}(x)\xrightarrow{k} I_G(x)$ in L^∞ (e in L^p per $1\le p<\infty$ se fosse $\mathcal{L}^n(E)<\infty$)]~~ NO, perché c'è da immaginare G ILLIMITATO, quindi $\|I_G-I_{F_k}\|_\infty=\|I_{G\setminus F_k}\|_\infty=1$! ($\mathcal{L}^n>0$!)

Dunque, $\forall\, 1\le p<\infty$, $\forall k\ge1$, $\exists\,(\varphi_m^{(k)})_{m\ge1}$ continue e supporto compatto tale che $\varphi_m^{(k)} \xrightarrow[(m)]{L^p} I_{F_k}$; allora, $\forall\varepsilon>0$:



(1) $\exists\,\bar k\ge1$: $\forall k\ge1$, $k\ge\bar k$ $\Rightarrow \|I_G-I_{F_k}\|_p\le\frac{\varepsilon}{2}$, IN PARTICOLARE $\|I_G-I_{F_{\bar k}}\|_p\le\varepsilon/2$;

(2) $\exists\,\bar m\ge1$: $\forall m\ge1$, $m\ge\bar m$ $\Rightarrow \|I_{F_{\bar k}}-\varphi_m^{(\bar k)}\|_p\le\varepsilon/2$, IN PARTICOLARE $\|I_{F_{\bar k}}-\varphi_{\bar m}^{(\bar k)}\|_p\le\varepsilon/2$,

e in conclusione

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\varphi:=\varphi_\varepsilon:=\varphi_{\bar m}^{(\bar k)}$ continua e supporto compatto tale che $\|I_G-\varphi\|_p \overset{(DIS.TR.)}{\le} \|I_G-I_{F_{\bar k}}\|_p+\|I_{F_{\bar k}}-\varphi\|_p\le\varepsilon$. □

Siano allora $S:=\{s:E\to\mathbb{R}$ mis. $|$ s è semplice e con $\mathcal{L}^n\{s\ne0\}<\infty\}$ e (possiamo immaginare $\mathcal{L}^n(G)=\infty$!)

$X := \{ g : E \to \mathbb{R} \mid g$ è continua e supporto compatto $\}$ $(=C_c^0)$ (10)
evidentemente chiaramente $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathcal{L}^p$.

$\boxed{\text{III}}$ ▪ $\forall\, 1 \le p < \infty$, $\forall\, s \in S$, $\exists\, (g_m)_{m\ge 1}$ in X :

$$g_m \xrightarrow{\mathcal{L}^p} s .$$

▪ usando che, $\forall\, 1 \le p \le \infty$ $(\cancel{<})$, $\mathcal{L}^p = \overline{S}^{\mathcal{L}^p}$,

ottengo $\forall\, 1 \le p < \infty$, anche $\mathcal{L}^p = \overline{X}^{\mathcal{L}^p}$.

$\boxed{\cdot}$ ⊙ $\forall s \in S$, $\exists\, h \ge 1$: $s = \sum_{k=1}^{h} \alpha_k I_{G_k}$ e, $\forall\, 1 \le k \le h$, $\alpha_k \ne 0$ ($\alpha \neq \pm\infty$!) e i G_k sono DISGIUNTI; inoltre, $\forall 1\le k\le h$, $G_k \subseteq \{s \ne 0\}$ $\Rightarrow \mathcal{L}^n(G_k) \le \mathcal{L}^n\{s \ne 0\} < \infty$, per cui $\exists\, (g_m^{(k)})_{m \ge 1}$ in X tale che $g_m^{(k)} \xrightarrow[(m)]{\mathcal{L}^p} I_{G_k}$ (per II): ho le tesi considerando $g_m := \sum_{k=1}^{h} \alpha_k g_m^{(k)}$ $\forall m \ge 1$ (infatti $\|s - g_m\|_p = \|\sum_{k=1}^{h} \alpha_k (I_{G_k} - g_m^{(k)})\|_p \le \sum_{k=1}^{h} |\alpha_k| \, \|I_{G_k} - g_m^{(k)}\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$). □

⊙ Per $\overline{S}^{\mathcal{L}^p} = \mathcal{L}^p$, posso lavorare con $f \in \mathcal{L}^p$, $f \ge 0$: infatti, dimostrato in tale caso, per $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^p$ qualsiasi, considero $(s_m^{(1)})_{m\ge 1}$ e $(s_m^{(2)})_{m \ge 1}$ in S tali che $s_m^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f^+$ e $s_m^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f^-$, e dunque $s_m := s_m^{(1)} - s_m^{(2)}$ $\forall m \ge 1$ (per le quali $\|f - s_m\|_p = \|(f^+ - s_m^{(1)}) - (f^- - s_m^{(2)})\|_p \le$ $\le \|f^+ - s_m^{(1)}\|_p + \|f^- - s_m^{(2)}\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$). Ebbene, consideriamo quelle $0 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_m \le \ldots \le f$

semplice (mis.) tale che, $\forall x \in E$, $s_m(x) \uparrow_{m\to\infty} f(x)$ (Mai … ai … cose ~~…~~ sarebbe già dimostrato!) ; allora

$s_m \leq \underset{(\in L^p)}{f}, \forall m \geq 1 \Rightarrow (s_m)_{m\geq 1}$ è in L^p, $\Rightarrow$ in S

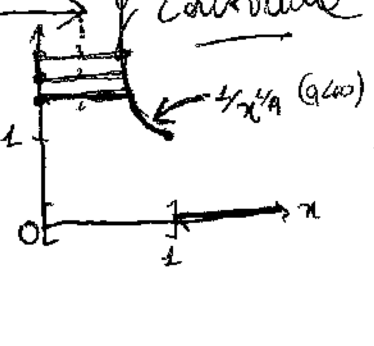
(altrimenti $\left\|\sum_{k=1}^{h} \alpha_k^{(m)} I_{G_k^{(m)}}\right\|_p^p \overset{(\text{disg.})}{\geq} \int_{G_k^{(m)}} (\alpha_k^{(m)})^p I_{G_k^{(m)}}(x)\,dx = \underset{(\neq 0)}{(\alpha_k^{(m)})^p} \mathcal{L}^n(G_k^{(m)}) = \infty$), (se $\mathcal{L}^n(G_k^m) = \infty$)

e dalla DOMINAZIONE IN L^1 $|f - s_m|^p \leq f^p$ ottengo per Lebesgue $\|f - s_m\|_p^p = \int_E |f - s_m|^p(x)\,dx \xrightarrow[m\to\infty]{\text{conv. punt. + dominaz.}} \int_E |f - f|^p(x)\,dx = 0$ (e continuità). In conclusione, grazie al $\odot$ precedente, ottengo $\overline{X}^{L^p} = L^p$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$ usando lo stesso "metodo a due parti" ottenuto in II. $\square$

(che comunque può essere ottenuto: "$\|\underset{L^p}{f} - \underset{C^0_c}{g_\varepsilon}\|_p \leq \|f - \underset{S}{s_\varepsilon}\|_p + \|\underset{S}{s_\varepsilon} - g_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$"!)

$\Rightarrow \forall\, 1 \leq p < \infty$, sia $C^0 \cap L^p$ sia $\{f \in \mathbb{R}^E \text{ mis.} \mid f \text{ ha supporto compatto}\} \cap L^p$ sono DENSI IN $(L^p, \|\cdot\|_p)$.

Per $\boxed{p = \infty}$ sono entrambe FALSE: la prima perché g_n continue $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ continua, mentre per la seconda si consideri ad esempio



(lo stesso esempio mostra come se quando le fn ha supporto compatto e in L^q $(q<\infty)$ sarebbero CONTINUE!)

LUSIN: $\mathcal{L}^n(E)<\infty \Rightarrow \forall f: E\to\mathbb{R}$ MIS., $\forall \varepsilon>0$, $\exists E' \in \mathcal{P}(E)\cap\mathcal{M}^n$ tale che $\mathcal{L}^n(E')\leq\varepsilon$ e $E\setminus E'$ è CHIUSO, $\exists g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ CONTINUA, TALI CHE $f\equiv g$ su $E\setminus E'$ ("quasi-q.o.")

Inoltre, $\forall 1\leq p\leq\infty$, $f\in\mathcal{L}^p \Rightarrow$ anche g può essere presa tale che $g|_E\in\mathcal{L}^p$, distinguendo i casi

$$\begin{cases} 1\leq p<\infty \Rightarrow \|g|_E - f\|_p\leq\varepsilon; \\ p=\infty \Rightarrow \forall x\in E,\ |g(x)|\leq\|f\|_\infty. \end{cases}$$

Possiamo supporre $\boxed{f\in\mathcal{L}^\infty}$, perché per f qualsiasi avremmo allora che $\operatorname{atan}(f): E\to\mathbb{R}$ MIS. e, anzi, in $\mathcal{L}^\infty$, $\Rightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists E': \ldots$ e $\tilde{g}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continua tale che $\operatorname{atan}(f)\equiv\tilde{g}$ su $E\setminus E'$, CIOÈ $f\equiv \underset{\text{CONTINUA!}}{\tan}(\tilde{g})=: g$ (CONTINUA!) su $E\setminus E'$.

Ma allora $f\in\mathcal{L}^\infty$ E $\mathcal{L}^n(E)<\infty \Rightarrow f\in\mathcal{L}^p$, $\forall p\geq 1$; in particolare $f\in\mathcal{L}^1 \Rightarrow \exists (f_n)_{n\geq 1}$ in $C^0\cap\mathcal{L}^1$ tali che $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} f$, $\Rightarrow f_n\xrightarrow{\mathcal{L}^n} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{SOTTO q.o.}} f$, cioè $\exists$ sottosuccessione $(f_k)_{k\geq 1} := (f_{n_k})_{k\geq 1}$ tale che $\boxed{f_k\xrightarrow{\text{q.o.}} f}$, e ancora $\boxed{\mathcal{L}^n(E)<\infty} \overset{\text{EGOROV!}}{\Rightarrow} \forall\varepsilon>0$, $\exists E'\in\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{M}^n$ CON $\mathcal{L}^n(E')\leq\varepsilon$ e $E\setminus E'$ CHIUSO tale che $f_k \xrightarrow{\text{UNIF. SU } E\setminus E'} f$, $\overset{f_k \text{ CONTINUE}}{\Rightarrow} f$ è CONTINUA SU $E\setminus E'$; ma appunto $E\setminus E'$ è CHIUSO, e allora (TEOREMA DI ESTENSIONE DI TIETZE!) $\exists$

$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ CONTINUA "che estende $f_{(\text{da } E\setminus E')}$" cioè tale che $f\equiv g$ su $E\setminus E'$. ✓

$\boxed{p=\infty}$: essendo allora g un'estensione continua di f da $E\setminus E'$ a tutto E, ma essendo f q.o. LIMITATA, possiamo scegliere g tale che sia $|g|\le\|f\|_\infty$ q.o., ANZI OVUNQUE (per continuità di g!).

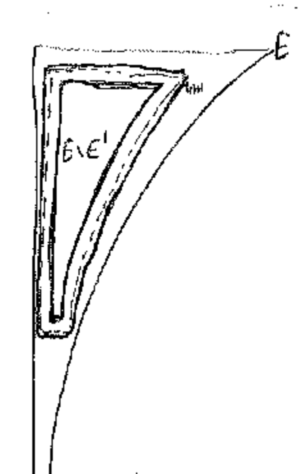
$\boxed{1\le p<\infty}$: come prima, $f\in L^p\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists E'$: ... tale che $f|_{E\setminus E'}$ è continua, ANZI E' misurabile $\subseteq E\cap\overline{B(0,\bar R)}$ per un $\bar R>0$ tale che $\mathcal{L}^n(E\setminus\overline{B(0,\bar R)})\le\varepsilon$

(che misura $<\infty$ e maggiore regolare!) $\mathcal{L}^n(E)<\infty$!

$\left((E\setminus\overline{B(0,R)})_{R\ge0}\downarrow\emptyset\Rightarrow\text{le loro misure}\downarrow 0\right)$, $\Rightarrow$

$E\setminus E'$ è COMPATTO (e tale che non "tocchi" il bordo di $E\cap\overline{B(0,\bar R)}$), per cui $f|_{E\setminus E'}$ è LIMITATA;

ora, consideriamo aperti $\subseteq E\cap B(0,\bar R)$ $(A_m)_{m\ge1}\downarrow E\setminus E'$ ($E\setminus E'$ CHIUSO!) tali che dunque $\mathcal{L}^n(A_m\setminus(E\setminus E'))\downarrow 0$ ($\mathcal{L}^n(E)<\infty$!), e consideriamo $g_\varepsilon\in C^0\cap L^p$ tale che $\|f-g_\varepsilon\|_p^p\le\varepsilon/2$ ($p<\infty$!!), g_ε è LIMITATA su $\overline{A_m}$: pongo $g:=f$ su $E\setminus E'$, $g:=g_\varepsilon$ su $E\setminus A_m$, e che si raccorda da $E\setminus E'$ a ∂A_m in modo CONTINUO E TALE CHE qui abbia $\|\cdot\|_p\le\|g_\varepsilon\|_p$. Allora



$$\|f-g\|_p^p=\underbrace{\int_{E\setminus E'}|f(x)-g(x)|^p\,dx}_{0}+\underbrace{\int_{A_m\setminus(E\setminus E')}|f(x)-g(x)|^p\,dx}_{\overset{\text{MINK.}}{\le}\left[\left(\int_{A_m\setminus(E\setminus E')}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_{A_m\setminus(E\setminus E')}|g_\varepsilon(x)|^p dx\right)^{1/p}\right]^p}+\underbrace{\int_{E\setminus A_m}|f(x)-g(x)|^p\,dx}_{\le\|f-g_\varepsilon\|_p^p\le\varepsilon/2}$$

ESARÀ POSSIBILE ...

$g=f$; $g=g_\varepsilon$

$\longrightarrow 0$ (PER CONTINUITÀ rispetto a succ. $\downarrow$ di mis. CON PRIMO ELEMENTO DI MISURA $<\infty$, di misure quali quelle di base $\mathcal{L}^n$)

Dunque anche l'addendo centrale è $\le\varepsilon/2$ per m "abbastanza grande". □

$$\boxed{\forall\ 1 \le p \le \infty,\ f \in \mathcal{L}^p \Rightarrow |f| < \infty \text{ q.o.}}$$

PROPOSIZIONI SUGLI $\mathcal{L}^p$ ①

[$\boxed{p=\infty:}$ $|f| \le \|f\|_\infty$ q.o., ma $\|f\|_\infty < \infty$! ($1\le$ $\boxed{p<\infty}$: se per assurdo $N := \{|f| = \infty\}$ ($\in \mathcal{M}^n$) avesse $\mathcal{L}^n(N) > 0$, allora però

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p dx = \underbrace{\int_{E\setminus N} |f(x)|^p dx}_{\le \|f\|_p^p < \infty} + \underbrace{\int_N |f(x)|^p dx}_{\infty \cdot \underbrace{\mathcal{L}^n(N)}_{>0!} = \infty} = \infty,$$

(se, $\forall M > 0$, $|f| \ge M$ su N, allora anche $\int_N |f(x)|^p dx \ge M^p \cdot \underbrace{\mathcal{L}^n(N)}_{\neq 0}$)

che è assurdo. ▫]

$$\boxed{\forall\ 1 \le p \le \infty,\ f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f \Rightarrow \|f_n\|_p \to \|f\|_p .}$$

[$\|\cdot\|_p$ è una NORMA, dunque vale $\forall f, g \in \mathcal{L}^p$ la "dis. tr. completa" (VEDI PIÙ AVANTI...)

$$\big|\|f\|_p - \|g\|_p\big| \le \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \Rightarrow$$

$$\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \le \|f_n - f\|_p \to 0 \quad . \ ▫]$$

$$\boxed{\forall\ 1 \le p \le \infty, \text{ il limite in } \mathcal{L}^p \text{ è UNICO.}}$$

[$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \begin{cases} f \\ g \end{cases} \Rightarrow \|f - g\|_p = \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_p \le$

$\le \|f - f_n\|_p + \|f_n - g\|_p \to 0$, per cui necessariamente $\|f - g\|_p = 0$, cioè $f = g$ q.o. ▫]

$\boxed{\text{"}\|f_n - f\|_p\text{"} \to 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p .}$ [$\forall n \ge 1$, "$\|f\|_p$" $\le \|f_n\|_p +$ "$\|f - f_n\|_p$" $\le$ $\le \|f_{\bar n}\|_p + \varepsilon$ per un $\bar n \ge 1$ ($\varepsilon > 0$), $< \infty$. ▫]

⊛ <u>PRECISAZIONE SU EGOROV</u> (quindi LUSIN): NON discende dalla dimostrazione che sia mai $E\setminus E'$ CHIUSO (invece sì per $(f_n)_{n\ge1}$ e f CONTINUE!), però lo possiamo supporre tale. Infatti, $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, E' \in \mathcal{P}(E)\cap\mathcal{M}^n$ con $\mathcal{L}^n(E')$ $\boxed{\le}$ $\varepsilon/2$ tale che $f_n\to f$ UNIF. su $E\setminus E'$ (nelle ipotesi $\mathcal{L}^n(E)<\infty$ e $f_n\xrightarrow{q.o.}f$), e d'altra parte (per "natura" di $\mathcal{L}^n$!) $\exists\, A:=A_\varepsilon$ aperto e $C:=C_\varepsilon$ CHIUSO tali che

$$C\subseteq E\setminus E'\subseteq A \quad e \quad \mathcal{L}^n(A\setminus C)\le\frac{\varepsilon}{2} \quad \Big(\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^n((E\setminus E')\setminus C) \underset{(\text{per}\subseteq A\setminus C!)}{\boxed{\le}} \varepsilon/2 \Big);$$

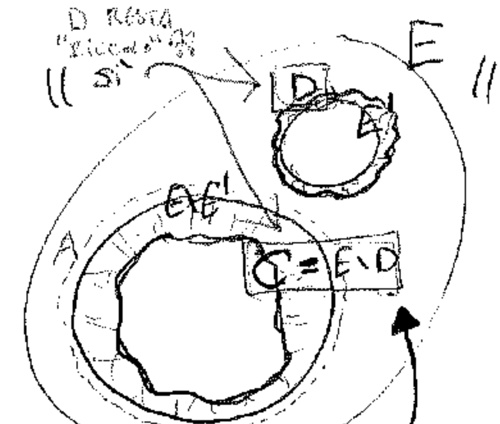
ora, non solo $f_n\to f$ <u>UNIF. SU C</u> a maggior ragione, ma anche $\underline{C} = \underline{E\setminus D}$ con $\mathcal{L}^n(D)\le\varepsilon$:

$$(E\setminus E')\setminus((E\setminus E')\setminus C) = C = E\setminus D \overset{\mathcal{L}^n(E)<\infty}{\Rightarrow}$$

$$\cancel{\mathcal{L}^n(E)}-\mathcal{L}^n(E')-\mathcal{L}^n((E\setminus E')\setminus C) = \cancel{\mathcal{L}^n(E)}-\mathcal{L}^n(D), \quad \text{cioè}$$

$$\mathcal{L}^n(D)=\mathcal{L}^n(E')+\mathcal{L}^n((E\setminus E')\setminus C)\ \boxed{\le}\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dunque posso prendere D invece di E', e $E\setminus D$ <u>CHIUSO</u> invece di $E\setminus E'$. □



ovviamente D è il complementare di C in E!

$D\supseteq E'$ $\Leftarrow$ $(E\setminus E'\supseteq C!)$

$\forall\, 1\le p\le\infty$, $f,g\in\mathcal{L}^p \Rightarrow f\vee g:=\max\{f,g\}$ e $f\wedge g:=\min\{f,g\}$ (notoriamente MIS.!) stanno in $\mathcal{L}^p$.

Semplicemente perché $f\vee g=\frac{f+g+|f-g|}{2}$ e $f\wedge g=\frac{f+g-|f-g|}{2}$, com'è evidente! (NOTA: basta per $f\vee g$, perché $f\wedge g = -[(-f)\vee(-g)]$! A proposito, altrimenti, avremmo potuto ragionare con

$f^+ := f \vee 0$ (≥ 0) e $f^- := -(f \wedge 0)$ (≥ 0), che stanno in L^1 perché $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow (0 \leq)\, f^+, f^- \leq |f|$, e allora concludere osservando che $f \vee g = f + (g-f)^+$ ✓ □]

Dato $K \in \mathbb{R}^n$ COMPATTO, $\forall\, 1 \leq p \underset{(\neq)}{<} q \leq \infty$ $\overline{L^q(K)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(K)$

[Anzitutto $\mathcal{L}^n(K) < \infty \Rightarrow L^q(K) \underset{(\neq)}{\subseteq} L^p(K)$ $\forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty$, e anzi è ivi DENSO perché $C^0(K)$ lo è in $L^p(K)$ $(p<\infty!)$, essendo K compatto, e ovviamente $C^0(K) \underset{(\neq)}{\subseteq} L^q(K)$ $\forall\, 1 \leq q \leq \infty$ □]
(perché $C^0(K) \subseteq L^\infty(K)$!)

($\Rightarrow$ $L^2([-\pi,\pi])$ è $\underset{(\text{risp. } \|\cdot\|_1)}{\text{DENSO}}$ in $L^1([-\pi,\pi])$!)

[⚠: vedi convoluzione...]

$\forall\, 1 \leq p < \infty$, su $\mathbb{R}^d$ $C^\infty_c \doteq \mathcal{D}$ è DENSO in L^p.

[L'approssimazione per convoluzione con $\rho_\delta \in \mathcal{D}$ di $f \in L^p$, $(p<\infty)$, ci dice che $C^\infty \cap L^p$ è denso in L^p; e questo perché $\mathcal{D}$ è denso in $C^\infty \cap L^p$ grazie alle "CUT-OFF FUNCTION"

[$\forall\, g \in C^\infty \cap L^p$, se $\rho_M \in \mathcal{D}$ è, $\forall M \geq 1$,

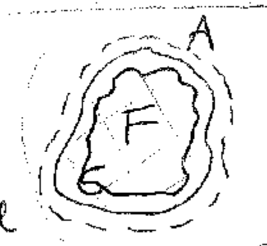
(raccordo regolare affinché $\rho_M \in C^\infty$!)

allora $\rho_M \xrightarrow[M\to\infty]{\mathbb{R}} 1$ e $g \cdot \rho_M \in \mathcal{D}$ tale che $g \cdot \rho_M \xrightarrow[M\to+\infty]{L^p} g$ $(\forall\, 1 \leq p < \infty)$:

$$\|g - g\rho_M\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g - g\rho_M|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g|^p |1-\rho_M|^p\, dx \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$$ per Lebesgue grazie alla dominazione con $|g|^p \in L^1$. ✓]

ALTRA DIM. ($p<\infty$): L^p_c è denso in L^p ($C^0_c \subseteq L^p_c$!) e analogamente $\mathcal{D}$ è denso in L^p_c ovvero (per approssimazione per "$*$", ricordando che $\underset{\substack{\uparrow \\ \in L^q \\ \text{(che ovviamente è} \\ \propto\, g_\delta \in \mathcal{D}\,!)}}{g_\delta}$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \in L^1}}{f}$ sono a supporto compatto $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ $\Rightarrow$ $g_\delta * f$ è a supporto compatto! □

∀ $1 \le p < \infty$, possiamo approssimare in $L^p(E)$ ($E \in \mathcal{M}^n$ con $\mathcal{L}^n(E) > 0$) ogni I_F, $F \subseteq E$ (in $\mathcal{M}^n$), con I_A dove A è aperto, e questa con I_R dove R è "rettangolo".



Per "natura" di $\mathcal{L}^n$, ∀ $F \subseteq E$ e ∀ $\varepsilon > 0$ esistono $A := A_\varepsilon$ aperto e $C := C_\varepsilon$ chiuso tale che $C \subseteq F \subseteq A$ e $\mathcal{L}^n(A \setminus C) \le \varepsilon$; ma $A \setminus F \subseteq A \setminus C$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}^n(A \setminus F) \le \varepsilon}$, ed essendo $|I_A - I_F| = I_{A \setminus F}$ ho ottenuto che, ∀ $1 \le p < \infty$, $\|I_A - I_F\|_p^p = \int_E |I_A - I_F|^p \, dx =$

$= \int_E \underbrace{I_{A\setminus F}^p}_{= I_{A \setminus F}\,!!} \, dx = \mathcal{L}^n(A \setminus F) \le \varepsilon$. È evidente che posso ripetere tutto questo con A al posto di F e R al posto di C! □

(NOTA: volendo mantenere un contenimento tipo $F \subseteq A$ o $R \subseteq A$, è chiaro che l'approssimazione NON sarà vera per $p = \infty$! ($\|I_{A \setminus F}\|_\infty = 1$!))

[V: DOPO STONE-WEIERSTRASS...]

I polinomi reali PARI (su $[0,1]$) sono densi in $L^p_{\mathbb{R}}([0,1])$ ∀ $1 \le p < \infty$.
($p = \infty$ NO perché non tutte le funzioni in $L^\infty(0,1)$ sono CONTINUE!!)

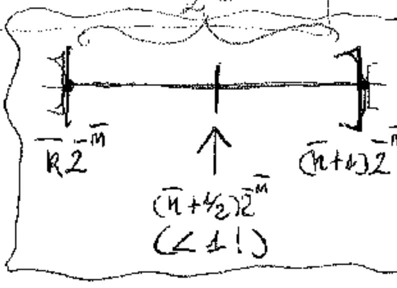
Infatti $C^0_{\mathbb{R}}[0,1]$ è denso in $L^p_{\mathbb{R}}[0,1]$ (∀ $1 \le p < \infty$), e i polinomi su $[0,1]$ reali pari sono $\|\cdot\|_\infty \underset{\substack{\text{CONTINUITÀ} \\ [0,1]}}{\Rightarrow} \|\cdot\|_p$ – DENSI in $C^0_{\mathbb{R}}[0,1]$ grazie a STONE – WEIERSTRASS: ne sono una sottoalgebra (reale), contengono le costanti ($1 = x^0$!) e separano i punti (SIANO SU $[0,1]$!!). $\square$ ③

(NOTA: i polinomi dispari NON contengono le costanti, anche se separerebbero i punti anche su un intervallo centrato in 0 tipo $[-1,1]$; inoltre è ovvio che vale il risultato dimostrato anche su $[-1,0]$: basta non considerare intervalli "tipo centrati in 0"!
Infine i polinomi non costanti ~~pure~~ ~~di~~ al più un certo grado NON sarebbero chiusi per prodotto.)

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\{ I_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \mid n \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^n - 1 \}\right) =$$
$$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\{ \text{indicatrici degli INTERVALLI DIADICI di } [0,1] \}\right) \text{ è}$$
DENSO in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. (ANALOGO per $L^2_{\mathbb{R}}([i,i+1])$, $\forall i \in \mathbb{Z}$!)

~~È infatti denso in $C^0_{\mathbb{R}}(0,1)$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ ($\mu([0,1])<\infty$!) ($\geq \|\cdot\|_2$!) per STONE-WEIERSTRASS... o meglio, lo sarebbe se fosse $\subseteq C^0$!!~~

Dimostriamolo ~~allora~~ direttamente (in $\|\cdot\|_\infty$): ~~$\forall \eta > 0$ "piccolo" ($\downarrow 0$, e in ogni caso $\eta < 1$)~~ $\forall f \in C^0_{\mathbb{R}}([0,1])$, f CONTINUA SUL COMPATTO $[0,1]$ $\Rightarrow$ f UNIF. CONTINUA su $[0,1]$, cioè, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \underset{(:=\delta_\varepsilon)}{\delta > 0}$ tale che, $\forall x,y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$; fissiamo allora tale ε e consideriamo proprio quel δ; essendo $2^{-n} \downarrow 0$, sia inoltre $\bar{n}$ ($:= \bar{n}_\delta$) tale che $2^{-\bar{n}} \leq \delta$, e sia quindi
$$s_\varepsilon := \sum_{k=0}^{2^{\bar{n}}-1} \alpha_k I_{[k2^{-\bar{n}},(k+1)2^{-\bar{n}}]}$$



CON (ADES...) $\alpha_k := f((k+1/2)2^{-\bar{n}})$: allora

$$\|f - s_\varepsilon\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f - s_\varepsilon| \underset{\text{i diadici "partizionano"!}}{\overset{(\bar{k} \text{ opportuno})}{=}} \sup_{[\bar{k}2^{-\bar{n}},(\bar{k}+1)2^{-\bar{n}}]} |f - s_\varepsilon| \overset{\text{def } s_\varepsilon}{=}$$

$$= \sup_{[\bar{k}2^{-\bar{m}},(\bar{k}+1)2^{-\bar{m}})} |\underbrace{g - g((\bar{k}+1/2)2^{-\bar{m}})}_{(\leq \epsilon \text{ sempre, su } [\bar{k}2^{-\bar{m}},(\bar{k}+1)2^{-\bar{m}}]!\ )}| \leq \epsilon$$; ciò conclude ~~perché perché~~ $\square$

~~è stata usata l'unif. continuità di g su un intervallo $[0,1-\eta]$ in effetti, e NON su $[0,1)$ (che in generale neanche si ha): facendo infatti $\eta \uparrow 1$ "finché tutto torna" con quel $(\bar{k}+1)2^{-\bar{m}}$~~ NO

le "$I_{[k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}$" sono DENSE in $\mathcal{L}^2(0,1)$ banalmente perché $f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f \Leftrightarrow f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^2} g$ per ogni modificazione delle f_m e di f su trascurabili (e allora $f \in \mathcal{L}^2(0,1) = \mathcal{L}^2[0,1]$ le approssimano con le "$I_{[k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}$" in $\mathcal{L}^2$, cioè con le $I_{[k2^{-m},(k+1)2^{-m}]}$ $\forall \gamma$)! ANALOGO per $[i,i+1]$, $i \in \mathbb{Z}$)

È falsa in generale la disuguaglianza di HÖLDER per $0 < p < 1$.

Scelgo infatti $p = 1/2$ ed esibisco su $\mathbb{R}$ f e $g \gneq 0$ (H.S.) tali che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx > \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(x)}\,dx\right\}^2 \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{g(x)}\,dx\right\}^2$:

siano $f(x) = g(x) := \log^2(x) I_{(0,1]}$; allora il primo membro è $\int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^1 \log^4(x) dx = (-1)^4 4! = 24$, mentre il secondo $\left\{\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx\right\}^4 = \{\underbrace{\int_0^1 |\log(x)| dx}_{(=1!)}\}^4 = 1$. $\square$

Gli spazi $\mathcal{L}^p(E)$ NON sarebbero completi se considerassimo l'integrale di Riemann, piuttosto che quello di Lebesgue.

Siano $E = [0,1]$ e $p = 1$, ad esempio; l'idea è sfruttare che contemporaneamente $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è denso in $[0,1]$ ma $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0$. Cominciamo col "gonfiare $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ma non troppo": se $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n\}_{n \geq 1}$, allora sia $\forall n \geq 1$ $D_n :=$

$:= (q_n - r_n, q_n + r_n)$ CON $(r_n)_{n\ge1}$ in $(0,\infty)$ ("piccoli") tali che $D_n \subsetneq [0,1]$ e $\sum_{n\ge1} r_n = \frac{1}{4}$ (distribuiamo "1/4" tra tutti i razionali!) ; dunque $\mathbb{Q} \subsetneq D := \bigcup_{n\ge1} D_n$

$\Rightarrow$ D è denso in $[0,1]$, ma con $\mathcal{L}^1(D) \le \sum_{n\ge1} \underbrace{\mathcal{L}^1(D_n)}_{2\cdot r_n} = 1/2 < 1 = \mathcal{L}^1([0,1])$. Quindi se per assurdo esistesse $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ RIEMANN-INTEGRABILE tale che $f \overset{q.o.}{=} \mathbb{I}_D$, allora sarebbe a maggior ragione Lebesgue-integrabile CON $0 < \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 I_D(x)dx = \mathcal{L}^1(D) < 1$; ora può sì esistere successione di funzioni SEMPLICI $[0,1]\to\mathbb{R}$ $\left(g_n := \sum_{k=0}^{h^{(n)}} \alpha_k^{(n)} I_{A_k^{(n)}}\right)_{n\ge1}$ tale che $g_n \ge f$ $\forall n\ge1$ e $\int_0^1 g_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)dx$ $(<1!)$, e qui scopriamo un assurdo: infatti D DENSO $\Rightarrow \forall n\ge1,\ \forall\, 0\le k\le h^{(n)},\ \exists\, \bar{x}_k^{(n)} \in A_k^{(n)}\cap D$ (anche tale che $f(\bar{x}_k^{(n)})=1$ ...!) tale che $\alpha_k^{(n)} = g_n(\bar{x}_k^{(n)}) \ge f(\bar{x}_k^{(n)}) = 1$ ($f = I_D$ q.o.) $\Rightarrow g_n \ge 1$ $\forall n\ge1$, $\Rightarrow \int_0^1 g_n(x)dx \ge 1$ $\forall n\ge1$! In conclusione D = RAZIONALI GONFIATI (ma non troppo) $\Rightarrow I_D$ è $\mathcal{L}$.-int. MA NON R.-int.

Da questo fatto $\left(f_n := I_{\bigcup_{m=1}^{n} D_m}\right)_{n\ge1}$ è una successione di R.-integrabili e DI CAUCHY, ma NON convergente ad una R.-integrabile: infatti piuttosto $f_n \xrightarrow{L^1(0,1)} I_D$, perché $I_D - f_n = I_{\bigcup_{m\ge n+1} D_m} \Rightarrow \|I_D - f_n\|_1 \le \sum_{m\ge n+1} \underbrace{\mathcal{L}^1(D_m)}_{2\cdot r_m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ma appunto I_D NON è R.-int. (Che le f_n siano DI CAUCHY è ovvio o direttamente, OSSERVANDO che restano tra le R.-integrabili, oppure perché convergenti MA restando comunque R.-integrabili!) . □

$\forall\, 1 \le p \le \infty$, $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E), \|\cdot\|_p)$ è un $\mathbb{C}$-sp. DI BANACH.
(che $\underset{(\neq)}{\supsetneq} \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$ (CHIUSO!))

[È un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, "cioè" $\|\cdot\|_p$ è effettivamente una norma, perché ovviamente NON consideriamo $f: E \to \mathbb{C}$ (MODULO in $\mathbb{C}$!!) MA $|f|: E \to \mathbb{R}_+$! Precisamente $f \in \mathbb{C}^E \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E) \Leftrightarrow$ (OVVIO) $|f| \in [0,\infty)^E \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$ (CHE CONOSCIAMO!), $\Leftrightarrow$ (SE $f := f_1 + if_2$) $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^E \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$ [$\Rightarrow$]: $|f_1|, |f_2| \le \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = |f|$; $\Leftarrow$): $|f| \le |f_1| + |f_2|$.] ; per ciò ora basta osservare banalmente che, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall f, g \in \mathbb{C}^E_{\text{MIS.}}$ ($\in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E)$, anzi), $|\alpha f| = |\alpha||f|$ e $|f+g| \le |f| + |g|$.

Infine è COMPLETO: se infatti $(f_n)_{n\ge1}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E)$, allora lo sono entrambe $(f_n^{(1)})_{n\ge1}$ e $(f_n^{(2)})_{n\ge1}$ in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$, se $\forall n \ge 1$ $f_n := f_n^{(1)} + i f_n^{(2)}$, perché $\forall n' > n \ge 1$ è

$$\left| \|f_{n'}^{(1)} - f_n^{(1)}\|_p - \|f_{n'}^{(2)} - f_n^{(2)}\|_p \right| \underset{\substack{\text{(DIS. TR.}\\\text{COMPLETA!)}}}{\overset{(|i|=1!)}{\le}} \|f_{n'} - f_n\|_p \quad \text{(facile!)}),$$

onde sono entrambe convergenti in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$, diciamo $f_n^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)} f^{(1)}$ e $f_n^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)} f^{(2)}$; allora $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E)} f := f^{(1)} + i f^{(2)}$ per dis. tr.:

$$\|f_n - f\|_p \overset{(|i|=1!)}{\le} \|f_n^{(1)} - f^{(1)}\|_p + \|f_n^{(2)} - f^{(2)}\|_p \to 0. \ \square \ ]$$

(NOTA: $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \bar{f} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$, avendo uguale $\|\cdot\|_p$!)

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE.

Sia $d \geq 1$ intero fissato e, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, sia $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$.

$\forall\, 1 \leq p \leq \infty$ e $\forall\, h \in \mathbb{R}^d$ fissati, l'applicazione

$$\tau_h : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathcal{L}^p$$
$$f \longmapsto \tau_h(f)(x) = \tau_h f(x) \doteq f(x-h)$$

è un'ISOMETRIA (per cui in effetti il codominio è $\mathcal{L}^p$!) e anche l'applicazione

$$\circ : \mathcal{L}^p \longrightarrow \mathcal{L}^p$$
$$f \longmapsto \mathring{f}(x) \doteq f(-x)$$

è un'ISOMETRIA, quindi (NOTO!) lo è la loro composizione.

[$\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall\, f,g \in \mathcal{L}^p$, $(af+bg)(x-h) = af(x-h)+bg(x-h)$ e $(af+bg)(-x) = af(-x)+bg(-x)$ dimostrano la linearità di entrambe le applicazioni; allora sono iniettive: $0 \mapsto 0$, e, se $f(x-h)=0$ per q.o. $x-h$, allora $f(x)=0$ per q.o. x, e lo stesso per $f(-x)$ ($\mathcal{L}^p$ mantiene i trascurabili PER TRASLAZIONI / SIMMETRIE); precisamente, se $f(x-h)=0$ tranne che per $x-h = n \in N$ (trascurabile), allora $f(x)=0$ tranne che per $x = n+h \in$ "$N+h$" (TRASCURABILE!). Inoltre sono suriettive, e in conclusione biiettive: $\forall\, g \in \mathcal{L}^p$, $g(x) = f(x-h)$ con $f(x) := g(x+h)$, e $g(x) = f(-x)$ con $f(x) := g(-x)$. Vediamo che conservano $\|\cdot\|_p$:

$\boxed{p=\infty}$: è evidente che f, $\tau_h f$ e $\mathring{f}$ hanno le stesse costanti $M>0$ maggioranti q.o. (hanno le stesse immagini e i trascurabili "si mantengono"!), dunque il massimo minimo tra queste; in simboli $\|f\|_\infty = \|\tau_h f\|_\infty = \|\mathring{f}\|_\infty$.

$\boxed{1 \le p < \infty}$: $\|\tau_h f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h)|^p\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p\,dt = \|f\|_p^p$ $(<\infty)$,

$x-h =: t$, cioè $x = t+h$, $\Rightarrow dx = dt$ e stessi estremi

e analogamente $\|\mathring{f}\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(-x)|^p\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p\,dt = \|f\|_p^p$. $\square$

$-x =: t$, cioè $x = -t$, $\Rightarrow dx = -dt$ MA gli estremi si scambiano!

$\forall f \in \mathcal{L}^p$, $\exists R>0$ tale che $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{B(0,R)}$ $\Rightarrow$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| \le c$ $(c \ge 0)$, $\operatorname{supp}(\tau_h f) \subseteq \overline{B(0,R+c)}$, $\Rightarrow \operatorname{supp}(\tau_h f - f) \subseteq \overline{B(0,R+c)}$.

Sapendo che $f(x) = 0$ $\forall |x| > R$, è $f(x-h) = 0$ $\forall |x-h| > R$; allora, se $|x| > R+c$, è $|x-h| \overset{\text{DIS. TR. CORRETTA}}{\ge} \big||x| - |h|\big| \overset{\text{(ovvio)}}{\ge} |x| - |h| > R + \underbrace{c - |h|}_{\ge 0} \ge R$, dunque effettivamente $|x-h| > R$ e dunque $f(x-h) = 0$. Infine,

$\begin{cases} f(x) = 0 \ \forall |x| > R & \text{(dunque certamente per } |x| > R+c\ (\ge R)) \\ f(x-h) = 0 \ \forall |x| > R+c \end{cases}$ $\Rightarrow$ sono entrambe 0 per quei $|x| > R+c$, dunque lo è $\tau_h f - f$. $\square$

LEMMA CHIAVE ("Continuità dei poveri"): $\forall\, 1 \le p < \infty$ e $\forall f \in \mathcal{L}^p$,
$$\tau_h f \xrightarrow[h \to 0]{\mathcal{L}^p} f.$$

$\boxed{f \in C_c^0}$: $\exists R>0$ tale che $\operatorname{supp}(f) \subseteq \overline{B(0,R)}$, $\Rightarrow \forall |h| \le 1$, $\operatorname{supp}(\tau_h f - f) \subseteq \overline{B(0,R+1)}$, $\Rightarrow \forall |h| \le 1$, $\|\tau_h f - f\|_p^p =$

$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)-f(x)|^p dx \overset{}{=} \int_{\overline{B(0,R+1)}} |f(x-h)-f(x)|^p dx \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ per (2)

convergenza dominata ($f(x-h)\xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ PER CONTINUITÀ DI f, dunque $|f(x-h)-f(x)|^p \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ per continuità di "$\wedge^p$" e $|\cdot|$; e proprio, $\forall h>0$, $|f(x-h)-f(x)| \le \|\tau_h f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$ $(<\infty)$ (OVUNQUE per costante!) $\Rightarrow |f(x-h)-f(x)|^p \le 2^p \|f\|_\infty^p$ che è INTEGRABILE nel compatto $\overline{B(0,R+1)}$).

$\boxed{f\in L^p,\ p<\infty,\ \text{qualsiasi}}$: $\forall \varepsilon>0$, $\exists g := g_\varepsilon \in C_c^0$ tale che $\|f-g\|_p \le \frac{\varepsilon}{3}$ ($p\neq\infty$!) ; per tale g, come appena dimostrato, $\exists |\bar h|>0 : \forall h\in\mathbb{R}^d$, $|h|\le|\bar h| \Rightarrow \|\tau_h g - g\|_p \le \varepsilon/3$; allora, $\forall\varepsilon>0$, $\exists |\bar h|>0$ tale che $|h|\le|\bar h| \Rightarrow$

DIS.TR. (e LIN. τ_h)

$\|\tau_h f - f\|_p = \|\tau_h f - \tau_h g + \tau_h g - g + g - f\|_p \le$

$\underbrace{\|\tau_h(f-g)\|_p}_{=\|f-g\|_p} + \|\tau_h g - g\|_p + \|f-g\|_p = 2\underbrace{\|f-g\|_p}_{\le \varepsilon/3 \text{ comunque}} + \underbrace{\|\tau_h g - g\|_p}_{\le \varepsilon/3 \text{ per tale } h} \le$

$\le \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon$. $\square$

(le p.d. serve pure falsa...)

⚠ Per $p=\infty$ è FALSA in generale, come più mostra in $d=1$ una semplice indicatrice f ($\chi_{(a,b)}$?) per la quale, $\forall h>0$, $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$.

Su $L^p\times L^q$, $1\le p,q\le\infty$, $\|(f,g)\|_{L^p\times L^q} := \|f\|_p + \|g\|_q$ è una NORMA, ed è tale che

$$(f_n,g_n)\xrightarrow{L^p\times L^q}(f,g) \Leftrightarrow \begin{cases} f_n\xrightarrow{L^p} f \\ g_n \xrightarrow{L^q} g \end{cases}.$$

[$\|f\|_p + \|g\|_q \ge 0$ e $=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\|f\|_p = 0 \text{ (cioè } f=[0]) \\ \|g\|_q = 0 \text{ (cioè } g=[0])\end{cases}$; $\lambda(f,g) = (\lambda f, \lambda g)$; $(f_1,g_1)+(f_2,g_2) = (f_1+f_2, g_1+g_2)$ ✓

Infine $\|\underbrace{(f_n,g_n)-(f,g)}_{=(f_n-f,\,g_n-g)}\|_{L^p\times L^q} = \|f_n-f\|_p + \|g_n-g\|_q$. □]

("INFINITESIME ALL'INFINITO")

$C_0^0 := \{f\in L^\infty \mid f\in C^0 \text{ e } \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}$ è $\mathbb{R}$-sottospazio (proprio e) (ovvio) CHIUSO in L^∞.

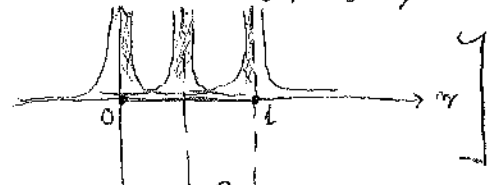
$f\in C_0^0(\mathbb{R}) \Rightarrow$ LIMITATA (in modulo) in quanto lo è all'infinito ma ANCHE su ogni compatto contenuto in $\mathbb{R}^d$!)

[$(f_n)_{n\ge1}$ in $C_0 \Rightarrow$ in C^0 $(\cap L^\infty)$, dunque $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Rightarrow f\in C^0\cap L^\infty$;

non solo: la convergenza è allora anche puntuale, dunque ho le basi per il solito "ragionamento diagonale". Precisamente, $\forall \varepsilon>0$, sia $\bar n\ge 1$ tale che, $\forall x\in\mathbb{R}^d$ (CONV. UNIF.!!), $|f(x)-f_{\bar n}(x)| \le \varepsilon/2$; essendo comunque $f_{\bar n}$ infinitesima all'infinito, $\exists\, \bar x := \bar x(\varepsilon,\bar n)$ tale che $|x|\ge|\bar x| \Rightarrow |f_{\bar n}(x)| \le \varepsilon/2$; in conclusione, $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \bar x\in\mathbb{R}^d : \forall x\in\mathbb{R}^d$, $|x|\ge|\bar x| \Rightarrow |f(x)| = |f(x)-f_{\bar n}(x)+f_{\bar n}(x)| \overset{\text{DIS. TR.}}{\le} \underbrace{|f(x)-f_{\bar n}(x)|}_{\le \varepsilon/2 \text{ comunque}} + \underbrace{|f_{\bar n}(x)|}_{\le \varepsilon/2 \text{ per tali } x} \le \varepsilon$. □]

$\forall f,g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mis. q.o. ≥ 0, $\forall x\in\mathbb{R}^d$,

$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy}$ ESISTE ≥ 0, ma potrebbe benissimo essere ∞ per degli x in quantità NON trascurabile: ad esempio, in $d=1$, per $f=g=1$ vale ∞ $\forall x\in\mathbb{R}^d$, oppure per $f(x) := \frac{1}{|x|}$ e $g(x) := I_{[0,1]}(x)$ vale ∞ $\forall x \in [0,1]$, in quanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{|x-y|}\,dy$$  .

In ogni caso resta definita una funzione $\mathbb{R}^d \longrightarrow [0,\infty]$, che indichiamo "$f*g$": $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$.

Osserviamo che, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \tau_x \check{f}(y)\,g(y)\,dy$ (essendo infatti $\tau_x \check{f}(y) = \check{f}(y-x) = f(x-y)$), e che

$$\boxed{f*g \underline{=} g*f}.$$

[$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy \underset{\substack{x-y=:t \Leftrightarrow \\ x-t=y, \Rightarrow \\ dy=dt}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,g(x-t)\,dt =$

$= g*f(x)$. $\square$

gli estremi si scambiano!

$\forall f,g \in L^1$, $f,g \underline{\geq 0}$ q.o. $\Rightarrow f*g(x) < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, in quanto $\|f*g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$ $(<\infty)$.

(NECESSARIO che siano ~~entrambe in L^1!~~ in qualche L^p!)

Allora, per $f,g \in L^1$ qualsiasi,

l'integrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$ ESISTE FINITO per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$,

dunque resta definita la funzione $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f*g(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$

che inoltre è MIS. e anzi in L^1, in quanto

$$\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad (<\infty).$$

[La mis. nell. le scrivo. Ora calcolo: $\|f*g\|_1 \overset{(f,g\geq 0 \text{ q.o.})}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f*g(x)\,dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\right]dx \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,dx}_{\forall y\in\mathbb{R}^d,\ \|\tau_y f\|_1 \equiv \|f\|_1}\Big]\, g(y)\,dy =$$

$$= \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy = \|f\|_1\|g\|_1 < \infty$$, dunque posso effettivamente usare FUBINI rifacendo a ritroso le precedenti uguaglianze;

Dunque $f*g \in L^1$, $\Rightarrow$ $f*g$ è q.o. finita.

A questo punto, con $f,g\in L^1$ qualsiasi, l'integrale in questione risulta finito per q.o. $x\in\mathbb{R}^d$ in quanto così è per l'integrale del modulo: $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)||g(y)|\,dy =$

$= \int_{\mathbb{R}^d} |f|(x-y)|g|(y)\,dy = |f|*|g|(x)$, $<\infty$ per q.o. $x\in\mathbb{R}^d$ (appena dimostrato!), e in effetti, inoltre,

$$\|f*g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|f*g(x)|}_{\forall x\in\mathbb{R}^d,\ \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy\right|}\,dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |f|*|g|(x)\,dx = \||f|*|g|\|_1 \overset{\text{visto ora}}{=}$$

$\||f|\|_1\cdot\||g|\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1$. □]

Resta così definita OPERAZIONE IN L^1

$$*: L^1\times L^1 \longrightarrow L^1, \quad (f,g)\longmapsto f*g$$, che soddisfa

(1) $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $0*g = f*0 = 0$; (2) $\forall x\in\mathbb{R}^d$, è BILINEARE (cioè distributiva); (3) $\forall x\in\mathbb{R}^d$, è COMMUTATIVA; (4) per q.o. $x\in\mathbb{R}^d$, è ASSOCIATIVA; (5) NON ammette elemento neutro; (6) è CONTINUA.

[(1) e (2) sono esattamente e valide in generale ($f,g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ MIS. ≥ 0 q.o.), così come (3) che è già stata dimostrata. ✓

(4): $\forall f,g,h \in \mathcal{L}^1$, $f*g$ e $g*h$ sono comunque in $\mathcal{L}^1$, per cui $(f*g)*h$ è FINITA q.o., dunque per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$ vale che $(f*g)*h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f*g(x-y)h(y)dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\underbrace{x-y-t}_{x-(y+t)})g(t)dt\right]h(y)dy \overset{\substack{y+t=:z \Leftrightarrow \\ t=z-y,\ \Rightarrow dt=dz \text{ E} \\ \text{STESSI estremi}}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)g(z-y)dz\right]\cdot$$

(per quegli $x \in \mathbb{R}^d$!)

$$\cdot h(y)dy \overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} g(z-y)h(y)dy}_{g*h(z)}\right]f(x-z)dz =$$

$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)\, g*h(z)dz = f*(g*h)(x)$, dunque in effetti $(f*g)*h = f*(g*h)$ q.o. ✓

(5): sia $\boxed{d=1}$ e supponiamo per assurdo che $\exists g \in \mathcal{L}^1$ tale che, $\forall f \in \mathcal{L}^1$, $f*g = (g*f =) f$; cioè tale che $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-y)g(y)dy = f(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$; $\Rightarrow$

$\forall b>0$, se $f(x) := \underline{I_{[0,b]}(x)}$, allora per q.o. $\delta > 0$ vale

$$0 \overset{(\forall\delta>0!)}{=} f(b+\delta) = f*g(b+\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{I_{[0,b]}(b+\delta-y)}_{=I_{[\delta,b+\delta]}(y)} g(y)dy =$$

$= \int_{\delta}^{b+\delta} g(y)dy$; dunque non solo $g(x) \geq 0$ per q.o. $x \geq 0$ (se $g(x)<0$ per degli $x \geq 0$ in quantità NON trascurabile, allora per l'arbitrarietà di b e $\delta > 0$ avrei per assurdo $\int_{\delta}^{b+\delta} g(y)dy < 0$), ma addirittura per questo $g(x)=0$ per q.o. $x \in [\delta, b+\delta]$, $\forall b>0$ e per q.o. $\delta>0$,

$\Rightarrow g(x)=0$ per q.o. $x \geq 0$ (analogo: se $g(x)>0$ (ad es.) per degli $x\geq 0$ in quantità non trascurabile, ...) ; essendo diversamente analogo per gli $x \leq 0$, in conclusione $g(x)=0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$; MA ALLORA NON può essere elemento neutro per (1) (basta prendere $f \neq 0$ q.o.) .

(6): non si usare direttamente $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$, MA la norma di $L^1 \times L^1$ è $\|f\|_1 + \|g\|_1$ e NON $\|f\|_1 \|g\|_1$ (che NON è affatto una norma, tra l'altro) ; la useremo allora indirettamente per tramite del criterio delle SUCCESSIONI, ossia

$$(f_n, g_n) \xrightarrow{L^1 \times L^1} (f,g) \Rightarrow f_n * g_n \xrightarrow{L^1} f*g :$$

(CIOÈ $f_n \xrightarrow{L^1} f$ E $g_n \xrightarrow{L^1} g$)

$$\|f*g - f_n * g_n\|_1 = \|\underbrace{f*g - f_n*g}_{(f-f_n)*g} + \underbrace{f_n*g - f_n*g_n}_{f_n*(g-g_n)\ (\text{LIN.}*)}\|_1 \overset{\text{DIS. TR.}}{\leq}$$

$$\leq \|(f-f_n)*g\|_1 + \|f_n*(g-g_n)\|_1 \leq \underbrace{\|f-f_n\|_1}_{\to 0} \underbrace{\|g\|_1}_{<\infty} +$$

$$+ \underbrace{\|f_n\|_1}_{\to \|f\|_1 < \infty} \underbrace{\|g-g_n\|_1}_{\to 0} \to 0 . \quad \square$$

~~Corollario~~:

$\forall\ 1 \leq p \leq \infty$, $\forall f \in L^p$ e $g \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ ESISTE FINITO per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, e anzi $f*g \in L^p$ in quanto $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ ("DIS. DI YOUNG") .
$(<\infty)$

(naturalmente vale l'analogo per $f \in L^1$ e $g \in L^p$, $p \geq 1$)

~~[illegible]~~

[Non solo basta provare le "formule", ma si può anche supporre che $f, g \geq 0$ q.o.: nel caso generale avremmo infatti che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f|(x-y)|g|(y)\,dy = |f| * |g|(x), < \infty$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$, e $|f*g(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy\right| \leq$

$\leq |f| * |g|(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \|f*g\|_p^p \leq \||f| * |g|\|_p^p \leq$

$\leq \||f|\|_p^p \||g|\|_1^p = \|f\|_p^p \|g\|_1^p$

(HÖLDER)

$\boxed{p=\infty}$: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(x-y)}_{=\tau_x \check{f} \in L^\infty} \underbrace{g(y)}_{\in L^1}\,dy \leq$

$\leq \|\tau_x \check{f}\|_\infty \|g\|_1 = \|f\|_\infty \|g\|_1 < \infty$, dunque in realtà

$f \in L^\infty$ e $g \in L^1 \Rightarrow f*g$ È FINITA PER OGNI $x \in \mathbb{R}^d$

e $|f*g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$ ANCORA PER OGNI $x \in \mathbb{R}^d$.

$\boxed{1 \leq p < \infty}$: l'esp. coniugato a p è $1 < q < \infty$ (posso supporre $p > 1$!) tale che $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$, dunque valgono le uguaglianze

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-y)g(y)^{1/p}] \underbrace{g(y)^{1-1/p}}_{\in L^q}\,dy \overset{\text{"HÖLDER CLASSICO"}}{\leq}$$

with $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$

$$\leq \left\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^p g(y)\,dy\right\}^{1/p} \underbrace{\left\{\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy\right\}^{\frac{p-1}{p}}}_{\|g\|_1^{\frac{p-1}{p}}}, \Rightarrow \|f*g\|_p^p \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^p g(y)\,dy\right] \cdot \|g\|_1^{p-1}\,dx \overset{\text{FUBINI}}{=} \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^p\,dx}_{\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \|\tau_y f\|_p^p = \|f\|_p^p}\Big] g(y)\,dy =$$

$= \|f\|_p^p \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy = \|f\|_p^p \|g\|_1^p < \infty$ (dunque effettivamente posso applicare FUBINI "a ritroso"!). $\square$]

$\forall p > 1$, ovviamente $*$ NON è operazione, però

$$* : \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{L}^p$$
$$(f,g) \longmapsto f*g$$

risulta <u>CONTINUA</u> per gli stessi passaggi di prima, e anche "associativa" NEL SENSO:

$$\forall f \in \mathcal{L}^p,\ \forall g,h \in \mathcal{L}^1,\ \underbrace{\underbrace{(f*g)}_{\in \mathcal{L}^p}*\underbrace{h}_{\in \mathcal{L}^1}}_{\in \mathcal{L}^p} = \underbrace{\underbrace{f}_{\in \mathcal{L}^p}*\underbrace{(g*h)}_{\in \mathcal{L}^1}}_{\in \mathcal{L}^p},$$

perché effettivamente $(f*g)*h < \infty$ q.o. e, per quegli x, posso allora applicare FUBINI.

[Continuità: $\begin{cases} f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f \\ g_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} g \end{cases} \Rightarrow \|f*g - f_n*g_n\|_p = \|\underbrace{f*g - f_n*g}_{(f-f_n)*g} + \underbrace{f_n*g - f_n*g_n}_{f_n*(g-g_n)}\|_p \leq \|(f-f_n)*g\|_p + \|f_n*(g-g_n)\|_p \leq \underbrace{\|f-f_n\|_p}_{\to 0}\underbrace{\|g\|_1}_{<\infty} + \underbrace{\|f_n\|_p}_{\to \|f\|_p < \infty}\underbrace{\|g-g_n\|_1}_{\to 0} \to 0$. ✓]

Notiamo di poter generalizzare il caso precedente di $p=\infty$:

$\forall 1 \leq p,q \leq \infty$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\forall f \in \mathcal{L}^p$ e $g \in \mathcal{L}^q$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ ESISTE FINITO <u>PER OGNI</u> $x \in \mathbb{R}^d$, e anzi $f*g \in \mathcal{L}^\infty$ in quanto $|f*g(x)| \leq \underbrace{\|f\|_p\|g\|_q}_{(<\infty)}$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}^d$ ($\Rightarrow \|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$) (risultato SIMMETRICO in f,g!)

[Posso supporre $f,g \geq 0$ q.o. e provare direttamente la disuguaglianza ($\Rightarrow |f*g(x)| \leq |f|*|g|(x) \leq \|f\|_p\|g\|_q\ \forall x \in \mathbb{R}^d$), che comunque è ovvia per HÖLDER: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) =$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x-y)}_{=\tau_x \check{f}(y) \in L^p} \underbrace{g(y)}_{L^q} dy \overset{\text{(HÖLDER)}}{\leq} \|\tau_x \check{f}\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q . \ \square \Big]$$

Allora $* : L^p \times L^q \longrightarrow L^\infty$, $(f,g) \longmapsto f*g$ è CONTINUA $\left[\begin{cases} f_n \xrightarrow{L^p} f \\ g_n \xrightarrow{L^q} g \end{cases} \Rightarrow \right.$

$$\|f*g - f_n * g_n\|_\infty = \|f*g - f_n*g + f_n*g - f_n*g_n\|_\infty \overset{\text{DIS. TR.}}{\leq} \|(f-f_n)*g\|_\infty +$$

$$+ \|f_n * (g-g_n)\|_\infty \leq \underbrace{\|f-f_n\|_p}_{\downarrow 0} \underbrace{\|g\|_q}_{<\infty} + \underbrace{\|f_n\|_p}_{\downarrow \|f\|_p < \infty} \underbrace{\|g-g_n\|_q}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0 \Big]$$

è "associativa ovunque" nel senso che:

$\forall f \in L^p$, $g \in L^q$ e $h \in L^1$, $\underbrace{\underbrace{(f*g)}_{\in L^\infty} * \underbrace{h}_{\in L^1}}_{\in L^\infty} \overset{\forall x}{=} \underbrace{\underbrace{f}_{\in L^p} * \underbrace{(g*h)}_{\in L^q}}_{\in L^\infty} < \infty$

OVUNQUE.

È chiaro che c'è la probabilità che, per $f \in L^p$ e $g \in L^q$ con p e q CONIUGATI, $f*g$ sia continua, in questo infatti sarebbe che $|f*g| \leq \|f*g\|_\infty$ q.o. $\Rightarrow$ OVUNQUE; in effetti abbiamo

> $\forall 1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall f \in L^p$ e $g \in L^q$, $f*g$ è anche UNIFORMEMENTE CONTINUA su tutto $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{p = ~~\infty~~ \text{ e } q = ~~\infty~~}$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $|f*g(x+h) - f*g(x)| =$
~~(cioè il contrario)~~

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x+h-y) - f(x-y)] g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h-y) - f(x-y)| \underbrace{|g(y)|}_{\leq \|g\|_\infty < \infty} dy \leq$$

$$\le \underset{(<\infty)}{\|g\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|\underbrace{\underbrace{f(x+h-y)}_{\tau_{x+h}\check f(y)} - \underbrace{f(x-y)}_{\tau_x \check f(y)}}_{=\tau_x(\tau_h \check f(y) - \check f(y))}\big|\,dy = \underset{(<\infty)}{\|g\|_\infty}\, \|\tau_x(\tau_h \check f - \check f)\|_1$$

$$= \|\tau_h \check f - \check f\|_1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

(continuità dei traslati in L^1!)

ovviamente in modo INDIPENDENTE da $x \in \mathbb{R}^d$.

$\boxed{1 < p, q < \infty}$ (coniugati): $\forall x, h \in \mathbb{R}^d$, $|f*g(x+h) - f*g(x)|$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)|\,|g(y)|\,dy \overset{\text{"Hölder classico"}}{\le} \underset{(<\infty)}{\|g\|_q} \cdot \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\underbrace{f(x+h-y) - f(x-y)}_{=\tau_x(\tau_h \check f - \check f)(y)}|^p\,dy\Big)^{1/p},$$

dove come prima il secondo fattore è $\|\tau_x(\tau_h \check f - \check f)\|_p = \|\tau_h \check f - \check f\|_p$

$\xrightarrow[h\to 0]{} 0$ ($p<\infty$!) indip. da $x \in \mathbb{R}^d$. □

In uno dei casi detti, nei quali $f*g$ esiste finita q.o., vale fine che

f, g a SUPPORTO COMPATTO $\Rightarrow$ $f*g$ a SUPPORTO COMPATTO; ANZI $f \in L^p$ e $g \in L^q$ con p, q CONIUGATI.

(Anche altrimenti avere $f*g(x) = \infty$ per dei singoli x che però "si staccano all'infinito"!)

Sia $R > 0$ tale che $f(x) = g(x) = 0$ $\forall |x| > R$; allora,

$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\overline{B(0,R)}} f(x-y)g(y)\,dy$

"a causa di g"; allora $f*g(x) = 0$ $\forall |x| > 2R$:

$|x| > 2R = R + R \ge R + |y|$, $\forall |y| \le R$, $\Rightarrow |x-y| \overset{\text{"dis. tr. completa"}}{\ge}$

$||x| - |y|| \ge |x| - |y| > (R + |y|) - |y| = R$, $\Rightarrow f(x-y) =$

$= 0$ $\forall |x| > 2R$ e $\forall |y| \le R$ (cioè quelli dell'integrale). □

Allora possiamo dire ancora di più:

$\forall\, 1<p,q<\infty$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\forall f\in\mathcal{L}^p$ e $g\in\mathcal{L}^q$, $f*g$ è anche INFINITESIMA ALL'INFINITO, cioè

$$\lim_{|x|\to\infty}|f*g(x)|=0 .$$

(Proprietà chiaramente FALSA per $p=\infty$ e $q=1$ (cioè il viceversa): per $f\equiv 1$ ($\in\mathcal{L}^\infty$) e $g\in\mathcal{L}^1$ con $\underset{(\text{mis}<\infty)}{\|g\|_1}\neq 0$ (come per un'indicatrice $\neq 0$ e di un limitato) e infatti banalmente $f*g\equiv$ $\equiv\|g\|_1\neq 0$.)

[Sappiamo già che $\mathcal{C}^0_0:=\{f\in\mathcal{L}^\infty \mid f\in\mathcal{C}^0$ e $\lim_{|x|\to\infty}|f(x)|=0\}$ è $\mathbb{R}$-sottosp. (proprio e) CHIUSO in $(\mathcal{L}^\infty,\|\cdot\|_\infty)$, e che f,g a supporto compatto (e come nelle ipotesi) $\Rightarrow$ $f*g\in\mathcal{C}^0_0$ (che sia in $\mathcal{L}^\infty\cap\mathcal{C}^0$ è stato visto; che sia infinitesima all'infinito è banalmente perché è a supporto compatto!); d'altra parte $D:=\{(f,g)\in\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q \mid f,g$ sono a supporto compatto$\}$ È DENSO IN $(\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q,\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q})$, ovviamente (le funzioni a supporto compatto sono dense "separatamente" in $\mathcal{L}^p$, ($p<\infty$)!), mentre infine $*:\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q\to\mathcal{L}^\infty$ è CONTINUA, dunque abbiamo:

$$*(\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q) = *\left(\overline{D}^{\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p\times\mathcal{L}^q}}\right) \overset{\text{continuità}}{\subseteq} \overline{*(D)}^{\|\cdot\|_\infty} \underset{\substack{\uparrow\\ *(D)\subseteq\mathcal{C}^0_0\ (\subseteq\overline{\mathcal{C}^0_0}^{\|\cdot\|_\infty})}}{\subseteq} \overline{\mathcal{C}^0_0}^{\|\cdot\|_\infty} \overset{\text{sua chiusura}}{=} \mathcal{C}^0_0 .\ \square$$
]

$$\boxed{\forall h\in\mathbb{R}^d,\quad \tau_h(\underbrace{f*g}_{=g*f}) = (\tau_h f)*g \quad (=(\tau_h g)*f)\,.}$$

[$\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\tau_h(f*g)(x) = f*g(x-h) = \int_{\mathbb{R}^d} f((x-h)-y)g(y)\,dy =$

$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(x-h-y)}_{=(\tau_h f)(x-y)}\, g(y)\,dy = (\tau_h f)*g\,(x)$.]

Dunque, ad es. in $d=1$, $\forall h\neq 0$ è $\dfrac{\overbrace{\tau_h(f*g)}^{(\tau_h f)*g} - f*g}{h} =$

$= \left(\dfrac{\tau_h f - f}{h}\right)*g$, per cui c'è ovviamente la possibilità che, sotto opportune condizioni su f, g, valga $(f*g)' =$
$= (f')*g$. Infatti:

> Con $d=1$, $\forall\, 1\le p,q\le\infty$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\forall f\in L^p$ e $g\in L^q$, se anche $f\in C^1$ con $f'\in L^p$ ALLORA $f*g$ è anche C^1 e $\boxed{(f*g)' = \underbrace{(f')*g}_{\in C^0!}}$.

[Intanto, $f*g$ è (unif.) continua essendo $f\in L^p$ e $g\in L^q$ con p,q CONIUGATI, ma per lo stesso motivo anche $f'*g$ è CONTINUA, dunque basta provare che $f*g$ è derivabile con derivata $(f*g)' = f'*g$, cioè che $f*g$ è UNA PRIMITIVA di $f'*g$: per continuità di quest'ultima, ciò equivale e dire che $f*g(x) = f*g(0) + \int_0^x \underbrace{f'*g(t)}_{(e \text{ di } f*g)}\,dt$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Ma infatti: $\forall x>0$, $\int_0^x f'*g(t)\,dt = \int_0^x\left[\int_{-\infty}^{\infty} f'(t-y)g(y)\,dy\right]dt =$

$$\overset{\text{FUBINI}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\underbrace{\int_0^x f'(t-y)\,dt}_{\left(\overset{f' \text{ continua}}{=} [f(t-y)]_{t=0}^{t=x\ (x>0)} = f(x-y)-f(-y) \right)} \Big] \rho(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x-y)-f(-y)]\rho(y)\,dy$$

$$\| $$

$$\underbrace{f*\rho(x)}_{<\infty\ \forall x\in\mathbb{R}!} - f*\rho(0) \quad (<\infty :$$

sono effettivamente usati FUBINI "e ritorno" !), mentre $\forall x<0$ otteniamo allo stesso modo $\left(-\int_0^x f'*\rho(t)\,dt =\right) \int_x^0 f'*\rho(t)\,dt =$

$= f*\rho(0) - f*\rho(x)$. ∎

In realtà, tale risultato di "scaricamento delle derivate" sul fattore più regolare vale $\forall d \geq 1$ (con una dim. più generale), ma in effetti $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall 1 \leq i \leq d$,

$$\frac{\overbrace{\tau_{te_i}(f*\rho)}^{=(\tau_{te_i}f)*\rho} - f*\rho}{t}(x) = \left(\frac{\tau_{te_i}f - f}{t}\right)*\rho(x) \text{ , dunque}$$

potrebbe benissimo essere che $\partial_i(f*\rho) = (\partial_i f)*\rho$, CIOÈ che $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t}\rho(y)\,dy \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i f(x-y)\rho(y)\,dy$ $\forall x\in\mathbb{R}^d$. Infatti:

$\Big\{$ $\forall 1 \leq p,q \leq \infty$ tali che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\forall f\in L^p$ e $\rho\in L^q$, se anche $f\in C^1$ e, $\forall 1\leq i\leq d$, $\partial_i f\in L^p$, ALLORA $f*\rho\in C^1$ e, $\forall 1\leq i\leq d$, $\boxed{\partial_i(f*\rho) = (\partial_i f)*\underset{\in L^q!}{\rho}}$. $\Big\}$

[Dimostrazione, $f\in L^p$ e $\rho\in L^q \overset{\text{già visto!}}{\Rightarrow} f*\rho \in C^0$, e per lo stesso motivo, $\forall 1\leq i\leq d$, $(\partial_i f)*\rho \in C^0$, dunque basta provare le formule. Sia $1\leq i\leq d$ qualsiasi; $\forall R>0$,

$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall y \in \overline{B(0,R)}$ fissati, anche $x-y \in \overline{B(0,|x|+R)}$ ($|x-y| \overset{\text{dis.}}{\leq} |x| + \underset{\leq R}{|y|}$); ma, $\forall$ $x-y$ $\in$ un COMPATTO quale è $\overline{B(0,|x|+R)}$, quando vado calcolando $\partial_i f(x-y)$ considero f come FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE REALE x_i, rispetto alla quale f è dunque sempre dell tipo $C^1([a,b])$ ($a<b$ opportuni):

allora $\dfrac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \partial_i f(x-y)$ UNIFORMEMENTE

$\forall$ $(x-y) \in \overline{B(0,|x|+R)}$ ($y \in \overline{B(0,R)}$), dunque anche se moltiplico per $g(y)$, $\Rightarrow$ (PASSAGGIO DEL LIMITE SOTTO IL SEGNO "$\int$")

$$\int_{\overline{B(0,R)}} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{\overline{B(0,R)}} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy,$$

dunque $\forall \bar{R}>0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall \varepsilon>0$, per t "abbastanza vicini a 0" (dipendentemente da $\bar{R}$ e ε)

$$\left| \int_{\overline{B(0,\bar{R})}} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy - \int_{\overline{B(0,\bar{R})}} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy \right| \leq \varepsilon/3 .$$

Dall'altra parte, per continuità rispetto a successioni crescenti di misurabili di misure su $\mathbb{R}^d$ (quali sono quelle di "tipo" $\mathcal{L}^d$), $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^d$, è

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_{\overline{B(0,R)}} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_{\overline{B(0,R)}} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy \end{cases},$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$, $\exists \bar{R}>0$ tale che contemporaneamente $\left| \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy - \int_{\overline{B(0,\bar{R})}} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t} g(y)\,dy \right| \leq \varepsilon/3$ E $\left| \displaystyle\int_{\overline{B(0,\bar{R})}} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i f(x-y) g(y)\,dy \right| \leq \varepsilon/3$, quindi possiamo concludere che $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall \varepsilon > 0$, per t "abbastanza piccolo" è (9)

(con x ed ε come fissati) $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x-y+te_i)-f(x-y)}{t}\rho(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i f(x-y)\rho(y)dy \right| \leq 3 \cdot \varepsilon/3 =$

$= \varepsilon$ ("appoggiandosi" a quel $\overline{R}$). $\square$]

RIPASSINO: { (I) $f \in C^1_{\mathbb{R}}([a,b]) \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)$ UNIF. $\forall x \in [a,b]$. }

[f derivabile in (a,b) e continua anche in a e in b $\overset{\text{LAGRANGE!}}{\Rightarrow}$ $\forall x \in [a,b]$, e $\forall h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in [a,b]$, $\exists \xi_h$ "tra x e $x+h$" tale che sia $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(\xi_h)$; ma f' CONTINUA $\Rightarrow f'(\xi_h) \xrightarrow[h\to 0]{}$ $f'(x)$ INDIPENDENTEMENTE DA x, perché $x+h \xrightarrow[h\to 0]{} x$ INDIP. dalla x $(|x+h-x| = |h|)$. $\square$]

{ (II) $\forall (f_n)_{n\geq 1}$ in $C^0_{\mathbb{R}}(K)$, $K \subsetneq \mathbb{R}^d$ COMPATTO, $f_n \xrightarrow[\text{SU } K]{\text{UNIF.}} f \Rightarrow \int_K f_n(x)dx \to \int_K f(x)dx$. }

[Intanto, anche $f \in C^0_{\mathbb{R}}(K)$, dunque entrambi gli integrali esistono finiti (K è compatto!); ora $\underbrace{\left| \int_K f_n(x)dx - \int_K f(x)dx \right|}_{(=\int (f_n(x)-f(x))dx)} \leq$

$\leq \int_K |f_n(x)-f(x)|dx \leq \|f_n-f\|_\infty \cdot \underbrace{\mathcal{L}^d(K)}_{<\infty} \longrightarrow 0$. $\square$

(O per LEBESGUE: $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in K$, e $\forall n \geq 1$ ~~...~~ $|f_n-f| \overset{\text{OVUNQUE}}{\leq} \|f_n-f\|_\infty \leq \underset{(<\infty)}{M}$ perché converge a 0; ma $g(x) \equiv M$ è ovviamente integrabile sul COMPATTO K!)]

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d),\ \forall \delta > 0,\quad \underbrace{\varphi_\delta(x)}_{(\sigma_\delta \varphi(x))} := \frac{1}{\delta^d}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{CON} \quad \|\varphi_\delta\|_1 = \|\varphi\|_1 \ (<\infty), \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx.}$$

$$\left[\ \|\varphi_\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_\delta(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\delta^d}\left|\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)\right| dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\delta^d}|\varphi(t)|\,\delta^d\,dt =\right.$$

$\frac{x}{\delta} =: t \Leftrightarrow x = \delta t$, $\Rightarrow dx = \delta^d dt$ e stessi estremi

$$\left. = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(t)|\,dt = \|\varphi\|_1 < \infty \ \right]$$

(σ_δ È ISOMETRIA $\mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^1$!)

(Dunque gli integrali "normali" non ∞, e allora lo stesso vale di sopra!)

~~(APPROSSIMAZIONE PER CONVOLUZIONE)~~

$$\boxed{\forall\, 1 \le p < \infty,\ \forall \varphi \in \mathcal{L}^1 \text{ e } f \in \mathcal{L}^p, \text{ vale che } \quad \varphi_\delta * f \xrightarrow[\delta \to 0]{\mathcal{L}^p} c\, f, \quad c := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx.}$$

(FALSO in generale per $p = \infty$: 1 e $p = \infty$ sarebbero infatti CONIUGATI, per cui $\varphi_\delta \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \varphi_\delta * f$ È (unif.) CONTINUA, dunque dovrebbe convergere ad una funzione continua, in $\|\cdot\|_\infty$, mentre f potrebbe benissimo NON esserlo!) (PERÒ VEDERE IN FONDO!)

$$\left[\ \forall \delta > 0,\ \varphi_\delta \in \mathcal{L}^1 \ (\text{e } f \in \mathcal{L}^p) \Rightarrow \varphi_\delta * f \in \mathcal{L}^p, \text{ e}\right.$$

$$\varphi_\delta * f(x) = f * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t)\,\varphi_\delta(t)\,dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t)\,\frac{1}{\delta^d}\varphi\left(\frac{t}{\delta}\right) dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \delta y)\,\varphi(y)\,dy,\ \forall x \in \mathbb{R}^d;$$

$\frac{t}{\delta} =: y \Leftrightarrow t = \delta y$, $\Rightarrow dt = \delta^d dy$ e stessi estremi

D'altra parte, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $c f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) f(x)\,dy$, per cui

$$f * \rho_\delta(x) - c\,f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-\delta y) - f(x)]\,\rho(y)\,dy \quad , \Rightarrow$$

$$|f * \rho_\delta(x) - c\,f(x)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta y) - f(x)|\,|\rho(y)|\,dy \quad =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta y) - f(x)|\,|\rho(y)|^{1/p}\,|\rho(y)|^{\overset{1/q \,=\, \frac{p-1}{p}}{1-1/p}}\,dy \quad \overset{\text{HÖLDER}}{\le}$$

(HÖLDER: per $p=1$, cioè $\frac{p-1}{p}=0$, tutto ciò è ovvio, e ovvi il "$\le$" è un "$=$"!)

$$\le \left\{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta y) - f(x)|^p\,|\rho(y)|\,dy\right\}^{1/p} \left\{\|\rho\|_1\right\}^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow$$

(tutto ciò ALMENO per q.o. $x \in \mathbb{R}^d$)

$$\|f * \rho_\delta - cf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f*\rho_\delta(x) - c\,f(x)|^p\,dx \le \quad \text{(NESSUN PROBLEMA il q.o. } x\text{!)}$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} \|\rho\|_1^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\delta y) - f(x)|^p\,|\rho(y)|\,dy\right] dx \quad \overset{\text{FUBINI}}{=}$$

$$= \|\rho\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\underbrace{f(x-\delta y)}_{=\tau_{\delta y} f(x)} - f(x)|^p\,dx\right] |\rho(y)|\,dy \quad =$$

$$= \underbrace{\|\rho\|_1^{p-1}}_{<\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_{\delta y} f - f\|_p^p\,|\rho(y)|\,dy \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \quad \text{per } \underline{\underline{\text{LEBESGUE}}}$$

($\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\|\tau_{\delta y} f - f\|_p^p \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ ($p<\infty$!), dunque anche "col $|\rho(y)|$"; inoltre, $\forall \delta > 0$ (e $\forall y \in \mathbb{R}^d$), $\|\tau_{\delta y} f - f\|_p \overset{\text{DIS. TRI.}}{\le} \underbrace{\|\tau_{\delta y} f\|_p}_{=\|f\|_p} + \|f\|_p =$
$= \underset{(<\infty)}{2\|f\|_p} \Rightarrow \|\tau_{\delta y} f - f\|_p^p\,|\rho(y)| \le (2\|f\|_p)^p\,|\rho(y)| \in \mathcal{L}^1$),

dunque posso effettivamente usare FUBINI "a ritroso" almeno per una successione $(\delta_n)_{n\ge 1}$, che basta (in realtà, $\forall \delta > 0$:

$$\|\rho\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\|\tau_{\delta y} f - f\|_p^p}_{\le (2\|f\|_p)^p}\,|\rho(y)|\,dy \le (2\|f\|_p)^p\,\|\rho\|_1^p < \infty \quad \forall \delta>0\ !). \ \square$$

$\forall \rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\forall k \geq 0$ fissati,

$\begin{cases} \odot\ \rho \in C^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \rho_\delta = \frac{1}{\delta^d}\rho\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) \in C^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d); \\ \odot\ \rho \text{ è a supporto compatto} \Rightarrow \rho_\delta \text{ è a supporto compatto}; \end{cases}$

Dunque $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d) =: \underset{(\text{"FUNZIONI TEST"})}{\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow \rho_\delta \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ (ovvio)

[$\boxdot$ $\rho_\delta : x \xmapsto{\cdot 1/\delta} \frac{x}{\delta} \xmapsto{\rho} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right) \xmapsto{\cdot 1/\delta^d} \frac{1}{\delta^d}\rho\left(\frac{x}{\delta}\right)$;

$C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (C^k, $\forall k \geq 0$) — $C^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ — $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (C^k, $\forall k \geq 0$)

$\boxdot$ $\exists R > 0 : \rho(x) = 0\ \forall |x| > R \Rightarrow \rho_\delta(x) = 0\ \forall |x| > \delta R$, perché sarebbe altrimenti $\left|\frac{x}{\delta}\right| = \frac{|x|}{\delta} > \frac{\delta R}{\delta} = R$ $\left(\Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\delta}\right) = 0\right)$ $\boxdot$]

~~[REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE]~~

$\forall \rho \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\rho \in C^0_c(\mathbb{R}^d) \underset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} \rho \in L^q\ \forall q \geq 1$;

allora, $\forall 1 \leq p < \infty$, $\forall f \in L^p$, è

(1) $\forall \delta > 0$, $f * \rho_\delta \in \underline{C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)}$, e

(2) se $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx = 1$, allora $f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{L^p} f$; inoltre,

(3) considerato $\underset{(>1)}{q}$ tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, è $\forall \delta > 0$

$\| \partial^{k_1}_{x_1} \cdots \partial^{k_d}_{x_d} (f * \rho_\delta) \|_\infty \leq \|f\|_p \, \| \partial^{k_1}_{x_1} \cdots \partial^{k_d}_{x_d} \rho_\delta \|_q$ per ogni $k_1, \dots, k_d$ interi ≥ 0

$\left(\geq 1 : \|\underset{L^p}{f} * \underset{L^q}{\rho_\delta}\|_\infty \leq \|f\|_p \|\rho_\delta\|_q \text{ è vero!} \right)$

(2) è immediata: $f \in \mathcal{L}^p$ con $p<\infty$, e certamente $g \in \mathcal{L}^1$,

$\Rightarrow g_\delta * f \xrightarrow[\delta\to 0]{\mathcal{L}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx\right)\cdot f \overset{\text{ip.}}{=} f$ ✓

(1) e (3): $g \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \forall \delta>0$, $g_\delta \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\Rightarrow$ anche OGNI sua derivata (parziale) (di ogni ordine) sta in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, per cui tanto g_δ quanto OGNI sua derivata stanno in $\mathcal{L}^q$ $\forall q\geq 1$; in particolare in quel $\mathcal{L}^q$ con $\underset{(>1)}{q}$ CONIUGATO A p, dunque:

$g_\delta \in \mathcal{L}^q$ e $f \in \mathcal{L}^p$ con p e q coniugati, $g_\delta \in C^1$ con, $\forall 1\leq j\leq d$, $\partial_j g_\delta \in \mathcal{L}^q$, $\Rightarrow f * g_\delta \in C^1$ e, $\forall 1\leq j\leq d$,

$\partial_j(f*g_\delta) = \underbrace{f}_{\in\mathcal{L}^p} * \underbrace{(\partial_j g_\delta)}_{\in\mathcal{L}^q} \in \mathcal{L}^\infty$, $\Rightarrow \|\partial_j(f*g_\delta)\|_\infty =$

$= \|f*(\partial_j g_\delta)\|_\infty \leq \|f\|_p \|\partial_j g_\delta\|_q$. Allora, allo stesso modo, $\partial_j g_\delta \in \mathcal{L}^q$, anzi $\in C^1$, e $\partial_j^2 g_\delta \in \mathcal{L}^q$, $\Rightarrow$

$\underset{(=\partial_j(f*g_\delta))}{f*(\partial_j g_\delta)} \in C^1$ CON $\underset{(\Rightarrow f*g_\delta \in C^2!)}{\text{(in particolare)}}$ $\underset{(=\partial_j^2(f*g_\delta))}{\partial_j(f*(\partial_j g_\delta))} =$

$= \underset{(\in\mathcal{L}^\infty)}{f*(\partial_j^2 g_\delta)}$, $\Rightarrow \|\partial_j^2(f*g_\delta)\|_\infty \leq \|f\|_p \|\partial_j^2 g_\delta\|_q$; IN GENERALE, nell'ipotesi (induttiva) che $f*g_\delta \in C^k$ CON $\partial_j^k(f*g_\delta) = f*(\partial_j^k g_\delta)$, con $k\geq 1$, deduciamo che $f*g_\delta$ è in realtà C^{k+1} perché $\partial_j^k g_\delta \in \mathcal{L}^q$, anzi $\in C^1$, con $\partial_j^{k+1} g_\delta \in \mathcal{L}^q$, $\Rightarrow$ $\underset{(\overset{\text{i.e.}}{=}\partial_j^k(f*g_\delta))}{f*(\partial_j^k g_\delta)} \in C^1$ $\underset{(\overset{\text{i.e.}}{\Rightarrow} f*g_\delta \in C^{k+1}!)}{}$ CON $\underset{(=\partial_j^{k+1}(f*g_\delta))}{\partial_j(f*\partial_j^k g_\delta))} =$ $f*(\partial_j^{k+1} g_\delta)$; inoltre $\partial_j^{k+1}(f*g_\delta) = f*(\partial_j^{k+1} g_\delta)$, dunque in conclusione $f*g_\delta \in C^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ e, $\forall k\geq 1$,

$$\boxed{\partial_j^k (f * \rho_\delta) = \underbrace{f * (\partial_j^k \rho_\delta)}_{(\in L^\infty)}}, \Rightarrow \|\partial_j^k (f*\rho_\delta)\|_\infty \le \|f\|_p \cdot \|\partial_j^k \rho_\delta\|_q$$

. Infine allora, $\forall i \neq j$ e $k_i, k_j \ge 1$,

$\partial_i^{k_i} \partial_j^{k_j} (f * \rho_\delta) = \partial_i^{k_i} (\partial_j^{k_j} (f*\rho_\delta)) = \partial_i^{k_i} (f * \partial_j^{k_j} \rho_\delta) =$ $f * (\partial_i^{k_i} \partial_j^{k_j} \rho_\delta)$ (STESSI ARGOMENTI!), che ha $\|\cdot\|_\infty \le$ $\|f\|_p \cdot \|\partial_i^{k_i} \partial_j^{k_j} \rho_\delta\|_q$. □

$\forall \rho \in L^1$ e $f \in \underline{\underline{L^\infty}}$, si avrà $\rho_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \rho(\frac{x}{\delta})$ $\forall \delta > 0$ e $c := \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\,dx$, allora f CONTINUA IN $x_0 (\in \mathbb{R}^d)$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f * \rho_\delta}_{\text{(unif. cont.!)}} (x_0) \xrightarrow[\delta \to 0]{} c f(x_0)$ (dunque $f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{\text{ovunque}} cf$ nel caso $f \in C^0 \cap L^\infty$), e invece f UNIFORMEMENTE CONTINUA $\Rightarrow$ $f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{L^\infty} cf$.

(!): essendo su tutto $\mathbb{R}^d$, $f \in L^\infty \cap C^0 \not\Rightarrow$ unif. continua! Es.: $f(x) = \sin(x^2)$ su $\mathbb{R}$ ($d=1$)

[Cominciando esattamente come nella dim. di "approssimazione per $*$", abbiamo $|f * \rho_\delta(x_0) - c f(x_0)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_0 - \delta y) - f(x_0)| |\rho(y)|\,dy$ e tale $\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ per convergenza dominata: $|f(x_0 - \delta y) - f(x_0)| \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ PER CONTINUITÀ di f in x_0 ($\forall y \in \mathbb{R}^d$, δ abbastanza piccolo!), e d'altra parte $|f(x_0 - \delta y)| |\rho(y)| \overset{q.o.}{\le} \underbrace{\|f(\delta y)\|_\infty}_{(<\infty!)} |\rho(y)| \in L^1$! Ora, f uniformemente continua $\Rightarrow$ ciò vale $\forall x \in \mathbb{R}^d$ e appunto $|f(x - \delta y) - f(x)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ INDIPENDENTEMENTE da x (così come l'indip. da x la dominazione!), per cui così fa anche l'integrale (che ovviamente maggiora $\|f * \rho_\delta - cf\|_\infty$!). □]

($\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^d$, $|\dots| \le \varepsilon \Rightarrow \int |\dots| |\rho(y)|\,dy \le \varepsilon \|\rho\|_1$!)

PARENTESI: $\mathbb{R}$-spazi vettoriali X dotati di prodotto scalare $\langle ; \rangle$! $\langle ; \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \langle x;y\rangle$ soddisfa

(1) $\forall y \in X$, $x \longmapsto \langle x;y\rangle$ è lineare ;

(2) $\forall x,y \in X$, $\langle x;y\rangle = \langle y;x\rangle$; ($\Rightarrow \forall x\in X$, $y \longmapsto \langle x;y\rangle$ è lineare)

(3) $\forall x \in X$, $\langle x;x\rangle \geq 0$ ed è $= 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x = 0$; cioè

(cioè $\langle x;x\rangle > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$)

$\langle ; \rangle$ è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su X.

[(*) : $\forall x,y \in X$, $\langle y;0\rangle \overset{(2)}{=} \langle \underset{\text{in } X}{0};y\rangle = \langle \underset{\in\mathbb{R}}{0}\cdot x;y\rangle \overset{(1)}{=} 0\langle x;y\rangle = 0$,

CIOÈ $\forall y \in X$ $\langle 0;y\rangle = \langle y;0\rangle = 0$.]

Conveniamo di scrivere, $\forall x,y \in X$, "$x \perp y$" $\overset{d.}{\Longleftrightarrow} \langle x;y\rangle = 0$ $(=\langle y;x\rangle)$ e, $\forall S \subseteq X$, "$x \perp S$" $\overset{d.}{\Longleftrightarrow} \forall y \in S$, $x \perp y$, dunque $S^\perp := \{x \in X \mid x \perp S\}$ (ma $\{y\}^\perp =: y^\perp$), allora

$0 \perp y$ $\forall y \in X$, così $0 \perp X$, e anzi $\boxed{x \perp X \Leftrightarrow x = 0}$ (perché $\langle x;x\rangle = 0$),

CIOÈ $X^\perp = \{0\}$. Notiamo che

$S \subseteq X$ sottoinsieme $\neq \emptyset \Rightarrow S^\perp$ $\mathbb{R}$-sottospazio di X.

[$\forall c_1,c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x_1,x_2 \in S^\perp$, $\forall y \in S$, $\langle c_1x_1 + c_2x_2;y\rangle = c_1\underbrace{\langle x_1;y\rangle}_{=0} + c_2\underbrace{\langle x_2;y\rangle}_{=0}$ $= 0 + 0 = 0$. ∎], e che $S \cap S^\perp$ o è $\emptyset$ o è $\{0\}$ [$x \in S\cap S^\perp \Rightarrow x \in S$, ma allora $x \perp x$, cioè $x = 0$. ∎]

SCHWARZ: $\forall x,y \in X$, $\langle x;y\rangle^2 \leq \langle x;x\rangle\langle y;y\rangle$,

CIOÈ $(\langle x;y\rangle \leq)$ $|\langle x;y\rangle| \leq \{\langle x;x\rangle\}^{1/2}\{\langle y;y\rangle\}^{1/2}$.

(BUONA IDEA quella di sfruttare la CERTA DIS. in (3)!)

[$\forall x,y \in X$, $0 \overset{(3)}{\leq} \langle (\langle y;y\rangle x - \langle x;y\rangle y);(\langle y;y\rangle x - \langle x;y\rangle y)\rangle =$

$= \underbrace{\langle \langle y;y\rangle x ; \langle y;y\rangle x - \langle x;y\rangle y\rangle}_{(\langle y;y\rangle^2\langle x;x\rangle - \langle y;y\rangle\langle x;y\rangle^2)} - \underbrace{\langle \langle x;y\rangle y ; \langle y;y\rangle x - \langle x;y\rangle y\rangle}_{(\langle x;y\rangle^2\langle y;y\rangle - \langle x;y\rangle^2\langle y;y\rangle = 0)} =$

$= \langle y;y\rangle \left(\langle y;y\rangle\langle x;x\rangle - \langle x;y\rangle^2\right)$: poiché la tesi è ovvia per $y=0$ (è un'identità $0=0$), $\forall y \neq 0$ posso a questo punto dividere per $\langle y;y\rangle$ (>0!). □]

$\forall x \in X$, $\|x\| := \sqrt{\langle x;x\rangle}$ (cioè (per ≥ 0) $\|x\|^2 = \langle x;x\rangle$) definisce una NORMA su X, dunque, $\forall x,y \in X$, $d(x,y) := \|x-y\|$ definisce una METRICA su X (che induce la topologia che su X consideravamo).

$\forall x \in X$, $\|x\| \geq 0$ ✓ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✓ ; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x;\lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x;x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|$ ✓ ; INFINE, $\forall x,y \in X$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$, cioè $\langle x+y;x+y\rangle = \langle x;x\rangle + 2\langle x;y\rangle + \langle y;y\rangle \leq \langle x;x\rangle + 2\sqrt{\langle x;x\rangle\langle y;y\rangle} + \langle y;y\rangle$, CIOÈ $\langle x;y\rangle \leq \cancel{2}\sqrt{\langle x;x\rangle}\sqrt{\langle y;y\rangle}$, che si ha per SCHWARZ (e, peraltro, per avere che anche $-\langle x;y\rangle \leq \|x\|\,\|y\|$, si fanno questi stessi passaggi MA CON $-x$ (o $-y$)).

Allora $d(x,y) \geq 0$ ✓ e $= 0 \Leftrightarrow x = y$ ✓ ; $d(x,y) = d(y,x)$ ✓ ; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (in effetti $\|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$). □]

DIS. TR. "completa" : $\forall x,y \in X$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \quad (\leq \|x\| + \|y\|),$$

$\Rightarrow$ $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ è ((lipschitziana e dunque) UNIFORMEMENTE) CONTINUA ; $\Rightarrow$ lo è $\langle\,;\,\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, perché, $\forall x,y \in X$, $\langle x;y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$ ("formula di RESTITUZIONE"). Vale inoltre, $\forall x,y \in X$,

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ ("identità del parallelogramma"). (2)

[$\forall x,y \in X$, $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$, cioè $\|x\| - \|y\| \leq$
$\leq \|x-y\|$, ma pure $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\|$. ✓
$\Rightarrow \forall x,y \in X$, $\dfrac{|\|x\| - \|y\||}{\|x-y\|} \leq 1$, dunque la costante 1 soddisfa le dis. di Lipschitz. Per $\langle;\rangle$, notiamo che in effetti basta provare le formule: avremmo infatto che, $\forall x,y \in X$,
$(x,y) \longmapsto (x+y, x-y) \longmapsto (\|x+y\|^2, \|x-y\|^2) \longmapsto \ldots$.
Ma in effetti $\|x+y\|^2 = \langle x+y; x+y\rangle = \langle x;x\rangle + 2\langle x;y\rangle + \langle y;y\rangle$
mentre $\|x-y\|^2 = \langle x-y; x-y\rangle = \langle x;x\rangle - 2\langle x;y\rangle + \langle y;y\rangle$,
dunque $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x;y\rangle$; INVECE $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x;x\rangle + 2\langle y;y\rangle$ $\left(= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right)$. □
(Avremmo anche potuto dimostrare direttamente che, ad esempio, $\forall y \in X$,
$x \longmapsto \langle x;y\rangle$ è CONTINUA: $\forall x_1,x_2 \in X$, $|\langle x_1;y\rangle - \langle x_2;y\rangle| = |\langle x_1-x_2;y\rangle| \underset{\uparrow}{\overset{\text{SCHWARZ}}{\leq}} \|x_1-x_2\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{\text{(costante)}}$. ✓)]

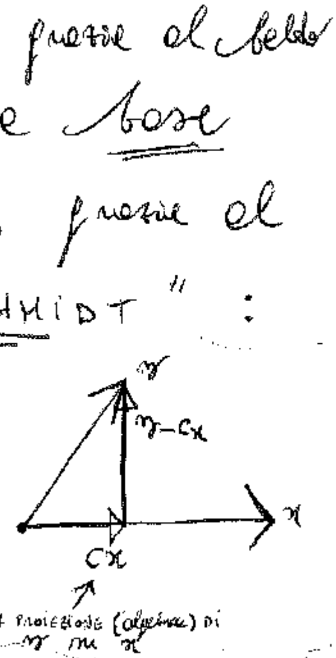
Naturalmente, $\forall (x_n)_{n\geq 1}$ in X, "$x_n \xrightarrow{X} x$" $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in X$ e $\|x_n - x\| \to 0$, o anche "$x = \lim^X x_n$". Notiamo l'UNICITÀ del limite in $\|\cdot\|$ (nell'ipotesi che basta: $x_n \xrightarrow{X} \begin{cases} x \\ y \end{cases}$
$\Rightarrow \|x-y\| = \|x-x_n+x_n-y\| \leq \|x-x_n\| + \|y-x_n\| \to 0$, dunque non può che essere $\|x-y\| = 0$, cioè $x = y$ ✓).
~~Allora~~ $\|x_n\| \to \|x\|$ $\left(|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|\right.$ (DIS. TR. "completata")$\left.\right)$, e
(continuità della norma (...))

$\emptyset \subsetneq S \subseteq X$ sottoinsieme $\Rightarrow$ $S^\perp$ è ($\mathbb{R}$-sottosp.) CHIUSO in X (cioè rispetto a $\|\cdot\|$).

[$\forall (x_n)_{n\geq 1}$ in $S^\perp$ tale che $x_n \xrightarrow{X} x$, allora in realtà

$x \in Y^\perp$: $\forall y \in Y$, $\langle x; y\rangle = \langle \lim^X x_n ; y\rangle \overset{\text{continuità}}{=} \lim^{\mathbb{R}} \underbrace{\langle x_n; y\rangle}_{=0\ \forall n\geq 1} =$
$= 0$. ∎

Se $X \supsetneq \{0\}$ (come ovviamente (ora lo ammettiamo)), grazie al fatto che $\langle;\rangle$ è definito positivo, possiamo trovare una base ortonormale di X, nel caso $\dim_{\mathbb{R}} X < \infty$, grazie al semplice "processo di ortogonalizzazione di GRAM-SCHMIDT":



$\forall x, y \in X$ lin. indip. (su $\mathbb{R}$) ($\Rightarrow \neq 0$; se $\dim_{\mathbb{R}} X = 1$ e $\langle\{x\}\rangle_{\mathbb{R}} = X$, allora "basta" $\frac{x}{\|x\|}$), $\langle x;x\rangle \neq 0$ e $c := \frac{\langle x;y\rangle}{\langle x;x\rangle} (>0)$ ("il coefficiente di Fourier di y rispetto a x") è tale che $y' := y - cx \ (\neq 0!) \perp x$, perché $\langle y - cx; x\rangle = \langle x;y\rangle - c\langle x;x\rangle = 0$; basta allora $\frac{x}{\|x\|}$ e $\frac{y'}{\|y'\|}$, ECC...

(CIOÈ, $\forall 1\leq i,j\leq d$, $\langle e_i; e_j\rangle = \delta_{ij}$)

Con $d \geq 1$, sia dunque $(e_1,\dots,e_d)$ base ortonormale di X, per cui fra l'altro, $\forall x\in X$, $\exists! \ (a_1,\dots,a_d)^T \in \mathbb{R}^d$ tale che $x = \sum_{n=1}^{d} a_n e_n$; in particolare $0 = \sum_{n=1}^{d} 0 e_n$.

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad x = \sum_{n=1}^{d} a_n e_n \longmapsto (a_1,\dots,a_d)^T$$ è UN'ISOMETRIA ($\langle;\rangle_{\mathbb{R}^d}$ è quello EUCLIDEO), dunque certamente X è COMPLETO rispetto alla metrica indotta da $\|\cdot\|$.

[$\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall x,y\in X$ (con $y = \sum_{n=1}^{d} b_n e_n$), $ax+by = \sum_{n=1}^{d} a a_n e_n + \sum_{n=1}^{d} b b_n e_n = \sum_{n=1}^{d} (a a_n + b b_n) e_n \Rightarrow \varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$; ora, $\ker(\varphi) = \{0\}$ è l'iniettività, dunque la suriettività (dimensioni FINITE COINCIDENTI!), che comunque è banale;

infine "conserva" il prodotto scalare (cioè la norma):

$\forall x, y \in X$, $\langle x; y\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\ell} a_k b_k ; \sum_{m=1}^{\ell} b_m b_m \rangle = \sum_{k=1}^{\ell} \langle a_k b_k ; \underbrace{\sum_{m=1}^{\ell} b_m b_m \rangle}_{} =$

$= \sum_{k=1}^{\ell} a_k b_k = \langle (a_1, \dots, a_\ell)^T ; (b_1, \dots, b_\ell)^T \rangle = \langle \varphi(x); \varphi(y)\rangle$. □ $\left(= \langle a_k b_k ; b_k b_k\rangle + 0 = = a_k b_k \right)$

$((b_k)$ STESSO BASE ORTONORMALE!!)

(Abbiamo finito, perché è generale (ed elementare) che

I) $\varphi : (X, \langle;\rangle) \to (\mathbb{R}, \langle;\rangle_{\mathbb{R}})$ LINEARE "conserva" la norma (cioè, $\forall x \in X, \|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}} = \|x\|$) $\Leftrightarrow$ "conserva" il prodotto scalare (cioè, $\forall x, y \in X$, $\langle \varphi(x); \varphi(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x; y\rangle$)), e

II) $\varphi : (X, \langle;\rangle) \to (\mathbb{R}, \langle;\rangle_{\mathbb{R}})$ propria un'isometria (dunque pure biunivoca) $\Rightarrow$ se $\mathbb{R}$ è completo, allora tale è X. (E VICEVERSA, ovviamente.)

$\boxed{\text{I}}$ $\Leftarrow$): $\forall x \in X$, $\langle \varphi(x); \varphi(x)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x; x\rangle$, cioè $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}}^2 = \|x\|^2$, cioè (per ≥ 0) $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{R}} = \|x\|$ ✓

$\Rightarrow$) Restituzione: $\forall x, y \in X$, $\langle x; y\rangle = \frac{1}{4}\left[\underbrace{\|x+y\|^2}_{= \|\varphi(x+y)\|_{\mathbb{R}}^2 \overset{\text{lin.}}{=} \|\varphi(x)+\varphi(y)\|_{\mathbb{R}}^2} - \underbrace{\|x-y\|^2}_{\text{analog.}} \right] =$

$= \frac{1}{4}\left[\|\varphi(x)+\varphi(y)\|_{\mathbb{R}}^2 - \|\varphi(x)-\varphi(y)\|_{\mathbb{R}}^2 \right] = \langle \varphi(x); \varphi(y)\rangle_{\mathbb{R}}$. □

$\boxed{\text{II}}$ $\forall (x_m)_{m\geq 1}$ DI CAUCHY in X, equivalentemente $(\varphi(x_m))_{m\geq 1}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ perché, $\forall m' > m \geq 1$, $\|x_{m'} - x_m\| = \|\varphi(x_{m'} - x_m)\|_{\mathbb{R}} \overset{\text{lin.}}{=} \|\varphi(x_{m'}) - \varphi(x_m)\|_{\mathbb{R}}$; ALLORA $\varphi(x_m) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$, tale che d'altra parte $\exists! x \in X$ tale che $y = \varphi(x)$ (suriettività, cioè iniettività!),

cioè $x_m \xrightarrow{X} x$: $\|\varphi(x_m) - \underbrace{y}_{= \varphi(x)}\|_{\mathbb{R}} = \|\varphi(x_m - x)\|_{\mathbb{R}} = \|x_m - x\|$ □)

In dimensione INFINITA ?? $\Rightarrow$

(PARENTESI sul LEMMA DI ZORN ! Sia $(Z, \leq)$ (parzialmente) ordinato (cioè tale che: $\forall x \in Z$, $x \leq x$; $\forall x, y \in Z$, $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$; $\forall x, y, z \in Z$, $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$; inoltre "$x < y$" $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $x \leq y \wedge x \neq y$) : un $C \subseteq Z$ è "una CATENA" se, con $\leq$, è TOTALMENTE ordinato (cioè, $\forall x, y \in C$, $x \leq y$ o $y \leq x$); "un MAGGIORANTE" $x \in Z$ di un $C \subseteq Z$ è tale che, $\forall y \in C$, $y \leq x$; "un ELEMENTO MASSIMALE" $m \in Z$ è tale che sia il solo maggiorante di sé (cioè di $\{m\}$), ossia $\{x \in Z \mid m \leq x\} \underset{(\subseteq)}{=} \{m\}$.

ZORN : $(Z, \leq)$ parz. ordinato $\neq \emptyset$ tale che ogni sua catena ammette almeno un maggiorante $\Rightarrow$ Z possiede elementi massimali.

~~(senza dim.!)~~

$\Rightarrow$ $\forall x \in Z$, $\exists m \in Z$ MASSIMALE tale che $x \leq m$.

[$(\underbrace{\{y \in Z \mid x \leq y\}}_{(\ddot{x})}, \leq) \subseteq (Z, \leq)$ soddisfa le ipotesi del lemma (ogni sua catena è anche catena di Z, dunque ammette maggiorante (ip.!) $z \in Z$, che ovviamente diviene $(z \geq x)$ (gli elementi di una catena sono ovviamente $\geq x$!)) $\Rightarrow$ possiede almeno un m el. massimale, che in particolare soddisfa $x \leq m$; in realtà è massimale IN TUTTO Z : se $\exists y \in Z$ tale che $m < y$, allora però $x < y$ e sarebbe contraddetta la massimalità di m in $\{y \in Z \mid x \leq y\}$. $\square$])

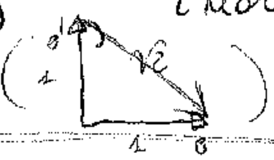
SPAZI DI HILBERT REALI : $\mathbb{R}$-spazi

vettoriali X dotati di prodotto scalare $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ il quale induce una norma rispetto alla quale X sia DI BANACH, cioè completo rispetto alla metrica indotta da tale norma (metrica che naturalmente induce la topologia che su X consideriamo).

Possiamo supporre ora, e per il seguito, che $\boxed{\dim_{\mathbb{R}} X = \infty}$, cioè che, $\forall k \geq 2$, $\exists\, x_1, \dots, x_k \in X$ lin. indip. (che naturalmente si possono ortonormalizzare!): diciamo allora che $\mathcal{S} \subseteq X$ (ovviamente $\neq \emptyset$) è un **SISTEMA ORTONORMALE** se, $\forall e, e' \in \mathcal{S}$, $\langle e ; e' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } e = e' \\ 0 & \text{se } e \neq e' \end{cases}$; cioè, se indicizziamo $\mathcal{S}$ come $\mathcal{S} = (e_i)_{i \in I}$ $(I \neq \emptyset)$: $\forall i, j \in I$, $\langle e_i ; e_j \rangle = \delta_{ij}$.

È dunque possibile essere I di ogni cardinalità finita, ma anche $|I| \geq \aleph_0$ (altrimenti $\dim_{\mathbb{R}} X < \infty$!).

Naturalmente gli e_i sono lin. indip., dunque DISTINTI e $\neq 0$ (ma in effetti, altrimenti, $1 = \langle e ; e \rangle = 0$!): inoltre, $\forall e \neq e' \in \mathcal{S}$, $\| e - e' \| = \sqrt{2}$.



[$\forall n \geq 2$, $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall e_1, \dots, e_n \in \mathcal{S}$, nell'ipotesi che $0 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$, ottengo che $\forall 1 \leq k \leq n$ $0 = \langle 0 ; e_k \rangle =$
$= \langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n ; e_k \rangle \overset{(1)}{=} a_k \underbrace{\langle e_k ; e_k \rangle}_{=1} = a_k$. ✓ Infine,
$\| e - e' \|^2 = \langle e - e' ; e - e' \rangle = \underbrace{\langle e ; e \rangle}_{=1} + 2 \cancel{\langle e ; e' \rangle} + \underbrace{\langle e' ; e' \rangle}_{=1} = 2$.]

1) $\mathcal{S} \subseteq X$ SIST. ORT. $\Rightarrow \forall (\emptyset \subsetneq)\, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{G}$ è SIST. ORT. (ovvio)

2) $(\mathcal{S}_h)_{h \in H}$ SIST. ORT. $\uparrow$ $\left(\bigcup_{h \in H} \mathcal{S}_h \right) \Rightarrow \bigcup_{h \in H} \mathcal{S}_h$ è SIST. ORT.,

Cioè le "catene" $(\{\mathcal{B}_h\}_{h\in H}, \subseteq)$ nel parz. ordinato $\mathcal{F} \doteq$
(TOT. ORDINATO)
$(\{\mathcal{B} \subseteq X \mid \mathcal{B}$ è SIST. ORT.$\}, \subseteq)$ ammette estremo superiore
(dunque almeno un maggiorante)
$\bigcup_{h\in H} \mathcal{B}_h$, $\overset{ZORN}{\Rightarrow}$ $\exists\, \overline{\mathcal{B}} \in \mathcal{F}$ ELEMENTO MASSIMALE, cioè
tale che sia l'UNICO maggiorante di sé: $\{\mathcal{B} \in \mathcal{F} \mid \overline{\mathcal{B}} \subseteq$
$\subseteq \mathcal{B}\} \underset{(\subseteq)}{=} \{\overline{\mathcal{B}}\}$. $(\Rightarrow |\overline{\mathcal{B}}| \geq \aleph_0\,!)$

[$\forall\, b, b' \in \bigcup_{h\in H} \mathcal{B}_h$, diciamo $b \in \mathcal{B}_{h_1}$, $b' \in \mathcal{B}_{h_2}$, $\exists\, \bar{h} \in H$ tale che
ASSIEME $b, b' \in \mathcal{B}_{\bar{h}}$ (in questo caso, $\bar{h} := \max\{h_1, h_2\}$!). □]

$\mathcal{B} \subseteq X$ SIST. ORT. è BASE DI HILBERT di X se

$$\boxed{\overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}}^X \underset{(\supseteq)}{=} X}$$

; dunque "sarebbe" un sist. ort. COMPLETO,
(SE ESISTESSE...!)
cioè un elemento massimale in $\mathcal{F}$. (Da ne esiste un el. MASSIMALE in $\mathcal{F}$: tale sarà base di Hilbert ???)

[$\exists\, \mathcal{B}' \subseteq X$ sist. ort. tale che $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}'$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$, che ovviamente è $x \perp \mathcal{B}$, $\Rightarrow x \perp \operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}$, $\overset{\text{CONTINUITÀ di }\langle\cdot\rangle}{\Rightarrow}$ $x \perp \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}}^X \overset{\text{ip.}}{=}$
$= X$, cioè $x = 0$ e allora NON potrebbe essere $x \in \mathcal{B}'$. □]

[LEMMA CHIAVE]
$\forall\, (b_n)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. in X, $\forall\, (a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty}$
(cioè $(a_n)_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}\setminus\{0\})$) $\Rightarrow$ $\sum_{n\geq 1} a_n b_n \overset{\text{in } X}{=} \bar{x}$ (che
necessariamente dunque $\in \overline{\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{b_n \mid n \geq 1\}}^X$) $\Rightarrow$ $\|\bar{x}\|^2 =$
$= \sum_{n\geq 1} a_n^2$ e, $\forall\, n \geq 1$, $\langle \bar{x}\,; b_n \rangle = a_n$ $\overset{(*)}{\not\Leftarrow}$ $\left(\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty\right)$.

[$\forall\, m' > m \geq 1$, $\left\|\sum_{n=1}^{m'} a_n b_n - \sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{m'} a_n b_n\right\|^2 = \langle \sum_{k=m+1}^{m'} a_k b_k\,;$
$\sum_{n=m+1}^{m'} a_n b_n \rangle = \sum_{k=m+1}^{m'} \underbrace{\langle a_k b_k\,; \sum_{n=m+1}^{m'} a_n b_n \rangle}_{a_k^2} = \sum_{n=m+1}^{m'} a_n^2 \leq \sum_{n\geq m+1} a_n^2 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right)_{m\geq 1}$ è DI CAUCHY in X $\Rightarrow$ converge in X, effettivamente ad un certo $\bar{x}$. Allora, $\forall m \geq 1$, $\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right\|^2 = \sum_{n=1}^{m} a_n^2 \Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = \left\|\lim^{X} \sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right\|^2 \overset{\text{cont. } \|\cdot\|}{\underset{(*)}{=}} \lim^{\mathbb{R}} \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right\|^2 =$

$= \sum_{n\geq 1} a_n^2$, e analogamente, $\forall k \geq 1$, $\left\langle \sum_{n=1}^{m} a_n b_n ; b_k \right\rangle = a_k$ per $m \geq k$ $\overset{\text{cont. } \langle;\rangle}{\Rightarrow}$ la tesi. $\square$

① Se, per $\bar{x} \in X$, è $\bar{x} \overset{\text{in } X}{=} \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ (con $\sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty$), allora "tale scrittura" è UNICA.

Infatti poiché, $\forall n \geq 1$, $\langle \bar{x} ; b_n \rangle = a_n$, dunque $\bar{x} \overset{\text{in } X}{=} \sum_{n\geq 1} a_n' b_n$ $\Rightarrow \forall n \geq 1$, $(a_n =)\ \langle \bar{x} ; b_n \rangle = a_n'$. $\square$

$\Rightarrow$ In modo unico è $0 \overset{\text{in } X}{=} \sum_{n\geq 1} 0 \cdot b_n$ (che comunque ovvio!) e, $\forall k \geq 1$,

$b_k = \sum_{n\geq 1} a_n b_n$ CON $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$ (che comunque ovvio!)

② $(b_n)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. in X NON è base algebrica, cioè il $\mathbb{R}$-sottosp. $Y := \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{b_n \mid n \geq 1\}$ è PROPRIO in X.

Basta prendere $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ TALE CHE $a_n \neq 0$ per infiniti n, come $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ o $(2^{-n})_{n\geq 1}$, ed avere che $\sum_{n\geq 1} a_n b_n \overset{\text{in } X}{=} \bar{x} \in \overline{Y}^{X} \setminus Y$ (gli b_n sono lin. indip.!). $\square$

$\forall \sigma : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ BIGEZIONE, $\sum_{n\geq 1} a_n^2 = \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}^2$; siano $< \infty$: $(b_n)_{n\geq 1}$ BASE DI HILBERT $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n b_n = \sum_{n\geq 1} a_{\sigma(n)} b_{\sigma(n)}$.

[$\forall m \geq 1$, $\sum_{n=1}^{m} e_{\sigma(n)}^2 \leq \sum_{n=1}^{N} e_n^2$, con $N := \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$ (aggiungo gli e_k "mancanti"!) PER INIETTIVITÀ di σ, $\leq \sum_{n\geq 1} e_n^2$ ($\Rightarrow \sum_{n\geq 1} e_{\sigma(n)}^2 \leq$ $\leq \sum_{n\geq 1} e_n^2$ $(<\infty)$); analogamente, $\forall m \geq 1$, $\sum_{n=1}^{m} e_n^2 \leq$ $\leq \sum_{n=1}^{M} e_{\sigma(n)}^2 \leq \sum_{n\geq 1} e_{\sigma(n)}^2$, con $M \geq 1$ tale che $\{1, \dots, m\}$ $\subseteq \sigma(\{1, \dots, M\})$ (PER SURIETTIVITÀ di σ), da cui $=$.)

Ora, $\bar{x} := \sum_{n\geq 1} e_n e_n$ ha, $\forall m \geq 1$, $\langle \bar{x}; e_m \rangle = e_m$, MA ANCHE $\bar{x}' := \sum_{n\geq 1} e_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}$ ha, $\forall m \geq 1$, $\langle \bar{x}'; e_m \rangle = e_m$ (infatti, $\forall m \geq 1$, $\exists! \bar{k} \geq 1$ tale che $m = \sigma(\bar{k})$, dunque $\forall m \geq \bar{k}$ è $\langle \sum_{n=1}^{m} e_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)}; \underset{\sigma(\bar{k})}{e_{(m)}} \rangle = e_{\sigma(\bar{k})} = e_m$ (da cui $\langle \bar{x}'; e_m \rangle$ per CONTINUITÀ di $\langle ; \rangle$)), CIOÈ, $\forall m \geq 1$, $\bar{x} - \bar{x}' \perp e_m$, $\underset{(\varepsilon)}{\Leftrightarrow}$ $\bar{x} - \bar{x}' \perp \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_n | n \geq 1\}$ $\underset{(\varepsilon)}{\overset{\text{con}}{\Leftrightarrow}}$ $\bar{x} - \bar{x}' \perp \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_n | n \geq 1\}} \overset{\text{ip.}}{=}$ $= X$, cioè $\bar{x} - \bar{x}' = 0$, cioè $\bar{x} = \bar{x}'$. ▫]

OSS. Studiare il caso $(e_n)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. NUMERABILE (infinito) è EQUIVALENTE a studiare il caso infinito qualsiasi SE, come stiamo facendo, si è interessati alla scelta di $x \in X$ come combinazione lineare INFINITA degli e_i, NEL SENSO SEGUENTE: cominciando di definire, $\forall (\alpha_i)_{i\in I}$ in $\mathbb{R}_+$ $(|I| \geq \aleph_0)$, $\sum_{i\in I} \alpha_i := \sup_{\substack{J \subseteq I \\ \text{FINITI}}} \sum_{i\in J} \alpha_i$, è allora

$$\boxed{\sum_{i\in I} \alpha_i < \infty \Rightarrow \text{gli } \underset{(\text{cioè } > 0)}{\alpha_i \neq 0} \text{ sono in quantità AL PIÙ numerabile}}$$

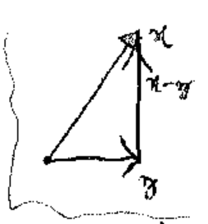
[$\{i \in I | \alpha_i > 0\} = \bigcup_{m\geq 1} \{i \in I | \alpha_i \geq 1/m\}$, E $\{i \in I | \alpha_i \geq 1/m\}$ DEVE

essere FINITO $\forall m \geq 1$ ($\exists \bar{m} \geq 1$ tale che gli $\alpha_i \geq \frac{1}{\bar{m}}$ ③
sono in quantità almeno numerabile (infinite), diciamo ciò $\forall$
$i \in \bar{I} \subseteq I$, $\underset{(|\bar{I}| \geq \aleph_0 !)}{}$ $\Rightarrow \sum'_{i \in I} \alpha_i = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ \text{FINITI}}} \sum'_{j \in J} \alpha_j$ NON può essere $M < \infty$,
$\forall M \in [0, \infty)$ (che è assurdo) : infatti basterebbe prendere un
$\bar{J} \subseteq I$ finito, ad esempio $\bar{J} \subseteq \bar{I}$ CON $|\bar{J}| = (M+1)\bar{m}$, tale
che $\sum'_{j \in \bar{J}} \alpha_j \geq \sum'_{j \in \bar{J}} \frac{1}{\bar{m}} = |\bar{J}| / \bar{m} = \bar{m}(M+1) / \bar{m} = M+1 > M$).

Allora $\sum'_{i \in I} \alpha_i < \infty \Leftrightarrow \exists (i_n)_{n \geq 1}$ in I tale che $\sum'_{i \in I} \alpha_i =$
$= \sum'_{n \geq 1} \alpha_{i_n} =: \sum'_{n \geq 1} \alpha_n$, per cui cominciare la nostra
teoria con $\boxed{\sum'_{i \in I} e_i^2 < \infty}$ è semplicemente UGUALE e cominciarla
come fatto!

TEOREMA FONDAMENTALE: $(b_n)_{n \geq 1}$ SIST. ORT. in X e,
$\forall n \geq 1$, $x_n := \langle x ; b_n \rangle$ per uno scelto $x \in X$ $\Rightarrow$
$\boxed{\sum'_{n \geq 1} x_n^2 \leq \|x\|^2}$ $(< \infty)$ ("BESSEL") , $\underset{(\text{visto!})}{\Rightarrow}$ $\sum'_{n \geq 1} x_n b_n \overset{\text{in } X}{=} \bar{x}$ (Sol modo!) ($\in$
$\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{b_n \mid n \geq 1\}}^X$) $\underset{(\text{visto!})}{\Rightarrow}$ $\|\bar{x}\|^2 = \sum'_{n \geq 1} x_n^2$ ($\leq \|x\|^2$!) e
$\forall n \geq 1$, $\langle \bar{x} ; b_n \rangle = x_n$, $\Leftrightarrow$ $(x - \bar{x}) \perp \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{b_n \mid n \geq 1\}}^X$.
$\Rightarrow$ $(b_n)_{n \geq 1}$ BASE DI HILBERT di X $\Rightarrow$ $x \overset{\text{in } X}{=} \sum'_{n \geq 1} x_n b_n$ (Sol modo) e
$\|x\|^2 = \sum'_{n \geq 1} x_n^2$, $\Rightarrow$ $\forall x, y \in X$ ($y_n := \langle y ; b_n \rangle$ $\forall n \geq 1$)
$\boxed{\langle x ; y \rangle = \sum'_{n \geq 1} x_n \cdot y_n}$ ("PARSEVAL").

$\forall m \geq 1, \; x \underset{\uparrow}{=} x_1 b_1 + \dots + x_m b_m + (\underbrace{x - x_1 b_1 - \dots - x_m b_m}_{=: y}) =$



$= \sum_{n=1}^{m} x_n b_n + y$, e $y \perp b_n \; \forall_{(m \geq)} n \geq 1$ $\big(\langle b_n ; x - x_1 b_1 - \dots - x_m b_m \rangle =$

$= \underbrace{\langle b_n ; x \rangle}_{= x_n} - x_n \underbrace{\langle b_n ; b_n \rangle}_{= 1} = 0 \;\; \forall 1 \leq n \leq m \big) \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x ; x \rangle =$

$= \langle \sum_{h=1}^{m} x_h b_h + y ; \sum_{n=1}^{m} x_n b_n + y \rangle = \sum_{h=1}^{m} \langle x_h b_h ; \underbrace{\sum_{k=1}^{m} x_k b_k + y}_{= x_h^2} \rangle +$

$+ \langle y ; \underbrace{\sum_{n=1}^{m} x_n b_n + y}_{= \|y\|^2} \rangle = \sum_{n=1}^{m} x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} x_n^2 \; , \xRightarrow{m \geq 0}$

$\|x\|^2 \geq \sum_{m \geq 1} x_m^2$, e la due ($\Rightarrow$) successione sono immediate; dato di che' $x_m = \langle x ; b_m \rangle = \langle \bar{x} ; b_m \rangle \; \forall m \geq 1 \Rightarrow x - \bar{x} \perp b_m \; \forall m \geq 1$,

cioè $x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{b_n \mid n \geq 1\}}^{X}$ (come anche più sopra!), $\overset{\text{H.}}{=}$

$= X \Rightarrow x - \bar{x} \perp X$, cioè $x - \bar{x} = 0$, cioè $x = \bar{x}$; per cui

abbiamo (per) l'ESISTENZA (CON UNICITÀ) della scrittura $x \overset{\text{in } X}{=} \sum_{m \geq 1} x_m b_m$, se

$(b_n)_{n \geq 1}$ è BASE DI HILBERT, per cui resta definita

$$\varphi : X \longrightarrow \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N} \setminus \{0\}), \quad x = \sum_{m \geq 1} x_m b_m \longmapsto (x_m)_{m \geq 1}$$

, che anzi è una

ISOMETRIA, dunque in particolare, $\forall x, y \in X$, $\langle x ; y \rangle =$

$= \langle \varphi(x) ; \varphi(y) \rangle_{\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N} \setminus \{0\})} = \langle (x_n)_{n \geq 1} ; (y_n)_{n \geq 1} \rangle_{\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N} \setminus \{0\})} = \sum_{m \geq 1} x_m y_m$. □

($\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ax + by = a \sum_{m \geq 1} x_m b_m + b \sum_{m \geq 1} y_m b_m = \sum_{m \geq 1} (a x_m + b y_m) b_m$

$\Rightarrow \varphi(ax + by) = (a x_m + b y_m)_{m \geq 1} = a (x_m)_{m \geq 1} + b (y_m)_{m \geq 1} = a\varphi(x) + b\varphi(y)$!

Ora, $\ker(\varphi) = \{0\}$ è ovvio, e la suriettività è Cefite; infine,

$\|x\| = \|\underbrace{\varphi(x)}_{(x_m)_{m \geq 1}}\| = \{\sum_{m \geq 1} x_m^2\}^{1/2}$ è esattamente ciò che si ha! 6)

"Allora" le basi di Hilbert ESISTONO:

$\tilde{\mathcal{B}}$ è un elemento massimale in $(\{\mathcal{B} \subseteq X \mid \mathcal{B}$ è sist. ort.$\}, \subseteq)$ (4)

(ESISTE!) $\underset{\text{(visto!)}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{\mathcal{B}}$ è una BASE DI HILBERT di X,

dunque ogni sist. ort. $\mathcal{B}$ di X può essere COMPLETATO a base di Hilbert di X (cioè, $\forall \mathcal{B}$ sist. ort., $\exists \tilde{\mathcal{B}}$ base : $\mathcal{B} \subseteq \tilde{\mathcal{B}}$).

(Noto!)

Se per assurdo $\exists x \in X \setminus \overline{\mathrm{Span}\,\tilde{\mathcal{B}}}^X$ *, comunque $\tilde{\mathcal{B}}$ è sist. ort. di X (che $\supseteq (e_n)_{n\geq 1}$ sist. ort. ...): come nel TEO. FOND., preso allora $\bar{x} \in \overline{\mathrm{Span}\,\tilde{\mathcal{B}}}^X$ ($\Rightarrow \bar{x} \neq x$!), per cui $\tilde{x} := x - \bar{x}$ $(\neq 0)$ $\perp \overline{\mathrm{Span}\,\tilde{\mathcal{B}}}^X \Rightarrow \tilde{x} \perp \tilde{\mathcal{B}}$ ($\Rightarrow \tilde{x} \notin \tilde{\mathcal{B}}$), e avrei un sist. ort. $\{\frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}\} \cup \tilde{\mathcal{B}} \supsetneq \tilde{\mathcal{B}}$. $\square$

*Ho giustamente usato solo le 1^a parte del TEOREMA FONDAMENTALE!)

$(e_n)_{n\geq 1}$ BASE DI HILBERT NUMERABILE $\overset{[1]}{\Longrightarrow}$ X SEPARABILE (cioè $\exists D \subseteq X$, con $|D| = \aleph_0$, tale che $\overline{D}^X = X$) $\overset{[2]}{\Longrightarrow}$ tutte le sue basi di Hilbert sono NUMERABILI.

(CASO che si rivelerà INTERESSANTE...)

[1] $\Rightarrow$) $D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}\{e_n \mid n\geq 1\}$ ha $|D| = \aleph_0$ e $\overline{D}^X = \overline{\mathrm{Span}\{e_n \mid n\geq 1\}}^X = X$ (ad esempio, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $\forall e, e' \in \{e_n \mid n \geq 1\}$, prese $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{Q}$ tali che $\begin{cases} a_n \xrightarrow{\mathbb{R}} a \\ b_n \xrightarrow{\mathbb{R}} b \end{cases}$, è $a_n e + b_n e' \xrightarrow{X} ae + be'$:

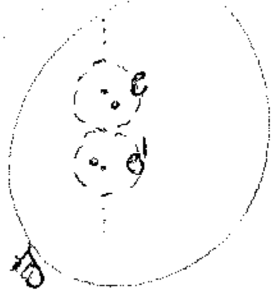
$\|ae + be' - (a_n e + b_n e')\| = \|(a - a_n)e + (b - b_n)e'\| \leq \|(a-a_n)e\| + \|(b-b_n)e'\| =$
$= |a - a_n| \cdot 1 + |b - b_n| \cdot 1 \to 0$) ✓

(mentre $|D| = \aleph_0$ perché $D = \bigcup_{m\geq 1} \underbrace{\{\sum_{n=1}^m a_n e_n \mid \forall 1 \leq k \leq m, a_k \in \mathbb{Q}\}}_{=: A_m}$,

e $|A_m| = \aleph_0$ perché $\begin{array}{ccc} A_m & \longrightarrow & \mathbb{Q}^m \\ \sum_{n=1}^m a_n e_n & \longmapsto & (a_1, \dots, a_m) \end{array}$ è BIGEZIONE (e_i lin. indip.!) ✓)

[2] $\Rightarrow$) Sia $D \subseteq X$ con $|D| = \aleph_0$ e $\overline{D}^X = X$; allora ovviamente, $\forall x \in X$ e $\forall R > 0$, $\exists y \in B(x, R) \cap D$ per densità ($(x_n)_{n\geq 1}$ in D tale che $x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow \forall R > 0, \exists \bar{n} \geq 1 : \|\underbrace{x_{\bar{n}}}_{=: y} - x\| < R$), in

particolare ciò è vero $\forall\, \mathcal{S}$ sist. ort. di X ; d'altra parte, $\forall\, e \neq e' \in \mathcal{S}$, $\|e-e'\| = \sqrt{2} \Rightarrow B(e,\frac{\sqrt{2}}{2}) \cap B(e',\frac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$ (se $\exists$ x in tale intersezione $\Rightarrow \|e-e'\| = \|e-x+x-e'\| \leq \|e-x\| + \|x-e'\| \lneqq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$), dunque è INIETTIVA



$$\mathcal{S} \longrightarrow D$$

(o anche $\sqrt{2}/3$!)

$$e \longmapsto \text{UN (S.LO) } x \in B(e,\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \cap D$$

$\Rightarrow |\mathcal{S}| \leq \aleph_0$. Ma $\mathcal{S}$ BASE DI HILBERT $\Rightarrow |\mathcal{S}| \geq \aleph_0$, da cui la tesi. ∎

È evidente che analogamente X separabile $\Leftrightarrow$ (anche) (è base!) $\exists\, (x_n)_{n\geq 1}$ in X lin. indip. (≠ tutti e ≠0) tali che $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x_n \mid n\geq 1\}} = X$, per cui in tal caso possiamo COSTRUIRE una base di Hilbert (NUMERABILE) di X ortonormalizzando gli $(x_n)_{n\geq 1}$ (tramite GRAM-SCHMIDT):

$x_1 \neq 0$ certamente, dunque $\tilde{x}_1 := x_1$ e $e_1 := \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}_1\|}$;

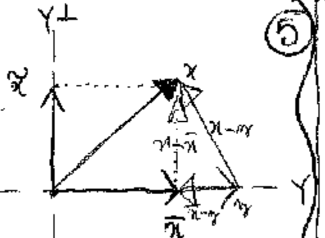
x_2, x_1 lin. indip. $\Rightarrow \tilde{x}_2 := x_2 - \frac{\langle x_2 ; e_1\rangle}{\langle e_1 ; e_1\rangle} e_1$ è $\neq 0$ e $\perp e_1$, dunque pongo $e_2 := \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}_2\|}$;

x_3, x_2, x_1 lin. indip. $\Rightarrow \tilde{x}_3 := x_3 - \langle x_3 ; e_1\rangle e_1 - \langle x_3 ; e_2\rangle e_2$ è $\neq 0$ e $\perp$ sia a e_1, sia a e_2 : pongo $e_3 := \frac{\tilde{x}_3}{\|\tilde{x}_3\|}$; ECC., ottenendo per costruzione $(e_n)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. in X, e $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_n \mid n\geq 1\} \underset{\text{(palese)}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\tilde{x}_n \mid n\geq 1\} \underset{\text{(ovvio)}}{=} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{x_n \mid n\geq 1\} \Rightarrow$ è BASE !

~~TEOREMA DELLA SCOMPOSIZIONE $X = Y \oplus Y^{\perp}$~~

$Y \subseteq X$ $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO IN X ($e \neq \emptyset$ (CERTO: HA LO 0!)) $\Rightarrow X = Y \oplus Y^{\perp}$, CIOÈ, $\forall x \in X$, $\exists!\ \bar{x} \in Y$ e $\tilde{x} \in Y^{\perp}$ tali che $x = \bar{x} + \tilde{x}$, che comunque restano CARATTERIZZATI anche dal fatto che

$$\begin{cases} \forall y \in Y\setminus\{\bar x\}, \quad \|x-\bar x\| < \|x-y\| \\ \forall z\in Y^\perp\setminus\{\tilde x\}, \quad \|x-\tilde x\| < \|x-z\| \end{cases} ;$$



Si noti anche che $\|x\|^2 \underset{(1)}{=} \|\bar x\|^2+\|\tilde x\|^2 \Rightarrow \|\bar x\|\le\|x\|$ e $\|\tilde x\|\le\|x\|$.

Osserviamo anzitutto che, se $\bar x$ e $\tilde x$ ESISTONO, allora sono UNICI: $x=\bar x_1+\tilde x_1=\bar x_2+\tilde x_2 \Rightarrow \underbrace{\bar x_1-\bar x_2}_{\in Y}=\underbrace{\tilde x_2-\tilde x_1}_{\in Y^\perp}=0$ necessariamente ($Y\cap Y^\perp \supseteq \{0\}$, dunque è $\neq\emptyset$, e allora è $\underset{\uparrow}{=}\{0\}$); essendo inoltre $\perp$ tra loro, è ovvio che $\|x\|^2=\langle x;x\rangle=\langle\bar x+\tilde x;\bar x+\tilde x\rangle = \langle\bar x;\bar x\rangle+0+\langle\tilde x;\tilde x\rangle=\|\bar x\|^2+\|\tilde x\|^2$, da cui ad esempio $\|x\|^2\ge\|\bar x\|^2$, cioè $\|x\|\ge\|\bar x\|$ (per ≥ 0). Inoltre, allo stesso modo, $\forall y\in Y$, $x-y=(x-\bar x)+(\bar x-y) \Rightarrow \|x-y\|^2 = \|x-\bar x\|^2+\underbrace{\|\bar x - y\|^2}_{>0 \Leftrightarrow y\neq\bar x} > \|x-\bar x\|^2 \ \forall y\neq\bar x$ ($x-\bar x = \tilde x\in Y^\perp$, $\bar x - y\in Y$), e analogo per $\tilde x$. Ora, $(Y,\langle;\rangle)$ (ovviamente $\mathbb R$-spazio dotato di prodotto scalare!) è a sua volta COMPLETO, cioè di Hilbert, per chiusura in X di Y ($\forall (y_n)_{n\ge1}$ di Cauchy in Y, $\subseteq X$ $\Rightarrow \exists y\in X: y_n \xrightarrow{X} y, \overset{(\bar Y^X = X)}{\Rightarrow} y\in Y$); restringiamoci al caso particolare di $\boxed{X \text{ SEPARABILE}}$: Y sottosp. di uno spazio metrico separabile $\Rightarrow$ Y stesso è separabile, cioè $\exists (B_n)_{n\ge1}$ base di Hilbert DI Y. Comunque $(B_n)_{n\ge1}$ è SIST. ORT. in X, dunque, $\forall x\in X$, $\exists$, per il TEO. FOND., $\bar x\in \overline{\mathrm{Span}\{B_n\}_{n\ge1}}^X \underset{\uparrow}{=} Y$ TALE CHE $\tilde x := x-\bar x\perp Y$, cioè $\tilde x = x-\bar x\in Y^\perp$, da cui la tesi.

$\boxed{\Rightarrow \quad Y = X \underset{(\text{ovvio})}{\Leftrightarrow} Y^\perp=\{0\}.}$ (Y $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO (*))

[Se $Y^\perp = \{0\}$ MA $Y \subsetneq X$, allora (TEOREMA!) $x = \underbrace{\bar{x}}_{\in Y} + \underbrace{\tilde{x}}_{\in Y^\perp,\ \text{cioè } =0!} = \bar{x} \in Y$! ▫]

(Y DEVE essere chiuso: se $(e_n)_{n\geq 1}$ è SIST. ORT. in X, allora (come visto!) $Y := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_n | n \geq 1\}$ è PROPRIO, e se anzi $(e_n)_{n\geq1}$ è BASE DI HILBERT di X (separabile) allora è anche DENSO, dunque certamente NON chiuso; ma infatti $Y^\perp \overset{\text{cont}}{=} \overline{Y}^\perp = X^\perp = \{0\}$, ed ecco l'assurdo $Y = X$!)

ESEMPIO: $\omega : X \to \mathbb{R}$ LINEARE e CONTINUA $\Rightarrow$ $Y := \ker(\omega)$ è (un $\mathbb{R}$-sottosp.) CHIUSO in X.

[$\{0\}$ chiuso di $\mathbb{R}$ e ω CONTINUA $\Rightarrow$ $\omega^{-1}(\{0\}) = \ker(\omega)$ chiuso in X. ▫]

(⚠ In DIM. ∞ ω lineare $\not\Rightarrow$ ω continua! Come esempio, sia X separabile con BASE DI HILBERT $\{e_n | n \geq 1\} =: \mathcal{B}$, che NON è BASE ALGEBRICA, $\Rightarrow$ $\exists\, \mathcal{B}' \subseteq X$ base algebrica (cioè $X = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}'$) tale che $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{B}'$; sia $b' \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$. Se, $\forall x \in X$, $\exists\, (c(x)_b)_{b \in \mathcal{B}'}$ in $\mathbb{R}$, ma $\neq 0$ IN NUMERO FINITO, tali che $x = \sum'_{b \in \mathcal{B}'} c(x)_b\, b$, allora, $\forall b \in \mathcal{B}'$, $\omega_b : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c(x)_b$ è LINEARE; però $\omega := \omega_{b'}$ NON può essere continua: $\forall n \geq 1$, $\omega(e_n) = 0 \overset{(\text{lin.})}{\Rightarrow} \omega|_{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_n|n\geq1\}} \equiv 0$, e se fosse continua sarebbe allora 0 su tutto $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}}^X = X$, mentre $\omega \neq 0$ in quanto certamente $\omega(b') = 1$. ▫)

Per V $\mathbb{R}$-spazio vett. e $\omega_1, \omega_2 : V \to \mathbb{R}$ LINEARI (cioè $\omega_1, \omega_2 \in V'$): $\ker(\omega_1) \subseteq \ker(\omega_2) \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$: $\omega_2 = c\, \omega_1$.

(se $c \neq 0$, è ovvio; se $c = 0$, allora $\omega_2 \equiv 0$, cioè $\ker(\omega_2) = V$! ✓)

[$\omega_1 \equiv 0 \Rightarrow \ker(\omega_1) = V \overset{\text{ip.}}{\subseteq} \ker(\omega_2)\ (\subseteq V) \Rightarrow \omega_2 \equiv 0$, per cui va bene ogni $c \in \mathbb{R}$; ALTRIMENTI, sia $x_1 \in V \setminus \ker(\omega_1)$, cioè tale che $\omega_1(x_1) \neq 0$: allora $x_0 := \frac{x_1}{\omega(x_1)}$ ha $\omega_1(x_0) \overset{\text{lin.}}{=} 1$,

$\Rightarrow \forall x \in V$, $\omega_1(x - \underbrace{\omega_1(x)}_{\in\mathbb{R}} \cdot x_0) \overset{\text{lin.}}{=} 0$, ossia $y := x - \omega_1(x) x_0 \in \ker(\omega_1)\ (\subseteq \ker(\omega_2))$; per cui, $\forall x \in X$,

$x = \omega_1(x)x_0 + \underbrace{(x - \omega_1(x)x_0)}_{(=y)} \Rightarrow \forall x \in X$, $\omega_2(x) = \omega_1(x) \cdot \underbrace{\omega_2(x_0)}_{=:c \in \mathbb{R}}$. $\square$]

{TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI}

RIESZ: $\omega : X \to \mathbb{R}$ LINEARE E CONTINUA $\Leftrightarrow$ $\exists\, x_0 \in X$ tale che, $\forall x \in X$, $\omega(x) = \langle x ; x_0 \rangle$.
(UNICO!)

[$\forall x \in X$, $\langle x; x_0\rangle = \langle x; x_1\rangle$, cioè $\langle x; x_0 - x_1\rangle = 0$, $\Leftrightarrow (x_0 - x_1) \perp X$, cioè è lo 0. ✓]

[Osserviamo anzitutto che avremmo esattamente $\ker(\omega) = x_0^{\perp}$, $\Rightarrow$ $x_0 \in \ker(\omega)^{\perp}$. Dunque, se $\omega \equiv 0$, cioè $\ker(\omega) = X$, allora in effetti $x_0 = 0$ risolve (ed è il solo caso per cui $x_0 = 0$!).

ALTRIMENTI $Y := \ker(\omega)$ è $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO e PROPRIO,

$\Rightarrow Y^{\perp} \supsetneq \{0\}$; $x_1 \in Y^{\perp} \setminus \{0\}$ permette di definire (su X)

$\omega_1(x) := \langle x ; x_1 \rangle$ (lineare e) $\neq 0$: $\omega_1(x_1) = \|x_1\|^2 > 0$!)

TALE CHE $(\ker(\omega) =)\ \boxed{Y \subseteq x_1^{\perp}}\ (= \ker(\omega_1))$, $\overset{\text{LEMMA PRECEDENTE!}}{\Rightarrow}$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$

tale che $\omega_1 = c \cdot \omega$, e anzi $c \neq 0$ ($\omega_1 \neq 0$!), cioè

$\omega = \frac{1}{c}\omega_1$, cioè $\forall x \in X$, $\omega(x) = \langle x ; \underbrace{\tfrac{x_1}{c}}_{=:x_0} \rangle$. $\square$]

(potremmo chiamare x_0 "l'elemento di Riesz")

Per X $\mathbb{C}$-spazio vettoriale consideriamo un prodotto hermitiano $\langle\, ;\, \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$, cioè che soddisfi le proprietà: (1) $\forall y \in X$, $x \longmapsto \langle x ; y\rangle$ è lineare; (2) $\forall x, y \in X$, $\langle x ; y \rangle = \overline{\langle y ; x\rangle}$; (3) $\forall x \in X$, $\underset{(\text{REALE: } \langle x;x\rangle \overset{(2)}{=} \overline{\langle x;x\rangle}\ !)}{\langle x ; x\rangle \geq 0}$ e $=0 \Leftrightarrow x = 0$.

ALLORA i $\underset{(\text{def. complesse!})}{\text{preliminari}}$ valgono inalterati, almeno nella sostanza degli enunciati, SALVO LA RESTITUZIONE: $\forall x, y \in X$, infatti, è $\langle x ; y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right]$.

Inoltre, i risultati (e def.!) essendo dimostrati restano veri sostituendo combinazioni lineari COMPLESSE a quelle reali, e nelle prove fatte $\boxed{(c_n)_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}\setminus\{0\})}$, e pure le dimostrazioni sono pressoché identiche. Ad esempio, per il TEOREMA FONDAMENTALE: $\forall (e_n)_{n\geq1}$ SIST. ORT. in X, $(c_n)_{n\geq 1}$ in $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \overset{\text{COMPL. } X}{\Longrightarrow} \sum_{n\geq1} c_n e_n \overset{\text{in } X}{=} \overline{x} \in \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n\geq 1\}}^{X}$, $\overset{\text{CONT. } \|\,\|, \langle;\rangle}{\Longrightarrow} \|\overline{x}\|^2 = \sum_{n\geq 1} |c_n|^2$ e, $\forall n \geq 1$, $\langle \overline{x} ; e_n\rangle = c_n$ (MENTRE $\langle e_n ; \overline{x}\rangle = \overline{c_n}$!) (unicità scrittura in "serie");

(Bessel) $\forall x \in X$, posti $x_n := \langle x ; e_n\rangle$ $\forall n\geq 1$, $\|x\|^2 \underset{(\infty >)}{\geq} \sum_{n\geq 1}|x_n|^2 \Longrightarrow \sum_{n\geq1} x_n e_n \overset{\text{in } X}{=} \underset{(\text{sol. modo})}{\overline{x}}$ con $\|\overline{x}\|^2 = \sum_{n\geq 1}|x_n|^2$ $(\leq \|x\|^2)$ e, $\forall n \geq 1$, $\langle \overline{x} ; e_n \rangle = x_n$, $\overset{\text{ovvio}}{\Longrightarrow} (x - \overline{x}) \perp \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n \geq 1\}}^{X}$. Allora, se $(e_n)_{n\geq1}$ è BASE DI HILBERT di X, $\forall x \in X$ è $x \underset{(\text{sol. modo})}{\overset{\text{in } X}{=}} \sum_{n\geq1} x_n e_n$ e $\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1}|x_n|^2$, cioè vale PARSEVAL $\forall x, y \in X$ ($y_n := \langle y ; e_n\rangle$ $\forall n \geq 1$), $\langle x ; y\rangle = \sum_{n\geq1} x_n \overline{y_n}$.

$\boxed{\forall m' > m \geq 1}$, $\left\|\sum_{n=1}^{m'} c_n e_n - \sum_{n=1}^{m} c_n e_n\right\|^2 = \left\|\sum_{n=m+1}^{m'} c_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m'} \underbrace{\langle c_n e_n ; c_n e_n\rangle}_{= c_n \cdot \overline{c_n} \cdot 1 = |c_n|^2} =$
$= \sum_{n=m+1}^{m'} |c_n|^2 \overset{(|\cdot|\geq 0)}{\leq} \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, ...

ESERCIZI HILBERT (1) (cont...)

$\boxed{\text{Entrambe } x \mapsto \bar{x} \text{ e } x \mapsto \tilde{x},\ X \to X, \text{ sono lineari e continue}}$ (IPOTESI DEL TEO. $X = Y \oplus Y^\perp$)

[$\forall \varrho \in \mathbb{R}$, $\overset{(\varrho\bar{x}+\varrho\tilde{x})}{\overset{\|}{\varrho x}} = \varrho(\bar{x}+\tilde{x}) = \underbrace{\varrho\bar{x}}_{\in Y} + \underbrace{\varrho\tilde{x}}_{\in Y^\perp}$ $\Rightarrow$ DEVE essere la ~~scelta~~ "decomposizione" di ϱx, cioè $\overline{\varrho x} = \varrho\bar{x}$ e $\widetilde{\varrho x} = \varrho\tilde{x}$; $\forall x, y \in X$, $(x)+(y) = (\bar{x}+\tilde{x}) + (\bar{y}+\tilde{y}) = \underbrace{(\bar{x}+\bar{y})}_{\in Y} + \underbrace{(\tilde{x}+\tilde{y})}_{\in Y^\perp}$ $\Rightarrow$ DEVO essere $\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y}$ e $\widetilde{x+y} = \tilde{x}+\tilde{y}$. ✓

Infine, ad esempio, $x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow \bar{x}_n \xrightarrow{X} \bar{x}$:

$\|\bar{x}_n - \bar{x}\| \overset{\text{LIN.}}{=} \|\overline{x_n - x}\| \underset{\text{visto!}}{\leq} \|x_n - x\| \to 0$. □]

(I risultati simmetrici per $\bar{x}$ e $\tilde{x}$ sono presto spiegati !)

$\boxed{Y \ \mathbb{R}\text{-sottosp. CHIUSO di } X \Rightarrow (Y^\perp)^\perp = Y.}$

[$(Y^\perp)^\perp \supseteq Y$: $\forall y \in Y$, $\forall x \in Y^\perp$, $\langle y; x\rangle \overset{(x\in Y^\perp)}{=} 0$! Ora, se per assurdo $\exists\ \hat{x} \in (Y^\perp)^\perp \setminus Y$, allora però osservo che sia $Y^\perp$ sia $(Y^\perp)^\perp$ sono $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSI di X, in particolare $Y^\perp$, e allora avrei $x := \underbrace{\tilde{x}'}_{\in Y^\perp} + \underbrace{\hat{x}}_{(\in Y^\perp)^\perp} \in X$ più "decomposto" rispetto a $Y^\perp$ e $(Y^\perp)^\perp$; MA d'altra parte $x = \underbrace{\bar{x}}_{\in Y \subseteq (Y^\perp)^\perp} + \underbrace{\tilde{x}}_{\in Y^\perp}$,

$\Rightarrow \underbrace{\bar{x} - \hat{x}}_{(Y^\perp)^\perp} = \underbrace{\tilde{x}' - \tilde{x}}_{\in Y^\perp}$, $= 0$ necessariamente, e in particolare avrei l'assurdo $\hat{x} = \bar{x} \in Y$. □]

$\boxed{\Rightarrow \forall \mathcal{J} \subseteq X \text{ sottoinsieme}, \ (\mathcal{J}^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{J}}^X.}$

[$Y := \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{J}}^X$ è $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO di X, dunque $(Y^\perp)^\perp = Y$; MA ovviamente $(\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{J}}^X)^\perp \underset{(?)}{=} \mathcal{J}^\perp$ (CONTINUITÀ $\langle;\rangle$!). □]

Siano X di Hilbert e $\mathcal{S} \subseteq X$ SISTEMA ORTONORMALE :
$\mathcal{S}$ massimale (tra i sist. ort.) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$.
(CIOE' BASE DI HILBERT!)

$\Rightarrow$) : $\mathcal{S}^\perp \overset{\text{(cont. }\langle;\rangle)}{\underset{(\subseteq)}{=}} (\overline{\mathcal{S}}^X)^\perp \overset{\mathcal{S}\text{ BASE!}}{=} X^\perp = \{0\}$. ✓

$\Leftarrow$) : $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\mathcal{S}}^X \underset{\text{EX. precedente!!}}{=} (\mathcal{S}^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = X$. $\square$

X DI HILBERT con $\dim_{\mathbb{R}} X = \infty$ e $(e_n)_{n\ge 1}$ SIST. ORT. in X
$\Rightarrow$ $(e_n)_{n\ge1}$ è successione LIMITATA in X che può NON
(infatti, $\forall n\ge 1$, $\|e_n\| = 1$)
AMMETTE SOTTOSUCCESSIONI CONVERGENTI, $\underset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ la palla
chiusa $\overline{B(0,1)} := \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ NON è compatta.
(MORALE : è una cosa che a $\dim_{\mathbb{R}} X < \infty$ NON accade !!)

Una eventuale $(e_{n_k})_{k\ge1} =: (e_k)_{k\ge 1}$ convergente in X sarebbe DI CAUCHY
in X, ma $\forall h, k \ge 1$ e $h \ne k$ è $\|e_h - e_k\| = \sqrt{2}$! $\square$

DIS. DI SCHWARZ "COMPLETA" (mole...) : $\forall x, y \in X$, è
$|\langle x; y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$ e vale l' "=" $\Longleftrightarrow$ $\exists(!)\, t \in \mathbb{R}$
tale che $y = tx$, "CIOÈ" $x = \frac{y}{t}$ (occorrendo da poter
supporre entrambi x e $y \ne 0$!) .

(PARABOLA in $t \ge 0$: !)

$\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \le \langle tx+y; tx+y\rangle = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x;y\rangle t + \|y\|^2$,
CIOÈ $\Delta/4 \le 0$: $\Delta/4 = $ "$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$" $= \langle x;y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \le$
0 è la DIS. , appunto ; e ovviamente è "=0" (il $\Delta/4$) $\Longleftrightarrow$ è $=0$

la parabola nulla in t (che è unico), cioè $0 = \langle tx+y ; tx+y \rangle = \|tx+y\|^2$, (2)
cioè $tx + y = 0$. □

⇒) Essendo come noto che DIS. SCHWARZ $\Longleftrightarrow$ DIS. TRIANGOLARE, è allora che, $\forall x,y \in X$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow \exists(!)\, t \in \mathbb{R}$ tale che $y = tx$, "CIOÈ" $x = \frac{y}{t}$ (è chiaro che per $x=0$ o $y=0$ l'$=$ sussiste!)

Sia X con prodotto scalare: allora $\overline{B(0,1)} = B$ è STRETTAMENTE CONVESSA, cioè $\forall x \neq y \in \partial B$ e $\forall\, 0 \lneq \lambda \lneq 1$, è $\lambda x + (1-\lambda) y \in B(0,1)$.

Se ~~per assurdo~~ $\exists t \in \mathbb{R}$ tale che $(1-\lambda) y = t \lambda x$, con $t \neq 0$ perché λ e $1-\lambda$ sono $\neq 0$ ma anche y (e x) sono $\neq 0$ avendo $\|\cdot\| = 1$, allora $1-\lambda = \|(1-\lambda) y\| = \|t\lambda x\| = |t|\lambda$, cioè $|t| = \frac{1-\lambda}{\lambda}$, cioè o $t = \frac{1-\lambda}{\lambda}$ o $t = -\frac{1-\lambda}{\lambda}$; ma allora $(1-\lambda) y = t\lambda x \Rightarrow$ o $x = y$ o $-x = y$, dove però $x = y$ è impossibile perché per ipotesi $x \neq y$, mentre $-x = y$ dà la tesi perché $\lambda x + (1-\lambda) y \overset{(y=-x)}{=} (2\lambda - 1) x$ che $\|\cdot\| = |2\lambda - 1| < 1$ $(0<\lambda<1 \Leftrightarrow 0 < 2\lambda < 2 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda - 1 < 1 !)$! Allora in generale $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| \lneq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda) y\| = \lambda + (1-\lambda) = 1$ $\Longleftrightarrow$ λx e $(1-\lambda) y$ NON sono lin. dip., che ora possiamo supporre come ovvio (ci sono delle dim.) . □

Se $(e_n)_{n\ge 1 \,(o\ 0)}$ è un sist. ort. di X (SPAZIO DI HILBERT), allora $C := \{(1+2^{-n})e_n \mid n \ge 1 \,(o\ 0)\}$ è un altro esempio di sottoinsieme LIMITATO E CHIUSO MA NON COMPATTO, e soprattutto $\nexists$ "la proiezione metrica" di $x=0$ sull'insieme C (cioè NON ESISTE punto di C che MINIMIZZA la distanza di 0 da C).

(MORALE: nel teorema di scomposizione $X = Y \oplus Y^\perp$ è effettivamente necessario che Y sia sottospazio o che almeno sia CONVESSO, che chiaramente C NON è!)
(se non per altro, per lin. indip. degli e_n!)

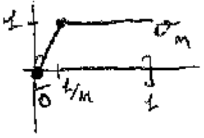
È limitato perché, $\forall n \ge 1$, $\|(1+2^{-n})e_n\| = 1 + \underbrace{2^{-n}}_{\le 1} \le 2$, ed è chiuso perché tutte e sole le successioni in C convergenti sono le costanti $((1+2^{-n})e_n)_{k\ge 1}$ e n scelto, che in effetti "convergono" in C: sono infatti LE SOLE perché la generica $((1+2^{-n_k})e_{n_k})_{k\ge 1} =: ((1+2^{-k})e_k)_{k\ge 1}$ NON è neanche convergente in quanto neanche di Cauchy ($\forall h \neq k$, $\|(1+2^{-h})e_h - (1+2^{-k})e_k\|^2 \underset{(\perp)}{=} (1+2^{-h})^2 + (1+2^{-k})^2 > 2$!); capiamo allora che NON può essere compatto e anzi che addirittura OGNI successione (non banale) in C NON ammette sottosuccessioni convergenti in C (e neanche convergenti).
Ma soprattutto gli elementi di C NON possono minimizzare $\|(1+2^{-n})e_n - 0\| = 1+2^{-n} \downarrow 1$, e infatti $\forall n \ge 1 \,(o\ 0!)$ $\|(1+2^{-n})e_n\| = 1+2^{-n} \underset{\neq}{>} 1$! □

Di seguito invece facciamo un esempio di funzionale lineare MA NON CONTINUO (e $\dim = \infty$) più semplice di quello incontrato nella teoria.

Posti $X := L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ e $Y := C^0_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\omega : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(0)$ è
([0,1]!) ($\subseteq X$) ([illegible])
(lineare ma) NON continua (in $\|\cdot\|_2$), e allora a maggior ragione non lo è la sua estensione a tutto X.

(non contiene le costanti $\neq 0$!)

Infatti $\ker(\omega) = \{f \in C^0_{\mathbb{R}}(0,1) \mid f(0) = 0\}$ è $\|\cdot\|_2$-DENSO in $C^0_{\mathbb{R}}(0,1)$, ~~che lo è in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (come è noto)~~, e ciò perché $\forall f \in Y$ considero



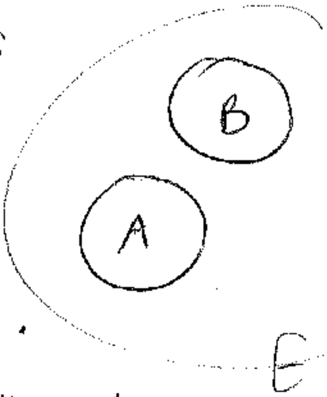
$\forall n \geq 1$ ($\sigma_n \in \ker(\omega)$!) e ho che $f_n := f\sigma_n \in \ker(\omega)$ e $f_n \xrightarrow{L^2} f$: $\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f - f_n|^2 dx = \int_0^1 |f|^2 |\underbrace{1-\sigma_n}_{\to 1}|^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ per dominazione con $|f|^2 \in L^1$! Quindi se per assurdo ω fosse continua allora sarebbe semplicemente $\ker(\omega) = Y$, mentre non lo è perché ad esempio $1\ (\in Y) \overset{\omega}{\longmapsto} 1$: avremmo infatti che, $\forall f \in X$ con $f = \lim^{L^2} f_n$ dove $f_n \in \ker(\omega)$, sarebbe $\underset{f(0)}{\omega(f)} = \omega(\lim^{L^2} f_n) =$ (SUPPOSTA CONTINUITÀ ...) $= \lim^{\mathbb{R}} \underbrace{\omega(f_n)}_{\equiv 0!} = 0$. $\lhd$

$(1 \leq p \leq \infty)$

Fissato $E \in \mathcal{M}^n$ (con $\mathcal{L}^n(E) > 0$), $\exists!$ tra gli spazi $L^p_{\mathbb{R}}(E)$ uno SPAZIO DI HILBERT (reale), ed è $L^2_{\mathbb{R}}(E)$: infatti lui lo è, ed è il solo perché $\forall p \neq 2$ la $\|\cdot\|_p$ NON può discendere da alcun prodotto scalare su $L^p_{\mathbb{R}}(E)$.

Essendo $L^2_{\mathbb{R}}(E)$ DI BANACH, basta provare che esiste su $L^2_{\mathbb{R}}(E)$ un prodotto scalare "$\langle , \rangle_2$" che induce $\|\cdot\|_2$: si tratta di $\langle f, g \rangle_2 := \int_E f(x)g(x)\,dx$, $\forall f, g \in L^2_{\mathbb{R}}(E)$; infatti è BEN DEFINITO PER HÖLDER-SCHWARZ ($|\langle f, g\rangle_2| \leq \int_E |f||g|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$!), è lineare, simmetrico e definito posizione in modo costante, e è proposto invece $\|\cdot\|_2$ perché, $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(E)$, $\sqrt{\langle f;f\rangle} = \|f\|_2$.

Ora, invece, $\forall p\neq 2$ la $\|\cdot\|_p$ NON discende da alcun "$\langle ; \rangle_p$" su $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$ perché l'identità del parallelogramma NON è soddisfatta da tutti gli elementi di $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E)$: fissiamo infatti A e $B \subseteq E$ tali che $\mathcal{L}^n(A)=\mathcal{L}^n(B)=:m>0$ ($\Rightarrow \mathcal{L}^n(A\cup B)>0$) e $\boxed{A\cap B=\emptyset}$ ($\Rightarrow \mathcal{L}^n(A\cup B)=\mathcal{L}^n(A)+\mathcal{L}^n(B)(=2m>0)$) cosicché è evidente osservare che



$I_A+I_B=I_{A\cup B}$ e anche $|I_A-I_B|=I_{A\cup B}$.

$\boxed{p=\infty}$: essendo che $\forall F\subseteq E$ con $\mathcal{L}^n(F)>0$, $\|I_F\|_\infty=1$ (mentre $\forall 1\le p<\infty$ $\|I_F\|_p = \left(\int_E |I_F|^p(x)\,dx\right)^{1/p} = \mathcal{L}^n(F)^{1/p}$!),

$$\underbrace{\|I_A+I_B\|_\infty^2 + \|I_A-I_B\|_\infty^2}_{=1+1=2} \neq 2\underbrace{\|I_A\|_\infty^2}_{=1^2=1} + 2\underbrace{\|I_B\|_\infty^2}_{=1^2=1} = 4 \;!$$

$\boxed{1\le p<\infty}$: $$\underbrace{\|I_A+I_B\|_p^2}_{\mathcal{L}^n(A\cup B)^{2/p} = (\mathcal{L}^n(A)+\mathcal{L}^n(B))^{2/p}} + \underbrace{\|I_A-I_B\|_p^2}_{//} = 2\underbrace{\|I_A\|_p^2}_{\mathcal{L}^n(A)^{2/p}} + 2\underbrace{\|I_B\|_p^2}_{\mathcal{L}^n(B)^{2/p}}$$

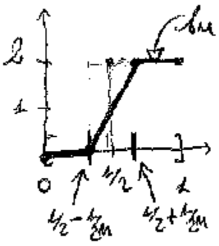
$$\Leftrightarrow \cancel{2}\cdot 2^{2/p} m^{2/p} = \cancel{2}\cdot 2\, m^{2/p} \overset{(m\neq 0)}{\Leftrightarrow} 2^{2/p} = 2 \overset{(\text{iniettività elev. a potenza})}{\Leftrightarrow} p=2 .$$

$\Rightarrow \forall p\neq 2$, $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(E)$ a maggior ragione NON è di Hilbert; invece $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(E)$ lo è con $\langle f;g\rangle_2 := \int_E f(x)\overline{g(x)}\,dx$ (FACILE!) ($|\bar g| = |g|$) !

Posto $Y := \{f\in C^0_{\mathbb{R}}([0,1]) \mid f(0)=0 \text{ e } \int_0^1 f(x)\,dx = 1\} \subsetneq \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(0,1)$ $\forall 1\le p\le\infty$, Y NON è $\mathbb{R}$-sottospazio ma sottoinsieme CONVESSO, inoltre è chiuso in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(0,1) \Leftrightarrow p=\infty$, e comunque NON vi è mai denso.

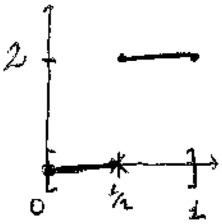
Non è sottospazio perché NON ha lo 0, e comunque $\forall f,g\in Y$ $\int_0^1 [a f(x)+b g(x)]\,dx = a+b \neq 1$ in generale (basta $b=0$ e $a\neq 1$); a proposito è invece convesso, perché $\forall \lambda\in[0,1]$ per $a=\lambda$ e

$b = 1-\lambda$ e $a+b=1$! Che sia chiuso in $L^\infty_m(0,1)$ è evidente: $(f_n)_{n\ge 1}$ in Y tale che $f_n \xrightarrow{L^\infty} f \Rightarrow f$ CONTINUA, ($\not\Leftarrow$ CONTINUE!) ed essendo che $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ PUNTUALE è pure $f(0) = \lim_n \underbrace{f_n(0)}_{=0!} = 0$; infine $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_n \underbrace{\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{=1!} = 1$ per passaggio sotto il "$\int$", e in conclusione allora $f \in Y$. Che NON sia chiuso in $L^p_m(0,1)$ $\forall\, 1 \le p < \infty$ è facile: $\forall n \ge 1$, sia f_n

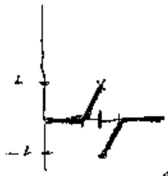


($f_n \in Y$!)

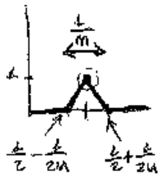
cosicché $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$ dove f è



e quindi NON continua $\Rightarrow$ NON in Y (Osserviamo infatti che $f_n - f$ è del tipo



, quindi $|f_n - f|$ è del tipo



$\Rightarrow |f_n - f| \le I_{[1/2-1/2n,\,1/2+1/2n]}$) e allora

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_0^1 |f_n - f|^p\,dx \le \mathcal{L}^1([1/2-1/2n,\,1/2+1/2n]) = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 ;$$

notiamo che giustamente f_n NON convergono uniformemente a f!) ! Notiamo che f dunque può essere $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ per convergenza DOMINATA: infatti $f_n \xrightarrow{L^p} f \Rightarrow f_{n_k} \xrightarrow{\text{sotto-succ.}} f$, diciamo $f_{n_k} =: h_k \xrightarrow{q.o.} f$; ma le h_k sono $\int_0^1 h_k(x)\,dx = 1$ e sono dominate in L^1 da 2!

Capiamo a proposito che Y NON può esser mai chiuso in $L^p_m(0,1)$: per $p=\infty$ ciò è banale perché Y è chiuso E PROPRIO in $L^\infty_m(0,1)$; per $1 \le p < \infty$, effettivo, ad esempio $f := I_{[1/2,1]}$ (senza il 2!) NON può essere $\|\cdot\|_p$-limite di $(f_n)_{n\ge 1}$ in Y: infatti potremmo supporre che altrimenti $f_n \xrightarrow{q.o.} f$ (e allora potremmo anche supporre f_n equi LIMITATE), e per Lebesgue sarebbe $(\tfrac{1}{2} =) \int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ↯.

ALTRA VIA ($p<\infty$): Y NON è chiuso in $L^p_m(0,1)$ perché NON lo è in

$C^0_{\mathbb{R}}(0,1)$; se infatti lo fosse, allora a maggior ragione lo sarebbe $\ker(\omega) = \{f \in C^0_{\mathbb{R}}(0,1) \mid f(0) = 0\}$ CON $\omega : C^0_{\mathbb{R}}(0,1) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$ (LINEARE!)

e avrei l'assurdo che $\ker(\omega) = C^0_{\mathbb{R}}(0,1)$ (mentre ad esempio $1 \overset{\omega}{\mapsto} 1 \neq 0$!)

... DOV'È L'ERRORE DEL RAGIONAMENTO ?? ω NON È CONTINUA !! $\square$

(#! costante in Y, ed è 0!)

Dimostrato che $Y := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ è ($\mathbb{R}$-sottosp.) CHIUSO di $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, determinare $Y^\perp$ e scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione su Y. Cosa si può dedurre di analogo per $Z := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid \int_0^1 f(x)dx = 1\}$?

Infatti $(f_n)_{n \geq 1}$ in Y tale che $f_n \overset{L^2_{\mathbb{R}}}{\to} f \ (\in L^2) \overset{(L^2(0,1) \subset L^1)}{\Rightarrow} f_n \overset{L^1}{\to} f$, per cui $\left|\int_0^1 f(x)dx - \underbrace{\int_0^1 f_n(x)dx}_{=0!}\right| \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|dx = \|f - f_n\|_1 \to 0 \Rightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx = 0$. (In effetti $Y = \ker(\omega)$, con $\omega : L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$

(lineare e) CONTINUA (esattamente per lo stesso ragionamento!); notiamo infatti che, $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\exists(!) g \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ tale che $\omega(f) = \langle f \mid g \rangle_2$, cioè $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$: $g \overset{(q.o.)}{=} 1$! $\Rightarrow$ A proposito, la stessa ω MA SU $X \subsetneq L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ (X tale che $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| < \infty$) non sarà continua ...)) Ma allora $Y^\perp = (\ker(\omega))^\perp \overset{(ovvio)}{=} (\{g\}^\perp)^\perp \overset{visto!}{=}$

$= \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{g\}}^{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid f \text{ COSTANTE}_{(q.o.)}\}$ (CHIUSO in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, come in ogni $L^p_{\mathbb{R}}(E)$: costanti $\overset{L^p}{\to} f \Rightarrow$ si convergono SOTTO-Q.O. !)

per cui si ha subito la decomposizione $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) = Y \oplus Y^\perp$; per

$$f = \underbrace{\left(f - \int_0^1 f(x)dx\right)}_{\in Y} + \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{\in Y^\perp} \quad \forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \quad \text{(la}$$

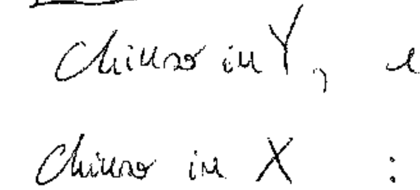
decomposizione ne comunque questa, ma importa SOLO che {COSTANTI} $\subseteq Y^\perp$ (che comunque ne sono!) !), ossia l'operatore di proiezione su Y è $P_Y f(x) \doteq f(x) - \int_0^1 f(t)dt \quad \forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (e $x \in (0,1)$).

(OSS. : in realtà $Z :=$ {COSTANTI} chiuso in L^2 $\Rightarrow$ {COSTANTI} $= Y^\perp$: infatti $Y^\perp$ $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO $\Rightarrow Y^\perp$ è a sua volta DI HILBERT, ed inoltre $Z \subseteq Y^\perp$ $\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO vale $Y^\perp = Z \oplus Z^{\perp \,(\text{in } Y^\perp!)}$, da cui $Z = Y^\perp \Leftrightarrow Z^{\perp \,(\text{in } Y^\perp!)} \underset{(\subseteq)}{=} \{0\}$, e questo è vero in quanto una $h \in Y^\perp$ tale che $h \perp Z$, cioè $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\int_0^1 c\, h(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 h(x)dx = 0$, deve effettivamente stare in $h \in Y^\perp \cap Y = \{0\}$!)

Ora, Z (del testo) NON è $\mathbb{R}$-sottosp. ($0 \notin Z$) ma è sottoinsieme CONVESSO e CHIUSO : $\forall f, g \in Z, \forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda) g \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ e $\int_0^1 (\lambda f + (1-\lambda) g)dx = \lambda + (1-\lambda) = 1$; inoltre è chiuso perché $(f_n)_n$ in Z tale che $f_n \xrightarrow{L^2 \Rightarrow L^1} f \Rightarrow \left| \int_0^1 f(x)dx - \underbrace{\int_0^1 f_n(x)dx}_{1} \right| \leq$ $\leq \|f - f_n\|_1 \to 0$! Allora, $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, sappiamo esistere uno e un solo $\bar{f} \in Z$ che minimizza $\|f - \bar{f}\|_2$; ma è chiaro che "$Z = Y + 1$", in particolare $\exists p \in Y$ tale che $\bar{f} = p + 1$ e si tratta quindi di minimizzare $\|(f-1) - p\|_2$, che ora sappiamo fare : $p = P_Y(f-1) = f - 1 - \int_0^1 (f-1)dx = P_Y(f)$, cioè $\bar{f} = P_Y(f) + 1 = f - \int_0^1 f(x)dx + 1$ (come comunque era chiaro!), e in conclusione $P_Z = P_Y + 1$. □

Posti $X := \mathcal{L}^2_m(\mathbb{R})$ e $Y := \{f \in \mathcal{L}^2_m(\mathbb{R}) \mid f$ ha supporto limitato$\}$ (ES.: compatto!) ($\subsetneq X$, $\mathbb{R}$-sottosp. ivi DENSO! $\not\subseteq \mathcal{L}^1$ SOLO IN INSIEMI A MISURA FINITA!)), $\omega : Y \to \mathbb{R}$ definito da (BENE) $\omega(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ è lineare ma) NON CONTINUA, come è maggior ragione le sue estensioni a tutto X.

Infatti $\omega^{-1}(\{0\}) = \ker(\omega) = \{f \in Y \mid \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0\}$ NON è chiuso in Y, e ciò per lo stesso motivo per il quale Y non è chiuso in X: $\exists\, (f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^2_m(\mathbb{R})$ a supporto limitato tale che $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f$ MA con f non a supporto limitato. AD ESEMPIO: presa, $\forall n \geq 1$, $f_n := \sum_{k=1}^{n} I_{[k, k+2^{-k}]}$ ($f_1 = I_{[1,1+1/2]}$, $f_2 = I_{[1,1+1/2]} + I_{[2,2+1/4]}$, $f_3 = I_{[1,1+1/2]} + I_{[2,2+1/4]} + I_{[3,3+1/8]}$, ecc.:

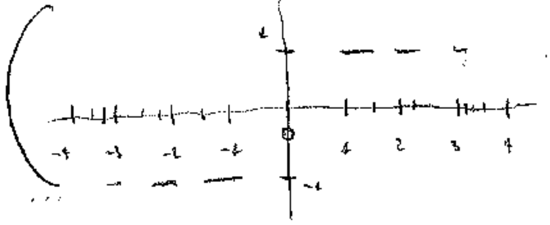


), cioè (PER DISGIUNZIONE) $f_n = I_{\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} [k, k+2^{-k}]}_{\text{LIMITATO!}}}$, che sta ovviamente in Y $\forall n \geq 1$ con $\|f_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} I_{\bigcup_{k=1}^{n}[k,k+2^{-k}]}(x)\,dx =$

$= \mathcal{L}^1\big(\bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{[k, k+2^{-k}]}_{2^{-k}}\big) \overset{\text{DIS.!}}{=} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$, ebbene, $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f := \sum_{k\geq 1} I_{[k,k+2^{-k}]} =$

$= I_{\bigcup_{k\geq 1}[k, k+2^{-k}]}$ ($\in \mathcal{L}^2_m(\mathbb{R})$: $\|f\|_2^2 = \sum_{k\geq 1} 2^{-k} < \infty$ (anzi $= 1$)!):

$\|f - f_n\|_2^2 = \sum_{k\geq n+1} 2^{-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. ✓ Per modificare questa successione MA IN $\ker(\omega)$ le f_n dovrebbero avere $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 0$ (così come f, per convergenza DOMINATA!): le estendo a tutto $\mathbb{R}$ per disparità ponendo ($\forall n \geq 1$) $g_n(x) := f_n(x) - f_n(-x) = I_{\bigcup_{k=1}^{n}[k,k+2^{-k}]}(x) - I_{\bigcup_{k=1}^{n}[-(k+2^{-k}),-k]}(x)$ ($I_{[a,b]}(-x) = I_{[-b,-a]}(x)$)



, dunque ovviamente che $f_n \in L^2(\Omega)$ $\forall n \geq 1$

Già scritto nella forma $f_n = f_n^+ - f_n^-$; allora, se analogamente consideriamo $g := I_{\underbrace{\bigcup_{n\geq 1}[n, n+2^{-n}]}_{f!}} - I_{\underbrace{\bigcup_{n\geq 1}[-(n+2^{-n}), -n]}_{f(-x)!}} = g^+ - g^-$, allora ($\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \setminus Y$!)

$f_n^+ \xrightarrow{L^2} g^+$ è ciò che è stato dimostrato prima, mentre analogamente $f_n^- \xrightarrow{L^2} g^-$ allo stesso modo, $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} g$ per dis. tr.

$(\|g - f_n\|_2 = \|\underbrace{(g^+ - g^-) - (f_n^+ - f_n^-)}_{(g^+ - f_n^+) - (g^- - f_n^-)}\|_2 \overset{\text{DIS. TR.}}{\leq} \|g^+ - f_n^+\|_2 + \|g^- - f_n^-\|_2 \to 0)$. □

Posti $X := L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ e $Y := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1) \mid f(x) = f(-x)$ per q.o. $x \in [-1,1]\}$ (cioè pari q.o.!) ($\mathbb{R}$-sottosp.!), dimostrare che Y è CHIUSO; determinare quindi $Y^\perp$ e esplicitare l'operatore P_Y di proiezione (di X) su Y.

Sia $(f_n)_{n\geq 1}$ in Y tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$: allora $\exists$ sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\geq 1} =: (f_k)_{k \geq 1}$ tale che $f_k \xrightarrow{q.o.} f$, diciamo $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in [-1,1] \setminus N$ con $N \subsetneq [-1,1]$ di $\mathcal{L}^1(N) = 0$; è trascurabile pure $N \cup \left(\bigcup_{k \geq 1} \{f_k(x) \neq f_k(-x)\}\right) =: N'$, fuori dal quale

$$\begin{cases} f_k(x) \longrightarrow f(x) \\ \| \ \forall k \geq 1 \\ f_k(-x) \longrightarrow f(-x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(-x) \text{ q.o. (appunto fuori da } N').$$

(NOTA: allo stesso modo si vede che pure $Z := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1) \mid f$ è dispari q.o.$\}$ è ($\mathbb{R}$-sottosp.) CHIUSO in X! (da cui $Y^\perp = Z$ ...))

A questo punto ovviamente $Z \subseteq Y^\perp$ (f q.o. pari e g q.o. dispari $\Rightarrow$ $f\cdot g$ q.o. DISPARI $\Rightarrow \langle f;g\rangle_2 = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = 0$!); ora, $Y^\perp$ chiuso $\Rightarrow$ è uno spazio DI HILBERT, e Z ne è $\mathbb{R}$-sottosp. chiuso: vale allora $Y^\perp = Z \oplus Z^{\perp(\text{in } Y^\perp)}$ DA CUI $Z = Y^\perp \Leftrightarrow$ $Z^\perp = \{0\}$; ciò infatti è vero: $\forall g \in Z\setminus\{0\}$, $h \in Y^\perp$ tale che $\langle h;g\rangle_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\,dx \underset{x=-y}{=} \int_{-1}^{1} h(-y)\underbrace{g(-y)}_{-g(y)\,(\text{q.o.})}\,dy = -\int_{-1}^{1} h(-x)g(x)\,dx$

$\Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^{1} [h(x)+h(-x)]\,g(x)\,dx \Leftrightarrow h(x) \overset{\text{q.o.}}{=} -h(-x)$; MA $h \in Z^\perp$, e $Z^\perp \cap Z = \{0\}$: necessariamente $h \overset{\text{q.o.}}{=} 0$ (potevo anche vederlo direttamente sulle basi!). In conclusione vale che effettivamente $Y^\perp = Z$.

Dunque la decomposizione $X = Y \oplus Y^\perp$ è data da, $\forall f \in X$,

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\in Y} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\in Y^\perp},$$

CIOÈ

$$f = \frac{f+\mathring{f}}{2} + \frac{f-\mathring{f}}{2}$$

($\mathring{f}(x) \doteq f(-x)$!), e allora $P_Y f \doteq \frac{f+\mathring{f}}{2}$ è l'operatore di proiezione di X su Y. □

Consideriamo $(X, \langle;\rangle) := (C^0_{\mathbb{R}}([-1,1]), \langle;\rangle_2)$ $(\subsetneq L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)!)(\subsetneq L^1_{\mathbb{R}}(-1,1)!)$ (NON DI HILBERT perché NON chiuso!), $\omega : X \to \mathbb{R}$ data da $\omega(f) \doteq \int_{0}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ (lineare!) e $Y := \ker(\omega)$ ($\mathbb{R}$-sottosp. di X) (proprio: ad es., $x \overset{\omega}{\mapsto} 1 \neq 0$!); allora (1) ω è CONTINUA ($\Rightarrow Y$ è chiuso!), PERÒ (2) $\nexists\, g \in X$ tale che, $\forall f \in X$, sia $\omega(f) = \langle f;g\rangle_2$; e (3) $Y^\perp = \{0\} \underset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} (Y^\perp)^\perp = X \supsetneq Y$ e $Y \oplus Y^\perp = Y \subsetneq X$.

(MORALE: sia per il teorema della decomposizione $X = Y \oplus Y^{\perp}$, sia nel teorema di rappresentazione di Riesz, è NECESSARIO che fra l'altro che l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale X dotato di prodotto scalare $\langle ; \rangle$ sia COMPLETO rispetto alla metrica indotta!!)

$\boxed{(1)}$ Se $(f_n)_{n\geq 1}$ in $C^0_{\mathbb{R}}([-1,1])$ sono tali che $f_n \xrightarrow{L^2} f$, allora $\mathcal{L}^1([-1,1]) < \infty \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f$, $\Rightarrow \omega(f_n) \to \omega(f)$:

$$|\omega(f) - \omega(f_n)| \leq \left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx \right| + \left| \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_{-1}^0 f_n(x)dx \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx + \int_{-1}^0 |f(x) - f_n(x)| dx = \|f - f_n\|_1 \to 0 .$$

(2) Se consideriamo $\omega : L^2_{\mathbb{R}}(-1,1) \to \mathbb{R}$ definito esattamente allo stesso modo, allora è (lineare e) CONTINUA per i passaggi sopra e quindi PER RIESZ $\exists(!)_{(q.o.)}\ g \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ tale che, $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$, $\omega(f) = \langle f ; g \rangle_2$, cioè $\int_0^1 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$;

ora, essendo che per $g := I_{[0,1]} - I_{[-1,0)}$ tale identità è soddisfatta, è proprio tale g "l'elemento di Riesz", CHE PERÒ $g \notin C^0_{\mathbb{R}}(-1,1)$.

(3) (in X) Se per assurdo $Y^{\perp} \supsetneq \{0\}$, allora $g_1 \in Y^{\perp} \setminus \{0\}$ permette di definire un'altra applicazione lineare (e continua) su X:

$\omega_1(f) := \langle f ; g_1 \rangle_2\ \forall f \in X$ ($\omega_1 \neq 0$: $\omega_1(g_1) \overset{(g_1\neq 0)}{>} 0$!);

MA $\ker(\omega) = Y \subseteq \ker(\omega_1) = g_1^{\perp} \overset{(\text{NOTO})}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\omega_1 = c\omega$, CIOÈ ($c \neq 0$ perché $\omega_1 \neq 0$!) $\omega = \frac{\omega_1}{c}$, cioè, $\forall f \in X$, $\omega(f) = \langle f ; \frac{g_1}{c} \rangle_2$ e cioè l'assurdo di avere l'elemento di Riesz $\frac{g_1}{c}$. $\square$

Sia $g := I_{(0,1/2]} - I_{(1/2,1]}$ $\left(= \begin{cases} 1 & \text{su } (0,1/2] \\ -1 & \text{su } (1/2,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}\right)$ e quindi siano,

$\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k \in \{0,1,\dots,2^n-1\}$, $g_{n,k}(x) := 2^{n/2} g(2^n x - k) =$

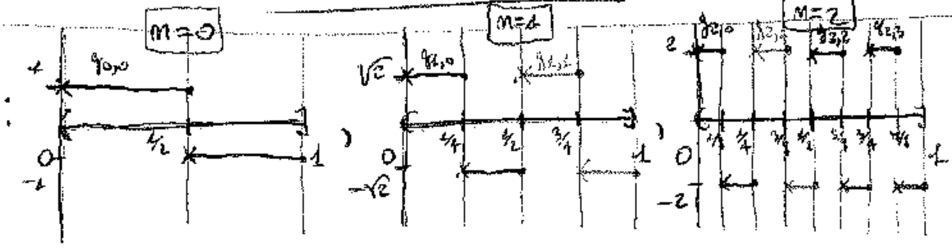
$= 2^{n/2}\left(I_{(\frac{k}{2^n},\frac{(k+1/2)}{2^n}]} - I_{(\frac{(k+1/2)}{2^n},\frac{(k+1)}{2^n}]}\right)$ $\left(= \begin{cases} 2^{n/2} & \text{su } (k2^{-n},(k+1/2)2^{-n}] \\ -2^{n/2} & \text{su } ((k+1/2)2^{-n},(k+1)2^{-n}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}\right)$,

dove notiamo che $g_{0,0} = g$. Se ristrette a $(0,1]$, allora (stanno tutte in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ e) $\{1\} \cup \{g_{n,k} \mid n \in \mathbb{N},\ k \in \{0,\dots,2^n-1\}\}$ è BASE DI HILBERT di $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

Diciamo che, se considerate su tutto $\mathbb{R}$ e se $k \in \mathbb{Z}$ (con sempre $(0 \le)|k| \le 2^n-1$!), allora formano (con $I_{(i,i+1]}, i \in \mathbb{Z}$) una BASE DI HILBERT di $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

(Tale base è nota come "BASE DI HAAR" di $L^2_{\mathbb{R}}((0,1]$ o $\mathbb{R})$.)

Le $g_{n,k}$ sono:



, . . .

Verifichiamo anzitutto che formano un sistema ortonormale in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, per questo fatto essere evidente: essendo evidentemente $I_{(a,b]}(x-k) = I_{(a+k,b+k]}(x)$ ($\forall a<b$ e k reali) e $I_{(a,b]}(cx) = I_{(\frac{a}{c},\frac{b}{c}]}(x)$ ($\forall a<b$ e $c>0$ reali, $\Rightarrow I_{(a,b]}(cx-k) = I_{(\frac{a+k}{c},\frac{b+k}{c}]}(x)$!), e $\forall n \ge 0$ e $\forall h,k \in \{0,\dots,2^n-1\}$

$$\int_0^1 g_{n,k}(x)\, g_{n,h}(x)\,dx = 2^n \int_0^1 g(2^n x-k)\cdot g(2^n x-h)\,dx = 2^n 2^{-n}\int_0^1 g(y)\, g(y+\underbrace{k-h}_{(=-(h-k))})\,dy = \int_0^1 g(y)\left(I_{(h-k,\,h-k+1/2]}(y) - I_{(h-k+1/2,\,h-k+1]}(y)\right)$$

($2^n x - k =: y \Leftrightarrow 2^n x = y+k \Leftrightarrow x = \frac{y+k}{2^n}$, $\Rightarrow dx = \frac{dy}{2^n}$ E gli estremi li lascio 0 e 1 perché TUTTE le $g_{n,k}$ sono 0 fuori da $(0,1]$)

$h=k$: $= \int_0^1 g^2(y)\,dy = 1$ (NORMALITÀ !!)

$h \ne k$: $= 0$ PERCHÉ h,k, essendo interi, sono tali che $|h-k| \ge 1$, per cui o $h-k \ge 1$ o $h-k+1 \le 0$, e allora il prodotto $g(y)\,g(y+k-h)$ è $= I_\emptyset = 0$!

(8)

Siano allora $m, n \geq 0$ e $\neq$ tra loro, diciamo $m > n$, e siano $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ e $h \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$: allora, "tralasciando fuori" le costanti $2^{n/2}$ e $2^{m/2}$, è $\int_0^1 g(2^n x - k)\, g(\underbrace{2^m x}_{= \left(2^{m-n} 2^n x,\ 2^{m-n} \geq 2 !\right)} - h)\, dx = \left(2^n x - k =: y \Leftrightarrow 2^n x = y + k,\ \text{e } dx = dy \text{ SE "lascio fuori" il } 2^{-n}, \text{ gli estremi } 0,1 \text{ come prima}\right)$

$= \int_0^1 g(y)\, g(2^{m-n}(y+k) - h)\, dy$;

Dunque, essendo $2^{m-n} > 1$, allora tale fattore RESTRINGE strettamente gli "intervallini" che definiscono la funzione semplice $g(2^{m-n}(y+k) - h)$, per cui l'integrale che stiamo considerando sarà 0 SE $2^{m-n}k - h \neq 0$ in quanto gli "intervallini" saranno e meglio ragione DISGIUNTI da $(0, 1/2]$ e $(1/2, 1]$, mentre SE è 0 lo otteniamo calcolando: $\left(\frac{1}{2^{m-n}} \leq \frac{1}{2} !\right)$

$$\int_0^1 g(y)\, g(2^{m-n} y)\, dy = \int_0^1 (I_{(0,1/2]} - I_{(1/2,1]})(I_{(0, \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-n}}]} - I_{(\frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-n}}, \frac{1}{2^{m-n}}]})\, dy =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{I_{(0,1/2]} I_{(0, 1/2 \frac{1}{2^{m-n}}]}}_{= \left(I_{(0, 1/2 \frac{1}{2^{m-n}}]} !\right)} dy - \int_0^1 \underbrace{I_{(0,1/2]} I_{(1/2 \frac{1}{2^{m-n}}, \frac{1}{2^{m-n}}]}}_{= \left(I_{(1/2 \frac{1}{2^{m-n}}, \frac{1}{2^{m-n}}]} !\right)} dy = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-n}} = 0 \checkmark$$

Se invece è $\neq 0$, allora affinché in $(2^{m-n} y + \overbrace{2^{m-n}k - h}^{\left(0 \Leftrightarrow k=0,\ \text{altrimenti} \geq 2 !\right)})$ è in ogni caso $|2^{m-n}k - h| \geq 1$ (siamo in $\mathbb{Z}$!), e ancora l'integrale è lo 0, il che conclude la dimostrazione dell'ortogonalità delle $f_{n,k}$. $\checkmark$

Al questo punto $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{g_{n,k} \mid n \geq 0, k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}\}$ è DENSO in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ semplicemente perché contiene OGNI $I_{(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]}$ (ed è $\mathbb{R}$-sottosp.!), e lo dimostriamo per induzione su $n \geq 0$: avendo $I_{(0,1]} = 1$, otteniamo allora $I_{(0,1/2]} = \frac{1}{2}(f_{0,0} + 1)$ e $I_{(1/2,1]} = \frac{1}{2}(1 - f_{0,0})$; nell'ipotesi dunque di avere nello $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}$ $I_{(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]}$ $\forall\, 0 \leq k \leq 2^n - 1$, allora abbiamo $I_{(h2^{-(n+1)}, (h+1)2^{-(n+1)}]}$ $\forall\, 0 \leq h \leq 2^{n+1} - 1$ PERCHÉ otteniamo $I_{(k2^{-n}, (k+1/2)2^{-n}]}$ e $I_{((k+1/2)2^{-n}, (k+1)2^{-n}]}$ $\forall\, 0 \leq k \leq 2^n - 1$: sono infatti uguali rispettivamente a $2^{-(n/2+1)}\left[2^{n/2} I_{(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]} \pm f_{n,k}\right]$ $\checkmark$!

$\Rightarrow$ (ANALOGIA) $\forall i \in \mathbb{Z}$, possiamo contare su una base di HAAR di $L^2_{\mathbb{R}}(i, i+1)$, e l'$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}$ degli elementi di tale base coincide esattamente con $\{f^{I_{(i,i+1)}}_{m,n,k} \mid m \geq 0, i,n \in \mathbb{Z}$ CON $|k| \leq 2^m - 1\}$, che ovviamente resta un sistema ortonormale di $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. In realtà è base in quanto il suo Span è denso in L^2_c (che lo è in L^2): $\forall f \in L^2_c$), infatti, $\exists\, I \subsetneq \mathbb{Z}$ FINITO del tipo $I = \{-M, \dots, 0, \dots, M\}$, con $M \geq 0$ intero, tale che $f \underset{\uparrow}{=} \sum_{i \in I} f I_{(i,i+1)} = \sum_{i=-M}^{M} f I_{(i,i+1)}$; posto $f_i \doteq f I_{(i,i+1)}$ $(\forall -M \leq i \leq M)$, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \Rightarrow f_i \in L^2_{\mathbb{R}}(i, i+1)$,

$\Rightarrow \exists\, g_i \in \text{Span}\{\text{BASE DI HAAR DI } L^2_{\mathbb{R}}(i, i+1)\}$ tale che $\|f_i - g_i\|^2_{L^2_{(i,i+1)}} \leq \varepsilon$, comunque scelto definito $\varepsilon > 0$; allora $g := \sum_{i \in I} g_i I_{(i,i+1)}$ è tale che

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (f-g)^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} \Big[\sum_{i \in I} (f-g_i) I_{(i,i+1)}\Big]^2 dx \underset{(I \text{ Finito!})}{\leq}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} 2 \Big(\sum_{i \in I} (f-g_i)^2 I^2_{(i,i+1)}\Big) dx \overset{(I \text{ Finito!})}{=} 2 \sum_{i \in I} \|f_i - g_i\|^2_{L^2_{(i,i+1)}} \leq$$

$\uparrow (j \geq 1)$ $((a_1 + \dots + a_j)^2 \overset{2(\text{conv})}{\leq} \leq 2(a_1^2 + \dots + a_j^2))!$

$$\leq 2 \underbrace{(2M+1)}_{(=|I|)} \varepsilon$$, da cui la tesi per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

PARENTESI SU $\left(\mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(K)}\right)$!

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ COMPATTO e sia, $\forall k \geq 0$, $\mathcal{C}^k_{\mathbb{C}}(K)$ il $\mathbb{C}$-sp. vett. delle funzioni $K \to \mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^k$. Ricordiamo che $(\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_\infty)$ è DI BANACH, e il seguente risultato fondamentale:

$(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)$ tali che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} \underset{\text{(continua!)}}{f}$ (su K) e $f_n' \xrightarrow{\text{UNIF.}} \underset{\text{(continua!)}}{g}$ (su K) $\Rightarrow$ in realtà $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)$ e $g = f'$.

Allora

$\left(\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)}\right)$, con $\|f\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)} \doteq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ (CONTINUA!), è $\mathbb{C}$-sp. vett. normato COMPLETO rispetto alla metrica indotta (brevemente è DI BANACH).

È chiaramente un $\mathbb{C}$-sp. vett., e $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)}$ è chiaramente una NORMA; completezza: $(f_n)_{n\geq 1}$ DI CAUCHY in $(\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)})$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \geq 1 : \forall n, m \geq 1,\ n, m \geq \bar{n} \Rightarrow \varepsilon \geq \|f_m - f_n\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)} = \|f_m - f_n\|_\infty + \|f_m' - f_n'\|_\infty$, $\Rightarrow (f_n)_{n\geq 1}, (f_n')_{n\geq 1}$ sono di Cauchy in $(\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_\infty) \overset{\text{SUA COMPLETEZZA}}{\Rightarrow}$ ivi sono convergenti, $\Rightarrow$ se precisamente $\begin{cases} f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} f \\ f_n' \xrightarrow{\text{UNIF.}} g \end{cases}$, allora $f \in \mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)$ e $g = f'$, per cui $\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)} = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - \underset{g}{f'}\|_\infty \to 0$, cioè $(f_n)_{n\geq 1}$ è CONVERGENTE in $(\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_{\mathbb{C}}(K)})$. $\square$

$\Rightarrow (\varphi_n)_{n\geq 1}$ in $C^1_{\mathbb{C}}(K)$ tale che $\sum_{n\geq 1} \|\varphi_n\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)} < \infty \Rightarrow$

$\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ "converge uniformemente (~~puntualmente!~~), con la sua derivata prima, ad una funzione $f \in C^1_{\mathbb{C}}(K)$", cioè

$$\begin{cases} f_m := \sum_{n=1}^{m} \varphi_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} \varphi \\ f_m' := \sum_{n=1}^{m} \varphi_n' \xrightarrow{\text{UNIF.}} \psi \end{cases} \quad (\text{su } K),$$

per cui ($\star$!) $f \in C^1_{\mathbb{C}}(K)$ e $\psi = f'$ ("cioè si possono scambiare i segni "Σ" e "∂"!)

[Infatti $\left(\sum_{n=1}^{m} \varphi_n\right)_{m\geq 1}$ è di Cauchy in $\left(C^1_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)}\right)$:

$\forall m' > m (\geq 1)$, $\left\|\sum_{n=1}^{m'} \varphi_n - \sum_{n=1}^{m} \varphi_n\right\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)} = \left\|\sum_{n=m+1}^{m'} \varphi_n\right\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)} \overset{\text{DIS. TR.}}{\leq}$

$\leq \sum_{n=m+1}^{m'} \|\varphi_n\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \|\varphi_n\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)}$, che (per convergenza!)

è arbitrariamente piccola a patto di prendere m adeguatamente grande. $\square$]

Ora, $\underline{C^1_{per}(K)} := \{f : K \to \mathbb{C} \mid f \in C^1_{\mathbb{C}}(K)$ con $f(-\pi) = f(\pi)$ e $f'(-\pi) = f'(\pi)\}$, $\underline{K := [-\pi, \pi]}$, $\subsetneq C^1_{\mathbb{C}}(K)$ è

$\mathbb{C}$-sottosp. PROPRIO, e CHIUSO rispetto alla medesima norma $\|\cdot\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)}$ [$(f_n)_{n\geq 1}$ in $C^1_{per}(K)$ tale che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)}} f \Leftrightarrow$

$f \in C^1_{\mathbb{C}}(K)$ e $\begin{cases} f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \\ f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f' \end{cases}$, $\Rightarrow$ PUNTUALMENTE (su K)],

$\Rightarrow$ anche $\left(C^1_{per}(K), \|\cdot\|_{C^1_{\mathbb{C}}(K)}\right)$ è DI BANACH.

In generale, $\left(C^k_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_{C^k_{\mathbb{C}}(K)}\right)$ con

$$\|f\|_{C^k_{\mathbb{C}}(K)} := \sum_{h=0}^{k} \|f^{(h)}\|_\infty = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \ldots + \|f^{(k)}\|_\infty$$

è $\mathbb{C}$-sp. vett. DI BANACH, così come il suo $\mathbb{C}$-sottosp. $\left(C^k_{per}(K), \|\cdot\|_{C^k_{\mathbb{C}}(K)}\right)$ (proprio e CHIUSO);
$\{f \in C^k_{\mathbb{C}}(K)$ con $f^{(h)}(-\pi) = f^{(h)}(\pi)\ \forall\, 0 \le h \le k$, se $K = [-\pi, \pi]\}$

Dunque $(g_n)_{n\ge1}$ in $C^k_{\mathbb{C}}(K)$ (o $C^k_{per}(K)$) tale che

$\sum_{n\ge1} \|g_n\|_{C^k_{\mathbb{C}}(K)} < \infty \Rightarrow$ "$\sum_{n\ge1} g_n$ converge" uniformemente, quindi (puntualmente), con tutte le sue derivate fino all'ordine k (compreso!) ad una funzione $C^k_{\mathbb{C}}(K)$ (o $C^k_{per}(K)$), nel senso che $(f_m)_{m\ge1} := \left(\sum_{n=1}^{m} g_n\right)_{m\ge1}$ è tale che

$f_m \xrightarrow{\text{UNIF. (su } K)} f \in C^k_{\mathbb{C}}(K)$, $f_m' \xrightarrow{\text{UNIF.}} f'$, $\ldots$, $f_m^{(k)} \xrightarrow{\text{UNIF.}} f^{(k)}$.

("CIOÈ" possiamo scambiare i segni "Σ" e "∂"!)

PARENTESI SU $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$!

(un solo termine NON conta niente!)

$\forall (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$, $\forall e \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\ne0} |n|^{2e} |c_n|^2 < \infty$

$\Rightarrow \forall b < e - 1/2$, $\sum_{n\ne0} |n|^b |c_n| < \infty$ ($\Rightarrow c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^b}\right)\ \forall b < e - 1/2$), ossia $\sum_{n\ne0} |n|^{e-1/2-\delta} |c_n| < \infty$

$\forall \delta > 0$. In particolare $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2e} |c_n|^2 < \infty$ per un certo $e > 1/2$ (come $e = 1$) $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$.

Per ipotesi $(|n|^e|c_n|)_{n\neq 0}$, ma ANCHE $(|n|^{(b-a)})_{n\neq 0}$, sono elementi di $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ ($\forall\, b<e-1/2$, è $2(b-e)<-1$, cioè $\sum'_{n\neq 0}|n|^{2(b-e)}<\infty$), per cui vale che, $\forall\, b<e-1/2$,

$$\sum_{n\neq 0}{}'|n|^b|c_n| = \sum_{n\neq 0}{}'(|n|^{b-e})(|n|^e|c_n|) \le \left\{\sum_{n\neq 0}|n|^{2(b-e)}\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{n\neq 0}|n|^{2e}|c_n|^2\right\}^{1/2}<\infty \; ; \text{ ma}$$

SCHWARZ in $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$!

allora $|n|^b|c_n| \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, $\overset{\text{CONT. a } 0}{\Rightarrow}$ $|n|^b c_n \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, cioè effettivamente $c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^b}\right)$. Infine, nel caso che $\sum_{n\neq 0}^{\infty}|n|^{2e}|c_n|^2<\infty$ per un $e>1/2$ (notiamo che 0^a ha senso!), ciò è come dire $\sum'_{n\neq 0}|n|^{2e}|c_n|^2<\infty$, $\Rightarrow \sum'_{n\neq 0}|n|^b|c_n|<\infty$ per qui $b<e-1/2$, come è $b=0$; ma $\sum'_{n\neq 0}|c_n|<\infty \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|<\infty$. □

★ DIM: $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x)\xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$; inoltre ($\forall n\geq 1$) $f_n \in C^1([a,b])$ ~~CONTINUA~~ ($f_n'\in C^0([a,b])$) $\Rightarrow$ $\forall x\in[a,b]$, $f_n(x) = f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$, e $f_n' \xrightarrow{\text{UNIF. IN } [a,b]} g$: allora

$f(x) = f(x_0)+\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, e g CONTINUA $\Rightarrow$ f derivabile con $f'(x) = g(x)$ ($\in C^0$). □

FOURIER!

Sia K sp. metrico COMPATTO e $(C_{\mathbb{C}}(K), \|\cdot\|_\infty)$ lo spazio delle funzioni $K \to \mathbb{C}$ continue con la norma "del sup" (= max!) $\|\cdot\|_\infty$. Per $\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{C}}(K)$ diciamo che

$\mathcal{A}$ è "SOTTOALGEBRA" $\overset{D}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ è $\mathbb{C}$-sottosp. CHIUSO rispetto al prodotto di funzioni;

$\mathcal{A}$ "SEPARA I PUNTI" $\overset{D}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, x \neq y$ in K, $\exists f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$;

$\mathcal{A}$ "CONTIENE LE COSTANTI" $\overset{D}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{A}$ contiene le funzioni costanti;

$\mathcal{A}$ è "CHIUSO PER CONIUGIO" $\overset{D}{\Leftrightarrow}$ $\forall f \in \mathcal{A}$, $\bar{f} \in \mathcal{A}$.

TEOREMA DI STONE-WEIERSTRASS:

$\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbb{C}}(K)$ sottoalgebra che separa i punti, contiene le costanti ed è chiusa per coniugio $\Rightarrow$ $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C_{\mathbb{C}}(K)$

(NECESSARIE, le ipotesi...)

[SENZA DIM.!]

S-W. $\Rightarrow$ $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ è SEPARABILE (rispetto a $\|\cdot\|_2$).

("speciali" CURVE IN $\mathbb{C}$!)

[$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, $\exists (f_n)_{n\geq 1}$ CONTINUE tali che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$;

ora, in $(C_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ consideriamo $\mathcal{A} \doteq \{$i polinomi definiti su $[-\pi,\pi]$ e a coefficienti in $\mathbb{C}\}$, che chiaramente ha tutte le 4 proprietà sopra, $\Rightarrow$ ogni funzione in $C_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, come le f_n, è LIMITE IN $\|\cdot\|_\infty$ di polinomi a coeff. in $\mathbb{C}$, $\Rightarrow$

che è in $\|\cdot\|_2$ ($\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])<\infty$!) ; infine è chiaro che i polinomi a coeff. in "$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$" sono densi in $\mathcal{F}$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, quindi $\|\cdot\|_2$, ma a differenza di $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme NUMERABILE. $\square$]

[Se ad es. $\begin{cases} a_n\in\mathbb{Q}\to a\in\mathbb{R} \\ b_n\in\mathbb{Q}\to b\in\mathbb{R} \\ c_n\in\mathbb{Q}\to c\in\mathbb{R}\end{cases}$, allora $\forall x\ |(a+ib)x+c-[(a_n+ib_n)x+c_n]|$

$= |[(a-a_n)+i(b-b_n)]x+(c-c_n)| \leq |(a-a_n)+i(b-b_n)|\underbrace{|x|}_{\leq\pi}+|c-c_n|$

$\leq (\underbrace{(a-a_n)^2}_{\downarrow 0}+\underbrace{(b-b_n)^2}_{\downarrow 0})\pi+\underbrace{|c-c_n|}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0$. ✓]

Allora $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \langle\, ;\,\rangle_2)$, $\langle f;g\rangle_2 := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, è un $\mathbb{C}$-spazio di Hilbert: è a base NUMERABILE!

$$\boxed{(e_n)_{n\in\mathbb{Z}} := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}},\ x\in[-\pi,\pi],\ \text{è BASE DI HILBERT di } (\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \langle\, ;\,\rangle_2).}$$

(NON "$n\in\mathbb{N}$"...!)

[Intanto, $\forall n\in\mathbb{Z}$, e^{inx} ha $|e^{inx}|=1$, $\Rightarrow$ è in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ perché in $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ ($\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])<\infty$!). Inoltre, $\forall m,n\in\mathbb{Z}$, $\langle e^{imx}; e^{inx}\rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\cdot\underbrace{\overline{e^{inx}}}_{=e^{-inx}}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx$

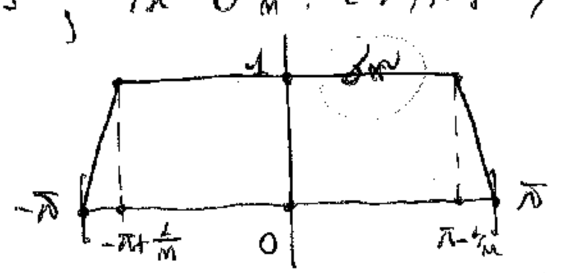
$= \begin{cases} 2\pi & \text{se } n=m, \text{ altrimenti} \\ \left[\dfrac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & (\text{per } 2\pi\text{-periodicità di } e^{ikx}!)\end{cases}$. Resta

allora che $\mathcal{F} := \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx} \,\middle|\, n\in\mathbb{Z}, x\in[-\pi,\pi]\right\}$ sia DENSO in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ rispetto a $\|\cdot\|_2$: $\mathcal{F} = \{$i "polinomi

trigonometrici in $[-\pi,\pi]$ } $\subsetneq C_{per}(-\pi,\pi) := \{ f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid$ ②
f è continua con $f(-\pi)=f(\pi)$ } $\left(\cong \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C} \mid f\right.$ è continua e 2π-periodica } per restrizione/estensione!) , $\subsetneq C_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$,
il quale è denso in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ rispetto a $\|\cdot\|_2$; ora, $(C_{per}(-\pi,\pi), \|\cdot\|_\infty)$ è $\mathbb{C}$-sottosp. di $C_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$ (PROPRIO e) CHIUSO$_{(\text{risp. } \|\cdot\|_\infty)}$ (conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale!) , però invece

$C_{per}(-\pi,\pi)$ è denso in $C_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$ rispetto a $\|\cdot\|_2$

[$\forall f \in C_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$, se $\sigma_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ è ($\forall n \geq 1$)



, allora

$\sigma_n \in C_{per}(-\pi,\pi)$ e anche $f_n := f\cdot\sigma_n \in C_{per}(-\pi,\pi)$, tale che inoltre $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ su $[-\pi,\pi]$, per cui

$$\|f-f_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \underbrace{f_n(x)}_{=f(x)\sigma_n(x)}|^2 \,dx \left(= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 |1-\underbrace{\sigma_n(x)}_{\to 1}|^2 \,dx\right)$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ per DOMINAZIONE ($|f-f_n|^2 = |f|^2|1-\sigma_n|^2 \leq |f|^2$)] ,

mentre $\mathcal{T}$ è denso in $C_{per}(-\pi,\pi)$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ (DOVEVO cominciare qui!) , quindi a $\|\cdot\|_2$

[per STONE-WEIERSTRASS , osservato che $C_{per}(-\pi,\pi) \cong C_{\mathbb{C}}(S^1)$ ($S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) e che naturalmente $\mathcal{T}$ ha le 4 proprietà richieste !] , in conclusione

$$\overline{\mathcal{T}}^{\|\cdot\|_2} = \overline{C_{per}(-\pi,\pi)}^{\|\cdot\|_2} = \overline{C_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)}^{\|\cdot\|_2} = L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) \quad . \quad \square$$

Possiamo dunque applicare il TEOREMA FONDAMENTALE DEGLI SPAZI DI HILBERT COMPLESSI a $(L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \langle\cdot;\cdot\rangle_2)$:

$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, posti $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\langle f; e_n\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$

è
$$f \overset{\text{in } L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f; e_n\rangle_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx\right]}_{=:\,c_n(f)} e^{inx}$$

con
$$\underset{(\infty>)}{\|f\|_2^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f; e_n\rangle_2|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2,$$
e tale scrittura è UNICA; vale dunque PARSEVAL:

$$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \quad \langle f; g\rangle_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f; e_n\rangle_2 \overline{\langle g; e_n\rangle_2} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}.$$

"NOTE"!

NOTA: essendo $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$, è sensato intuire che proprietà di f (come la sua regolarità) si riflettano in qualche modo in proprietà dei $c_n(f)$!

(i $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ sono "i coefficienti di Fourier (complessi) di f", mentre $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$ è "la serie di Fourier (complessa) di f"; notiamo che "$c_n(f)$ ha senso" anche se $f \in L^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, in quanto $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) e^{-inx}|\,dx = \|f\|_1 < \infty$, ...)

$$: \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 < \infty \iff \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n(f)|^2 < \infty \\ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)|^2 < \infty \end{cases} \implies$$
$$|c_n(f)|^2 \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0, \overset{\text{cont. di } 0}{\iff} |c_n(f)| \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0, \overset{\text{cont. di } 0}{\iff}$$

$c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, ma con quale "velocità"??

(BASTA C^1 A TRATTI (E C^0): vale l'integrazione per parti!!)

$f \in C^1_{per}([-\pi,\pi]) \Rightarrow f \in C^0_{per}([-\pi,\pi]) \cap C^1_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi]) \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{c_n(f') = in\, c_n(f)}$, $\Rightarrow$ $(c_n := c_n(f))$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty$$

$\Downarrow$ / $\Downarrow$

$c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|}\right)$

"$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = f(x)$" $(\forall x \in [-\pi,\pi])$ totalmente, quindi uniformemente ($\Rightarrow$ in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$!), quindi puntualmente.

La prima $\Rightarrow$ è facile ($C^1_{per}([-\pi,\pi])$ ha in più che $f'(-\pi)=f'(\pi)$), e per la seconda osservo anzitutto che $f, f' \in C^0([-\pi,\pi]) \Rightarrow f, f' \in L^\infty_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, quindi in $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, e vale allora per entrambe il TEOREMA FONDAMENTALE; ora è un conto: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$c_n(f') := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{\text{INT.}}\, \underbrace{e^{-inx}}_{\text{DER.}}\,dx \overset{\text{INT. PER PARTI!}}{\underset{f\in C^1! \text{ (BASTA: A TRATTI)}}{=}} \frac{1}{2\pi}\Big\{ \underbrace{\big[f(x)e^{-inx}\big]_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{0 \text{ PERCHE' IN } C^0_{per}([-\pi,\pi])} -$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-in)e^{-inx}\,dx \Big\} = (in)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = (in)\,c_n(f)$.

Allora $(\infty >)\ \|f'\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|c_n|^2$, $\Rightarrow$

$n^2|c_n|^2 \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, $\Rightarrow |n| c_n \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, cioè $c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|}\right)$.

Infine, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|c_n|^2 < \infty \Rightarrow$ anche $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$

(PARENTESI SU $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$!); ma, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n| = \|c_n e^{inx}\|_\infty$, dunque allora $\left(\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}\right)_{m\geq 0}$ converge totalmente, quindi in $(\mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$, cioè uniformemente (e quindi (unitamente) a una $g \in \mathcal{C}^0_{pu}([-\pi,\pi])$; allora vi converge in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, cosa che fa pure a f: deve essere $g = f$ q.o., dunque $f = g$ per continuità di entrambe.

□

Estensione:

$\forall k \geq 1,\ f \in \mathcal{C}^{k-1}_{pu}([-\pi,\pi]) \Rightarrow \forall \underset{(0\leq)}{1 \leq} h \leq k,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f^{(h)}) = (in)^h c_n(f)$, in particolare ($c_n = c_n(f)$)

$\boxed{c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n}$, $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} |c_n|^2 < \infty$,

$\Downarrow$ $\qquad\qquad \Downarrow$

$c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ (VELOCITÀ DI DECRESCITA DEI COEFF. DI FOURIER)

$\forall \alpha < k - \frac{1}{2}$, $\sum_{n\neq 0} |n|^\alpha |c_n| < \infty$, (TIPO $\alpha = k-1$)

$\Downarrow$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge in $\mathcal{C}^{k-1}_{pu}([-\pi,\pi])$, cioè UNIFORMEMENTE (in $[-\pi,\pi]$) e f con $\Rightarrow$ (unitamente) (in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$) tutte le sue derivate fino all'ordine $k-1$ (compreso).

(TIPO DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER)

Intanto, $\forall\, 0 \leq h \leq k$, $f^{(h)} \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi]) \Rightarrow$ è in $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$; ora, $c_n(f) = 1 \cdot c_n(f)$ è il banale passo base della dim. della formula $c_n(f^{(h)}) = (in)^h c_n(f)$, quindi suppongo la tesi vera per $h-1$ con $1 \leq h \leq k$ e la provo per h: infatti $f^{(h-1)} \in \mathcal{C}^1_{pu}([-\pi,\pi]) \overset{\text{(visto prima)}}{\Rightarrow} c_n(f^{(h-1)'}) = c_n(f^{(h)}) = in\, c_n(f^{(h-1)}) =$

$\overset{\text{IND.}}{=} in\,(in)^{h-1} c_n(f) = (in)^h c_n(f)$. Allora $(\infty >) \|f^{(k)}\|_2^2 =$ (4)

$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f^{(k)})|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{2k} |c_n|^2$, $\Rightarrow n^{2k}|c_n|^2 \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0 \Leftrightarrow$

$|n|^k c_n \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$ (cioè $c_n = o_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$), ma anche $\xRightarrow{\text{(Lo stesso!)}}$

$\sum_{n\neq 0} |n|^\alpha |c_n| < \infty \ \forall \alpha < k - 1/2$, in particolare $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{k-1} |c_n| < \infty$. (MA NON k, in generale!)

Infine dunque $\|c_n e^{inx}\|_{C^{k-1}_{per}([-\pi,\pi])} = \sum_{h=0}^{k-1} \underbrace{\|c_n (in)^h e^{inx}\|_\infty}_{=|n|^h |c_n| \leq |n|^{k-1}} \leq k|n|^{k-1}|c_n| \leftarrow$

$\forall n \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\text{TEO. DEL CONFRONTO}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n e^{inx}\|_{C^{k-1}_{per}([-\pi,\pi])} < \infty$, per cui sappiamo che

converge UNIF. (su $[-\pi,\pi]$) lei, con tutte le sue derivate fino alla $(k-1)$-esima, ad una $g \in C^{k-1}_{\mathbb{C}\,(per)}([-\pi,\pi])$; in particolare vi converge in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, per cui $g = f$ q.o., ovvero $g \sim f$ per continuità di entrambe. □

Specie di "inversa": $(c_n := c_n(f))$

$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ per $\exists\, k \geq 1$ tale che

(1) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = O_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right)$ per cui $\alpha > k+1$ (TIPO $\alpha = k+2$)

o (2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2\beta} |c_n|^2 < \infty$ per cui $\beta > k + \frac{1}{2}$ (TIPO $\beta = k+1$)

$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^k |c_n| < \infty \Rightarrow \exists\, g \in C^k_{per}([-\pi,\pi])$ tale che

$f = g$ q.o., poiché $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge in $C^k_{per}([-\pi,\pi])$.

(1) $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $|n|^k |c_n| = O_{n\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^{\alpha-k}}\right)$, $\alpha - k > 1$, per cui $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{\alpha-k}} < \infty$ (da cui l'implicazione per il CONFRONTO ASINTOTICO).

(2) ⇒ Le proprietà in questione IN MODO EVIDENTE; e questo perché, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\|c_m e^{imx}\|_{C^k_{pw}([-\pi,\pi])} = \sum_{h=0}^{k} \underbrace{\|c_m (im)^h e^{imx}\|_\infty}_{=|m|^h|c_m| \leq |m|^k} \leq (k+1)|m|^k|c_m| \leq$;

Dunque $\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}$ converge in $\underline{C^k_{pw}([-\pi,\pi])}$ (per CONFRONTO), cioè UNIF. (in $[-\pi,\pi]$) con tutte le sue derivate (fino all'ordine k compreso) ad una $g \in C^k_{pw}([-\pi,\pi])$, in particolare in $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$: $g = f$ q.o. $\square$] (NOTA: se f fosse anche CONTINUA, allora automaticamente $f = g$!)

APPENDICE: alcuni risultati avanzati (senza dimostrazione)[3].

CARLESON: $\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, in realtà

$$S_m(x) := \sum_{n=-m}^{m} c_n(f) e^{inx} \xrightarrow[m\to\infty]{\text{q.o.}} f(x) .$$

$\forall f$ 2π-periodica e $\boxed{C^1 \text{ a tratti}}$, (I) $\forall K \subseteq [-\pi,\pi]$ COMPATTO che NON contiene punti di discontinuità di f,

$S_m \xrightarrow{\text{UNIF. su } K} f$; (II) $\forall x \in [-\pi,\pi]$ di discontinuità di f,

(≠ puntualmente)

$$S_m(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} \qquad \left(f(x^\pm) := \lim_{\eta\to x^\pm} f(\eta)\right).$$

$\forall f \in C_{per}$ e α-HÖLDERIANA CON $1/2 < \alpha\ (\leq 1)$, $S_m \xrightarrow{\text{TOT}} f$, quindi uniformemente.

SERIE DI FOURIER REALE : $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$,

posti $\underline{a_0} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ (= $c_0(f)$!) e, $\forall n \geq 1$, $\underline{a_n} := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

e $\underline{b_n} := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$, onde allora che $\sum_{n\geq 1}[|a_n|^2 +$

$+ |b_n|^2] < \infty$ e $\left\{ f(x) \overset{\text{in } \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)}{=} a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx) \right\}$

$\Rightarrow$ $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)$, se $\tilde{b}_n := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

allora $f(x) \overset{\text{in } \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)}{=} \sum_{n\geq 1} \tilde{b}_n \sin(nx)$ (analogo per i coseni). Dunque, essendo

$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. di $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$

($\Leftarrow$ $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\right)_{n\geq 1}$ lo è in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,1)$), tale è in

realtà BASE DI HILBERT di $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ (rispettivamente

$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\right)_{n\geq 1}$ per $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (analogo per i coseni)).

($\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx = 0$! $\left(0 = \left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}\right.$ per la 2π-periodicità))

[Intanto, effettivamente $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right)_{n\geq 1}$ ~~ono~~ è un

SIST. ORT. : $\forall m,n \geq 1$ (anzi $m\geq 0$: $\cos(0x) = 1$!),

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0$ perché $\cos(mx)\sin(nx)$ è DISPARI ~~e~~ ~~≠0~~;

ora, ad es. per i SENI, $\sin(nx) = \frac{1}{2i}[e^{inx} - e^{-inx}]$ $\left(\frac{1}{i} = -i\right) \Rightarrow \sin^2(nx) =$

$= -\frac{1}{4}[e^{i2nx} + e^{-i2nx} - 2]$ che $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = -\frac{1}{4}(-2)2\pi =$

$= \pi$ ($\Rightarrow \int_0^{\pi}\sin^2(nx)\,dx \overset{\text{pari}}{=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \frac{\pi}{2}$!)), mentre

in generale $\sin(mx)\sin(nx) = -\frac{1}{4}[e^{imx} - e^{-imx}][e^{inx} - e^{-inx}]$ che conseguentemente $\int_{-\pi}^{\pi} = 0$ SE $m \neq n$. ✓ Ora, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$

$$\Rightarrow f(x) \overset{\text{in } L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{e^{inx}}_{(=\cos(nx)+i\sin(nx))} \overset{\text{conv. assol.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos(nx) + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sin(nx) ;$$

ma anche $e^{-inx} = \cos(nx) - i\sin(nx)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right) - i\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right)\right],$$ e $\underline{f \text{ REALE}} \Rightarrow$

$\mathrm{Re}(c_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, e $\mathrm{Im}(c_n) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$;

$\underline{\text{allora}}$ $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cos(nx) = \underbrace{\sum_{n\geq 0} c_n \cos(nx)}_{= \underset{=a_0!}{c_0} + \sum_{n>0} c_n \cos(nx)} + \underbrace{\sum_{n<0} c_n \cos(nx)}_{= \sum_{n>0} \overline{c_n}\cos(nx)} =$$

$= c_0 + \sum_{n>0} (c_n + \overline{c_n})\cos(nx)$, e effettivamente $c_n + \overline{c_n} = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = a_n$;

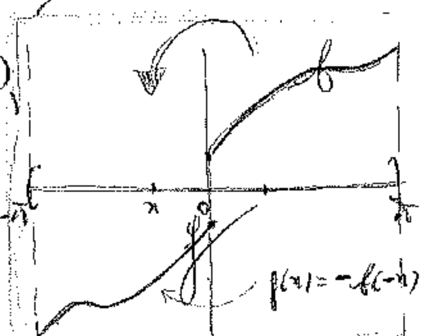
analogamente $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sin(nx) = \sum_{n>0} c_n \sin(nx) + \underbrace{\sum_{n<0} c_n \sin(nx)}_{=\sum_{n>0}(-\overline{c_n})\sin(nx)} =$$

$= \sum_{n>0} (c_n - \overline{c_n})\sin(nx)$, e $c_n - \overline{c_n} = 2i\,\mathrm{Im}(c_n)$; $\Rightarrow$

$i\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sin(nx) = \sum_{n>0} \underbrace{(-2\,\mathrm{Im}(c_n))}_{=b_n} \sin(nx)$. ✓ (È ovvia la convergenza

di $\sum_{n>0}[|a_n|^2 + |b_n|^2]$: $a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n)$ e $b_n = (-2)\,\mathrm{Im}(c_n) \Rightarrow |a_n|^2 + |b_n|^2 =$

$= 4|c_n|^2$ $(\forall n > 0)$! ✓) . Ora, se $f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)$,



sia $g \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ la sua ESTENSIONE DISPARI su tutto $[-\pi,\pi]$: è ovvio che allora

$g(x) \overset{\text{in } L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$, dove $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)\sin(nx)}_{\text{PARI!!}}\,dx =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{=f(x)}{g(x)} \sin(nx)\,dx = \widehat{b_n}$, per cui ciò vale su $[0,\pi]$. ☺

ESERCIZI SERIE DI FOURIER (1)

$\forall g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, $\exists (g_n)_{n\geq 0}$ in C^0_{pw} tali che le g_n siano EQUILIMITATE e $g_n \xrightarrow{q.o.} g$. ($\forall g \in \mathcal{L}^\infty$, ovviamente)

$(\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])<\infty)$

$g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) \subsetneq \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi) \overset{\text{CARLESON}}{\Longrightarrow} \left(S_n(x) := \sum_{m=-n}^{n} c_m(g) e^{imx}\right)_{n\geq 0}$ sono in C^0_{pw} tali che $S_n \xrightarrow{q.o.} g$; È ALLORA NECESSARIO che, essendo $|g| \overset{q.o.}{\leq} \|g\|_\infty$ ($<\infty$!), $|S_n| \overset{q.o.}{\leq} \|g\|_\infty$ se $n \geq \bar{n}$ (≥ 0): altrimenti sarebbe che, per infiniti n, $|S_n(x)| > \|g\|_\infty$ per una qualche NON trascurabile di $x \in [-\pi,\pi]$, per i quali allora $S_n(x) \not\to g(x)$, che è assurdo! Pongo allora $g_n := S_{\bar{n}+n}$ $\forall n \geq 0$. $\square$

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, posso definire $c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\left(|c_n(f)| \leq \frac{\|f\|_1}{2\pi} \leq \|f\|_1 !\right)$: dimostrare che $c_n(f)=0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\overset{(\text{ovvio})}{\Longleftrightarrow}$ $f \overset{q.o.}{=} 0$, cioè $(\Leftrightarrow)$ $c_n(f) = c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\overset{\text{ovvio}}{\Longrightarrow}$ $f \overset{q.o.}{=} g$ per ogni altra $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$.

Intanto, il cioè è ovvio: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $0 = c_n(f) - c_n(g) \overset{(\text{ovvio})}{=} c_n(f-g)$ $\Longleftrightarrow f-g \overset{q.o.}{=} 0$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Longleftrightarrow} f \overset{q.o.}{=} g$. Ora il punto chiave è osservare che $(g_n)_{n\geq 1}$ EQUILIMITATE tali che $g_n \xrightarrow{q.o.} g$ $(\in \mathcal{L}^\infty!)$ ($\forall g$ in $\mathcal{L}^\infty \subsetneq \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$)

$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_n(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\,dx$ per convergenza DOMINATA (se f: $\forall n \geq 1$, $|f g_n| \leq |f| \cdot M \in \mathcal{L}^1$, se $|g_n| \leq M$ $\forall n \geq 1$ $(M \geq 0)$).

Ebbene, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = 0 \Longrightarrow \forall p$ POLINOMIO TRIGONOMETRICO (se

$[-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$) è ovviamente $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,p(x)\,dx = 0$; MA per STONE-WEIERSTRASS i polinomi trigonometrici sono DENSI in $C^0_{per}(-\pi,\pi)$ (rispetto a $\|\cdot\|_\infty$) : $\forall g \in C^0_{per}(-\pi,\pi)$, $\exists (p_m)_{m\geq 1}$ di pol. tr. tale che $p_m \xrightarrow[\forall x.]{\|\cdot\|_\infty \Rightarrow \forall x.} g$ e tali si possono supporre EQUILIMITATI (da $\|g\|_\infty$: $|g| \leq \|g\|_\infty \Rightarrow$ definitivamente $|p_m| \leq \|g\|_\infty$!) $\Rightarrow$ anche $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,p_m(x)\,dx}_{=0\,!} = 0$! Allo stesso modo, per l'esercizio precedente, è anche quindi $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx = 0$ $\forall g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$; ora l'idea è considerare la funzione $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (MIS.) definita da $\varphi(z) := \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0 \\ \dfrac{\bar z}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$), perché LIMITATA ($\forall z \neq 0$, $|\varphi(z)| = 1$!) $\Rightarrow$ $\varphi(f)$ funz. limitata, cioè in $\mathcal{L}^\infty$, quindi $0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi(f(x))\,dx =$

$$= \int_{\{f=0\}} \cancel{0 \cdot 0\,dx}_{0} + \int_{\{f\neq 0\}} f(x) \cdot \overbrace{\frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}}^{(|f(x)|^2!)} dx = \int_{\{f \neq 0\}} |f(x)|\,dx \Rightarrow$$

$\mathcal{L}^1(\{f \neq 0\}) = 0$, cioè effettivamente $f \overset{q.o.}{=} 0$.]

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \quad c_n(f) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0 .}$$

[Sfrutto il fatto che la tesi è vera per funzioni in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ (per Parseval!) : infatti $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ è DENSO in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ $\Rightarrow$ $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi), \forall \varepsilon>0$, $\exists f_1 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ e $f_2 \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ tale che $f = f_1 + f_2$ E $\|f_1\|_1 \leq \varepsilon$ ($f_2 := f_{2,\varepsilon}$, $f_1 := f - f_2$) ;

me allora, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(f_1) + c_n(f_2)$, DOVE (2)

difatto $c_n(f_2) \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$, e $|c_n(f_1)| \le \|f_1\|_1 \le \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \underset{(0\le)\ |n|\to+\infty}{\limsup} |c_n(f_1)| \le \varepsilon$, e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ deve

essere nettamente $= 0$ e quindi un limite esiste e è proprio, e $= 0$. ∎

$\forall f \in C^1_p([-\pi,\pi])$, $\overset{\downarrow (\text{N.B.: } C^0 \text{ e } C^1 \text{ A TRATTI!})}{c_n(f')} = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{2\pi}[f(\pi) - f(-\pi)]$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ (da cui la nota formula $c_n(f') = in\, c_n(f)$ per $f \in C_{per}$!)

Integro per parti: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $2\pi c_n(f') = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{\text{INT.}} \underbrace{e^{-inx}}_{\text{DER.}} dx =$

$= \underbrace{\left[f(x) e^{-inx}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{= [f(\pi)-f(-\pi)] e^{-in\pi}} + in \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx}_{= 2\pi c_n(f)} = 2\pi in\, c_n(f) + (-1)^n [f(\pi) - f(-\pi)]$, da cui la tesi. ∎

$e^{-in\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n$

Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ tale che $\exists g \in L^1_a(-\pi,\pi)$ per la quale, $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\, dt$: allora

(1) f è continua; (2) $f \in C^0_{(per)}$, cioè $f(\pi) = f(-\pi)$,

$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt = 0$; (3) g continua in $x \Rightarrow f$ derivabile

in x con $f'(x) = g(x)$ ($\not\Rightarrow f'$ continua in x) ; (4) $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$c_n(g) = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{2\pi}[f(\pi) - f(-\pi)]$ ($\Leftarrow$ la tesi dell'EX. precedente, nel caso $f \in C^1$ con $g = f'$!).

(1) $\forall x \in [-\pi,\pi]$, e $\forall h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in [-\pi,\pi]$ (tanto $|h| \downarrow 0$),

è $\left|f(x+h)-f(x)\right| = \left|\int_x^{x+h} g(t)\,dt\right| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0$ per continuità della misura (in $[-\pi,\pi]$) $g\cdot\mathcal{L}^1$ rispetto a ~~...~~ successioni decrescenti ($\mathcal{L}^1([-\pi,\pi])<\infty$!) di misurabili ($\forall x\in[-\pi,\pi]$, $\mathcal{L}^1(\{x\})=0$!) ✓

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0 \Rightarrow f(\pi) = f(-\pi)+0 = f(-\pi)$; $f(\pi)=f(-\pi) \Rightarrow$
$0 = f(\pi)-f(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$, e 0 perché $|f(x)|<\infty\ \forall x\in[-\pi,\pi]$ per continuità su un compatto! ✓

(3) $\forall h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tale che $x+h\in[-\pi,\pi]$ (tanto $|h|\downarrow 0$), è

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)\,dt \underset{\uparrow}{=} g(\xi_h)$$

ANZI h abb. piccolo affinché g sia continua tra x e x+h INCLUSI

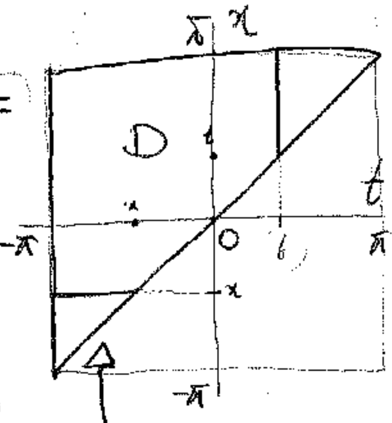
, con ξ_h tra x e $x+h$ (per il teorema della MEDIA INTEGRALE!), $\Rightarrow g(\xi_h) \xrightarrow[|h|\to 0]{} g(x)$ per continuità di g tra x e $x+h$, da cui la tesi. ✓

(4) Per $n=0$ effettivamente $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0 + \frac{1}{2\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]$ (ipotesi!) ; se allora $n\neq 0$: $2\pi c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[f(-\pi)+\int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt\right] e^{-inx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt\right] e^{-inx}\,dx =$$

dà integrale 0, su $[-\pi,\pi]$, se moltiplicato per e^{-inx} ESSENDO $n\neq 0$!

FUBINI! ($\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x}|g(t)\,dt|\,dx \le \|g\|_1\cdot 2\pi < \infty$! ($g\in\mathcal{L}^1$))



$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{t}^{\pi} e^{-inx}\,dx\right] g(t)\,dt = \frac{i}{n}(-1)^n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt}_{(=f(\pi)-f(-\pi))} - \frac{i}{n}\,2\pi c_n(g)$$

$(\mathbb{D}:=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid -\pi\le t\le x\le\pi\})$

$$\left(\overset{(n\neq 0!)}{=}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_t^{\pi} \overset{(-1/i=i)}{=} \frac{i}{n}\left[(-1)^n - e^{-int}\right]\right)$$

, cioè la tesi se moltiplico per $\frac{in}{2\pi}$. □

Se $f \in \mathcal{C}^0_{pw}(-\pi,\pi)$ $(\subseteq L^2_0(-\pi,\pi)!)$ è tale che $\exists\, g \in L^2_C(-\pi,\pi)$ $(\subseteq L^1_0(-\pi,\pi)!)$ per la quale, $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt$, allora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ la serie di Fourier di f converge totalmente, quindi uniformemente (quindi puntualmente), a f stessa. (Com'è noto nel caso $g = f'$, $f \in \mathcal{C}^1(-\pi,\pi)$!)

Posso sfruttare il punto (4) dell'esercizio precedente: $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $c_n(g) = in\, c_n(f)$ $\quad (f(\pi) - f(-\pi) = 0$ perché $f \in \mathcal{C}^0_{pw}(-\pi,\pi)!)$

$\underset{(\frac{1}{i}=-i)}{\Leftrightarrow}$ $c_n(f) = -\frac{i}{n} c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ (per $n=0$ è ovvio perché $c_0(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \overset{f \in \mathcal{C}_{pw}}{=} 0$, e comunque non serve per il seguito ...) $\Rightarrow$

$n^2 |c_n(f)|^2 = \cancel{n^2} \frac{|c_n(g)|^2}{\cancel{n^2}} = |c_n(g)|^2$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (anche $n=0$!),

per cui $\underset{(0\leq)}{} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(g)|^2 \overset{\text{PARSEVAL per } g \in L^2}{=} \frac{\|g\|_2^2}{2\pi} < \infty$. Ma

allora anche $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^b |c_n(f)| < \infty$ $\forall\, 0 \leq b < 1 - 1/2 = 1/2$,

come effetto $b=0$; ora concludo osservando che $\|c_n(f) e^{inx}\|_\infty = |c_n(f)|$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ EQUIVALE alla convergenza totale di $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$, che implica quella in $(\mathcal{C}^0_p(-\pi,\pi), \|\cdot\|_\infty)$ ad una $g \in \mathcal{C}^0$; ma allora essa converge in L^2, cosa che ovviamente fa con f: dunque $f = g$ q.o., ANZI ovunque per continuità. □

$\forall f \in L^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, dimostrare che $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$, $c_n(\mathring{f}) = c_{-n}(f)$, $\underset{\text{PER } f \text{ } 2\pi\text{-PERIODICA}}{c_n(\tau_h f) = e^{-inh} c_n(f)}$, $\underset{\text{PER } f \text{ } 2\pi\text{-periodica}}{c_n(f(\tfrac{x}{k}))} = c_{(nk)}(f)$ $(k \geq 2)$ e caratterizzare quindi le f che sono (q.o.) pari, dispari, reali, puramente immaginarie e π-periodiche.

$$\underline{c_n(\overline{f})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overline{f(x)}\, e^{-inx}}_{\left(= \overline{f(x)\, e^{i(-n)x}}\right)}\, dx \underset{\left(\int \overline{(\dots)} = \overline{\int(\dots)}\right)}{=} \overline{c_{-n}(f)} \quad ; \quad \mathring{f}(x) := f(-x)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c_n(\mathring{f})} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\, e^{-inx}\, dx \underset{\left(\substack{-x =: t \Leftrightarrow x = -t \Rightarrow \\ dx = -dt \text{ MA GLI ESTREMI} \\ \text{SI SCAMBIANO!}}\right)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-i(-n)t}\, dt = c_{-n}(f) \quad ;$$

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \tau_h f(x) := f(x-h) \Rightarrow \underline{c_n(\tau_h f)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-h)\, e^{-inx}\, dx \underset{\left(\substack{x-h =: t \Leftrightarrow x = t+h \\ \Rightarrow dx = dt \text{ e tieni} \\ \text{estremi PER } 2\pi\text{-} \\ \text{-PERIODICITÀ!}}\right)}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi \to h}^{\pi \to h} f(t)\, \underbrace{e^{-in(t+h)}}_{e^{-int} \cdot e^{-inh}}\, dt = e^{-inh}\, c_n(f)$$

(NOTARE che allora, posto $S_m f(x) := \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\, e^{inx}$ $\forall m \geq 0$,

$\boxed{S_m(\tau_h f) = \tau_h S_m(f)}$: $\sum_{n=-m}^{m} \underbrace{c_n(\tau_h f)}_{= e^{-inh} c_n(f)}\, e^{inx} = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\, e^{in(x-h)}$!);

$$\text{infine} \quad c_n(f(\tfrac{x}{k})) \overset{(k\geq 2)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tfrac{x}{k})\, e^{-inx}\, dx \underset{\left(\substack{\frac{x}{k} =: t \Leftrightarrow x = kt, \\ \Rightarrow dx = k\,dt \text{ con estremi} \\ -\pi/k,\ \pi/k,\ \text{cioè } 0, \frac{2\pi}{k} \\ \text{PER PERIODICITÀ!}}\right)}{=} \frac{1}{2\pi} k \int_0^{2\pi/k} f(t)\, e^{-i(nk)t}\, dt =$$

$= c_{(nk)}(f)$.

Dunque f PARI $\overset{\text{d.}}{\Leftrightarrow} f(x) \overset{\text{q.o.}}{=} f(-x) \overset{\substack{2^{\circ} \\ \text{EX!}}}{\Leftrightarrow} c_n(f) = c_n(\mathring{f}) = c_{-n}(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$; f DISPARI $\overset{\text{d.}}{\Leftrightarrow} f(x) \overset{\text{q.o.}}{=} -f(-x) \Leftrightarrow c_n(f) = -c_n(\mathring{f}) = -c_{-n}(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$; f REALE $\overset{\text{d.}}{\Leftrightarrow} f \overset{\text{q.o.}}{=} \overline{f} \Leftrightarrow c_n(f) = c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$;

f puramente immaginaria $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $f \overset{q.o.}{=} -\overline{f}$ $\Leftrightarrow$ $c_n(f) = -c_n(\overline{f}) =$ (4)

$= -\overline{c_{-n}(f)}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$; f π-periodica $\overset{\Delta}{\Leftrightarrow}$ $f(x) \overset{q.o.}{=} f(x+\pi)$,
$\not\equiv 2\pi$-periodica!)

ossia $f \overset{q.o.}{=} \tau_\pi f$, $\Leftrightarrow$ $c_n(f) = c_n(\tau_\pi f) = e^{-in\pi} c_n(f) =$ Δ $(-\pi, 0+\pi$, è fondamentalmente lo stesso!)

$= (-1)^n c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$\forall f, g \in L^1_{per}(-\pi,\pi)$, sia $f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\, dy$ $(\in L^1_{per}(-\pi,\pi)!)$;
dimostrare che, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f*g) = 2\pi\, c_n(f)\, c_n(g)$ e dedurne quindi una caratterizzazione delle $f \in L^1_{per}(-\pi,\pi)$ tali che $f*f \overset{q.o.}{=} f$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $\underset{(\text{finito!})}{c_n(f*g)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y)\, dy \right] e^{-inx}\, dx \overset{\text{FUBINI}}{=}$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-inx}\, dx}_{(= 2\pi c_n(\tau_y f) = 2\pi e^{-iny} c_n(f))} \right] g(y)\, dy = c_n(f) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iny}\, dy}_{(= 2\pi c_n(g))}$. ✓

(f 2π-per.!)

Allora $f*f \overset{q.o.}{=} f \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(f*f) = 2\pi c_n(f) c_n(f) =$

$= 2\pi c_n(f)^2$, $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, o $c_n(f) = 0$ o $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}$; ma,
come visto, pure per ciascuna $f \in L^1$ è $c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: in conclusione $f*f \overset{q.o.}{=} f \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}$ per un numero finito di n, altrimenti $c_n(f) = 0$, $\Leftrightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in I} e^{inx}$ con $I \subsetneq \mathbb{Z}$ finito (Nota: infatti $f*f \overset{q.o.}{=} f \overset{[*]}{\Rightarrow} f \in L^\infty \underset{(\text{basta continua q.o.})}{\Leftrightarrow}$ f (unif.) continua $\Rightarrow f \in L^2$, e a questo punto l' $\overset{\text{punto per punto}}{=}$ è ovvio ($\sum_{n \in I} e^{inx}$ banalmente "converge" totalmente $\not\equiv$ a f, per continuità, unif. e punt.)!)!

[*]: ~~$\|f*f\| - \|f\| \le \|f\|*(\|f\|)$~~ ... ~~$\le \|f\|*\|f\|$~~ ovvero direttamente

la continuità (q.o.) di f: $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in [-\pi,\pi]$ (tanto poi $|h| \downarrow 0$!), $|f(x+h) - f(x)| \overset{q.o.}{=} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+h-y) - f(x-y)] \cdot f(y)\, dy \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\underbrace{\underset{\tau_{x+h}\check{f}(y)}{f(x+h-y)} - \underset{\tau_x \check{f}(y)}{f(x-y)}}_{= \tau_x(\tau_h \check{f} - \check{f})(y)}| \, |f(y)|\, dy \xrightarrow[|h| \to 0]{} 0$ perché

$f \in L^1 \Leftrightarrow \check{f} \in L^1 \Leftrightarrow \tau_h \check{f} \in L^1 \Leftrightarrow \tau_x(\tau_h \check{f}) \in L^1$, e inoltre $\tau_h \check{f} \xrightarrow[|h| \to 0]{L^1} \check{f}$ ("continuità dei traslati") $\overset{\text{(isometria!)}}{\Rightarrow} \tau_x(\tau_h \check{f}) \xrightarrow[|h| \to 0]{L^1} \tau_x \check{f}$ $\Rightarrow$ "sotto q.o.", e d'altra parte sussiste la dominazione "di f" $\in L^1$ (precisamente $f(x-h) \xrightarrow[|h| \to 0]{q.o.} f(x) \Rightarrow$ da un certo $|h| \leq \bar{h}$ in poi e (q.o.)

$|f(x-h)| - |f(x)| \leq |f(x-h) - f(x)| \overset{q.o.}{\leq} M$, $M > 0$ scelto, $\Rightarrow |f(x-h)| \overset{q.o.}{\leq} |f(x)| + M \in L^1_{(per)}(-\pi,\pi)$; IN CONCLUSIONE prendo $(h_m)_{m \geq 1}$ tale che $|h_m| \leq \bar{h}$ e "$f(x-h_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{q.o.} f(x)$", che tanto $|h| \downarrow 0 \Rightarrow |h_m| \downarrow 0$!) $\checkmark$] . $\square$]

[ANZI: ho concluso perché $\forall (h_m)_{m \geq 1} \downarrow 0$ ho trovato $(h_{m_k})_{k \geq 1} \downarrow 0$ tale che $|f(x+h_{m_k}) - f(x)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$!]

$\Rightarrow$ Anche $(L^1_{per}(-\pi,\pi), *)$ NON è un gruppo, altrimenti $f * f = f$ $\overset{\text{CANCELLAZIONE}}{\Longrightarrow}$ $f =$ "1" $=$ L'ELEMENTO NEUTRO DEL GRUPPO, mentre in realtà di tali f ce ne sono infinite e tutte $\neq$ (e non c'è proprio $f = 0$!) !

Per $f \in C^0_{per}$, SONO EQUIVALENTI le seguenti tre proprietà:

$f \in C^\infty_{per}$; $c_m(f) = \underset{|m| \to +\infty}{O}(|m|^{-e})$ $\forall e > 0$; $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^e |c_m(f)| <$ $< \infty$ $\forall e > 0$.

($\Leftarrow c_m(f) = \underset{|m| \to +\infty}{O}(|m|^{-e})$ $\forall e > 0$!)

$\forall k \geq 0$, $f \in C^k_{per} \overset{\text{visto!}}{\Rightarrow} \forall k \geq 0$, $c_m = \underset{|m| \to +\infty}{O}(|m|^{-k}) \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \forall e > 0$, $c_m =$

$= o_{|n|\to+\infty}(|n|^{-e}) \Rightarrow \forall e>0,\ c_n = O_{|n|\to+\infty}(|n|^{-e}) \Rightarrow \forall e>0,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^e |c_n(f)|$ $< \infty$ ($\forall e>0$, prendo $b>e+1$ e ho $|n|^e|c_n(f)| = O_{|n|\to+\infty}(|n|^{e-b})$, con effetto $e-b<-1$) $\overset{(\text{vista!})}{\Longrightarrow} \forall k\geq 1,\ f \overset{\text{q.o.}}{=} g$ con $g = C^k_{per}$; MA anche $f \in C^0_{per} \Rightarrow f = g \in C^k_{per}\ \forall k \geq 0$. $\square$

($\because |c_n(f)| = O(|n|^{-b})$!) ($b>0$)

Per una $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, o anche solo $f \in L^1_{per}(-\pi,\pi)$, scrivere, $\forall m \geq 0$, $S_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\, e^{inx} = f * g_m(x)$, dove

$$g_m(x) := \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)} \quad \left(g_m(0) := \frac{2m+1}{2\pi} \text{ per continuità}\right) \in L^1_{per}.$$

("NUCLEO DI DIRICHLET").

$$S_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n(f)\, e^{inx} = \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt\right] e^{inx} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-m}^{m} e^{in(x-t)}\right)}_{= g_m(x-t)\ !!} dt = f * g_m(x) \quad ; \text{ infatti } \sum_{n=-m}^{m} e^{inx} =$$

$$= \sum_{n=-m}^{m} (e^{ix})^n \underset{\uparrow}{\overset{\boxed{x\neq 0}}{=}} \frac{e^{i(m+1/2)x} - e^{-i(m+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin((m+1/2)x)}{\sin(x/2)}. \ \square$$

(se $x=0$, allora banalmente $\sum_{n=-m}^{m} 1 = 2m+1$!)

(NOTA : $\forall \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, è in effetti $\sum_{n=-m}^{m} \alpha^n \overset{(\text{ovvio})}{=} \alpha^{-m} \sum_{n=0}^{2m} \alpha^n \overset{(\text{NOTO})}{=} \alpha^{-m}\,\frac{\alpha^{2m+1}-1}{\alpha - 1} =$

$$= \frac{\alpha^{m+1} - \alpha^{-m}}{\alpha - 1} \underset{\uparrow \left(\times \frac{\alpha^{-1/2}}{\alpha^{-1/2}}\right)}{=} \frac{\alpha^{m+1/2} - \alpha^{-(m+1/2)}}{\alpha^{1/2} - \alpha^{-1/2}} \quad !\ \checkmark)$$

①

PARENTESI sulla derivazione sotto il segno d'integrale, ed altro "armamentario matematico" !!

Siano $A_t \subseteq \mathbb{R}$ mis. e $E_x \subseteq \mathbb{R}^n$ mis., quando $f(t,x) : A_t \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$: $\forall t \in A$ (o q.o. ...), $f(t,\cdot) \in L^1(E_x)$ $\Rightarrow$ resta definita $F : A_t \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boxed{F(t) := \int_E f(t,x)\,dx}$.

L^1 E DOMINAZIONI nelle x! $\mathcal{C}^0$ o $\mathcal{C}^1$ nelle t!

Per q.o. $x \in E$, $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^0(A_t)$, ed $\exists\, g \in L^1(E)$, $g \geq 0$ q.o., tale che $\forall t \in A$ $|f(t,\cdot)| \leq g$ q.o. ($\Rightarrow \forall t \in A$, $f(t,\cdot) \in L^1(E)$!)

$\Rightarrow F \in \mathcal{C}^0(A)$.

$\forall t_0 \in A$, $\forall (t_n)_{n \geq 1}$ in A che $t_n \xrightarrow{\mathbb{R}} t_0$, per continuità nella t $f(t_n,x) \xrightarrow{\text{q.o.}} f(t_0,x)$, ed è equamente tutto DOMINATO in $L^1(E_x)$: per Lebesgue $\underbrace{\int_E f(t_n,x)\,dx}_{=F(t_n)} \xrightarrow{n} \underbrace{\int_E f(t_0,x)\,dx}_{=F(t_0)}$. $\square$

(TEOREMA DI DERIVAZIONE SOTTO IL SEGNO D'INTEGRALE)

Per q.o. $x \in E$, $f(\cdot,x) \in \mathcal{C}^1(A_t)$, ed $\exists\, g_0, g_1 \in L^1(E)$, ≥ 0 q.o., tali che $\forall t \in A$ $|f(t,\cdot)| \leq g_0$ q.o. e $|\partial_t f(t,\cdot)| \leq g_1$ q.o. $\Rightarrow F \in \mathcal{C}^1(A)$ con

$$\partial_t F(t) = \partial_t \int_E f(t,x)\,dx = \int_E \partial_t f(t,x)\,dx .$$

Per questo effettivo caso, basta provare l'uguaglianza; ma infatti, $\forall t_0 \in A$, $\forall (t_n)_{n\ge1}$ in A tale che $t_n \xrightarrow{\mathbb{R}} t_0$, potendo comodamente supporre che per esempio $(t_n)_{n\ge1}$ sia in un certo $[t_0 - r, t_0 + r] =: [a,b]$ $(r>0)$, allora $f(\cdot,x) \in C^1(A)$ per q.o. $x \in E$ $\overset{\text{LAGRANGE}}{\Longrightarrow}$ $\forall n \ge 1$, $\exists\, \xi_n$ tra t_0 e t_n tale che

$$\psi_n(x) := \frac{f(t_n,x) - f(t_0,x)}{t_n - t_0} \underset{\uparrow}{=} \partial_t f(\xi_n, x) \text{ per q.o. } x \in E,$$
(più denso del primo)

dunque (continuità) $\psi_n \xrightarrow{\text{q.o.}} \partial_t f(t_0,x)$, col concetto tratto DOMINATO IN $L^1(E)$ è (per Lebesgue)

$$\underbrace{\int_E \psi_n(x)\,dx}_{\left(\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0}\right)} \xrightarrow{\mathbb{R}} \int_E \partial_t f(t_0,x)\,dx \quad . \square \Big]$$

!

(Lemma) Vale tale formula nel caso che: E sia COMPATTO, $f(\cdot,x) \in C^1(A)$ per q.o. $x \in E$, $f(t,\cdot) \in C^0(E)$ e anche $\partial_t f(t,\cdot) \in C^0(E)$ $\forall t \in A$.

$\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ MIS., f T-periodica $\Rightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$.

(Se $f \in C^0_T(\mathbb{R})$ (e mis.), allora $F_c(x) \doteq \int_0^x f(t)\,dt + c$ $(c \in \mathbb{R})$ è $C^1_T(\mathbb{R})$ con $F_c'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (connesso!) $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = F_c(x+T) - F_c(x)$ che ha derivata $f(x+T) - f(x) = 0$, cioè è costante in x!)

In generale, per qui scelta di $a \in \mathbb{R}$ è $\int_a^{a+T} f(x)\,dx \overset{\downarrow}{=} \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx$; ma gli ultimi due integrali so

Infatti: $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \overset{T-\text{per.}}{=} \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_T^{a+T} f(t)\,dt$. $\square$

$x+T=:t \iff x=t-T$, $\Rightarrow dx=dt$ e estremi $T, a+T$

$\forall f \in C^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, f T-periodica, $\forall F \in C^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ con $F'=f$, F è T-periodica $\iff \displaystyle\int_0^T f(x)\,dx = 0$.

(In effetti $f\equiv 1$ NON soddisfa $\int_0^T f(x)\,dx=0$ e $F(x)=x$ NON è certamente T-periodica (comunque si prenda $T>0$)!)

Infatti $F_c(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + c$ è la generica F dell'enunciato, dunque: per $\Rightarrow$, $\forall x$ $0 = F_c(x+T) - F_c(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$, in particolare per $x=0$; per $\Leftarrow$, analogamente $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_c(x+T) - F_c(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt \overset{\text{visto ora!}}{=} \int_0^T f(t)\,dt = 0$. $\square$

$\forall\, a, u_0 \in \mathbb{C}$ scelti, $u \in C^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} \dot u(t) = a u(t) \\ u(0)=u_0 \end{cases}$

$\iff \boxed{u(t) := u_0 e^{at}}$; $\forall$ altro $u_1 \in \mathbb{C}$ scelto,

$u \in C^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ tale che $\begin{cases} \ddot u(t) = -a^2 u(t) \\ u(0) = u_0 \\ \dot u(0) = u_1 \end{cases} \iff$

per $a = 0$, $u(t) := u_1 t + u_0$;

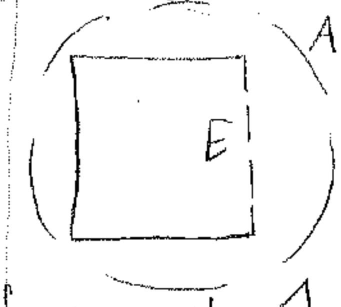
per $a \neq 0$, $u(t) := \alpha e^{iat} + \beta e^{-iat}$ con

$\alpha = \frac{1}{2}\left[u_0 + \frac{u_1}{ia}\right]$ e $\beta = \frac{1}{2}\left[u_0 - \frac{u_1}{ia}\right]$ (cioè α, β tali che $\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha - \beta = \frac{u_1}{ia} \end{cases}$).

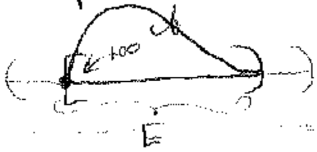
NOTA: $\frac{1}{i} = -i$, ossia $-\frac{1}{i} = i$

(TUTTO NOTO, e comunque facile!)

Per $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mis. ($n \ge 1$) potremmo definire "$C^1_{(\mathbb{R})}(E)$" $:= \{f: E \to \mathbb{R} \mid f = g|_E$ con $g \in C^1_{\mathbb{R}}(A)$ dove $A \supseteq E$ aperto$\}$ ($\Rightarrow f \in C^1(\mathring{E})$!) però NON avrebbe il solito "risultato di completezza": precisamente $\exists$



$(f_n)_{n\ge1}$ in "$C^1(E)$" tale che $f_n \xrightarrow{\text{UNIF. SU } E} f$, $\nabla f_n \xrightarrow{\text{UNIF. SU } E} g$, MA $f \notin$ "$C^1(E)$" (f potrebbe non essere derivabile su ∂E, come



!). Però vale che

$$\boxed{\forall (f_n)_{n\ge1} \text{ in "}C^1(E)\text{"},\ f_n \xrightarrow{\text{UNIF. SU } E} f \text{ e } \nabla f_n \xrightarrow{\text{UNIF. SU } E} g_{(\in C^0(E)!)} \Rightarrow f \in C^0(E)\cap C^1(\mathring{E}) \text{ e } g|_{\mathring{E}} = \nabla f|_{\mathring{E}}.}$$

[La continuità su E di f e g deriva dal considerare l'estensione "di tutti" di una succ. di $C^1(A)$, $A \supseteq E$ aperto; i risultati su $\mathring{E}$ derivano dal classico risultato sui COMPATTI. $\square$]

$$\boxed{\Rightarrow \nabla f \text{ può essere esteso a funzione continua da } \mathring{E} \text{ A TUTTO } E}$$

[~~Estendo ∇f ponendolo~~ $= g$ su E. $\square$]

Riassumendo, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO ($\not\Rightarrow \mathring{\bar{A}} = A$!),

$C^1_*(\bar{A}) := \{f \in C^0(\bar{A}) \cap C^1(A) \mid \nabla f$ si può estendere con continuità a tutto $\bar{A}\}$ con $\|f\|_{C^1_*(\bar{A})} := \|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty$ ($\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{C^0(A)}$ o $\|\cdot\|_{C^0(\bar{A})}$!) è $\mathbb{R}$-spazio DI BANACH

[Uso questo appena fatto per $E := \bar{A}$ ($\not\Rightarrow \mathring{E} = A$)! $\square$]
(allo stesso modo)

Naturalmente è tutto analogo per "$C^k(E)$" e $C^k_*(\bar{A})$, $k \ge 1$ (intero).

APPL. I) SERIE DI FOURIER!

Cerchiamo $u(t,x) : [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, con $(T>0)$
$u(\cdot,x) \in C^1_{\mathbb{C}}([0,T))$ e $u(t,\cdot) \in C^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, tale che

$$[P]\begin{cases} \boxed{u_t = u_{xx}} & (\text{"EQUAZIONE DEL CALORE" o di Fourier}) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \to \text{"dato" iniziale assegnato } (u_0 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}) \\ u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi) & \\ u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi) & \end{cases}$$

$\to$ "condizioni al bordo" ($u \in C^1_{x,per}!$)

$\leadsto$ (Sarà' però almeno $u_0 \in C^0_{per}$! (TIPO C^1_{per}!)).

Ora, $\forall t \in [0,T)$, $u(t,\cdot) \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ (ma anche u_t, u_x e u_{xx}!) $\Rightarrow \forall t \in [0,T)$,

$\boxed{u(t,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(t)\, e^{imx}}$ (PUNTUALE!), cioè $u(t,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(t)\, e^{imx}$

"in generale", CON $c_m(t) := c_m(u(t,\cdot))$ (che è C^1: vedi sotto!). Ora,

anche $\boxed{u_0(x) \overset{L^2}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c^0_m e^{imx}}$, $c^0_m = c_m(u_0(x))$, $=$

$= c_m(u(0,\cdot)) = c_m(0)$.

Se $u_0 \in C^0_{per}$, e $u(t,x)$ "C^1 in t" e "C^2 in x" che risolve [P], allora È ONICA in quanto i $c_m(t)$ sono univocamente determinati dal fatto che risolvono

$$\begin{cases} \dot{c}_m(t) = -m^2 c_m(t) \\ c_m(0) = c^0_m \end{cases} \quad \left(\text{CIOÈ } c_m(t) = c^0_m e^{-m^2 t}\right).$$

[$c_m(0) = c^0_m$ è stato appena visto; ora, chiaramente u_{xx} ha

$c_m(u_{xx}(t,\cdot)) \overset{\text{Nota!}}{\underset{(u,u_x \in C^1_{per}!)}{=}} (im)^2 c_m(u(t,\cdot)) = -m^2 c_m(t)$ $(\forall t \in [0,T))$,

mentre $c_m(u_t(t,\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x)\, e^{-imx}\, dx =$

$\Rightarrow$) $\partial_t \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\, dx\right] = \partial_t c_n(u(t,\cdot)) = \dot{c}_n(t)$ (per derivazione sotto il segno d'integrale: $u(t,x)$ è C^1 in t, e d'altra parte $u(t,\cdot) \in C^0$ e $u_t(t,\cdot) = u_{xx}(t,\cdot) \in C^0$),

cioè $\boxed{c_n(u_t(t,\cdot)) = \dot{c}_n(t)}$ $(\forall t \in (0,T))$, dunque

affinché $u_t = u_{xx} \Leftrightarrow \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t)$ $\forall t \in (0,T)$ $\square$

Dunque dovrebbe essere $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$, che poi
(per la buona definizione vedi sotto!)

verifica banalmente $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ e $u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi)$,

mentre $u_t = u_{xx}$ e $u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi)$ "almeno formalmente" (nel senso che "scambio" $\sum$ con ∂; ma ciò ha senso solo se tale serie converge in C^2_{σ} !!).

Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n^0| < \infty$ ($\Leftarrow u_0 \in C^1_{per}$), allora in effetti

$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$ ($u : [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ e)

(1) è CONTINUA, e 2π-periodica nella x;

(2) è $C^\infty_{\sigma}((0,\infty) \times \mathbb{R})$;

(3) $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$;

(4) $\forall t > 0$, $u_t = u_{xx}$;

(5) u_0 reale $\Rightarrow$ u reale!

$u \in C^\infty_*([0,\infty)\times\mathbb{R})$!

$\Rightarrow$ u è LA soluzione di [P] voluta!

(1) 2π-per. evidente; continuità (e buona definizione!) per convergenza UNIFORME (anzi TOTALE):

$\|c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}\|_\infty \overset{t \geq 0!!}{=} |c_n^0|$! (2) Ancora perché, $\forall k \geq 1$,

la serie converge in $C^k([\delta,\infty)\times\mathbb{R})$, $\forall \delta > 0$:

$\forall\, h,k \geq 1$, $\left|\partial_t^h \partial_x^k \left(c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}\right)\right| = \left|c_n^0 (-n^2)^h (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}\right| =$ (2)

$= |c_n^0|\, |n|^{2h+k} e^{-n^2 t} \Rightarrow \left\| \partial_t^h \partial_x^k \left(c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}\right)\right\|_{L^\infty([\delta,\infty)\times\mathbb{R})} = |c_n^0|\,|n|^{2h+k} e^{-n^2 \delta}$

ma $|c_n^0|\,|n|^{2h+k} e^{-n^2\delta} = O_{n\to\pm\infty}\left(e^{-n^2\delta/2}\right)$ $\Rightarrow$ definitivamente (in n)

$|c_n^0|\,|n|^{2h+k} e^{-n^2\delta} \leq e^{-n^2\delta/2}$ $\left[\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.!}\right]$),

perché $|c_n^0| \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, e d'altra parte $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\delta/2} < \infty$ (E ALLORA TERMINO COL CONFRONTO!)

(ad es. per il criterio della RADICE: $\lim_{n\to\pm\infty} \left(e^{-n^2\delta/2}\right)^{1/n} = 0 < 1$!)).

(3) Già visto, oltre che facile. (4) Discende immediatamente da (2), potendo scambiare Σ e ∂! (5) Premesso che:

u_0 reale $\Leftrightarrow$ $u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{inx} = a_0^0 + \sum_{n\geq 1} a_n^0 \cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n^0 \sin(nx)$,

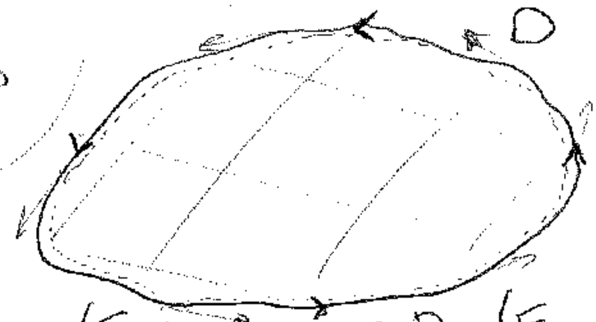
con $a_0^0 := c_0^0$ e, $\forall n \geq 1$, $a_n^0 := 2\,\mathrm{Re}(c_n^0)$ e $b_n^0 := (-2)\,\mathrm{Im}(c_n^0)$ (cioè $c_n^0 = \frac{a_n^0 - i b_n^0}{2}$) $\Rightarrow$ $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0 e^{inx} \underbrace{e^{-n^2 t}} = a_0^0 +$

$+ \sum_{n\geq 1} a_n^0 e^{-n^2 t} \cos(nx) + \sum_{n\geq 1} b_n^0 e^{-n^2 t} \sin(nx)$ è reale! $\square$

A proposito di serie di F. REALI, riusciremmo a risolvere tale problema anche con condizioni, ad esempio, del tipo $u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0$ (di Dirichlet), e u_0 REALE, avendo $u(t,x)$ SVILUPPATA IN SENI $\forall\, t \in [0,T]$!

APPL. II SERIE DI FOURIER! ①

Sia D un aperto $\subsetneq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ LIMITATO REGOLARE, cioè



tale che $\exists\, F \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $D = \{F<0\}$, $\partial D = \{F=0\}$ e $\nabla F_{|\partial D} \neq 0$, $\Rightarrow$ ∂D "è" una curva regolare, nel senso che è parametrizzata da una curva $\gamma \in C^1(J)$ $(J \subseteq \mathbb{R},\ J=[a,b])$ tale che $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt} \neq (0,0)$ in J. Si può supporre $J=[0,2\pi]$, γ parametrizza ∂D in senso ANTIORARIO, e $|\dot\gamma| = \text{costante} = \frac{L}{2\pi}$, se $L \doteq$ lunghezza di ∂D (perimetro di D); sia e posto $A \doteq$ area di D

Disug. ISOPERIMETRICA nel piano:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A}$$

, e vale "=" $\Leftrightarrow$ D è un disco.

$\begin{cases} L = 2\pi r \\ A = \pi r^2 \end{cases}$, e in effetti $(2\pi r)^2 = 4\pi^2 r^2$

[$\Rightarrow$ tra tutti i D con area A fissata, quello di perimetro minimo è il disco; tra tutti i D con perimetro L fissato, quello con area massima è il disco.]

$$\left[\ \gamma \in C^1_{\mathbb{C}}([0,2\pi]) \xRightarrow{\text{cont.}} \begin{cases} \gamma \in L^2_{\mathbb{C}}(0,2\pi) \\ \dot\gamma \in L^2_{\mathbb{C}}(0,2\pi) \end{cases}\right., \text{ e ha } \|\dot\gamma\|_2^2 = \int_0^{2\pi} \underbrace{|\dot\gamma(t)|^2}_{\frac{L^2}{(2\pi)^2}} dt$$

$$= \frac{L^2}{2\pi}, \text{ cioè } L^2 = 2\pi \|\dot\gamma\|_2^2 \overset{\text{Pa.}}{=} 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\underbrace{c_n(\dot\gamma)}_{in\, c_n \ (c_n = c_n(\gamma))}|^2 = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2.$$

D'altra parte

$$\langle \dot\gamma, \gamma \rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \dot\gamma \cdot \bar\gamma \, dt \underset{(\gamma := \gamma_x + i\gamma_y)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (\dot\gamma_x + i\dot\gamma_y)(\gamma_x - i\gamma_y)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[(\gamma_x \dot\gamma_x + \gamma_y \dot\gamma_y) + i(\gamma_x \dot\gamma_y - \gamma_y \dot\gamma_x) \right] dt \overset{(\text{def.})}{=}$$

$$= \underbrace{\int_\gamma (x\,dx + y\,dy)}_{\substack{=0 \text{ perché } x\,dx+y\,dy \\ \text{è esatta!}}} + i \underbrace{\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)}_{\substack{=2A \text{ per} \\ \text{Gauss-Green!}}} = 2iA \implies$$

$$\left(A = \iint_D 1\, dx\, dy = -\int_\gamma y\,dx = \int_\gamma x\,dy \right)$$

$$\implies 4\pi A = \frac{4\pi^2}{2i} \langle \dot\gamma, \gamma \rangle_2 \overset{\text{Pa.}}{=} \frac{2\pi}{i} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n(\dot\gamma)}_{in\,c_n} \overline{c_n(\gamma)} =$$

$$= 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2 ; \text{ allora } n^2 \geq n \ \forall n \in \mathbb{Z} \implies$$

($n \geq 0$: contando! $n < 0$: ovvio!)

$L^2 \geq 4\pi A$. Inoltre è $= \iff c_n = 0 \ \forall n \neq 0, 1$ (altrimenti $n^2 > n$), cioè $\gamma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} =$

$= c_0 + c_1 e^{it}$, appunto circonferenza di centro c_0 e raggio $|c_1|$. $\square$

APPL. III SERIE DI FOURIER!

Cerchiamo $u(t,x): [0,T) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ $(T>0)$, con $u(\cdot,x) \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{C}}([0,T))$ e $u(t,\cdot) \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$, tale che $(c \neq 0!)$

$$[P] \begin{cases} \boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}} & \text{("EQUAZIONE DELLE ONDE" (O DELLA CORDA VIBRANTE, O DI D'ALEMBERT))} \\ u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi) & \\ u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi) & \to \text{"Condizioni al bordo" } (\Leftrightarrow u \in \mathcal{C}^1_{x,per}!) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \\ u_t(0,\cdot) = u_1(\cdot) & \to \text{"Dati" iniziali assegnati} \end{cases}$$

($u_0, u_1 : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, u_0 almeno $\mathcal{C}^1_{per}$ e u_1 almeno $\mathcal{C}^0_{per}$!) [TIPO $u_0 \, \mathcal{C}^2_{per}$ e $u_1 \, \mathcal{C}^1_{per}$!].

Come per l'equazione del CALORE, ovviamente è $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) e^{inx}$, $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$, e $\{$ne $u_{0/1}(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{0/1} e^{inx}$, con $\begin{cases} c_n^0 = c_n(u_0(\cdot)) = c_n(u(0,\cdot)) = c_n(0) \\ c_n^1 = c_n(u_1(\cdot)) = c_n(u_t(0,\cdot)) \overset{(visto!)}{=} \dot{c}_n(0) \end{cases}$ e

Se $u_0 \in \mathcal{C}^1_{per}$ $(u_1 \in \mathcal{C}^0)$, e $u(t,x)$ "$\mathcal{C}^2$ sia in t sia in x" che risolve [P], allora È UNICA in quanto i $c_n(t)$ sono univocamente determinati dal fatto che risolvono

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = -c^2 n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^0 \\ \dot{c}_n(0) = c_n^1 \end{cases}$$

(CIOÈ $c_0(t) = c_0^1 t + c_0^0$ e, $\forall n \neq 0$, $c_n(t) = \alpha_n e^{icnt} + \beta_n e^{-icnt}$ con $\alpha_n = \frac{1}{2}\left[c_n^0 + \frac{c_n^1}{icn}\right]$, $\beta_n = \frac{1}{2}\left[c_n^0 - \frac{c_n^1}{icn}\right]$).

(cioè tale che $\alpha_n + \beta_n = c_n^0$, $\alpha_n - \beta_n = \frac{c_n^1}{icn}$)

[$c_n(u_{tt}(t,\cdot)) \underset{(u \in \mathcal{C}^2 \text{ in } t!)}{=} \ddot{c}_n(t)$, mentre $c_n(c^2 u_{xx}(t,\cdot)) =$

$= c^2 \cdot c_n(u_{xx}(t,\cdot)) = c^2 (in)^2 c_n(u(t,\cdot)) = -c^2 n^2 c_n(t)$,
$\forall t \in [0,T)$, e le condizioni iniziali sono verificate. $\square$

Dunque dovrebbe essere $u(t,x) = c_0^0 + c_0^1 t + \sum_{n\neq 0}' \alpha_n e^{in(x+ct)} +$
$+ \sum_{n\neq 0}' \beta_n e^{in(x-ct)}$, che in effetti soddisferebbe $u(\cdot,-\pi) =$
$= u(\cdot,\pi)$ e $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$, mentre "almeno formalmente"
le altre tre condizioni con ∂ (che essi valgono se tale serie
converge in $C^2_{\mathbb{C}}$!!).

$\boxed{\text{Se } u_0, u_1 \in C^0_{pw} \text{ tali che } \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n^0| < \infty \; \left(\begin{smallmatrix} \Leftarrow u_0 \in C^3_{pw} \\ \Rightarrow u_0 \in C^2_{pw} \end{smallmatrix}\right) \text{ e } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n||c_n^1| < \infty \; \left(\begin{smallmatrix} \Leftarrow u_1 \in C^2_{pw} \\ \Rightarrow u_1 \in C^1_{pw} \end{smallmatrix}\right), \text{ allora } u(t,x) \text{ scritta sopra è } u: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ di classe } C^2_{\mathbb{C}} \text{ che risolve [P]; inoltre } u_0, u_1 \text{ REALI} \Rightarrow u \text{ REALE.}}$

[Ovviamente basta verificare la convergenza in $C^2_{\mathbb{C}}$ delle serie, e anzi di $\sum_{n\neq 0}' \alpha_n e^{in(x+ct)}$ ("per analogia"!) ; osserviamo che
$u_0 \in C^2_{pw} \Rightarrow$ anche $\sum_{n=-\infty}^{\infty}' |n||c_n^0| < \infty$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty}' |c_n^0| < \infty$, mentre
$u_1 \in C^1_{pw} \Rightarrow$ anche $\sum_{n=-\infty}^{\infty}' |c_n^1| < \infty$. Ora, $\|\alpha_n e^{inx} e^{inct}\|_\infty =$
$= |\alpha_n| = \frac{1}{2}\left|c_n^0 + \frac{c_n^1}{icn}\right| \leq |c_n^0| + \frac{1}{|c|}\left|\frac{c_n^1}{n}\right|$ $\left(\frac{1}{i} = -i!\right)$; ma
$\frac{|c_n^1|}{|n|} \leq |c_n^1|$! ✓ Poi, $\|\partial_x \alpha_n e^{inx}\|_\infty = \|\alpha_n (in) e^{inx}\|_\infty =$
$= |\alpha_n||n| \overset{\text{(visto sopra)}}{\leq} |c_n^0||n| + \frac{1}{|c|}|c_n^1|$. ✓ Infine $\|\partial_x^2 \alpha_n e^{inx}\|_\infty =$
$= \|\alpha_n (in)^2 e^{inx}\|_\infty = |\alpha_n| n^2 \leq |c_n^0| n^2 + \frac{1}{|c|} |c_n^1||n|$, e QUI
uso le due ipotesi di convergenza! ✓ Ultimo cantiere:

u_0, u_1 reali $\Rightarrow$ c_0^0, c_0^1 reali, mentre $\sum_{n\neq 0}^{!}(\alpha_n e^{inct} +$ (2)

$+ \beta_n e^{-inct})e^{inx} = \sum_{n\neq 0}^{!}[\alpha_n(\cos(nct) + i\sin(nct)) + \beta_n(\cos(nct) - i\sin(nct))]$

$(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \sum_{n\neq 0}^{!}[(\alpha_n+\beta_n)\cos(nct) + i(\alpha_n-\beta_n)\sin(nct)](\cos(nx) +$

$+ i\sin(nx)) = \sum_{n\neq 0}^{!}[\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{c_n^0}\cos(nct)\cos(nx) + i\underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{c_n^0}\cos(nct)\sin(nx)] +$

$+ \sum_{n\neq 0}^{!}[i\underbrace{(\alpha_n-\beta_n)}_{\frac{c_n^1}{inc}=(-i)\frac{c_n^1}{nc}}\sin(nct)\cos(nx) - \underbrace{(\alpha_n-\beta_n)}_{(-i)\frac{c_n^1}{nc}}\sin(nct)\sin(nx)] =$

REALE!!

$= \sum_{n\neq 0}^{!}\cos(nct)\boxed{c_n^0 e^{inx}} + \sum_{n\neq 0}^{!}\sin(nct)\boxed{\frac{c_n^1}{nc}e^{inx}}$. ▫

REALE!!

"Piccole Variabili"

$u_0 \in C_{per}^2$, $u_1 \in C_{per}^1$ $\Rightarrow$ $\exists!$ $m \in \mathbb{C}$, φ^+ e φ^- in C_{per}^2 tali che

$\boxed{u(t,x) := mt + \varphi^+(x+ct) + \varphi^-(x-ct)}$ $(\in C^2!)$ risolve

[P] su $\mathbb{R}\times[-\pi,\pi]$ ($\not\exists$ è unica).

Intanto, tale u soddisferebbe banalmente le condizioni al bordo, ma anche l'equazione ($\because$ $\begin{cases} x+ct =: \xi \\ x-ct =: \eta \end{cases}$ $\not\Leftarrow$ $ct = \frac{1}{2}[\xi - \eta]$) $\Rightarrow$

$\begin{cases}\partial_\xi = \partial_x + c\partial_t \\ \partial_\eta = \partial_x - c\partial_t\end{cases}$; ma $c^2u_{xx} = u_{tt} \Leftrightarrow u_{tt} - c^2u_{xx} = 0 \Leftrightarrow$

$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0$ ... per $c=1$ (σ-1...) sarebbe

cioè essere $\partial_\xi(\partial_\eta u) = 0$, che è evidente : $\partial_\xi(\partial_\eta[\frac{m}{2c}(\xi$

$-\eta) + \varphi^+(\xi) + \varphi^-(\eta)]) = \partial_\xi(-\frac{m}{2c} + \varphi^{-\prime}(\eta)) = 0$! Ok

qui modo è ovvio $\because$ "φ^+" è $(t,x) \xrightarrow{ct+x} x+ct \xrightarrow{\varphi^+} \varphi^+(x+ct)$,

$\Rightarrow$ ma $\partial_t = \dot{\varphi}^+(x+ct)\cdot c$ (col "$\cdot$" $= \partial_\xi$!) ; ma comunque "$\dot{\varphi}$"

è $(t,x) \xrightarrow{ct+x} x+ct \xrightarrow{\dot{\varphi}^+} \dot{\varphi}^+(x+ct)$, dunque che $\partial_t = c\ddot{\varphi}_+(x+ct)$, cioè $\partial_t^2 \varphi^+(x+ct) = \ddot{\varphi}^+(x+ct)c^2$, e allo stesso modo $\partial_x^2 \varphi^+(x+ct) = \ddot{\varphi}^+(x+ct)$, dunque in effetto $c^2 \ddot{\varphi}^+ = c^2 \partial_x^2 \varphi^+ = \partial_t^2 \varphi^+$; è identico per φ^-, mentre mt si riduce sempre a 0. ✓

Dunque basta trovare m, φ^+ e φ^- in modo che $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ e $u_t(0,\cdot) = u_1(\cdot)$; cioè: $\varphi^+(x) + \varphi^-(x) = u_0(x)$ ($x \in [-\pi,\pi]$), mentre $u_t(t,x) = m + c\dot{\varphi}^+(x+ct) - c\dot{\varphi}^-(x-ct) \Rightarrow m + c\dot{\varphi}^+(x) - c\dot{\varphi}^-(x) = u_1(x)$ ($x \in [-\pi,\pi]$), ossia

$$\begin{cases} \varphi^+(x) + \varphi^-(x) = u_0(x) \\ \underbrace{\dot{\varphi}^+(x) - \dot{\varphi}^-(x)}_{(\varphi^+-\varphi^-)^\cdot(x)} = \frac{1}{c}[u_1(x) - m] \end{cases} \quad (x \in [-\pi,\pi]) \quad ; \text{ ora,}$$

$u_1 \in C^1_{per} \Rightarrow u_1 \in C^0$, per cui certamente $\exists\ \tilde{u}_1 :=$ una primitiva di $\frac{1}{c}[u_1 - m]$ ($\in C^2$!), e così $\begin{cases} \varphi^+ + \varphi^- = u_0 \\ \varphi^+ - \varphi^- = \tilde{u}_1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi^+ = \frac{1}{2}(u_0 + \tilde{u}_1) \in C^2_{per} \\ \varphi^- = \frac{1}{2}(u_0 - \tilde{u}_1) \in C^2_{per} \end{cases}$$

purché in realtà $\tilde{u}_1$ possa essere ($u_0 \in C^2_{per}$ e) pure C^2_{per}: basta scegliere m tale che $\int_0^{2\pi} \frac{1}{c}[u_1 - m](x)\,dx \overset{\text{visto!}}{=} 0$,

cioè $m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x)\,dx$ ($= c_0^1$, giustamente!). □

Breve riflessione su OPERATORI AUTOAGGIUNTI

Per le equazioni del calore e delle onde abbiamo cercato (e trovato!) soluzione del tipo $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, b_n(x)$ (VARIABILI SEPARABILI!), dove le $b_n(x)$ sono SCELTE A PRIORI e le $c_n(t)$ sono dunque le incognite da determinare. Ora, che $b_n''(x) = $ multiplo di $b_n(x)$, CIOÈ $b_n(x)$ autovettore relativo a ∂_x^2, ha "scomposto" il problema solo sulle c_n, rendendolo decisamente elementare.

Ma in realtà NON è un caso che le b_n siano tali, e anzi che costituiscano basi ortonormali ... INFATTI risolvere tali equazioni È cercare autovettori di opportuni OPERATORI AUTOAGGIUNTI...

Sia $(X, \langle\,;\,\rangle)$ $\mathbb{C}$-sp. vett. con prodotto hermitiano, e $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ FINITA; $\forall\, T : X \to X$ LINEARE (ossia T "operatore"), $\forall y \in X$, risulta lineare $\omega_y : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \langle Tx; y\rangle \end{array}$, per cui $\exists!\, y' \in X$ tale che, $\forall x \in X$, $\omega_y(x) = \langle x; y'\rangle$, CIOÈ $\langle Tx; y\rangle = \langle x; y'\rangle$; resta dunque definita univocamente $T^* : X \to X$, $y \longmapsto y'$, tale che dunque $\forall x, y \in X$

$$\boxed{\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^*y\rangle}$$

, detta "L'AGGIUNTA" di T. Naturalmente anche T^* è lineare

[$\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$, $\langle Tx; cy\rangle = \bar{c}\langle Tx; y\rangle = \bar{c}\langle x; T^*y\rangle = \langle x; cT^*y\rangle$,
$\Rightarrow$ DEVE essere $T^*(cy) = cT^*y$; analogamente, $\forall x, y_1, y_2 \in X$, $\langle Tx; y_1 + y_2\rangle = \langle Tx; y_1\rangle + \langle Tx; y_2\rangle = \langle x; T^*y_1\rangle + \langle x; T^*y_2\rangle = \langle x; T^*y_1 + T^*y_2\rangle$,
$\Rightarrow$ DEVE essere $T^*(y_1 + y_2) = T^*y_1 + T^*y_2$.] , e nel caso $T = T^*$ diciamo che T è AUTOAGGIUNTO.

(ES.: $\kappa(X,\langle;\rangle)=(\mathbb{C}^M,\langle;\rangle_\kappa)$ e M rappresenta T (nelle basi canoniche), allora T autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $M=\overline{M}^T$ (cioè M è "Hermitiana"): $\forall\, x,y\in\mathbb{C}^M$, $\langle Mx;y\rangle=(Mx)^T\overline{y}=$
$=x^TM^T\overline{y}=x^T(\overline{\overline{M}^Ty})$, mentre $\langle x;My\rangle=x^T(\overline{My})$. ✓)

Com'è noto, il risultato fondamentale è il

TEOREMA SPETTRALE (ipotesi invariate): $T:X\to X$ autoaggiunto $\Rightarrow\exists$ base ortonormale di X costituita da AUTOVETTORI di T, che hanno inoltre autovalori REALI rispetto a T (cioè in tale base T viene rappresentato da $\mathrm{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ con λ_i REALI!).

[$\forall\, x\in X\setminus\{0\}$ tale che $Tx=\lambda x$ $(\lambda\in\mathbb{C})$, è $\langle Tx;x\rangle=\lambda\underbrace{\langle x;x\rangle}_{\text{reale}>0!}$, e d'altra parte $\overline{\langle x;Tx\rangle}\overset{\text{ANTI-SIMM.}}{=}\langle Tx;x\rangle\overset{\text{Autoagg.}}{=}\langle x;Tx\rangle$ è reale. $\square$]

Tutto ciò NON resta affatto invariato a dimensione INFINITA!

Sia comunque $(X,\langle;\rangle)$ come prima, MA A $\dim_{\mathbb{C}}X=\infty$, e siano Y $\mathbb{C}$-sottospazio DENSO in X e $T:Y\to X$ lineare: diciamo che $T^*:Y\to X$ è "l'aggiunta di T" se, $\forall\, x,y\in Y$, $\langle Tx;y\rangle=\langle x;T^*y\rangle$.

(T^*, se esiste, è UNICA ∄ lineare!).

[$U:=T_1^*-T_2^*\Rightarrow\forall\, x,y\in Y$, $\langle Ux;y\rangle=\langle T_1^*x;y\rangle-\langle T_2^*x;y\rangle\overset{(*)}{=}$
$=\langle x;Ty\rangle-\langle x;Ty\rangle=0$, cioè $\forall\, x\in Y$, $Ux\in Y^\perp\overset{\text{cor}}{=}\overline{Y}^\perp\overset{\text{denso}}{=}$
$=X^\perp=\{0\}$, cioè $U=0$ (su Y). $\square$]

((*) $\langle T^*x;y\rangle=\overline{\langle y;T^*x\rangle}(=\overline{\langle Ty;x\rangle}=\langle x;Ty\rangle\;\forall\, x,y\in Y$; una volta che so che T^* lineare, possiamo allora affermare che $(T^*)^*=T$! ()

Grazie a RIESZ (completezza!), T^* esiste (unico) se $(Y,\langle;\rangle)$ è di HILBERT (prodotto scalare dell'intero!), ad esempio se $(X,\langle;\rangle)$ lo è e $Y = X$; ma ciò naturalmente NON è necessario. (Y NON è denso in $C^0([0,\pi])$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$!!)

ES. 1: $X := L^2_{\mathbb{R}}(0,\pi)$, $Y := \{u \in C^3_{\mathbb{R}}([0,\pi]) \mid u(0)=u(\pi)=0\}$

(DENSO IN X: $C^\infty_{\mathbb{R}}([0,\pi])$ lo è in X, e $\{u \in C^\infty_{\mathbb{R}}([0,\pi]) \mid u(0)= u(\pi)=0\}$ lo è in $C^\infty_{\mathbb{R}}([0,\pi])$ ($\|\cdot\|_2$!) "grazie" alle rette

$\sigma_n =$  !) $\Rightarrow$ $T: Y \longrightarrow X$, $u \longmapsto \ddot{u}$ è AUTOAGGIUNTO (lineare!):

("cut-off functions")

$$\forall u,v\in Y,\ \langle Tu;v\rangle_2 = \int_0^\pi \underbrace{\ddot{u}(x)}_{\text{int.}}\underbrace{v(x)}_{\text{der.}}\,dx \overset{\ddot{u}\in C^1!}{=} \overbrace{[\dot{u}(x)v(x)]_0^\pi}^{0\ (v\in Y!)} - \int_0^\pi \dot{u}(x)\dot{v}(x)\,dx,$$

$= \langle u;Tv\rangle_2$ chiaramente "per simmetria". ✓ Inoltre avere autovettori ed autovalori di T EQUIVALE a avere $\lambda, u\neq 0$ tali che $\begin{cases} Tu=\lambda u \\ u\in Y\end{cases}$, cioè (con $u\in C^2$...) $\begin{cases}\ddot{u}=\lambda u\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$; ma $u(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx)$ converge in $C^2_{\mathbb{R}}$ (poiché convergono le serie di termini $|b_n|$, $|n||b_n|$ e $n^2|b_n|$!) $\Rightarrow$ $\ddot{u}(x) = \sum_{n\geq1}(-n^2)b_n\sin(nx)$, $=$

$= \lambda u(x) \underset{(\forall m\geq 1)}{\Longleftrightarrow} \overset{b_n=0 \text{ sempre tranne } b_m, \text{ e}}{\lambda = -m^2}$ ($\Rightarrow$ T è DEFINITO NEGATIVO!), e allora $u(x) = \alpha\sin(mx)$, $\underset{(\forall m\geq1)}{\alpha\in\mathbb{R}}$: nonostante siamo a dimensione infinita, abbiamo ottenuto una base ortogonale di X! ✓

ES. 2: $X := L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$, $Y := C^3_{per}$ (denso in X perché lo è in $(C^0_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_\infty)$ (STONE-WEIERSTRASS), $\Rightarrow \|\cdot\|_2$!) $\Rightarrow$ $T: Y \longrightarrow X$, $u \longmapsto \ddot{u}$ è autoaggiunto: $\forall u,v\in Y$, $\langle Tu;v\rangle_2 =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \ddot{u}(x)v(x)\,dx = \overbrace{[\dot{u}(x)v(x)]_{x=-\pi}^{x=\pi}}^{0\ (\text{periodiche!})} - \int_{-\pi}^{\pi}\dot{u}(x)\dot{v}(x)\,dx = \langle u;Tv\rangle_2.$$

Inoltre, analogamente a prima, se $u(x) = a_0 + \sum_{n\geq1} a_n\cos(nx) + \sum_{n\geq1} b_n\sin(nx)$,

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(-\pi) = u(\pi) \\ \dot{u}(-\pi) = \dot{u}(\pi) \\ (\ddot{u}(-\pi) = \ddot{u}(\pi)) \end{cases} \xRightarrow[\forall n \geq 0,\ \text{qualcosa} = 0 \text{ tranne qualcuno, e}]{(\text{cioè in } C^2_{\pi})} \lambda = -n^2 \quad (T \text{ SEMIDEFINITO NEGATIVO!}),$$

$\Rightarrow$ per $n = 0$ $u(x) \equiv \beta \in \mathbb{R}$, per $n \geq 1$ $u(x) = \alpha \sin(nx) + \beta \cos(nx)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$! ✓

Se INVECE $X := L^2(-\pi,\pi)$ e $Y := C^2([-\pi,\pi])$, allora

$$T : \begin{array}{l} Y \longrightarrow X \\ u \longmapsto \ddot{u} \end{array}$$

NON è autoaggiunto: ad esempio, $u(x) \equiv 1$ e $v(x) = x^2$ (che ha $\dot{v}$ NON periodica!) $\Rightarrow \langle Tu; v \rangle_2 = 0 \neq 4\pi = \langle u; Tv \rangle_2$! E in effetti $\ddot{u} = \lambda u \Leftrightarrow u(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda} t}$ $\forall \lambda \geq 0$, altrimenti u in "seni e coseni" come prima, MA non si ha più l'ortogonalità !!

Insomma, non è ovvio che si potesse fare per un "teorema spettrale e dimensione infinita", e in effetti questo non vale anche in (teorema) casi "semplici".

$\boxed{\text{ES. 3 :}}$ $X = Y := L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in [0,1]$, $0 < m_1 \leq \varphi(x) \leq m_2 < \infty$ (φ e $1/\varphi > 0$ limitate...) ($\not\Rightarrow \varphi \in X = Y$) $\Rightarrow$

$$T : \begin{array}{l} X \longrightarrow X \ (\text{ovvio!}) \\ u \longmapsto \varphi \cdot u \end{array}$$

è lineare e continua, invertibile e con inversa continua, e perfino autoaggiunto (TUTTO EVIDENTE!), MA, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^1(\varphi^{-1}(\{t\})) = 0$ (ad esempio se φ è INIETTIVA) $\Rightarrow$ T ha solo l'autovettore 0.

Sia $\lambda \neq 0$ (reale) e $u \in X$ tale che $Tu = \varphi \cdot u = \lambda u$ q.o. (per $\lambda = 0$, $u = 0$!), diciamo $\varphi(x) u(x) = \lambda u(x)$ $\forall x \in [0,1] \setminus N$, $\mathcal{L}^1(N) = 0$; ora, $\forall x \in S := \{x \in [0,1] \setminus N \mid u(x) \neq 0\}$, $\varphi(x) = \lambda$, cioè $S \subseteq \varphi^{-1}(\{\lambda\})$, $\Rightarrow \mathcal{L}^1(S) = 0$, cioè $u \equiv 0$ q.o. in $[0,1] \setminus N$, cioè in $[0,1]$. $\square$

TRASFORMATA DI FOURIER.

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, sia $\forall \eta \in \mathbb{R}$ $\mathcal{F}(f)(\eta) \doteq \mathcal{F}f(\eta) \doteq$
$\boxed{\hat{f}(\eta) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\eta x}\,dx}$ ($\nexists\ \forall n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = 2\pi c_n(f)$!).

Effettivamente è $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$\hat{0} = 0$; $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$!

[$\forall \eta \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(\eta)| \leq \|f\|_1 < \infty$! $\square$]

~~[LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE]~~

$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \underline{\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})}$ con $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

[$\hat{f}$ è CONTINUA: $\forall \eta \in \mathbb{R}$ e $(\eta_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta$, è $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)e^{-i\eta_n x} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)e^{-i\eta x}$ (continuità!) e, $\forall n \geq 1$, $|f(x)e^{-i\eta_n x}| = |f| \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\overset{\text{LEBESGUE!}}{\Rightarrow}$ $\hat{f}(\eta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \hat{f}(\eta)$. ✓

$\hat{f}$ è INFINITESIMA ALL'INFINITO: nel caso $\boxed{f \in \mathcal{C}^1_c}$ con ($\nexists\ f \in \mathcal{C}^0_c,\ \Rightarrow f, f' \in \mathcal{L}^1$) $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-e,e]$ ($\overset{\text{continuità}}{\nexists}$ $f(-e) = f(e) = 0$!) è infatti $\forall \eta \in \mathbb{R}$ "grande" ($\nexists \neq 0$) $\hat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\eta x}\,dx \overset{f \text{ ha supp. compatto}}{=} \int_{-e}^{e} \underset{\text{cont.}}{f(x)}\underset{\text{int.}}{e^{-i\eta x}}\,dx \overset{\text{p.p.}}{=}$
$= \left[f(x)\dfrac{e^{-i\eta x}}{-i\eta}\right]_{x=-e}^{x=e} + \dfrac{1}{i\eta}\int_{-e}^{e} f'(x)e^{-i\eta x}\,dx \underset{(\frac{1}{i}=-i)}{\Rightarrow} |\hat{f}(\eta)| \leq$
$\leq \dfrac{\|f'\|_1}{|\eta|}$! Ma $\mathcal{C}^1_c$ ($\supseteq \mathcal{C}^\infty_c$) è DENSO in $\mathcal{L}^1$:
$\forall \varepsilon > 0$, $\boxed{f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})} \Rightarrow f = f_1 + f_2$, con $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ tali che $f_2 \in \mathcal{C}^1_c$ e $\|f_1\|_1 \leq \varepsilon$, $\Rightarrow \hat{f} \overset{\text{(ovvio)}}{=} \hat{f_1} + \hat{f_2}$ con effetto $\hat{f_2}(\eta) \xrightarrow[|\eta|\to\infty]{} 0$ e $|\hat{f_1}| \overset{\text{c.v.o.}}{\leq} \|\hat{f_1}\|_\infty \leq \|f_1\|_1 \leq \varepsilon \Rightarrow$
($0 \leq$) $\limsup_{|\eta|\to\infty} |\hat{f}(\eta)| \leq \varepsilon$. $\square$]

$\Rightarrow$ Resta definita $\mathcal{F} : (\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$
$f \longmapsto \mathcal{F}f \doteq \hat{f}$

chiaramente LINEARE e CONTINUA, anzi Lipschitziana con costante di L. 1 $\left[\|\hat f-\hat g\|_\infty \overset{lin.}{=} \|\widehat{f-g}\|_\infty \le \|f-g\|_{1}\ldots\right]$.

$\mathcal{F}$ è chiamata "la trasformata di Fourier su $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$" ("TdF"), mentre $\hat f$ è "la TdF di f".

$\forall f\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\forall h\in\mathbb{R}$ e $\delta\neq 0$, $\tau_h f(x):=f(x-h)$ e $\sigma_\delta f(x):=\frac{1}{|\delta|}f\left(\frac{x}{\delta}\right)$ stanno in $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (con $\|\cdot\|_1=\|f\|_1$).

[PROPRIETÀ BASILARI DELLA TDF]

(1) $\widehat{\tau_h f}(\gamma)=e^{-i\gamma h}\hat f(\gamma)$. (2) $\widehat{e^{ihx}f(x)}=\tau_h\hat f$.

(3) $\widehat{\sigma_\delta f}(\gamma)=\hat f(\delta\gamma)$.

(4) $f\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ con $xf(x)\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\hat f\in C^1_0$ con $\hat f(\gamma)'=\widehat{-ixf(x)}(\gamma)$.

(5) $f\in C^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ con $f,f'\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\boxed{\widehat{f'}(\gamma)=i\gamma\hat f(\gamma)}$

(6) $f,g\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (col $f*g\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$) $\Rightarrow$ $\widehat{f*g}=\hat f\cdot\hat g$.

---

[1] $\widehat{\tau_h f}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\tau_h f(x)}_{=f(x-h)}e^{-i\gamma x}dx \underset{\substack{\uparrow\\ x-h=t\Leftrightarrow x=t+h \text{ e}\\ dx=dt \text{ con stessi estremi } \infty}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\gamma(t+h)}dt$. ✓

[2] $\widehat{e^{ihx}f(x)}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ihx}f(x)e^{-i\gamma x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(\gamma-h)x}dx=\hat f(\gamma-h)$ ✓

[3] $\widehat{\sigma_\delta f}(\gamma)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\sigma_\delta f(x)}_{=\frac{1}{|\delta|}f(\frac{x}{\delta})}e^{-i\gamma x}dx \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{x}{\delta}=t\Leftrightarrow x=\delta t \text{ e}\\ dx=|\delta|dt \text{ con stessi estremi}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i(\delta\gamma)t}dt=\hat f(\delta\gamma)$ ✓

[4] Per ipotesi $\hat f\in C^0_0$ e $\widehat{xf(x)}\in C^0_{(0)}$, dunque basta provare la derivabilità con formula di $\hat f$.

$\boxed{\text{PRIMA DIM.:}}$ $u(\gamma,x):=f(x)e^{-i\gamma x}$ $(:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C})$ nella x è in L^1, e anzi dominata in L^1 "da se'", mentre nella γ è C^1 con $\partial_\gamma u(\gamma,x)=(-ix)f(x)e^{-i\gamma x}$ dominata $|\partial_\gamma u(\gamma,x)|=$
$=|xf(x)|$, dunque per derivazione sotto il segno di $\int$

$$\partial_\eta \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\eta x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-i\eta x}\,dx$$! Peccato che

$u(\eta, x)$ NON sia a valori in $\mathbb{R}$ ...)

$\boxed{\text{SECONDA DIM.:}}$ $$\frac{\hat{f}(\eta+h)-\hat{f}(\eta)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\underbrace{\frac{e^{-i(\eta+h)x} - e^{-i\eta x}}{h}}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\ \partial_\eta(e^{-i\eta x}) = (-ix)e^{-i\eta x}!}\,dx \;;$$

$(= e^{-i\eta x}\cdot e^{-ihx})$

ma $$\left| f(x)\frac{e^{-i(\eta+h)x} - e^{-i\eta x}}{h}\right| = |f(x)|\underbrace{|e^{-i\eta x}|}_{=1}\left|\frac{e^{-ihx}-1}{h\cdot x}\right||x| \le$$

$\le c\,|xf(x)| \in \mathcal{L}^1$ CON $c := \left\| \underbrace{\frac{e^{-it}-1}{t}}_{(\in C^0_0)} \right\|_\infty < \infty$, da cui la tesi per Lebesgue.

$\boxed{\text{TERZA DIM.:}}$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\underset{(\text{Continua!})}{g(\eta)} := \widehat{-ixf(x)}(\eta) \Rightarrow \hat{f}(\eta) - \hat{f}(0) =$

$= \int_0^\eta g(t)\,dt$: infatti $$\int_0^\eta g(t)\,dt = \int_0^\eta \left[\int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-itx}\,dx\right]dt \overset{\text{FUBINI!}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\int_0^\eta e^{-itx}\,dt}_{\left[\frac{e^{-itx}}{\cancel{-ix}}\right]_{t=0}^{t=\eta}}\Big]\cancel{(-ix}f(x))\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[e^{-i\eta x} - e^{-i0x}\right]dx =$$

$= \hat{f}(\eta) - \hat{f}(0) < \infty$ (quindi Fubini "è riflesso"; altrimenti direttamente: $\int_0^\eta \left[\int_{-\infty}^{\infty} |-ixf(x)e^{-itx}|\,dx\right]dt = \int_0^\eta \|xf\|_1\,dt = \|xf\|_1|\eta| < \infty$!).

[5] [LEMMINO: COND. SUFF. PER ESSERE INFINITESIME ALL'INFINITO] $\boxed{f \in C^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \text{ con } f, f' \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0}$ (cioè in realtà $f \in C^1_0$!).

[$\boxdot$ $f \in C^1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \underbrace{\int_0^x f'(t)\,dt}_{(C^1!)}$ $\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) +$
$+ \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt \; \Big\} \begin{matrix}<\infty \\ >-\infty\end{matrix}$ SE $f' \in \mathcal{L}^1$ (analogo per $x \to -\infty$), ossia ha limite finito per $|x| \to \infty$. $\boxdot$ $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow$ tale limite è lo 0 (altrimenti $|f|$ sarebbe definitivamente > costante, fosse $\notin \mathcal{L}^1$!). $\square$]

$$\Rightarrow \widehat{f'}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{I}{f'(x)}\underset{D}{e^{-i\eta x}}\,dx \underset{(f \in C^1)}{=} \cancel{\left[f(x)e^{-i\eta x}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}^{0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\eta)e^{-i\eta x}\,dx$$

$(|f-0| \le |f|)$

[D] $\widehat{f*g}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f*g(x)\, e^{-i\gamma x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\right] e^{-i\gamma x}\,dx \overset{\text{FUBINI!}}{=}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, e^{-i\gamma x}\,dx}_{=\widehat{\tau_t f}(\gamma) = e^{-i\gamma t}\hat{f}(\gamma)}\Big] g(t)\,dt = \hat{f}(\gamma)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-i\gamma t}\,dt}_{\hat{g}(\gamma)} < \infty$ (e allora Fubini "è ribrass"; altrimenti diretto: $\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-t)||g(t)|\,dt}_{|f|*|g|(x)}\Big]dx =$

$= \||f|*|g|\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1 < \infty$!) ! $\square$]

È invece "l'antitrasformata di Fourier su $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$"

$$\mathcal{F}^* : (L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$$

$$g \longmapsto \mathcal{F}^*(g) \doteq \mathcal{F}^* g \doteq \check{g},$$

$$\boxed{\check{g}(x) :\overset{D.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma)\, e^{ix\gamma}\,d\gamma}$$

(e $\check{g}$ è "l'antitrasformata di Fourier di g").

[$\forall x\in\mathbb{R}$, $|\check{g}(x)| \leq \|g\|_1 < \infty$ $\Rightarrow$ effettivamente $\check{g}\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$; è poi continua la infinitesima all'infinito in modo analogo a $\hat{g}$, o meglio perché $\check{g}(x) = \hat{g}(-x)$, e ovviamente anche $\|\check{g}\|_\infty \leq \|g\|_1$! $\square$] Inoltre $\mathcal{F}^*$ è LINEARE e CONTINUA, anzi lipschitziana con costante di L. 1 !

(Notiamo che nuovamente $\check{0} = 0$ e $\check{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma)\,d\gamma$!)

Adesso, ovviamente $C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \not\subseteq L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (usare ad esempio $x^{-\beta}$, $0<\beta\leq 1$, su $[1,+\infty)$!), ma per $f\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ TALE

CHE per $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ($\cap\, \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$) ha senso considerare (3)

$\check{\hat{f}}$: così come $f(x) \overset{\text{AD ES. q.o. (CARLESON)}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$, $c_n(f) =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$, avremmo $f(x) \overset{q.o.}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}(y)}_{\text{"}2\pi c_y(f)\text{"}}\, e^{iyx}\, dy$

$\left(\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iyt}\, dt\right) = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{f}}(x)$, cioè

$\boxed{\check{\hat{f}} \overset{q.o.}{=} 2\pi f}$ (o $\mathcal{F}^*\mathcal{F} f = 2\pi f$, "ossia

$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = 2\pi \cdot id$"), $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

~~[TEOREMA: FORMULA DI INVERSIONE]~~

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (quindi in $\mathcal{C}^0_{0\,(\cap L^1)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$), $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

per ~~q~~.o. $x \in \mathbb{R}$, $\check{\hat{f}}(x) = 2\pi f(x)$

$X := \{f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\}$ è $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$-sottosp. di $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ e

$Y := \{f \in X \mid \check{\hat{f}} \overset{q.o.}{=} 2\pi f\}$ è $\mathbb{R}_{(\mathbb{C})}$-sottosp. di X : la tesi

è $Y = X$ ($\supseteq$). Ora, Y è "CHIUSO per traslazioni e omotetie", cioè $f \in Y \overset{[*]}{\Rightarrow} \forall h \in \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$, $\tau_h f \in Y$ e

$\sigma_\delta f \in Y$; scelta allora $\rho \in Y$, sale $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{$traslazioni ed omotetie di $\rho\} \subseteq Y$ e tale span sembra "grande abbastanza" affinché possa esser denso in X ... Alla fine andremo diversamente.

$[*]$: $\boxed{\check{\tau_h \rho}(x) = e^{ihx}\check{\rho}(x) \text{ e } \check{\sigma_\delta \rho}(x) = \check{\rho}(\delta x)}$ (o direttamente o meglio perché $\check{\tau_h \rho}(x) = \widehat{\tau_h \rho}(-x) \overset{\text{visto!}}{=} e^{ihx}\hat{\rho}(-x) = e^{ihx}\check{\rho}(x)$ e analogamente

$\check{\sigma_\delta \rho}(x) = \widehat{\sigma_\delta \rho}(-x) \overset{\text{visto!}}{=} \hat{\rho}(-\delta x) = \check{\rho}(\delta x)$), inoltre

$\boxed{\widehat{e^{-ihy}\rho(y)} = \tau_h \hat{\rho}}$ $\left(\widehat{e^{-ihy}\rho(y)}(x) = \widehat{e^{-ihy}\rho(y)}(-x) \overset{\text{visto}}{=} \tau_{-h}\hat{\rho}(-x) = \right.$

$= \hat{\rho}(-(x-u)) = \check{\rho}(x-u) = \tau_u \check{\rho}(x)$) , $\Rightarrow$ se $f \in Y$, allora $\widehat{\tau_u f}(\eta)(x) \overset{\text{visto}}{=} \widehat{e^{-iu\eta}\hat{f}(\eta)}(x) = \tau_u \check{\hat{f}}(x) \overset{q.o.}{=} 2\pi\, \tau_u f(x)$,

cioè $\tau_u f \in Y$ (NOTA: $\tau_u f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ e $\widehat{\tau_u f}(\eta) = e^{-iu\eta}\hat{f}(\eta) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$!) ; d'altra parte $\widehat{\sigma_\delta f}(\eta)(x) \overset{\text{visto}}{=} \widehat{\hat{f}(\delta\eta)}(x) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\delta\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{|\delta|}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\frac{x}{\delta}t}\, dt = \frac{1}{|\delta|}\check{\hat{f}}\left(\frac{x}{\delta}\right) \overset{q.o.}{=} \frac{1}{|\delta|} 2\pi f\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

$\delta\eta = t \Leftrightarrow \eta = t/\delta$ e $d\eta = \frac{dt}{|\delta|}$ MA con gli stessi estremi

$= 2\pi\, \sigma_\delta f(x)$, cioè $\sigma_\delta f \in Y$. $\square$])

PASSO CHIAVE: $\forall f, \rho \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $(X \ni f)$, $\rho \in Y \Rightarrow \rho * f \in Y$ (in effetti $\rho * f$ è "combinazione lineare" di traslate di ρ !) .

Infatti anzitutto $\rho * f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e $\widehat{\rho * f} \overset{\text{visto}}{=} \hat{\rho}\,\hat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (poiché $\hat{\rho} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $(\rho \in Y \subseteq X !)$ e $\hat{f} \in C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ è limitata) , ossia $\rho * f \in X$; e questo fatto $\widehat{\widehat{\rho * f}(\eta)}(x) =$

$$= \widehat{\hat{\rho}(\eta)\hat{f}(\eta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(\eta)\hat{f}(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\eta t}\, dt\right]\hat{\rho}(\eta)\, e^{ix\eta}\, d\eta$$

$$\overset{\text{FUBINI!}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\rho}(\eta)\, e^{i(x-t)\eta}\, d\eta}_{= \widehat{\hat{\rho}(\eta)}(x-t) \,=\, \check{\hat{\rho}}(x-t)}\right] f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \check{\hat{\rho}}(x-t) f(t)\, dt \overset{\rho \in Y!}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\, \rho(x-t) f(t)\, dt = 2\pi\, \rho * f(x)$$ ($< \infty$ q.o. , e allora applico Fubini "a ritroso" per tali x ; altrimenti semplicemente $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt\right] |\hat{\rho}(\eta)|\, d\eta = \|f\|_1 \|\hat{\rho}\|_1 < \infty$, e ciò per ogni $x \in \mathbb{R}$!) .

$(\rho \in Y \Rightarrow \rho_\delta := \sigma_\delta \rho \in Y)$

$\Rightarrow$ $f * \rho_\delta \in Y$, cioè $\widehat{\widehat{f * \rho_\delta}} \overset{q.o.}{=} 2\pi\, f * \rho_\delta$, ossia $\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f * \rho_\delta) \overset{q.o.}{=} 2\pi\, (f * \rho_\delta)$;

ora, $\forall \rho$ (cioè ρ_δ) $\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{L^1} c \cdot f$, $c := \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\, dt$;

e allora $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt = 1$ $(\exists \rho \neq 0 \dots ★)$, $f*\rho_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{L^1} f \overset{\text{continuità}}{\Rightarrow} \mathcal{F}(f*\rho_\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{L^\infty} \mathcal{F}f$;

se analogamente tale convergenza fosse anche in L^1, allora altrettanto $\mathcal{F}^*\mathcal{F}(f*\rho_\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{L^\infty} \mathcal{F}^*\mathcal{F}f$, da cui $\check{\hat{f}} \overset{q.o.}{=} 2\pi f$ ($L^\infty \supset L^1$ in ogni caso!!) (in effetti $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$); ma in effetti $\mathcal{F}(f*\rho_\delta) = \hat{f}\cdot\hat{\rho}_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{L^1} \hat{f}$ perché $\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)||\hat{\rho}_\delta(\omega)-1|\,d\omega \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ per Lebesgue: $\hat{\rho}_\delta(\omega) \overset{\text{visto!}}{=} \hat{\rho}(\delta\omega) \xrightarrow[\delta\to 0]{(\hat{\rho}\in C^0_0)} \hat{\rho}(0) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)\,dt = 1$, poi vale la dominazione $|\hat{f}||\hat{\rho}_\delta - 1| \overset{\text{dis.tr.}}{\le} |\hat{f}|(\underbrace{\|\hat{\rho}_\delta\|_\infty}_{<\infty} + 1) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ perché $f \in X$! □

[INIETTIVITÀ DELLA TDF]

$\Rightarrow$ $\forall f_1, f_2 \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ($\cancel{C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})}$) : $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ (q.o.) $\Leftrightarrow$ $f_1 = f_2$ q.o.

[$f := f_1 - f_2 \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ma $\hat{f} = \widehat{f_1 - f_2} = \hat{f}_1 - \hat{f}_2 = 0$ $(\in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}))$ $\Rightarrow$ $2\pi f \overset{q.o.}{=} \check{\hat{f}} = \check{0} = 0$, cioè $f_1 = f_2$ q.o. □]

(★: $\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \in Y$ (è reale, PARI e con $\hat{\rho}(\omega) = e^{-\omega^2/2}$!) e ha $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx = 1$!)

[OSS: $\mathcal{F}$ NON può essere isomorfismo $L^1 \to L^1$, dato che $\mathcal{F}(L^1) \subseteq C^0_0 \underset{\neq}{\subseteq} L^1$, però è isomorfismo $X := \{f \in L^1 \cap C^0_0 \mid \hat{f} \in L^1\} \to X$ perché ha inversa $\mathcal{F}^*/2\pi$: $f \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \hat{f} \overset{\mathcal{F}^*/2\pi}{\mapsto} \frac{1}{2\pi}\check{\hat{f}} \overset{\text{inv.}}{=} f$!]
(↑ però $f \in X$ è un po' troppo regolare...)

Osserviamo che $\langle;\rangle := \langle;\rangle_2$ è ben definito e soddisfa gli assiomi di prodotto scalare (hermitiano) anche per o $h \in L^1$ e $g \in L^\infty$, o $h \in L^\infty$ e $g \in L^1$ $(\mathbb{R}\to\mathbb{C})$: $\langle h;g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\overline{g(x)}\,dx$ [PALESE!].

[TDF e $\langle;\rangle$]

$\forall f, g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\langle \hat{f}; g\rangle = \langle f; \check{g}\rangle$.

($\Rightarrow$ COME SE $\mathcal{F}^*$ FOSSE AGGIUNTA DI $\mathcal{F}$...!)

$\Big[\langle \hat{f} ; g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\overline{g(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx\Big]\overline{g(y)}\,dy \overset{\text{FUBINI!}}{=}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)\,e^{-iyx}}}_{=\overline{g(y)e^{iyx}}} dy\Big] f(x)dx \underset{(\overline{\int\cdots} = \overline{(\int\cdots)})}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\check{g}(x)}\,f(x)dx = \langle f ; \check{g} \rangle$ (Fubini

è lecito perché sono finiti entrambi i (moduli) integrali e anche per verifica diretta: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\underbrace{|e^{-iyx}|}_{=1}|\overline{g(y)}|\,dx\,dy = \|f\|_1\underbrace{\|\bar{g}\|_1}_{\underset{|\bar{g}|=|g|}{=}\|g\|_1 !} < \infty$!). $\square\Big]$

$\Rightarrow \forall f,g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\hat{g} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ($\Rightarrow g \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{C}^0_0$, (per inversione: $2\pi g \overset{q.o.}{=} \check{\hat{g}}$)) $\Rightarrow \langle \underset{\mathcal{L}^\infty}{\hat{f}} ; \underset{\mathcal{L}^1}{\hat{g}} \rangle = 2\pi \langle \underset{\mathcal{L}^1}{f} ; \underset{\mathcal{L}^\infty}{g} \rangle$

$\Big[\langle \hat{f} ; \underset{\in \mathcal{L}^1 !}{\hat{g}} \rangle \overset{\text{LEMMA SOPRA!}}{=} \langle f ; \check{\hat{g}} \rangle \overset{\text{INV.}}{=} 2\pi \langle f ; g \rangle$. $\square\Big]$

$\Rightarrow \forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $(\cap\, \mathcal{C}^0_0)$ ($\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{C}^0_0$!) $\Rightarrow \|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2 < \infty$,

per cui entrambe $f, \hat{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $(\cap\, \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{C}^0_0)$.

(⚠ : $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$! Esempio : $1/2 < p \leq 1 \Rightarrow (x)^{-p} I_{(0,+\infty)} \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}^1$.)

~~(IDENTITÀ DI PARSEVAL)~~

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$ ($\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $(\cap\, \mathcal{C}^0_0)$!) .
(cioè $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$)

$\Big[f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ e $\rho(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \in Y := \{g \in \mathcal{L}^1 \mid \hat{g} \in \mathcal{L}^1$ e $2\pi g \overset{q.o.}{=} \check{\hat{g}}\}$ $\Rightarrow$ (come nella dim. dell'inversione) ($\Rightarrow \rho_\delta := \sigma_\delta \rho \in Y$)

$g := f * \rho_\delta \in \underset{(\subseteq \mathcal{L}^1)}{Y}$, $\Rightarrow \hat{g} = \widehat{f * \rho_\delta} \in \mathcal{L}^1$: come sopra è allora

$\langle \hat{f} ; \underset{\in \mathcal{L}^1}{\boxed{\widehat{f * \rho_\delta}}} \rangle = 2\pi \langle f ; f * \rho_\delta \rangle$; ora, non solo $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(x)dx =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$, ma $\rho_\delta \in \mathcal{L}^2 \overset{f \in \mathcal{L}^2}{\Rightarrow} f * \rho_\delta \in \mathcal{L}^\infty$, e MEGLIO

$f \in \mathcal{L}^2$ (e $\rho_\delta \in \mathcal{L}^1$) $\Rightarrow \boxed{f * \rho_\delta \in \mathcal{L}^2}$ e INOLTRE ($2 < \infty$!)

$f * \rho_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2} f$, $\overset{\text{continuità } \langle ; \rangle_2}{\Rightarrow}$ $2\pi \langle f ; f*\rho_\delta \rangle \xrightarrow[\delta\to 0]{(C)} 2\pi \langle f ; f \rangle = 2\pi \|f\|_2^2$! (5)

D'altra parte infine $\widehat{f*\rho_\delta}(y) = \hat f(y)\, \hat\rho_\delta(y) = \hat f(y)\, \hat\rho(\delta y) \underset{\uparrow}{=}$ $(\hat\rho(y) = e^{-\frac{y^2}{2}})$

$= \hat f(y) \underbrace{e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}}}_{\text{reale!}} \Rightarrow \langle \hat f ; \widehat{f*\rho_\delta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(y)\, \overline{\widehat{f*\rho_\delta}(y)}\, dy =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat f(y)|^2 e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}}\, dy \xrightarrow[\delta\to 0]{} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat f(y)|^2 \left(= \|\hat f\|_2^2 \right)$ PER CONVERGENZA

MONOTÒNA : $e^{-\frac{\delta^2 y^2}{2}} \underset{\delta \downarrow 0}{\uparrow} 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$! $\square$]

(Oss. : ~~(I)~~ a posteriori $|\hat f|^2 \in L^1$, ma all'inizio è da dimostrare,

dunque non potremmo certamente usare la CONVERGENZA

DOMINATA ! ~~(II)~~ Sarebbe andata bene una qualsiasi $\rho \in Y$ CON

$\rho \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$: infatti $\hat\rho(\delta y) \xrightarrow[\delta\to 0]{(1)} \underset{(\text{continuità!})}{\hat\rho(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$, e
REALE E PARI ($\not\exists \rho \neq 0$)
($\nexists \rho$ tale!)

ciò CON $\hat\rho(\delta y) \leq |\hat\rho(\delta y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{-i\delta y x}\, dx \right| \overset{(\rho\geq 0)}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$

$\forall \delta > 0$ e $\forall y \in \mathbb{R}$ (quindi conclude scegliendo $\underset{(>0, \downarrow 0)}{(\delta_n)_{n\geq 1}}$ in modo che

la convergenza sia MONOTÒNA (crescente) , osservando che ovviamente

si mantiene $f * \rho_{\delta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} f$!) . ✓)

Allora $X := L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ è $\mathbb{C}$-sottospazio di $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (e di L^1!),

quindi non solo si usa al posto $\mathcal{F}$ (che è $\mathcal{F}_{|X}$) , ma

anche $\underset{(\text{PARSEVAL!})}{\mathcal{F}} : X \to L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ED È $\sqrt{2\pi}$ - ISOMETRIA ~~E~~ è

$\sqrt{2\pi}$ - dilatazione e INIETTIVA : $\|\hat f - \hat g\|_2 \overset{\text{LIN.}}{=} \|\widehat{f-g}\|_2 \underset{(\leq)}{\overset{\text{PARSEVAL}}{=}} \sqrt{2\pi}\, \|f-g\|_2$, e poi

$\hat f = 0 \Rightarrow 0 = \|\hat f\|_2 \overset{\text{PARSEVAL}}{=} \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2 \Leftrightarrow f = 0$ (Alternativamente $f \in L^1$ CON

$\hat f = 0 \in L^1 \overset{\text{INV.}}{\Rightarrow} 2\pi f = \check{\hat f} = \check 0 = 0$!)) . Allora

{ $X = L^1 \cap L^2$ È DENSO IN L^2 (oltre che in L^1!) }

[$\checkmark$ perché $C_c^\infty \subseteq \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ $\underset{(\subsetneq \mathcal{L}^2)}{}$ e vi è denso, diciamo in $\|\cdot\|_2$, o perché, $\forall f \in \mathcal{L}^2$, $(f_n := f I_{[-n,n]})_{n>0}$ è in $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ ($f \in \mathcal{L}^2([-n,n]) \Rightarrow$ $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1([-n,n])$!) tale che $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}^2} f$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f - \underbrace{f_n}_{f I_{[-n,n]}}|^2 dx =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \underbrace{|1 - I_{[-n,n]}|^2}_{\underset{n\to+\infty}{\to} 1-1=0 \ \forall x\in\mathbb{R}} dx$ $\overset{(\text{D})}{}$, e domino con $|f|^2 \in \mathcal{L}^1$! $\checkmark$] :

allora, $\forall f \in \mathcal{L}^2$, presa $(f_m)_{m\geq 1}$ in $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$ tale che $f_m \xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{L}^2} f$ (come effetto $f_m := f I_{[-m,m]}$!) $\overset{\text{completezza?}}{\Rightarrow}$ $(f_m)_{m\geq 1}$ di Cauchy in $\mathcal{L}^2$ $\overset{\sqrt{2\pi}\text{-isometria!}}{\Leftrightarrow}$ $\underset{(\in\mathcal{L}^2)}{(\hat{f}_m)_{m\geq 1}}$ di Cauchy in $\mathcal{L}^2$ $\overset{\text{COMPLETEZZA!}}{\Leftrightarrow}$ $(\hat{f}_m)_{m\geq 1}$ CONVERGENTE IN $\mathcal{L}^2$ [$\Leftarrow$ $\forall m' > m \geq 1$, $\|\hat{f}_{m'} - \hat{f}_m\|_2 \overset{\text{LIN.}}{=} \|\widehat{f_{m'} - f_m}\|_2 \overset{\text{PARSEVAL}}{=} \sqrt{2\pi}\, \|f_{m'} - f_m\|_2$!],

per cui possiamo definire $\underset{(7.0)}{}$ $\boxed{\underset{(\mathcal{F}f)}{\hat{f}} \overset{\text{d.}}{:=} \lim_{m\to+\infty}^{\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R})} \hat{f}_m}$ ($\in \mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R})$!),

CIOÈ "LA TDF IN $\mathcal{L}^2_\sigma(\mathbb{R})$", che resta ben definita, lineare e continua, ANZI $\sqrt{2\pi}$-ISOMETRIA, e che ovviamente estende la precedente definizione per quei $f \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1$.

[Buona definizione : $(f_m)_{m\geq 1}, (g_m)_{m\geq 1}$ (in $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$) $\xrightarrow[m\to+\infty]{\mathcal{L}^2} f \Rightarrow (\hat{f}_m)_{m\geq 1}$, $(\hat{g}_m)_{m\geq 1}$ (in $\mathcal{L}^2$) hanno lo stesso limite in $\mathcal{L}^2$ (f !) :
$\|\hat{f}_m - \hat{g}_m\|_2 \overset{\text{LIN.}}{=} \|\widehat{f_m - g_m}\|_2 \overset{\text{P.}}{=} \sqrt{2\pi}\, \|f_m - g_m\|_2 \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ ($\|f_m \overset{-f+f}{-} g_m\|_2 \overset{\text{DIS.TR.}}{\leq} \|f_m - f\|_2 + \|g_m - f\|_2$!) $\Rightarrow$ $\lim_m^{\mathcal{L}^2} \hat{f}_m - \lim_m^{\mathcal{L}^2} \hat{g}_m = \lim_m^{\mathcal{L}^2} (\hat{f}_m - \hat{g}_m) = 0$ (se per assurdo $\hat{f}_m - \hat{g}_m \xrightarrow[m]{\mathcal{L}^2} h \neq 0$, allora $\|\hat{f}_m - \hat{g}_m\|_2 \xrightarrow[m]{} \|h\|_2 \neq 0$!) $\checkmark$
Linearità : $\left.\begin{array}{l} f_m \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f \\ g_m \xrightarrow{\mathcal{L}^2} g \end{array}\right.$ $\underset{(\in \mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^2)}{}$ $\Rightarrow \forall a,b \in \mathbb{C}$, $a f_m + b g_m \xrightarrow{\mathcal{L}^2} af + bg$ ($\|af + bg -$ $-(af_m + bg_m)\|_2 \leq |a|\,\|f - f_m\|_2 + |b|\,\|g - g_m\|_2$!) e allora $\widehat{af+bg} \overset{\text{d.}}{=}$
$\overset{\text{d.}}{=} \lim^{\mathcal{L}^2} \underbrace{\widehat{af_m + bg_m}}_{= a\hat{f}_m + b\hat{g}_m} \overset{(=)}{} a \lim^{\mathcal{L}^2} \hat{f}_m + b \lim^{\mathcal{L}^2} \hat{g}_m \overset{\text{d.}}{=} a\hat{f} + b\hat{g}$. $\checkmark$

La continuità è per definizione stessa ($\hat f := \lim^{L^2} \hat f_n \overset{\text{a.}}{=} \lim^{L^2} \hat f_n$)! (6)

Piuttosto è $\sqrt{2\pi}$-ISOMETRIA: $\|\hat f\|_2 = \|\lim^{L^2} \hat f_n\|_2 \overset{\text{CONT.}}{=} \lim \underbrace{\|\hat f_n\|_2}_{\sqrt{2\pi}\|f_n\|_2} = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$ ($f_n \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow \|f_n\|_2 \to \|f\|_2$!) . ✓

Infine l'estensione è coerente: $\forall f\in L^2\cap L^1$, $f_n := f$ $\forall n\ge 1$! □]

Dunque vale Parseval $\forall f\in L^2$, e CIOÈ (⇒) "più in generale"

$$\forall f,g \in L^2_{\mathbb C}(\mathbb R),\quad \langle \hat f;\hat g\rangle = 2\pi\langle f;g\rangle .$$

[Se $(f_n)_{n\ge1}$, $(g_m)_{m\ge1}$ in $L^1\cap L^2$ sono tali che $f_n \xrightarrow[n]{L^2} f$, $g_m \xrightarrow{L^2} g$, allora $\langle \hat f;\hat g\rangle = \langle \lim_n^{L^2}\hat f_n ; \lim_m^{L^2}\hat g_m\rangle \overset{\text{CONT.}}{=} \lim_{n,m}^{L^2} \underbrace{\langle \hat f_n;\hat g_m\rangle}_{2\pi\langle f_n;g_m\rangle} =$

$\overset{\text{CONT.}}{=} 2\pi\langle f;g\rangle$, essendo che = vale $\forall f,g\in L^1\cap L^2$ PER RESTITUZIONE: $\langle \hat f;\hat g\rangle = \frac14\left[\|\hat f+\hat g\|_2^2 - \|\hat f-\hat g\|_2^2 + i\left(\|\hat f+i\hat g\|_2^2 - \|\hat f-i\hat g\|_2^2\right)\right] = 2\pi\langle f;g\rangle$ per Parseval, perché ad esempio $\|\hat f+i\hat g\|_2^2 = \|\widehat{f+ig}\|_2^2 \overset{P.}{=} 2\pi\|f+ig\|_2^2$. □]

~~[CALCOLO DI $\hat f$ NELLA PRATICA]~~ ($f\in L^2\setminus L^1$)

$\forall f\in L^2_{\mathbb C}(\mathbb R)$, $\exists$ (finito) $L(\omega) := \lim_{\Lambda\to+\infty}\int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$ per q.o. $\omega\in\mathbb R$ $\Rightarrow$ $L(\omega) \overset{\text{q.o.}}{=} \hat f(\omega)$.

(finito: $f\in L^2(-\Lambda,\Lambda)\Rightarrow f\in L^1(-\Lambda,\Lambda)$!)

[come quello $f\in L^1_{\mathbb C}(\mathbb R)$!]

[$f\in L^2 \Rightarrow (f_\Lambda := f I_{(-\Lambda,\Lambda)})_{\Lambda>0}$ è in $L^1\cap L^2$ tale che $f_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\to+\infty]{L^2} f$, $\overset{\text{DEF.!}}{\Rightarrow}$ $\hat f_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\to+\infty]{L^2}\hat f$, quindi in misura L^1 e quindi SOTTO Q.O., cioè esiste $(\Lambda_k)_{k\ge1}\uparrow+\infty$ tale che $\hat f_{\Lambda_k}\xrightarrow[k\to+\infty]{\text{q.o.}}\hat f$; ma $\underset{(\in L^1)}{\hat f_{\Lambda_k}}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Lambda_k}(x)e^{-i\omega x}\,dx =$

$= \int_{-\Lambda_k}^{\Lambda_k} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat f(\omega)$ per q.o. $\omega\in\mathbb R$ (cioè $\Lambda_k\to+\infty$), UNITO ALLA IPOTESI CHE ESISTA $L(\omega) := \lim_{\Lambda\to+\infty}\dots$ per q.o. $\omega\in\mathbb R$, implica che per tali ω ($\exists L$, e c'è CONVERGENZA DI $\hat f_{\Lambda_k}$) $\exists \lim_{k\to+\infty}\int_{-\Lambda_k}^{\Lambda_k} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \overset{\text{ed è}}{=} \hat f(\omega)$

ED È A SUA VOLTA $L(\gamma)$ per forza ($L_\Lambda(\gamma) \xrightarrow[\Lambda\to+\infty]{} I \Rightarrow L_{\Lambda_k}(\gamma) \xrightarrow[k\to+\infty]{} I$ per ogni sottosuccessione $(\Lambda_k)_{k\geq 1}$!). $\square$]

(NOTA: in realtà, $\forall f \in L^2$, ESISTE SEMPRE (finito) $L(\gamma)$ per q.o. γ, $\overset{q.o.}{=} \hat{f}(\gamma)$, perché $\hat{f}_\Lambda \xrightarrow[\Lambda\to+\infty]{q.o.} \hat{f}$.

[Infatti $\hat{f}_\Lambda(\gamma) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(x) e^{-i\gamma x} dx \xrightarrow[\Lambda\to+\infty]{q.o.} \hat{f}(\gamma)$ (ben definito e $<\infty$!). $\square$]

In conclusione, $\boxed{\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}),\ \hat{f}(\gamma) \overset{q.o.}{=} \lim_{\Lambda\to+\infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(x) e^{-i\gamma x} dx}$!)

(per $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, e senza il "quasi", ciò è ovvio!)

$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\hat{f}, \hat{g} \in L^2 \overset{\text{SCHWARZ-HÖLDER}}{\Rightarrow} \hat{f}\cdot\hat{g} \in L^1$, però...

... $f * g \in L^\infty$, e allora CHI È $\widehat{f*g}$?!?! Altre proprietà basilari della TDF valgono invece ora.

[PROPRIETÀ BASILARI DELLA TDF IN L^2]

(1) $\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\forall h \in \mathbb{R}$ e $\delta \neq 0$, $\widehat{\tau_h f}(\gamma) = e^{-ih\gamma} \hat{f}(\gamma)$ e $\widehat{\sigma_\delta f}(\gamma) = \hat{f}(\delta\gamma)$.

(2) $\forall f \in C^1$, $\underset{(\Rightarrow \in L^2)}{f \in L^1}$ e $f' \in L^2 \Rightarrow \widehat{f'}(\gamma) \underset{(q.o.)}{=} i\gamma \hat{f}(\gamma)$. $(\in L^2)$

[(1)] $(f_n)_{n\geq 1}$ in $L^1 \cap L^2$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f \underset{(\text{isom.})}{\overset{\text{CONT. } \tau_h}{\Rightarrow}} \tau_h f_n \xrightarrow{L^2} \tau_h f \overset{\text{DEF.}}{\Rightarrow}$

$\widehat{\tau_h f}(\gamma) = \lim^{L^2} \underbrace{\widehat{\tau_h f_n}(\gamma)}_{= e^{-ih\gamma}\hat{f}_n(\gamma)} = e^{-ih\gamma} \lim^{L^2} \hat{f}_n(\gamma) = e^{-ih\gamma} \hat{f}(\gamma)$ ✓

analogamente $\sigma_\delta f_n \xrightarrow{L^2} \sigma_\delta f \Rightarrow \widehat{\sigma_\delta f}(\gamma) = \lim^{L^2} \underbrace{\widehat{\sigma_\delta f_n}(\gamma)}_{= \hat{f}_n(\delta\gamma)} \overset{*}{=} \hat{f}(\delta\gamma)$ ✓

(*: si vede allo stesso modo, e cioè ad esempio $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f} \Rightarrow \hat{f}_n(\delta\cdot) \to \hat{f}(\delta\cdot)$ perché $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n(\delta\gamma) - \hat{f}(\delta\gamma)|^2 d\gamma \underset{\substack{\delta\gamma = x \Leftrightarrow \gamma = \frac{x}{\delta}, \\ \Rightarrow d\gamma = \frac{dx}{|\delta|} \text{ CON SEGNI ESTREMI}}}{=} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n(x) - \hat{f}(x)|^2 dx\right] \frac{1}{|\delta|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!)

[(2)] $\boxed{\text{PRIMA DIM.:}}$ $\forall \Lambda > 0$, $\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \underset{i}{f'(x)} \underset{D}{e^{-i\gamma x}} dx \overset{f\in C^1}{=} \left[f(x) e^{-i\gamma x}\right]_{x=-\Lambda}^{x=\Lambda} +$

$(f' \in L^2 \Rightarrow f' \in L^1([-\Lambda,\Lambda]))$

$+ (i\nu) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} f(x) e^{-i\nu x} dx$; ora, $f \in L^1$ e $f' \in L^2$ $(o\ f \in L^2)$ $\Rightarrow$ esistono q.o. i $\lim_{\Lambda\to+\infty}$ di entrambi i membri dell'equazione e precisamente è, q.o.,

$$\underbrace{\hat{f'}(\nu)}_{\text{ESISTE q.o.!}} = f(x)e^{-i\nu x}\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + (i\nu)\underbrace{\hat{f}(\nu)}_{\text{ESISTE SEMPRE!}}$$; ora in effetti

$$\boxed{f \in L^1 \cup L^2 \text{ CON } f' \in L^2 \Rightarrow f \in \mathcal{C}_0^{(0)}}$$, ma NON è facile...

PERÒ, esistendo certamente (almeno q.o.) il $\lim_{\Lambda\to+\infty} f(x)e^{-i\nu x}\Big]_{x=-\Lambda}^{x=\Lambda}$). basta trovare $(\Lambda_k)_{k\geq 1} \uparrow \infty$ tale che $f(\pm\Lambda_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (mentre, ovviamente, gli altri due limiti per $k\to+\infty$ coincidono con quelli per $\Lambda\to+\infty$!), ⇒ tutto il lim è 0!) e ciò è in effetti SEMPRE POSSIBILE PER $f \in L^1(\mathbb{R})$ ($o\ f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$) ! (NON CONTINUA!)

$\boxed{\text{SECONDA DIM.:}}$ $\left(\rho(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{C}^1\right)$ $(\in L^1)$ $f_\delta := \underset{\in L^1}{f} * \underset{\in L^1 \text{ con } \rho'_\delta \in L^1 \cap L^\infty}{\rho_\delta} \in L^1$, $\cap L^\infty$ (e unif. C°) perché $\rho_\delta \in L^\infty$, così come ρ'_δ $\Rightarrow f'_\delta = f * \rho'_\delta$ $(\in \mathcal{C}^1)$, $\in L^1 \cap L^\infty$ $\Rightarrow$

$$\hat{f'_\delta}(\nu) = i\nu \hat{f_\delta}(\nu) = i\nu \hat{f}(\nu)\hat{\rho_\delta}(\nu) = i\nu\hat{f}(\nu)\hat{\rho}(\delta\nu) \xrightarrow[\delta\to 0]{} i\nu\hat{f}(\nu),$$ (continuità)

mentre $f \in \mathcal{C}^1$, $f' \in L^2$ e comunque $f * \rho_\delta$ (unif.) CONTINUA $\Rightarrow$ (VEDI DIM. RISPETTIVA!)
$f'_\delta = \underset{L^2}{f'} * \underset{L^1 (\cap L^2)}{\rho_\delta}, \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2} f'$ $\overset{\text{OSS.}}{\Rightarrow}$ $\hat{f'_\delta} \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2} \hat{f'}$, e quindi sotto q.o.,

diciamo passando a $(\delta_k)_{k\geq 1} \uparrow \infty$: $\underbrace{\hat{f'_{\delta_k}}(\nu)}_{} = i\nu\hat{f}(\nu)\hat{\rho}(\delta_k\nu) \xrightarrow[k\to\infty]{} i\nu\hat{f}(\nu)$
$\xrightarrow[k\to+\infty]{\text{q.o.}} \hat{f'}(\nu)$)

$\Rightarrow$ per gli zoth che devono convergere a $\hat{f'_{\delta_k}}$ c'è $\hat{f'}(\nu) = i\nu\hat{f}(\nu)$. □

$$\boxed{\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1, f \in L^1, f' \in L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^1 \text{ (e quindi non solo è } 2\pi f = \check{\hat{f}}\text{, ma anche } f, \hat{f} \in L^2 (\cap L^1 \cap \mathcal{C}_0^0)!).}$$

[$f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^0_{(0)}$ (⇒ MISURABILE!) e, effettivamente $i\nu\hat{f}(\nu) = \hat{f'}(\nu) \in L^2$, $\Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty} |\hat{f}(\eta)|\,d\eta \underset{(|i|=1,\ \eta\neq 0)}{=} \int_1^{+\infty} |i\eta \hat{f}(\eta)| \frac{1}{\eta}\,d\eta \overset{\text{SCHWARZ-HÖLDER!}}{\leq} \underbrace{\left\{\int_1^{+\infty} |i\eta \hat{f}(\eta)|^2 d\eta\right\}^{1/2}}_{= |\widehat{f'}|^2 \in L^1!} \underbrace{\left\{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} d\eta\right\}^{1/2}}_{<\infty!}$$

$<\infty$, e analogamente $\int_{-\infty}^{-1} |\hat{f}(\eta)|\,d\eta = \int_{-\infty}^{-1} |i\eta \hat{f}(\eta)| \frac{1}{|\eta|}\,d\eta < \infty$,

mentre poi su $[-1,1]$ uso la continuità di $|\hat{f}|$! $\square$]

$$\boxed{\text{~~[DISUGUAGLIANZA DI HEISENBERG]~~} \quad \forall u \in L^2_C(\mathbb{R}),\quad \|xu(x)\|_2 \underbrace{\|\eta \hat{u}(\eta)\|_2}_{(\text{anche } +\infty!)} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2 \quad (>\|u\|_2^2).}$$

(Il SIGNIFICATO è che NON è possibile "CONCENTRARE" sia u sia $\hat{u}$!)

[DIM. PER $u \in C^1_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $(\subset L^2)$: intanto allora $u \in C^1$ con $u, u' \in L^1$ $(\cap L^2)$ $\Rightarrow$ $(\Rightarrow xu(x) \in L^2 : \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |u(x)|^2 dx = \int_{-M}^{M} x^2 |u(x)|^2 dx \leq M^2 \|u\|_2^2 < \infty!)$

$\widehat{u'}(\eta) = i\eta \hat{u}(\eta)$ $(\in L^2!)$ $\Rightarrow$ $|\eta \hat{u}(\eta)|^2 \underset{(|i|=1!)}{=} |i\eta \hat{u}(\eta)|^2 \overset{(1)}{=} |\widehat{u'}(\eta)|^2$ (PER USARE PARSEVAL...) ; poi

{ $u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{Re}(u\bar{\dot{u}}) = \left(\frac{|u|^2}{2}\right)'$ $^{(2)}$ (USERÒ SCHWARZ...) [$u = u_1 + iu_2 \Rightarrow \dot{u} = \dot{u}_1 + i\dot{u}_2 \Rightarrow \bar{\dot{u}} = \dot{u}_1 - i\dot{u}_2$ $(= \dot{\bar{u}}) \Rightarrow \mathrm{Re}(u\bar{\dot{u}}) = \mathrm{Re}((u_1+iu_2)\cdot(\dot{u}_1 - i\dot{u}_2)) = u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 = \frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2)' = \left(\frac{|u|^2}{2}\right)'$. $\square$] ,

e allora $\|xu(x)\|_2 \|\eta \hat{u}(\eta)\|_2 \overset{(1)}{=} \|xu(x)\|_2 \|\hat{\dot{u}}\|_2 \overset{\text{PARSEVAL!}}{=} \sqrt{2\pi} \|xu\|_2 \|\dot{u}\|_2$

$\overset{\text{SCHWARZ-HÖLDER!}}{\geq} \sqrt{2\pi}\, |\langle -xu(x); \dot{u}\rangle_2| \underset{(\sqrt{a^2+b^2} \geq |a| \geq a)}{\geq} \sqrt{2\pi}\, \mathrm{Re}(\underbrace{\langle -xu(x); \dot{u}\rangle_2}_{= \int_{-\infty}^{\infty} (-x) u(x) \bar{\dot{u}}(x)\,dx}) \overset{(\mathrm{Re}(\int\ldots) = \int \mathrm{Re}(\ldots)!)}{=}$ (INTEGRANDO PER PARTI..., $\in\mathbb{R}$!)

$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-x)\,\mathrm{Re}(u(x)\bar{\dot{u}}(x))\,dx \overset{(2)}{=} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-x)\left(\frac{|u|^2}{2}\right)' dx = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\text{D}}{x}\,(\underset{\text{I}}{|u|^2})'\,dx =$

$\overset{(u \in C^1_c!)}{=} -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \underbrace{[x|u|^2]_{x\to-\infty}^{x=+\infty}}_{0\ (u \in C^1_c!)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx}_{= \|u\|_2^2} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2$ (e quindi la dis. è vera anche col "$-$"!) $\square$]

{ ($\Rightarrow$) In HEISENBERG vale l'"=" $\Leftrightarrow$ $u(x) = \beta e^{-\alpha \frac{x^2}{2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{C}$. }

[Ciò deriva dalla stessa dimostrazione della disuguaglianza, "facendo finta" che tale valga $\forall u \in \underset{(\sqrt{a^2+b^2}\geq|a|\geq a)}{L^2}$: infatti i soli $\geq$ sono i due

$\|xu\|_2 \|\dot{u}\|_2 \underset{(1)}{\geq} |\langle -xu ; \dot{u}\rangle_2| \underset{(2)}{\geq} Re(\langle -xu ; \dot{u}\rangle_2)$; ma "$\underset{(1)}{\geq}$" è un "$\overset{(NOTO)}{=}$" $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\dot{u} = -\alpha x u$, mentre "$\underset{(2)}{\geq}$" è un "$\overset{(OVVIO)}{=}$" $\Leftrightarrow$ $\langle -xu ; \dot{u}\rangle_2 \in \mathbb{R}_+$; ora effettivamente $\langle -xu ; \dot{u}\rangle_2 = \langle -xu ; -\alpha x u\rangle_2 =$
$= \bar{\alpha} \underbrace{\|xu\|_2^2}_{reale(\geq 0)!} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \alpha = \bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+$, e quindi $u(x) = \beta e^{-\alpha\frac{x^2}{2}}$ con $\beta \in \mathbb{C}$. $\blacksquare$]

Abbiamo $\| u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con $u, u' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \overset{(\star)}{\Rightarrow} \widehat{u'}(y) = iy\,\hat{u}(y) \|$, per cui possiamo trasformare eq. diff. ordinarie LINEARI in eq. algebriche, almeno restringendoci a soluzioni u con le proprietà $(\star)$ sopra! Ad esempio, $u(x)$ tale che $au' + bu = \underset{(\in L^1!)}{f}$ $(a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0) \Rightarrow \hat{f} = \widehat{au' + bu} = a\underset{=iy\hat{u}}{\widehat{u'}} + b\hat{u} = (aiy + b)\hat{u}$, quindi $P(iy) := a(iy) + b \overset{\forall y \in \mathbb{R}}{\neq} 0 \Rightarrow \hat{u}(y) = \dfrac{\hat{f}(y)}{aiy + b}$ $\forall y \in \mathbb{R}$, formula che, a supporre $u(x)$, alla quale possiamo applicare $\mathcal{F}^*$, MA ANCORA CI STIAMO AUTOMATICAMENTE RESTRINGENDO: infatti dovrà essere $\hat{u} \in L^1$ $\not\in \widehat{u'} \in L^1, \Rightarrow \hat{f} \in L^1$, e quindi inoltre stiamo tutto anche in $\underset{(\cap C_0)}{L^2}$!)! In conclusione applicando le TDF cerchiamo però soluzioni di una precisa classe di funzioni.

ESEMPIO: $u \in C^1$ tale che $\dot{u} = u \Leftrightarrow u(x) = \beta e^x$, $\beta \in \mathbb{C}$ (sarebbe $\beta = u(0)$); MA $\underset{(=\dot{u})}{u} \notin L^1$ per alcun $\beta \in \mathbb{C}$ tranne $\beta = 0$, e infatti: $\dot{u} = u \Leftrightarrow \dot{u} - u = 0 \overset{(\text{ipotesi }(\star))}{\Rightarrow} 0 = \hat{0} = \widehat{\dot{u} - u} = \underset{iy\hat{u}}{\hat{\dot{u}}} - \hat{u} =$
$= (iy - 1)\hat{u}$, $\overset{(iy-1\neq 0\ \forall y\in\mathbb{R})!\ \mathcal{F}(y)-i\notin\mathbb{R})}{\Rightarrow} \underset{(\in L^1!)}{\hat{u} = 0} \overset{inv.}{\Rightarrow} 2\pi u = \check{\hat{u}} = \check{0} = 0$, cioè $u \equiv 0$!

Le altre soluzioni sono in conclusione esatte "pure".

Volendo risolvere $\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{su } [0,\infty] \times \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$, effettuiamo

la TDF nella x ("$\mathcal{F}_{x\mapsto y}$") sperando di non altro che ~~la~~ una soluzione u ci sia suggerita; ebbene, almeno formalmente è $\widehat{u_t} = (\hat{u})_t$ e $\widehat{u_{xx}} = -y^2\hat{u}$, dunque l'eq. diventa $(\hat{u})_t = -y^2\hat{u}$ e il dato iniziale $\hat{u}(0,\cdot) = \widehat{u_0}(\cdot)$, dove in generale è effettuato $\hat{u}(t,y) \doteq \widehat{u(t,x)}(y)$,

CIOÈ $\hat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)\, e^{-y^2 t}$; ora, $e^{-y^2 t} = e^{-\frac{(y\sqrt{2t})^2}{2}} = \widehat{\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}(\sqrt{2t}\,y) \underset{t>0!}{=} \widehat{\frac{1}{\sqrt{2t}}\rho\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)}(y) = \widehat{\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}}(y)\quad \forall y\in\mathbb{R}$,

(con $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \rho(x)$, "$\rho_{\sqrt{2t}}$!")

e quindi $u(t,x) := \begin{cases} u_0(x) & \text{se } t = 0 \\ u_0(x) * \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{se } t>0 \end{cases}$ ha le "giuste" trasformate di Fourier. In effetti

("NUCLEO DEL CALORE (su $\mathbb{R}$)")

$u_0 \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$, tipo $u_0 \in C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, allora tale u è CONTINUA su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, è C^∞ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ e soddisfa $u_t = u_{xx}$ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. $\rightsquigarrow_\Delta (u\in C^\infty_*!)$

CONTINUITÀ in $t=0$: presi $x'\to x$ e $t\to 0^{(+)}$,

è $u(t,x') - \underbrace{u(0,x)}_{(=u_0(x))} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'-y)\,\rho_{\sqrt{2t}}(y)\,dy\right] - u_0(x)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{\sqrt{2t}}(y)\,dy}_{(=1,\text{ infatti!})} =$

$= \int_{-\infty}^{\infty}[u_0(x'-y) - u_0(x)]\,\rho_{\sqrt{2t}}(y)\,dy \underset{\left(y/\sqrt{2t} =: z \Leftrightarrow y = z\sqrt{2t}\right)}{=} \int_{-\infty}^{\infty}[u_0(x'-\sqrt{2t}\,z) - u_0(x)]\,\rho(z)\,dz =:$

$=: \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{t,x}(z)\,dz$; ma, $\forall z \in \mathbb{R}$, $\omega_{t,x}(z) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ poiché $u_0 \in C^0$,

e inoltre $\forall t>0$ vale la dominazione $|\omega_{t,x}(z)| \le \underbrace{2\|u_0\|_\infty}_{<\infty} \underbrace{|\rho|}_{(\in L^1)}$, ($u_0 \in L^\infty$!)

e allora va tutto bene per Lebesgue (coi 1·1). ✓

REGOLARITÀ in x ($t>0$): $u(t,x) = \underset{L^\infty}{u_0} * \underset{L^1,\ \text{ecco } C^\infty \text{ con tutte le derivate in } L^1}{\rho_{\sqrt{t}}}(x)$ è chiaramente

C^∞ con inoltre $D_x^k u(t,x) = u_0 * D_x^k \rho_{\sqrt{t}}(x)$ (che $D_x^k \rho_{\sqrt{t}}$

stia in L^1 è perché della forma $\underset{(\text{integro per parti, ecc.})}{\text{polinomio}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}$!).

REGOLARITÀ in t (>0): scriviamo esplicitamente $u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-y)\,\rho_{\sqrt{t}}(y)\,dy$,

usiamo la seguente versione del teorema di "∂ sotto $\int$".

> $g : [a,b]_t \times \mathbb{R}_y \to \mathbb{R}$ MIS. con $g(\cdot,y) \in C^1([a,b])$ $\forall y \in \mathbb{R}$, con
> $g(t,\cdot)$, $\partial_t g(t,\cdot)$ in $L^1(\mathbb{R})$ $\forall t \in [a,b]$ purché esista $\alpha(y)$
> $\in L^1(\mathbb{R})$ tale che $|g(t,y)|$ e $|\partial_t g(t,y)|$ siano $\le \alpha(y)$ $\forall t \in [a,b]$
>
> $\Rightarrow$ $G(t) := \underset{(\in\mathbb{R}!)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t,y)\,dy}$ è $C^1([a,b])$ con $G'(t) = \underset{(\in\mathbb{R}!)}{\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t g(t,y)\,dy}$
>
> $\forall t \in [a,b]$.

[$G(t)$ e $H(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t g(t,y)\,dy$ SONO (ben definite e) continue (su TUTTO $[a,b]$) per Lebesgue:

infatti, $\forall t \in [a,b]$ e $\forall (t_n)_{n\ge 1}$ in $[a,b]$ tale che $t_n \to t$, $g(t_n,y) \to g(t,y)$, $\partial_t g(t_n,y) \to \partial_t g(t,y)$

$\forall y \in \mathbb{R}$ (per CONTINUITÀ di $g(\cdot,y)$ e $\partial_t g(\cdot,y)$!), e d'altra parte

$\forall t \in [a,b]$ vale la suddetta dominazione con α. Allora basta

provare che G è derivabile con $G' = H$, il che si ha se

$G(t) - G(a) = \int_a^t H(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]$; ma infatti $\int_a^t H(s)\,ds =$

$= \int_a^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t g(s,y)\,dy \right] ds \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{FUBINI}: \int_a^b [\int |\cdot|\,dy]\,ds \leq \\ \leq \|\alpha\|_1 (b-a) < \infty\,!)}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^t \partial_t g(s,y)\,ds \right] dy \underset{(g(\cdot,y) \text{ è } C^1\ \forall y\,!)}{=}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(t,y) - g(a,y) \right] dy = G(t) - G(a)$ (che comunque è $<\infty$). $\square$

$g(t,y) := u_0(x-y) \frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$ soddisfa tutte le ipotesi "teorema" la dimostrazione, che una volta dimostrata permetterà allora di scaricare le derivate su $f_{\sqrt{t}}(y)$ ed ottenere $u \in C^\infty$ anche in $t\ (>0)$ con $D_t^h u = u_0 * D_t^h f_{\sqrt{t}}(x)$; verifichiamo allora che, $\forall\, \delta, M > 0$ con $\delta < M$ e $\forall\, h \geq 0$, $\exists\, \alpha_h(y) \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\left| u_0(x-y)\, D_t^h\left(\frac{e^{-y^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right) \right| \leq \alpha_h(y) \quad \forall t \in [\delta, M]$ e $\forall y \in \mathbb{R}$; ma u_0 è in L^∞, e poi $\left| D_t^h f_{\sqrt{t}}(y) \right| =$

$= \left| t^{-(h+1/2)}\, \underset{\substack{\downarrow (\text{ovvio}) \\ (\text{è in } |\cdot| \leq M(1+|\frac{y}{\sqrt{\delta}}|^a)) \\ (M \geq 0)}}{\text{polinomio}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)}\, e^{-y^2/4t} \right| \underset{(t \in [\delta,M]\,!)}{\leq} \delta^{-(h+1/2)} \cdot M\left(1 + \left(\frac{|y|}{\sqrt{\delta}}\right)^a\right) e^{-y^2/4M}$

che è chiaramente in $L^1(\mathbb{R}_y)$. ✓

Allora è C^∞ in x e in $t>0$ contemporaneamente purché posso "scaricare" su $f_{\sqrt{t}}(y)$! (...)

Ovvero $u_t = u_{xx}$: infatti $D_t f_{\sqrt{t}}(x) = D_x^2 f_{\sqrt{t}}(x)$ in quanto $D_x \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} = -\frac{x}{2t} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$ ma $D_x = \frac{x^2}{4t^2} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} -$

$- \frac{1}{2t} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$, mentre $D_t \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi}} +$

$+\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2}e^{-x^2/4t}$ $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)' = (t^{-1/2})' = \frac{-1}{2t\sqrt{t}} \text{ e } \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}\right)$ (10)

In particolare $u_0 \equiv 0 \in C^0 \cap L^\infty \Rightarrow u \equiv 0$ è soluzione, MA si potrebbe vedere non essere l'unica (con tale u_0); in effetti NON sono state imposte "condizioni al bordo". Notiamo come invece il problema "trasformato" tramite le TDF abbia una e una sola soluzione.

$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, presa $(f_n)_{n\geq 1}$ in $L^1 \cap L^2$ tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f$, definiamo "l'antitrasformata in $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$" ponendo

$\boxed{\check{f}(x) := \hat{f}(-x)}$ $\overset{(\star)}{=} \lim^{L^2} \hat{f}_n(-x) \overset{(\text{stesso in } L^2!)}{=} \lim^{L^2} \check{f}_n(x)$, ossia

(o "$\mathcal{F}^* f(x)$") (per q.o. $x \in \mathbb{R}$, gli stessi per i quali è definita $\hat{f}$) ($\in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$!)

$$\check{f} = \lim^{L^2} \check{f}_n .$$

[$(\star)$: $\hat{f} = \lim^{L^2} \hat{f}_n \Rightarrow \hat{f}(-\cdot) = \lim^{L^2} \hat{f}_n(-\cdot)$: $\|\hat{f}(-x) - \hat{f}_n(-x)\|_2^2 =$
$= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(-x) - \hat{f}_n(-x)|^2 dx \underset{(-x=:y!)}{=} \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_2^2 \to 0$! ✓]

È chiaro allora che resta definita $\mathcal{F}^* : L^2 \to L^2$ "bene", lineare (ovvio) e continua, anzi $\sqrt{2\pi}$ – isometria, estendendo inoltre la definizione su $L^2 \cap L^1$; in particolare AD ES.

$\|\check{f}\|_2 = \|\hat{f}(-\cdot)\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \overset{P.}{=} \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$!

Inoltre adesso possiamo dire che $\mathcal{F}^*$ è precisamente LA (esistendo!)

AGGIUNTA di $\mathcal{F}$, in quanto $\forall f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ è

$$\langle \hat f ; g \rangle_2 \overset{\left(\substack{f_n \to f,\ g_n \to g \\ \text{in } \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2}\right)}{=} \langle \lim^{\mathcal{L}^2} \hat f_n ; \lim^{\mathcal{L}^2} g_n \rangle_2 = \lim^{\mathbb{R}} \langle \hat f_n ; g_n \rangle \overset{(\text{FATTO!!})}{=}$$

$$= \lim^{\mathbb{R}} \langle f_n ; \check g_n \rangle_2 = \langle f ; \check g \rangle_2 .$$

{Ma soprattutto vale la "formula" d'inversione, nel senso che $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ è $2\pi f \overset{q.o.}{=} \check{\hat f}$ (e NON nel senso $2\pi f(x) \overset{q.o.}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \hat f(y)\, e^{ixy}\, dy$, ovviamente, dato che $\hat f$ e $\check{g}$ NON sono definite tramite i soliti integrali!!)} :

infatti $2\pi f = \lim^{\mathcal{L}^2} 2\pi f_n \overset{(f_n \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 !)}{=} \lim^{\mathcal{L}^2} \check{\hat f}_n = \check{\hat f}$.

$$\left(f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f \Rightarrow \hat f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \hat f \Rightarrow (\hat f_n)^\vee \xrightarrow{\mathcal{L}^2} (\hat f)^\vee \right)$$

Ecco allora un isomorfismo "decente": $\mathcal{F}$, con inversa $\frac{\mathcal{F}^\#}{2\pi}$!!

[$\rhd$ $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $f \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \hat f \overset{\mathcal{F}^\#/2\pi}{\longmapsto} \frac{1}{2\pi}(\hat f)^\vee \overset{\text{in } \mathcal{L}^2}{=} f$!]

ESERCIZI TDF (1)

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ o "più in generale" $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, vale che
f REALE e PARI $\Rightarrow \hat{f}$ reale e pari e
f REALE e DISPARI $\Rightarrow \hat{f}$ puramente immaginaria e dispari, e
comunque f PARI $\Rightarrow \hat{f}$ PARI e f DISPARI $\Rightarrow \hat{f}$ DISPARI. (sottinteso: q.o.!)

So infatti che $\hat{f}(\gamma)$ esiste e che almeno per q.o. γ è $\hat{f}(\gamma) \overset{q.o.}{=}$
$\overset{q.o.}{=} \lim_{R\to+\infty} \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\gamma x}dx}_{=:\hat{f}_R(\gamma)} = \lim_{R\to+\infty}\left[\underbrace{\left(\int_{-R}^{R} f(x)\cos(\gamma x)dx\right)}_{=\mathrm{Re}(\hat{f}_R(\gamma))} - i\underbrace{\left(\int_{-R}^{R} f(x)\sin(\gamma x)dx\right)}_{=-\mathrm{Im}(\hat{f}_R(\gamma))}\right]$
(limiti che ESISTONO contemporaneamente!), dove le "uguaglianze sotto" valgono perché f è REALE; ora la tesi è ovvia per parità/disparità di cos/sin (ad esempio: f pari $\Rightarrow \hat{f}$ reale perché, $\forall R>0$, $\int_{-R}^{R} f(x)\underbrace{\sin(\gamma x)}dx = 0$ per disparità NELLA x su $[-R,R]$, e ora $\hat{f}$ è pari per parità di $\cos(\gamma x)$ NELLA γ!). $\square$

$\Rightarrow$ (su $\mathcal{L}^1$ o $\mathcal{L}^2$) $\mathcal{F}^*_{|\{PARI\}} = \mathcal{F}$, mentre $\mathcal{F}^*_{|\{DISPARI\}} = -\mathcal{F}$,
e allora la formula d'inversione diventa (nei casi pari/dispari) $2\pi f = \check{\hat{f}} =$
$= \begin{cases} \hat{\hat{f}} & f \text{ PARI} \\ -\hat{\hat{f}} & f \text{ DISPARI} \end{cases}$ (q.o., nel caso $f \in \mathcal{L}^2$) (nel caso $f\in\mathcal{L}^1$, è richiesto $\hat{f}\in\mathcal{L}^1$!)
($\Rightarrow \hat{f}$ PARI/DISPARI $\Rightarrow f$ PARI/DISPARI!)

$\forall g$ PARI, $\check{g}(x) \overset{(q.o.)}{=} \hat{g}(-x) \overset{\hat{g}\text{ pari!}}{=} \hat{g}(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, cioè $\check{g} \overset{(q.o.)}{=} \hat{g}$;
invece $\forall g$ DISPARI $\check{g}(x) \overset{(q.o.)}{=} \hat{g}(-x) \overset{\hat{g}\text{ dispari!}}{=} -\hat{g}(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, cioè $\check{g} \overset{(q.o.)}{=} -\hat{g}$.
Allora f PARI $\Rightarrow 2\pi f \overset{(q.o.)}{=} \check{(\hat{f})} \overset{\hat{f}\text{ pari!}}{=} \hat{(\hat{f})}$, mentre f DISPARI $\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\pi f \overset{(q.o.)}{=} \check{(\hat{f})} \overset{\hat{f}\text{ disp.}}{=} -\hat{(\hat{f})}$. $\square$

$\forall \eta\in\mathbb{R}$, $\underbrace{\widehat{\frac{1}{1+x^2}}}_{(\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})!)}(\eta) = \underbrace{\pi e^{-|\eta|}}_{(\in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})!)}$ e ovviamente che "avviene"

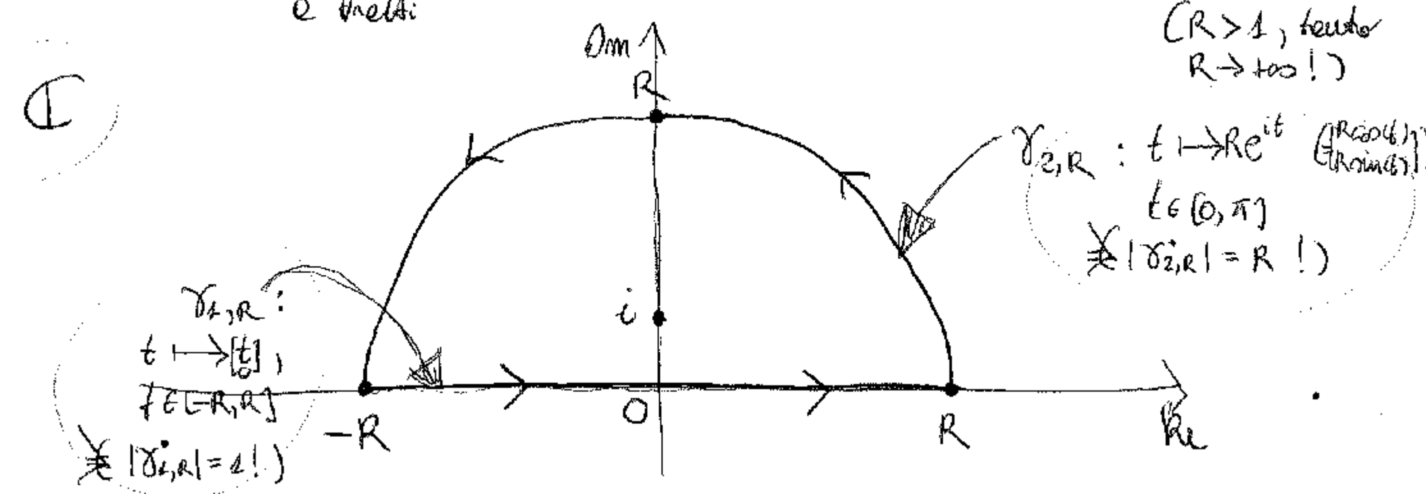
$$\widehat{\frac{e^{-|x|}}{2}}(\eta) = \frac{1}{1+\eta^2} \quad \forall \eta\in\mathbb{R}.$$

Intanto, $f(x):=\frac{1}{1+x^2}\in \underset{(\text{continua!})}{L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})}$ perché $\in C^0_0 \Rightarrow L^\infty$, e all'infinito è analoga a $\frac{1}{x^2}$ ($\in L^1_{\mathbb{R}}([M,+\infty))$ $\forall M>0$!); allora $\hat f(\eta)$ esiste $\forall\eta\in\mathbb{R}$ ed è $\hat f(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\eta x}}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\eta x}}{1+x^2}\,dx$.

L'idea è trovare tale formula a partire dalla FORMULA DEI RESIDUI applicata a $g(z):=\frac{e^{-i\eta z}}{1+z^2}$ di variabile complessa $z\in\mathbb{C}$: infatti intanto $g|_{\mathbb{R}} \overset{\eta=0}{=} f$, e ha i due soli poli semplici $\pm i$ dunque quella è meromorfa; invero poi $e^{-i\eta z}\big|_{z=\pm i}\neq 0$, perché l'esponenziale È SEMPRE $\neq 0$ ($|e^{-i\eta \overset{\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)}{z}}| = e^{\eta\,\mathrm{Im}(z)}>0$ sempre!), vale l'uguaglianza $\sum_{z_i \text{ poli di } g}\mathrm{Res}(g,z_i) = \frac{e^{-i\eta z}}{2z}\Big|_{z=i} + \frac{e^{-i\eta z}}{2z}\Big|_{z=-i}$

(cioè ho derivato il denominatore!), in particolare $\mathrm{Res}(g,+i) = \frac{e^{-i\eta z}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{\eta}}{2i}$ $\forall\eta$. Ora, $\forall R>0$, consideriamo le seguenti curve regolari e tratti in $\mathbb{C}$, $\gamma_{1,R}$ o $\gamma_{2,R}$:

(R>1, tendo R→+∞!)



In questo modo, $\forall R>1$, posso usare il teorema dei residui : (2)

$$\boxed{\int_{\gamma_{1,R}} g(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ poli di } g \\ \text{"racchiusi" da} \\ \gamma_{1,R}\circ\gamma_{2,R}}} \mathrm{Res}(g,z_i)} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(g,+i) =$$

$= \pi e^{\eta}$ come appena calcolato ($\forall \eta$), DOVE chiaramente

$$\int_{\gamma_{1,R}} g(z)\,dz \doteq \int_{-R}^{R} g(\underbrace{\gamma_{1,R}(t)}_{=\binom{t}{0}})\, \underbrace{\dot\gamma_{1,R}(t)}_{=\binom{1}{0}}\, dt = \int_{-R}^{R} \underbrace{g(t)}_{=\frac{e^{-i\eta t}}{1+t^2}}\, dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} \hat f(\eta) \quad \forall \eta$$

mentre $\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \ \forall \eta<0$: infatti $\left|\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz\right| \doteq$

$$\doteq \left|\int_0^\pi g(\gamma_{2,R}(t))\,\dot\gamma_{2,R}(t)\,dt\right| \le \int_0^\pi |g(\gamma_{2,R}(t))|\, \underbrace{|\dot\gamma_{2,R}(t)|}_{=R}\, dt \quad , \text{ e}$$

$$|g(z)| = \frac{|e^{-i\eta z}|}{|1+z^2|} \overset{(\text{visto!})}{=} \frac{e^{\eta\,\mathrm{Im}(z)}}{|1+z^2|} \underset{\substack{\eta<0 \\ (\text{e } \mathrm{Im}(z)\ge 0,\ \text{chiaro})}}{\le} \frac{1}{|1+z^2|} \underset{(\text{cioè su } \gamma_{2,R})}{\overset{z=e^{it}R}{=}} O_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R^2}\right)$$ (dunque,

da un certo R in poi, $\frac{1}{|1+z^2|}\Big|_{\gamma_{2,R}} \le \frac{1}{R^2}$) $\underset{(\eta<0!)}{\Rightarrow} |g(\gamma_{2,R}(t))| \le \frac{1}{R^2}$

definitivamente (in R), e per tali $\left|\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz\right| \le \int_0^\pi \frac{1}{R^2}\cdot R\,dt =$

$= \frac{\pi}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ (o altrimenti $\le \int_0^\pi \frac{1}{|1+z^2|}\Big|_{z=e^{it}R} R\,dt \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ perché

uso il criterio del confronto asintotico) ! (NOTA : in effetti

$|1+R^2e^{2it}|^2 = |1+R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))|^2 = (R^2\cos(2t)+1)^2 + R^4\sin^2(2t) = R^4 +$

$+ 2R^2\cos(2t) + 1 = O_{R\to+\infty}(R^4)$!) Possiamo allora affermare

che, $\forall \eta<0$, $\hat f(\eta) = \pi e^{\eta}$, anzi per $\eta \le 0$ ($\hat f(0) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi \ (= \pi e^0)$) ; MA

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è reale e PARI , cioè $\hat f(\eta)$ lo è :

nota (ne) che essa effettivamente $\hat{f}(y) = \pi e^{-|y|}$ $(\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})!)$. Per questa funzione ne vale l'uguaglianza $2\pi f^{(-x)} = \check{\hat{f}} \overset{\text{PARITÀ}}{=} \hat{\hat{f}}$, cioè $\forall x \in \mathbb{R}$ $2\cancel{\pi} f(x) = \widehat{\cancel{\pi} e^{-|y|}}(x)$, cioè $f(x) = \dfrac{\widehat{e^{-|y|}}}{2}(x)$;

lo verifico direttamente: $\widehat{e^{-|x|}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|x|}}_{\text{PARI!}} e^{-iyx} dx \Big($

$$= 2\int_0^\infty e^{-x} \cos(yx)dx \Big) = 2\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}}_{\text{REALE!}} \mathrm{Re}(e^{-iyx})dx \underset{(\int \mathrm{Re}(\dots) = \mathrm{Re}(\int \dots))}{=} 2\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^\infty e^{-(1+iy)x}dx\Big) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-(1+iy)x}}{-(1+iy)}\right]_{x=0}^{x=\infty} = 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1+iy}\Big) = \frac{2}{1+y^2}$$, perché

$$\frac{1}{1+iy}\frac{(1-iy)}{(1-iy)} = \frac{1-iy}{1+y^2}$$! $\square$]

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\widehat{\dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}(y) = e^{-y^2/2}$, CIOÈ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\widehat{e^{-y^2/2}}(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}$.

[$f(x) := \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{L}^1_{(\mathbb{R})}(\mathbb{R})$ (lo è (ovvi)) $\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(y)$ è ben definita ed è $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-x^2/2 - iyx}}{\sqrt{2\pi}} dx =$

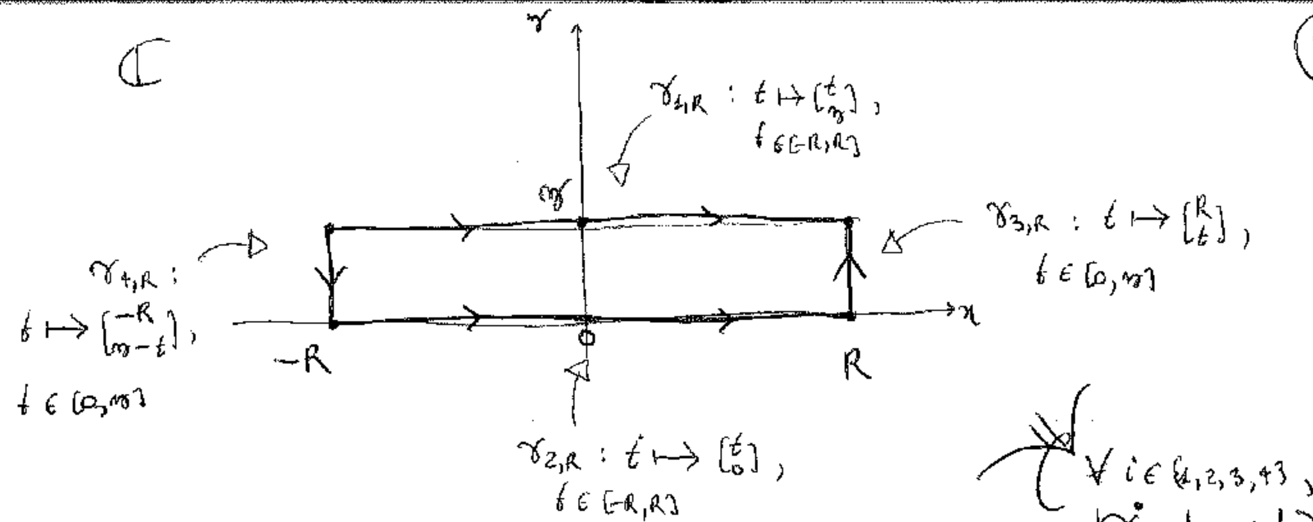
$$= e^{-y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x+iy)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \underset{\substack{(x+iy=:t \Rightarrow dx=dt \\ \text{e stessi estremi})}}{=} e^{-y^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt}_{(=1!)} = e^{-y^2/2}.$$

$\Big(-\frac{x^2}{2} - iyx = -\frac{1}{2}(x^2 + 2(iyx)) = -1/2(x+iy)^2 - y^2/2\Big)$

Ve onorato che il cambio di variabile $x+iy=:t$ è CORRETTO:

consideriamo la funzione olomorfa su tutto e^{-z^2}, $z \in \mathbb{C}$,

e, $\forall y > 0$ fissato, consideriamo anche le curve regolari a tratti in $\mathbb{C}$ $\forall R > 0$



($\forall\, i \in \{1,2,3,4\}$, $|\dot\gamma_{i,R}| = 1$!);

<u>Allora</u>, per il teorema dei residui (che e^{-z^2} NON ha!), $0 = -\int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_{4,R}} e^{-z^2}dz$; ma $\int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}dz \overset{a}{=}$

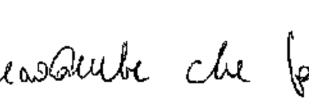
$$= \int_{-R}^{R} e^{-(x+iy)^2}(1+i0)\,dx \xrightarrow[\substack{R\to+\infty \\ \text{(per ipotesi!)}}]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}dx =: I_1$$

e analogamente

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}dz \overset{a}{=} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx =: I_2,$$

da cui $0 = -I_1 + I_2$, cioè la voluta uguaglianza $I_1 = I_2$, purché dimostriamo che 0 degli altri due integrali: infatti, ad esempio,

$$\left|\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}dz\right| \doteq \left|\int_0^y e^{-(R+it)^2}\cdot i\,dt\right| \le \int_0^y \underbrace{|e^{-(R+it)^2}|}_{(=e^{-R^2+t^2} \le e^{-R^2+y^2})}dt \le y\, e^{-R^2+y^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Ora, per $y < 0$ è evidente che potremmo procedere analogamente (considerando ad esempio ) o <u>meglio</u> osservare che f reale pari $\Rightarrow \hat f$ reale pari, $\Rightarrow$ dunque $\hat f(y) = e^{-y^2/2}$; infine per $y = 0$ non c'è bisogno di calcolare nulla: $\hat f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = 1$! ✓

DIM. ALTERNATIVA: (più rapida) $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{C}^1_m(\mathbb{R})$ con $f, f' \in L^1_m(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \forall \eta \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\eta) = i\eta \hat{f}(\eta)$; PRECISAMENTE $f'(x) = -x f(x)$, dunque inoltre $f \in L^1_m(\mathbb{R})$ con anche $xf(x) \in L^1_m(\mathbb{R})$ $\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^1_{(m)}$ con $\hat{f}' = \widehat{-ixf(x)}$; ora, a proposito di f', $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \Leftrightarrow f'(x) = -x f(x)$ (anche con $f(0) = 1/\sqrt{2\pi}$), cioè $f' + xf = 0$: allora $0 = \hat{0} = \widehat{f' + xf} \overset{(lin.)}{=} \widehat{f'} + \widehat{xf} = i\eta\hat{f} + i\hat{f}'$, cioè $\hat{f}' + \eta\hat{f} = 0$, cioè $\forall \eta \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(\eta) = \underbrace{\hat{f}(0)}_{=1!} e^{-\eta^2/2}$!

Notiamo infine che l'ultimo "cioè" è ovvio per linearità, o anche per le formule d'inversione effettuate e funzioni PARI. $\square$

(NOTA: effettivamente $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = 1$ perché $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}_{e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty} \rho e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho\right] d\theta = 2\pi < \infty$ (FUBINI) $= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx\right)^2$!

$\left(-\left[e^{-\rho^2/2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = 1 \text{ !}\right)$

$(\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \xrightarrow{\chi} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(\rho, \theta) \mapsto (x, y) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$
$\det J_\chi = \rho$)

$$\boxed{\Rightarrow \forall \sigma > 0, \quad \widehat{\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}(\eta) = e^{-\eta^2\sigma^2/2} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}.}$$

Se $f(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, allora $\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) \Rightarrow$ la TDF $\hat{f}(\sigma\eta) = e^{-(\sigma\eta)^2/2}$ per l'esercizio precedente. $\square$

$\forall k \geq 1$ (anche $k=0$...), se $x^h f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\forall\, 0 \leq h \leq k$ allora $\hat{f} \in \mathcal{C}^k_{(0)}(\mathbb{R})$ CON $\hat{f}^{(h)} = (-i)^h \widehat{x^h f}$ $\forall\, 0 \underset{(\neq)}{\leq} h \leq k$.

[Per $k=1$ è il noto risultato "$g, xg \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \overset{(*)}{\Rightarrow} \hat{g} \in \mathcal{C}^1_{(0)}(\mathbb{R})$ e $\hat{g}' = \widehat{-ixg}$"; $\forall k > 1$, suppongo dunque la tesi vera per un $(0<)\, h < k$ e la dimostro per $h+1$: essendo ovviamente $g := x^h f$ e $xg = x^{h+1} f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, allora (per $(*)$) $\hat{g} = \widehat{x^h f} \in \mathcal{C}^1_{(0)}(\mathbb{R})$ con $\hat{g}' = \widehat{x^h f}' = (-i)\widehat{x^{h+1} f} = \widehat{-ixg}$; MA $\widehat{x^h f} \overset{\text{(IP. IND.)}}{=} \frac{\hat{f}^{(h)}}{(-i)^h}$: allora $\hat{f} \in \mathcal{C}^{(h+1)}_{(0)}(\mathbb{R})$ CON $\frac{\hat{f}^{(h+1)}}{(-i)^h} = (-i)\widehat{x^{h+1} f}$ ✓ (più chiaramente: $\hat{f}^{(h+1)} = (\hat{f}^{(h)})' = (-i)^h \widehat{x^h f}' = (-i)^h \widehat{-ix(x^h f)} = (-i)^{h+1}\widehat{x^{h+1} f}$!). ▫]

$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}$ è ANALITICA su $\mathbb{R}$, in quanto costituisce restrizione a $\mathbb{R}$ di una funzione definita e OLOMORFA su $\mathbb{C}$.

("NO: $e^{-x^2/2}$ non è a supporto compatto!)

[Anzitutto $f \in \mathcal{C}^\infty_{(0)}(\mathbb{R})$ perché $x^k f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $\forall k \geq 0$:
$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } f(x)=0 \\ \forall |x| \geq M}}{=} \int_{-M}^{M} |x|^k |f(x)|\, dx \leq M^k \|f\|_1$ $(<\infty)$. Consideriamo ora $g(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-izx}\, dx$ di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ (che in effetti $g|_{\mathbb{R}} = \hat{f}$ ed è "media pesata" delle funzioni olomorfe (SU TUTTO $\mathbb{C}$) e^{-izx} !): g è definita su tutto $\mathbb{C}$ perché, $\forall z \in \mathbb{C}$,
$|g(z)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, |e^{-izx}|\, dx = \int_{-M}^{M} |f(x)| \underbrace{e^{x\,\mathrm{Im}(z)}}_{(\leq e^{|x\,\mathrm{Im}(z)|}\,!)}\, dx \leq e^{M|\mathrm{Im}(z)|} \|f\|_1 < \infty$.
Inoltre è su $\mathbb{C}$ CONTINUA (per convergenza dominata: $\forall z \in \mathbb{C}$ e

$\forall (z_m)_{m\geq 1}$ in $\mathbb{C}$ tale che $z_m \to z$, è $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)e^{-iz_m x} \to$
$\to f(x)e^{-izx}$ (per continuità), e come appunto visto nella la dominazione "uniforme" $|f(x)e^{-iz_m x}| \overset{x\in[-M,M]}{\leq} e^{M|\mathrm{Im}(z_m)|}|f(x)| \overset{(\text{se } \forall m \geq 1 \text{ è } |z_m| \leq R)}{\leq} e^{M\cdot R}|f(x)| \in$
$\in L^1(\mathbb{R})$) ed anzi OLOMORFA in quanto $g(z)dz$ è una forma esatta (sfruttando che così è per $e^{-izx}dz$, $\forall x \in \mathbb{R}$):
$\forall \gamma$ cammino chiuso in $\mathbb{C}$, con diciamo $|\gamma| \leq R$, è infatti
$$\int_\gamma g(z)dz \overset{(\text{DEF})}{=} \int_a^b g(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\gamma(t)x}dx\right]\dot\gamma(t)dt \overset{(\text{FUBINI})}{=}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_a^b e^{-i\gamma(t)x}\dot\gamma(t)dt\right]f(x)dx = 0$$
$\left(= \int_\gamma e^{-izx}dz = 0!\right)$

($|\cdot| < \infty$, dunque "Fubini" e "ritorno", o meglio diretto: $\int_a^b\left[\int_{-M}^{M} |f(x)||e^{-i\gamma(t)x}|dx\right]|\dot\gamma(t)|dt \leq$
$(= e^{x\,\mathrm{Im}(\gamma(t))} \leq e^{|x||\mathrm{Im}\gamma(t)|} \leq e^{M\cdot R})$
$\leq e^{MR}\|f\|_1\|\dot\gamma\|_1 < \infty$ $(\gamma \in C^1([a,b])!)$). $\square$

Se $f(x) := \frac{q(x)}{p(x)}$ razionale $(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ con q e p senza fattori comuni, di $\deg(q) < \deg(p)$ e con $p(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (cioè senza poli reali, $\Rightarrow \deg(p) \geq 2$ e con TERMINE NOTO), allora $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ (in generale NON in $L^1_{\mathbb{R}}$!) e $\hat{f}$ è ANALITICA certamente su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

È ovvio che $f \in L^2(\mathbb{R})$: è ovunque ben definita, $C^0_0 \not\subseteq L^\infty$) e all'infinito è $\sim |x|^{-\alpha}$ (ovvio), $\alpha := \deg(p) - \deg(q) \geq 1$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} f^2$ all'infinito è $\sim |x|^{-2\alpha}$, $2\alpha \geq 2$. Sia ora $g(z) :=$
$:= \frac{q(z)}{p(z)}e^{-i\xi z}$ di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$: abbiamo ormai capito che, almeno $\forall \xi < 0$, $\hat{f}(\xi) = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ radice di } p \\ \text{nel semipiano superiore} \\ \mathrm{Im}(z)\geq 0}} \mathrm{Res}(g, z_i)$; il punto ora è che tale somma è finita e qui va dedotto
(p è polinomio!)

è $2\pi i \,\mathrm{Res}(g, z_i) = \int_{\gamma_i} g(z)\,dz$ con γ_i cammino chiuso che (diciamo oltre $|\gamma_i| \le R$) racchiude z_i e nessun'altra z_j, $j \neq i$, e tale addendo è, come funzione di y ($\in \mathbb{R}$), analitica su tutto $\mathbb{R}$:

$$\int_{\gamma_i} g(z)\,dz = \int_{\gamma_i} f(z)\, e^{-iyz}\,dz = \int_{\gamma_i} f(z)\left(\sum_{k\ge 0} \frac{(-iyz)^k}{k!}\right) dz =$$

$$= \sum_{k\ge 0} \frac{1}{k!}\underbrace{\left[\int_{\gamma_i} f(z)(-iz)^k\,dz\right]}_{(=:a_k)} y^k$$ che infatti $\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, (quindi è un $\lim_k$)

cioè raggio di convergenza $+\infty$, perché, $\forall k \ge 0$, $\left|\int_{\gamma_i} f(z)(-iz)^k\,dz\right| =$

$$= \left|\int_a^b f(\gamma_i(t))(-i\gamma_i(t))^k \cdot \dot{\gamma}_i(t)\,dt\right| \le \int_a^b \underbrace{|f(\gamma_i(t))|}_{(\le M := \max_{\gamma_i} |f|)} \underbrace{|\gamma_i(t)|^k}_{(\le R^k)} |\dot{\gamma}_i(t)|\,dt \le$$

(compatto!)

$\le \mathrm{lungh}(\gamma)\cdot M \cdot R^k =: C R^k$ $(C \ge 0)$ $\Rightarrow$ $\forall k \ge 0$, $|a_k| \le \frac{C R^k}{k!}$ e allora $|a_k|^{1/k} \le C^{1/k}\frac{R}{(k!)^{1/k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ in quanto ($C^{1/k} \to 1$ e) $(k!)^{1/k} \to +\infty$.

Ho finito perché per $y > 0$ sarebbe tutto analogo lavorando però nel semipiano inferiore di $\mathbb{C}$ $\mathrm{Im}(z) \le 0$. $\square$

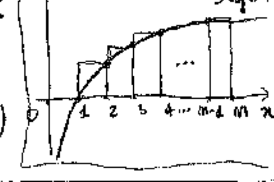
(**NOTA**: effettivamente $\lim_{n\to+\infty} (n!)^{1/n} = +\infty$; $\boxed{1^a \text{ DIM.}}$: $\left((n!)^{1/n}\right)_{n\ge 1}$ è strett. crescente; infatti, $\forall n \ge 1$, $\underbrace{(n+1)!^{\frac{1}{n+1}}}_{(= n!^{\frac{1}{n+1}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n+1}})} > n!^{1/n} \iff$

$(n+1)!^{\frac{n}{n+1}} > n! \iff \underbrace{n!^{\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}}}_{(= n!^{-\frac{1}{n+1}})} \cdot (n+1)^{\frac{n}{n+1}} > 1 \iff \left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^{\frac{1}{n+1}} > 1$

$\iff \frac{(n+1)^n}{n!} > 1$, che è in quanto $\frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)}{1}\frac{(n+1)}{2}\cdots\frac{(n+1)}{n} > 1$. ✓

$\boxed{2^a \text{ DIM.}}$: $n!^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log(n!)}$, e $\frac{1}{n}\log(n!) = \frac{1}{n}\sum_{k=1\,(2)}^{n} \log(k)\cdot 1 \ge$ (n volte)

$\ge \frac{1}{n}\int_1^n \log(x)\,dx = \frac{1}{n}\left[x\log(x) - x\right]_{x=1}^{x=n} = \log(n) - 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. $\square$)



Dati su $\mathbb{R}^3_{\left[\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right]}$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo scalare $\mathcal{C}^2$ e $F = \begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale $\mathcal{C}^1$ (come $\mathcal{C}^2$)) e posti $i := \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $j := \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ e $k := \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, otteniamo da entrambi ulteriori campi scalari e vettoriali :

$$f \begin{cases} \to \text{"}\nabla f\text{" vettoriale } (\mathcal{C}^1) \\ \to \text{"}\Delta f\text{" scalare } (\mathcal{C}^0) \end{cases} \quad \text{e} \quad F \begin{cases} \to \text{"}\nabla \times F\text{" vettoriale } (\mathcal{C}^0) \\ \to \text{"}\nabla \cdot F\text{" scalare } (\mathcal{C}^0) \end{cases}$$

dove

$$\nabla f := \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k = \begin{bmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

("∇" = GRADIENTE)

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

("Δ" = LAPLACIANO), e

$$\mathrm{rot}(F) \doteq \nabla \times F := \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_y F_3 - \partial_z F_2\\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3\\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1\end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

"simbolico"

(o $\nabla \wedge F$)

("$\nabla \times$" = ROTORE) (indice "vorticosità" di F)

$$\mathrm{div}(F) \doteq \nabla \cdot F := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

("$\nabla \cdot$" = DIVERGENZA) (indice di "intensità" di forza/sorgente di F)

È altro rilevante che, ad esempio, $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ e $\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f$, e (per $F \in \mathcal{C}^2$) (quindi per SCHWARTZ!) $\mathrm{div}(\mathrm{rot} F) = \boxed{\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0}$. Il punto ORA è questo: com'è possibile la coincidenza che in effetti, trattando

(6)

$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$ come un simile vettore in $\mathbb{R}^3$ e quindi "$\cdot$" e "$\times$" come i prodotti scalare e vettoriale in $\mathbb{R}^3$, $\nabla \times F$ "$\perp$" ∇ è effettivo come $\operatorname{div} \nabla\cdot(\nabla \times F) = 0$ ... Detto così NON è di certo un argomento rigoroso, ma comunque resta giustificato dalla TDF (in $\mathbb{R}^3$...), come le notazioni "$\nabla\times$" e "$\nabla\cdot$": infatti $\widehat{\operatorname{div}(F)} = i x \hat{F}_1 + i y \hat{F}_2 + i z \hat{F}_3 =$
$(\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3)$

$= i X \cdot \hat{F}$ $\left(X := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$ e analogamente $\widehat{\operatorname{rot}(F)} =$
$= i X \times \hat{F}$ (è ovvio), $\widehat{\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))} =$

$= i X \cdot \widehat{\operatorname{rot}(F)} = (iX) \cdot ((iX) \times \hat{F}) = 0$ (ebbè!)

e ora si che si hanno due vettori !!

Dunque il punto è che, pure in questo caso, "∂_t" viene "Fourier-trasformato" in $i \cdot t$. $\square$

ESERCIZI (L^p e Fourier)

(vari)

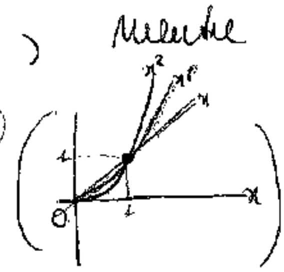
Ex $\forall\, 1\le p\le 2$, $\forall f\in L^p(\mathbb{R})$, $\exists f_1\in L^1(\mathbb{R})$ e $f_2\in L^2(\mathbb{R})$ tali che $f=f_1+f_2$.

[$f_1 := \begin{cases} 0 & \text{se } |f|<1 \ (\le |f|) \\ f & \text{se } |f|\ge 1 \end{cases}$ e $f_2 := \begin{cases} f & \text{se } |f|<1 \\ 0 & \text{se } |f|\ge 1 \ (\le |f|) \end{cases}$ sono

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mis. (lo è f!) e tali che $f=f_1+f_2$; MA

poi $|f_1| \le |f_1|^p \overset{\text{ovvio}}{\le} |f|^p \Rightarrow f_1\in L^1$, mentre

(è ovvio: o f_1 è 0 o $|f_1|\ge 1$, e $1\le p$)



$|f_2|^2 \le |f_2|^p \le |f|^p \Rightarrow f_2\in L^2$.]

(è ovvio: o $|f_2|<1$, e $1\le p\le 2$!)

Ex TDF di $f(x) = e^{4x-2x^2}$.

[$4x-2x^2 = -(2x^2-4x) = -2(x^2-2x) = -2[(x-1)^2-1] =$

$= -2(x-1)^2+2 \Rightarrow e^{4x-2x^2} = \underbrace{e^2}_{\in\mathbb{R}!}\, e^{-2(x-1)^2}$; $(\in L^1!)$

sapendo che $g(x) := \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ ha $\hat g(\omega) = e^{-\omega^2/2}$ e ricordando

che, $\forall h\in\mathbb{R}$ e $\delta>0$, $\widehat{\tau_h g}(\omega) = e^{-ih\omega}\hat g(\omega)$ e $\widehat{\sigma_\delta g}(\omega) = \hat g(\delta\omega)$ $(\delta>0!)$

(dove $\tau_h g(x) := g(x-h)$ e $\sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$), allora

$e^{-2(x-1)^2} = \tau_1 e^{-2x^2}$, e $e^{-2x^2} = e^{-\frac{(2x)^2}{2}} = \frac{1}{2}\sigma_{\frac12} e^{-x^2/2}$, $\Rightarrow$

$$\hat{f}(\omega) = e^2\,\widehat{e^{-2(x-1)^2}}(\omega) = \frac{e^2}{2}\,\widehat{\tau_1 \sigma_{1/2} e^{-x^2/2}}(\omega) =$$

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}$$

$$= \frac{e^2}{2} e^{-i\omega} \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{(\omega/2)^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \underbrace{e^2 e^{-i\omega} e^{-\frac{\omega^2}{8}}}_{= e^{-\omega^2/8 - i\omega + 2}} \quad . \square$$

(EX) $f \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ (reale q.o.!) $\iff \forall m \in \mathbb{Z},\ c_m(f) = \overline{c_{-m}(f)}$.

$c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx}\,dx$, coeff. m-esimo di Fourier!)

$\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ $\left(\subseteq L^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)!\right)$, $c_m(\bar f) = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\overline{f(x)} e^{-imx}}_{= \overline{f(x) e^{-i(-m)x}}}\,dx \overset{(\int \bar{\dots} = \overline{\int \dots})}{=}$

$= \overline{c_{-m}(f)}$; ora, f è reale q.o. $\overset{\text{ovvio}}{\iff} f = \bar f$ q.o. ; mentre la formula è ovvia in tutto $L^1_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, difatti $f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ (Spazio di Hilbert) (cioè $\bar f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$) implica che, $\forall g \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, $f = g$ q.o. $\iff c_m(f) = c_m(g)\ \forall m \in \mathbb{Z}$, e allora $f = \bar f$ q.o. $\iff \forall m \in \mathbb{Z}$,

$c_m(f) = c_m(\bar f) = \overline{c_{-m}(f)}$. $\square$

(EX) $K := \{f \in L^p_{\mathbb{R}}(0,1) \mid \|f\|_p \le 1\}$ (palla chiusa di centro 0 e raggio 1 in $L^p(0,1)$!) NON è compatto per alcun $1 \le p \le \infty$.

Esiste infatti successione $(f_m)_{m\ge1}$ in K tale che NON ammette sottosuccessioni convergenti in K : $\forall m \ge 1$,

$$f_m(x) := \begin{cases} m^{1/p} & \text{se } 0 < x < 1/m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\forall x \in (0,1)) \quad \text{sta in } K$$

(cioè $f_m = m^{1/p} I_{(0,1/m)}$)

perché è $(0,1)\to\mathbb{R}$ mis. e, per $p=+\infty$ ($\frac{1}{p}=0$), è in $\mathcal{L}^{\infty}_{n}(0,1)$ con $\|f_n\|_{\infty}=1$ (palese), mentre per $1\le p<\infty$ è in $\mathcal{L}^{p}_{n}(0,1)$ con $\left\{\int_0^1 |f_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}=\left\{\int_0^{1/n} n\,dx\right\}^{1/p}=1^{1/p}=1$,

Dunque in generale $\boxed{\|f_n\|_p=1}$; ma $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{m(0,1)} 0$: se allora esistesse sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\geq1}=:(f_k)_{k\geq1}$ convergente in K ad una certa $f\in K$ (in $\lim^{\mathcal{L}^p}$!), allora potremmo estrarne un'ulteriore sottosucc. convergente a f q.o. :

$f_{k_h} \xrightarrow[h\to+\infty]{q.o.} f$; allora necessariamente $f=0$ q.o., e cioè $\|f\|_p=0$, che è assurdo perché f_h (f_n) hanno $\|\cdot\|_p=1$ (ossia è un assurdo rispetto alla continuità di $\|\cdot\|_p$: $0=\|f\|_p=\|\lim_h^{\mathcal{L}^p} f_h\|=\lim_h^{\mathbb{R}}\underbrace{\|f_h\|}_{=1}=1$). $\square$

(limitata!)

> (EX) $f\in\mathcal{L}^1_a(\mathbb{R})\cap C^0_0$ tale che $f(x)\sim|x|^{-a}$ per $x\to\pm\infty$ con $a>3 \Rightarrow \hat{f}\in C^2$.

Basta che far $x f(x)$ e $x^2 f(x)$ stiano in $\mathcal{L}^1$; ma infatti su ogni compatto $[-M,M]$ ($M>0$) restano limitate, mentre a $\pm\infty$ è $|x f(x)|\sim|x|^{-a+1}$ e $x^2|f(x)|\sim|x|^{-a+2}$, per cui basta $-a+2<-1$ ($\Rightarrow(-a+1)<-1$), cioè $3<a$. $\square$

(su $[M,+\infty)$, $M>0$, $x^{-\beta}\in\mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \beta>1$!)

(EX) Posto $X := \mathcal{C}^2([-1,1])$ $(\mathcal{C}^\infty([-1,1]))$ $\subseteq L^2_{\mathbb{R}}([-1,1])$, dimostrare che $T : X \to L^2(-1,1)$, $Tu := ((x^2-a)\dot{u})'$ è AUTOAGGIUNTO $\iff a = 1$.

Anzitutto osservo che in effetti X è $\mathbb{R}$-sottosp. di $L^2(-1,1)$, e che vi è DENSO (o perché infatti lo è $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$, o perché lo è in $\mathcal{C}^0$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ (STONE–WEIERSTRASS: sottoalgebra che separa i punti e contiene le costanti!) e QUINDI rispetto a $\|\cdot\|_2$; ma $\mathcal{C}^0$ è denso in L^2!); poi che T è ben definito a valori in L^2 (è tutto limitato!), oltre che LINEARE. Ora, T autoaggiunto $\iff \forall u, v \in X$, $\langle Tu; v\rangle_2 = \langle u; Tv\rangle_2$; calcolo: $\forall u,v \in X$,

$$\langle Tu; v\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \underbrace{((x^2-a)\dot{u})'}_{i}\, \underbrace{v}_{D}\, dx \underset{((x^2-a)\dot{u} \in \mathcal{C}^1!)}{=} \Big[(x^2-a)\dot{u}\, v\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-a)\dot{u}\dot{v}\, dx =$$

$$= (1-a)\left[\dot{u} v\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (a-x^2)\dot{u}\dot{v}\, dx$$, quindi (ovvio)

$\langle Tu; v\rangle_2 - \langle u; Tv\rangle = (1-a)\big[\underbrace{\dot{u}v - u\dot{v}}_{(=(uv)')}\big]_{-1}^{1}$: se $a=1$, allora T è autoaggiunto; infine è necessario che $a=1$, altrimenti $\exists\, u, v \in X$ che fungono da controesempio: $u(x) = x^2$, $v(x) = 1$ ($\in X$!) $\Rightarrow \big[\dot{u}v - \underset{\text{perché } \dot{v}\equiv 0}{\cancel{u\dot{v}}}\big]_{-1}^{1} = [2x]_{-1}^{1} = 4 \neq 0$! $\square$

(EX) Una funzione $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ è univocamente determinata da $\hat{f}\,|_{[0,+\infty)}$.

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (cioè $\bar{f}(x)$), $\boxed{\widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}}$ $\Big(: \widehat{\bar{f}}(\omega) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\bar{f}(x) e^{-i\omega x}}_{\left(= \overline{f(x) e^{-i(-\omega)x}}\right)} dx = \overline{\hat{f}(-\omega)}$! $\Big)$; ma f reale

$\left(\int \overline{(\dots)} = \overline{\int (\dots)}\right)$

COROLLARIO FORMULA D'INVERSIONE!!

q.o. $\Leftrightarrow f = \bar{f}$ q.o., $\Leftrightarrow \hat{f} = \widehat{\bar{f}}$ (NON c'è il q.o. per continuità!) $\Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$: le tesi risulta allora ovvia, poiché conoscendo $\hat{f}(\omega)$ $\forall \omega \geq 0$ ho allora su $(-\infty, 0)$ $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$. $\square$ $\Big]$

(NOTA : 0 NON CONTA, e infatti $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$!)

$\boxed{\text{EX} \quad \text{TDF di } f(x) := \frac{\cos(x)}{1+x^2}}$

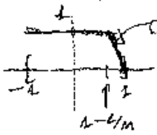
$\Big[\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[e^{ix}/(1+x^2) + e^{-ix}/(1+x^2) \right]$;

MA, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\widehat{e^{ihx} g(x)}(\omega) = \tau_h \hat{g}(\omega)$, e come è noto

$g(x) := \frac{1}{1+x^2}$ ha $\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$, quindi $\hat{f}(\omega) =$

$= \frac{1}{2}\left[\pi e^{-|\omega-1|} + \pi e^{-|\omega+1|}\right] = \frac{\pi}{2}\left(e^{-|\omega-1|} + e^{-|\omega+1|}\right)$. $\square$ $\Big]$

EX Posto $X := \{ u \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}([-1,1]) \mid u \in C^1 \text{ CON } u(1) = 0 \}$, determinare l'aggiunto di $T : X \to \mathcal{L}^2(-1,1)$, $Tu(x) := \dot{u}(-x)$.

[Infatti X è $\mathbb{R}$-sottosp. di $L^2(-1,1)$ ivi DENSO (X è denso ~~in~~ ~~$\{u\in C^1(-1,1) \mid u(1)=0\}$, $\|\cdot\|$~~ denso in C^1 rispetto a $\|\cdot\|_2$ ($\forall u\in C^1$, σ_n  raccordo regolare in modo che $\sigma_n u\in X\subset C^1$),

allora $u_n := u\cdot\sigma_n \in X$ sarà tale che $u_n \xrightarrow{L^2} u$ (convergenza dominata da $|u|^2\in L^1$!))

che è denso in L^2 (o perché lo è C^∞ o perché approx S.-W. + $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow \|\cdot\|_2$ su un compatto)) e T è un op. e LINEARE;

ora $T^*: X \to L^2(-1,1)$ è "l'aggiunto di T" $\Leftrightarrow \forall u,v\in X$, $\langle Tu; v\rangle_2 = \langle u; T^* v\rangle_2$, e SE ESISTE è unico (per densità di X...) e quindi lineare. Calcolo:

$\forall u,v\in X$, $\langle Tu;v\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \underbrace{u'(-x)}_{\text{(i}}\ \underbrace{v(x)}_{\text{D...)}}\,dx =$ ($-x=t \Leftrightarrow x=-t$, $\Rightarrow dx=-dt$ MA GLI ESTREMI SI SCAMBIANO)

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{u'(t)}_{i}\ \underbrace{v(-t)}_{D}\,dt \underset{u\in C^1!}{=} \underbrace{\big[u(t)v(-t)\big]_{-1}^{1}}_{=0!!\ (u(1)=0,\ v(-(-1))=0)} + \underbrace{\int_{-1}^{1} u(t)\,v'(-t)\,dt}_{\langle u;Tv\rangle_2} =$$

$= \langle u; Tv\rangle_2$, e per l'arbitrarietà di $u,v\in X$ anche che $T^* = T$, cioè che T è AUTOAGGIUNTO. □]

EX) Calcolare i coeff. di Fourier di $f(x) := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \in L^2(-\pi,\pi)$

[$\forall n\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \dfrac{1}{2\pi(e^\pi - e^{-\pi})}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{(1-in)x} + e^{-(1+in)x}\right]dx =$

$$= \frac{1}{2\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\left[\frac{e^{(1-in)x}}{1-in} - \frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$$ $\left(e^{\pm inx}\big|_{x=\pm\pi} = (-1)^n\right)$ (4)

$1-in,\ 1+in \neq 0\ \forall n!$

$e^{\pi}e^{-in\pi}$ $\qquad e^{-\pi}e^{-in\pi}$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\left[\frac{e^{\pi}}{1-in} - \frac{e^{-\pi}}{1+in} - \frac{e^{-\pi}}{1-in} + \frac{e^{\pi}}{1+in}\right] =$$

$\frac{-2e^{-\pi}}{1+n^2}$ $\qquad \frac{2e^{\pi}}{1+n^2}$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)} \cdot \square$$

$\mathbb{R}$-sp. di HILBERT (reale) con base l'ortonormalizzata di monomi $\{1, x, x^2, \dots\}$ (sono infatti LIN. INDIP. ~~[illegible]~~ e con $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(x)^n\}_n$ DENSO in $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$!)

(EX) Trovare $\inf\limits_{p(x)\ \text{polinomio con}\ \deg(p)\leq 2} \|x^3 - p(x)\|_{L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)}$.

Denso in $(C^0(-1,1), \|\cdot\|_{\infty})$ per S.W. e $\|\cdot\|_{\infty} \geq \|\cdot\|_2$ e ($C^0(-1,1)$) C^0 è denso in L^2!)

CONTINUA SU $[-1,1]$ $\qquad (\neq\emptyset)$

$Y :=$ {polinomi su $\mathbb{R}$ di grado al più 2} $\subsetneq L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ è un $\mathbb{R}$-sottosp. di L^2 ~~[illegible]~~ e CHIUSO (banalmente perché è a dim. FINITA su $\mathbb{R}$!),

e allora $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1) = Y \oplus Y^{\perp}$, cioè $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)\ \exists!$ $\bar{p} \in Y$, $\tilde{p} \in Y^{\perp}$ tali che $f = \bar{p} + \tilde{p}$ che restano CARATTERIZZATI dal fatto che, $\forall p \in Y$, $\|f - \bar{p}\|_2 \leq \|f - p\|_2$ ed è $= \iff p = \bar{p}$ (analogo per $\tilde{p}$!), cioè $\bar{p}$ minimizza la distanza di f da "Y" (INF = MIN!), e $\bar{p}$ è la proiezione ortogonale di f su Y, cioè (come sappiamo)

$$\bar{p} = \langle f; e_1\rangle e_1 + \langle f; e_2\rangle e_2 + \langle f; e_3\rangle e_3$$ dove e_1, e_2, e_3 è

base di Y ottenuta ortonormalizzando $\{1, x, x^2\}$: $e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $\tilde{e}_2 := x - \overbrace{\langle x, e_1\rangle}^{0} e_1$ $\left(\|x\|_2 = \left(2\int_0^1 x^2\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$

x dispari!

$\Rightarrow \boxed{e_2 := \sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$; infine $\tilde{e}_3 := x^2 - \langle x^2, e_1\rangle e_1 - \underbrace{\langle x^2, e_2\rangle}_{0 \text{ (per simmetria!)}} e_2$

ma $\langle x^2, e_1\rangle e_1 = \frac{1}{2}\, 2\int_0^1 x^2\,dx = 1/3 \Rightarrow \tilde{e}_3 = x^2 - 1/3$, che ha

$$\|\tilde{e}_3\|_2^2 = \int_{-1}^{1} \underbrace{(x^2 - 1/3)^2}_{x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1/9}\,dx = 2\underbrace{\int_0^1 x^4\,dx}_{\frac{1}{5}} - \frac{4}{3}\underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}_{1/3} + 2/9 =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + 2/9 = \frac{18 - 20 + 10}{45} = \frac{8}{45} \Rightarrow \boxed{e_3 := \sqrt{\frac{45}{8}}\,(x^2 - 1/3)}$$

NEL CASO $f(x) := x^3$, per DISPARITÀ serve solo e_2 :

$$\overline{p}(x) = \langle x^3, e_2\rangle e_2 = 3/2 \underbrace{\langle x^3, x\rangle}_{2\int_0^1 x^4\,dx = 1/5} x = 3/5\, x$$

(in $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$!)

(In effetti $x \perp 1$ e $x \perp x^2$ $\Rightarrow$ la base diventa una della forma c_1 , $c_2 x$, $c_3 x^2 + c_4$ ($c_i \in \mathbb{R}$) (anzi $c_i > 0$) ; ora, saputo che serve solo $c_2 x$, calcolo c_2 facendo semplicemente $\|c_2 x\|_2 = 1$: $c_2 = \frac{1}{\|x\|_2} = \sqrt{3/2}$!)

$\boxed{\text{DIM. ALTERNATIVA}}$: $f - \overline{p} \perp Y$ (ciò caratterizza $\overline{p}$!), cioè (ovvio) $f - \overline{p} \perp$ a $1, x$ e x^2 ! Allora

posso $\overline{p}(x) =$ ~~[illegible]~~ $a + bx + cx^2$ e ~~conto di~~ trovo a, b e c dalle 3 condizioni di ortogonalità :

$$0 = \langle f-\bar p\,;1\rangle_2 = \int_{-1}^{1} (\underbrace{x^3}_{\text{disp!}} - a - bx - cx^2)\,dx \overset{\text{simmetrie varie}}{=} -2a - \tfrac{2}{3}c$$

$$0 = \langle f-\bar p\,;x\rangle_2 = \int_{-1}^{1} (x^4 - ax - bx^2 - cx^3)\,dx = \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{3}b$$

$$0 = \langle f-\bar p\,;x^2\rangle_2 = \int_{-1}^{1} (x^5 - ax^2 - bx^3 - cx^4)\,dx = -\tfrac{2}{3}a - \tfrac{2}{5}c\,,$$

CIOÈ

$$\begin{cases} \cancel{2}a + \cancel{2}/3\,c = 0 \\ \boxed{\cancel{2}/3\,b = \cancel{2}/5} \iff b = 3/5 \\ \cancel{2}/3\,a + \cancel{2}/5\,c = 0 \end{cases}$$

e allora $\bar p(x) = \frac{3}{5}x$. □

$\left(\det \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 \end{bmatrix} \neq 0 : \binom{a}{c} = \binom{0}{0}\right)$

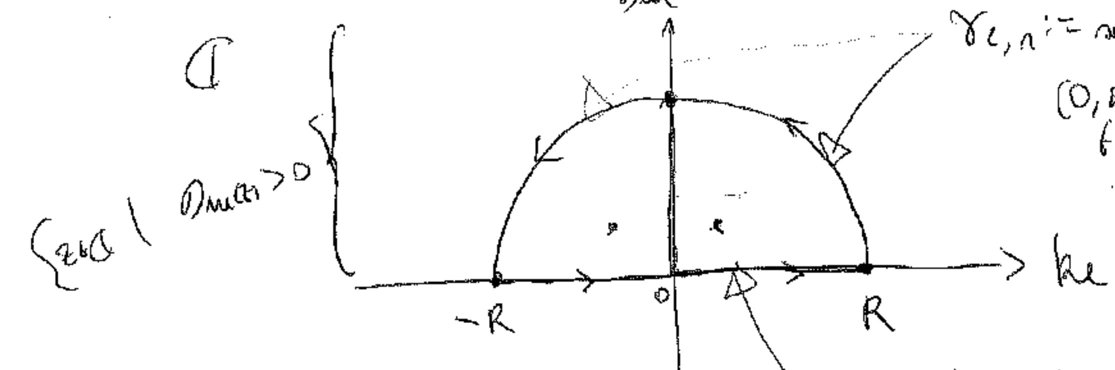
DIRE per quali $p \geq 1$ $f \in L^p$.

EX TDF di $f(x) := \dfrac{x}{x^4+4}$ e $f(x) := \dfrac{x}{1+x^2}$.

$\boxed{f(x) = \dfrac{x}{x^4+4}}$ ($\in L^1 \cap L^2$!): $\hat f(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{-i\omega x}}{x^4+4}\,dx$; si

$f(z) := \dfrac{z\,e^{-i\omega z}}{z^4+4}$ di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ (quindi OLOMORFA) (tranne dai poli) (MEROMORFA)

e si considera il semidisco D_R di $\mathbb{C}$ di frontiera



$\gamma_{c,R} :=$ sostegno della curva regolare $[0,\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto Re^{it}$

$\gamma_{R,R} :=$ sostegno della curva regolare $[-R,R] \longrightarrow \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, $t \longmapsto t$

Allora $\hat{f}(y) \overset{(\text{PALESE!})}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz$ si può calcolare tramite il

METODO DEI RESIDUI: ~~...~~ avendo che $f(z)$ ha poli semplici $\pm(i\pm 1)$, dunque ~~...~~ in D_R ci sono solo $i\pm 1$ ($R>\sqrt{2}$, ma infatti $R\to+\infty$!), vale che

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_i \text{ poli di } f \\ \text{racchiusi da} \\ \gamma_{1,R}\cup\gamma_{2,R}}} \operatorname{Res}(f, z_i) =$$

$$= 2\pi i \left\{ \left[\frac{\cancel{z} e^{-iyz}}{4z^{\cancel{4}3}}\right]_{z=i+1} + \left[\frac{\cancel{z}e^{-iyz}}{4z^{\cancel{3}2}}\right]_{z=i-1} \right\} \underset{((i\pm 1)^2=\pm 2i)}{=}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{\overbrace{e^{-iy(i+1)}}^{e^{y}\cdot e^{-iy}}}{8i} - \frac{\overbrace{e^{-iy(i-1)}}^{e^{y}\cdot e^{iy}}}{8i} \right\} =$$

$$= -\frac{\pi i}{2} e^{y} \frac{\left[-e^{-iy} + e^{iy}\right]}{2i} =$$

$$= \boxed{-\frac{\pi i}{2} e^{y} \sin(y)}$$; ora, mentre $\int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} \hat{f}(y)$,

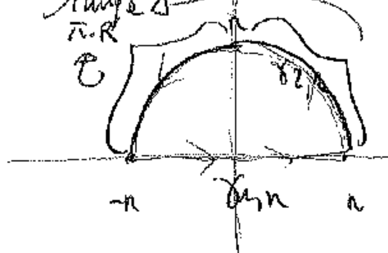
$\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \quad \forall y<0 \; (\star)$ (e $-\frac{\pi i}{2} e^{y}\sin(y)$ resta tale!)

$\Rightarrow \hat{f}(y) = -\frac{\pi i}{2} e^{y}\sin(y), \forall y<0$, così anche per $y=0$

perché $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$ PER DISPARITÀ, e proprio per questo (e per il fatto che f è NORM) $\hat{f}$ è INTEGRABILE e DISPARI, per cui $\forall y>0$ è $\hat{f}(y) = -\hat{f}(-y)$, e allora in conclusione $\boxed{\hat{f}(y) = \frac{\pi i}{2} e^{-|y|}\sin(y)}$. Allora

(6)

vista che trovare ($\triangle$) (che poi è il motivo per cui la tecnica va bene fare!) : $\left|\frac{z e^{-i\eta z}}{z^4+4}\right| \underset{(\eta<0)}{=}$



$= \frac{|z|\, e^{\eta \operatorname{Im}(z)}}{|z^4+4|} \underset{\boxed{\substack{\eta<0 \\ (\operatorname{Im}(z)\geq 0)}}}{\leq} \frac{|z|}{|z^4+4|}$, $\left(\begin{array}{l}|e^{-i\eta z}| = \\ = e^{\eta \operatorname{Im}(z)}\end{array}\right)$

che è $\underset{z\to\infty}{O}\left(\frac{1}{|z|^3}\right)$, quindi SU $\gamma_{2,R}$ è $\underset{R\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{R^3}\right)$;

ma $\left|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(\gamma_{2,R}(t))\,\underbrace{\gamma_{2,R}'(t)}_{(iRe^{it})}\,dt\right| \leq$

$\leq \int_0^{\pi} |f(\gamma_{2,R}(t))|\,\underbrace{|\gamma_{2,R}'(t)|}_{R}\,dt \sim \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2}\,dt = \frac{\pi}{R^2} \underset{R\to+\infty}{\to} 0$

(dunque bastava $\|f|_{\gamma_{2,R}}\| \underset{R\to+\infty}{\sim} \frac{1}{R^2}$, mentre $\frac{1}{R}$ sarebbe stato da valutare meglio...). ✓

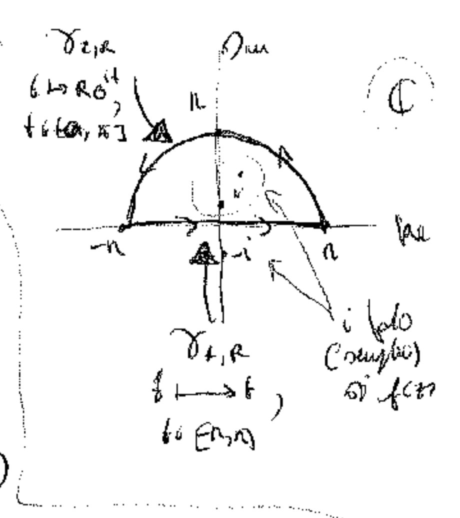
$\boxed{f(x) := \frac{x}{1+x^2}}$: è ~~continua~~ in $C_0^0 \Rightarrow$ in L^∞;

per l'integrabilità BASTA ALLORA il comportamento asintotico che è tipo $\frac{1}{|x|}$ per $|x|\to+\infty$, e allora $|f(x)|$ sta in L^p

$\Leftrightarrow p>1$ ($|x|^{-\beta}$ è integrabile su $[M,+\infty)$, $M>0$, $\Leftrightarrow$ $\beta>1$!); in particolare $f\in L^2\setminus L^1$, PERÒ sappiamo che comunque è $\underset{\text{(CHE ESISTE)}}{\hat{f}(\eta)} \overset{q.o.}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{-i\eta x}\,dx$,

ammesso che tale limite esista (anche se qui sarebbe mica poco...). $\overset{\text{VID: Finito!!}}{}$

Procedo come prima: $f(z) := \frac{z e^{-iyz}}{1+z^2}$
con $z \in \mathbb{C}$ (meromorfa) (olomorfa! fuori dai poli) $\Rightarrow$



$\hat f(y) \overset{q.o.}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz$; ma per il
teorema dei residui ($R>1$, ma indifferente)

$$\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\frac{z e^{-iyz}}{2z}\right]_{z=i} = \pi i e^{y}, \text{ e}$$

inoltre $\boxed{\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0}$ (★) $\forall y<0$

$\Rightarrow \hat f(y) \overset{q.o.}{=} \pi i e^{y}\ \forall y<0$,

e per disparità $\hat f(y) \overset{q.o.}{=} -\pi i e^{-y}$ per $y>0$,

mentre $\hat f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$ ($\hat f$ allora non è C^0!).

$$\hat f(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y=0 \\ -\operatorname{sgn}(y)\pi i e^{-|y|} & \text{q.o. altrimenti} \end{cases}.$$ Dimostro

(★): $|f(z)| = \frac{|z e^{-iyz}|}{|1+z^2|} = \frac{|z| e^{y \operatorname{Im}(z)}}{|1+z^2|}$, e allora non

posso fare come prima affermato su $\gamma_{2,R}$ con $\frac{1}{R}$ ($R\to+\infty$);

(infatti $|1+z^2|_{z=Re^{it}} = |1+R^2e^{2it}| \geq |R^2-1|$:

$1+R^2e^{2it} = 1+R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))$ che $|\cdot|^2 = (1+R^2\cos(2t))^2 +$
$+ R^4\sin^2(2t) = 1+2R^2\cos(2t)+R^4 \geq (R^2-1)^2 = R^4+1-2R^2$

perché semplicemente $\cos \geq -1 \Rightarrow 2R^2\cos(2t) \geq -2R^2$ (97)

e tutto questo $\forall t \in [0,\pi]$, dunque SU $\gamma_{2,R}$ PER INTERO, e

allora $\left| \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\gamma_{2,R}} |f(z)|\,dz = \int_0^\pi |f(Re^{it})|\, \underbrace{|\dot\gamma_{2,R}(t)|}_{|iRe^{it}|=R}\,dt =$

$= \int_0^\pi \frac{R\, e^{n\sin(t)}}{|1+R^2e^{2it}|}R\,dt \underset{R>1}{\leq} \underbrace{\frac{R^2}{R^2-1}}_{1} \int_0^\pi \underbrace{e^{n\sin(t)}\,dt}_{<\infty} \dots$

1 lo stesso...

(NOTIAMO CHE NON FORSE BASTA PERCORRERE $\gamma_{2,R}$ più lentamente (comunque):

$\gamma_{2,R}$ = anche il sostegno di $t \longmapsto Re^{it\left(\frac{1}{R}\right)}$, $t \in [0, \pi R]$,

ma comunque "esce" un R!) ; MA DEDUCO COMUNQUE

che $\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$: intanto ho certamente limitato ("CAMMINIGNI") (≥ 0)

e > 0 Se' l'errore che però $\int_0^\pi e^{n\sin(t)}\,dt \xrightarrow[n\to-\infty]{} 0$ ($n<0$)

per convergenza dominata (e infatti R è sempre più grande)! $\square$

$\mathbb{R}$ - spazio!

EX Posto $X := \{at^2+bt^3 \mid a,b\in\mathbb{R}$ su $t\in[-1,1]\} \subsetneq L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$,

trovare una base ortonormale (su $\mathbb{R}$) di X e scrivere esplicitamente

l'operatore di proiezione su X

Essendo per definizione $f\in X \Leftrightarrow f(t)=at^2+bt^3$ per opportuni $a,b\in\mathbb{R}$, basta che t^2 e t^3 siano LIN. INDIP. (su $\mathbb{R}$) per

poi ortonormalizzando con Gram-Schmidt, ma essendo non
(in effetti non è o e divisione (zero))
ortogonali fra loro in $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1} \underbrace{t^3 t^2}_{t^5} dt = 0$! Essendo
$2\int_0^1 t^4 dt = \frac{2}{5}$ e $2\int_0^1 t^6 dt = \frac{2}{7}$ le $\|\cdot\|_2^2$ di t^2 e t^3 risp.,
una base ortonormale è allora $\left\{\sqrt{\frac{5}{2}}t^2, \sqrt{\frac{7}{2}}t^3\right\}$. Ora
X ha dimensione finita ⇒ è totalmente chiuso, dunque
effettivamente esiste sempre la proiezione ortogonale di $L^2(-1,1)$ su
X : $\underset{\text{(Noto!)}}{P} f(t) := \frac{5}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t) t^2 dt\right] t^2 + \frac{7}{2}\left[\int_{-1}^{1} f(t) t^3 dt\right] t^3$.

$\boxed{\text{EX} \quad \text{TDF di } f(x) := \frac{\sin(x)}{1+x^2}.}$ ($L^1 \cap L^2$, poiché lo è $g(x) := \frac{1}{1+x^2}$)

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\frac{1}{1+x^2} - e^{-ix}\frac{1}{1+x^2}\right]$;

MA come sappiamo (e comunque è immediato!) $\forall g \in L^1$ è

$$\boxed{\widehat{e^{ihx} g(x)}(y) = \tau_h \hat{g}(y)} \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (\tau_h g(x) := g(x-h)),$$

e inoltre $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ha come visto $\hat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$: per
linearità della TDF si ha allora $\hat{f}(y) = \frac{1}{2i}\left[\pi e^{-|y-1|} - \pi e^{-|y+1|}\right]$.

$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$ $= \frac{\pi}{2} i \left[e^{-|y+1|} - e^{-|y-1|}\right]$ è effettivamente immaginaria pura e dispari!

(8)

(EX) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π-periodica $\Leftrightarrow$ $c_n(f)$ ... ??

[Essendo f derivabile su tutto $\mathbb{R}$, è chiaro che $f \in C^{\infty}_{per}(-\pi,\pi)$; $C^{\infty}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-per

la condizione è che sia $c_n(f) = \underset{|n|\to+\infty}{O}(|n|^{-k})$ $\forall k \geq 1$,

cioè $c_n(f) = \underset{|n|\to+\infty}{o}(|n|^{-k})$ $\forall k \geq 0$: infatti $c_n(f) =$

$= \underset{|n|\to+\infty}{O}(|n|^{-\alpha})$ con $\alpha > k+1$ (tipo $\alpha = k+2$) $\overset{\text{visto!}}{\Rightarrow}$ $f \overset{q.o.}{=} g \in C^k_{per}$, anzi $f = g$ per continuità di entrambe;

e viceversa $f \in C^k_{per} \Rightarrow c_n(f) = \underset{|n|\to+\infty}{o}(|n|^{-k})$.]

(EX) Sia, $\forall n \geq 0$, $f_n(x) := \dfrac{n}{1+n^4(x-n)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

per quali $1 \leq p < \infty$ $(f_n)_{n\geq 0}$ converge in L^p e qual è il lim$^{L^p}$?

[Intanto, $\forall n \geq 0$, $f_n(x)$ è C^0_0 ($\subseteq L^\infty$) e a $+\infty$ è asintoticamente eq. a $\frac{1}{|x|^2}$, che è p-integrabile $\forall p \geq 1$ su $[M, +\infty)$ $\forall M > 0$, dunque $f_n(x) \in L^p$ $\forall p \geq 1$.

Ora, $f_n \overset{L^p}{\rightarrow} f \Rightarrow$ vi converge "sotto-q.o."; ma

$\forall x \in \mathbb{R}$ $(f_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $\Rightarrow$ tale f, se esiste, deve essere $f \equiv 0$ ($\in L^p$ $\forall p \geq 1$!) ; resta da capire per quali $\forall p \geq 1$ ($\infty >$)

sia $\|f_n - 0\|_p = \|f_n\|_p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: $\forall n \geq 0$ $\|f_n\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{n}{1+n^4(x-n)^2}\right]^p dx =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{M}{1+y^2}\right]^p \frac{1}{M^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^{p-2}}{(1+y^2)^p}\,dy = M^{p-2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^p}\,dy}_{<\infty\ !\ (\forall p \ge 1)}$$

$(M \neq 0!)$

$M^2(x-M) =: y \iff x = \frac{y}{M^2} + M$, $\Rightarrow dx = \frac{dy}{M^2}$ e stessi estremi

$\xrightarrow[M\to+\infty]{} 0 \iff p < 2$, e allora la risposta è $\boxed{1 \le p \lneq 2}$. $\square$]

$\boxed{\text{EX}\ \ \text{TDF di } f(x) := (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}}.}$ $\leftarrow f \in L^1 \cap L^2!$

[Per linearità della TDF è $\hat f(y) = \widehat{e^{-x^2/2}}(y) + \widehat{-x^2 e^{-x^2/2}}(y)$;

ma $\widehat{e^{-x^2/2}}(y) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}}(y) \overset{(\text{noto!})}{=} \sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}$, mentre per

$-x^2 e^{-x^2/2}$ ricordo che, $\forall g \in L^1$ tale che anche $xg \in L^1$, $\hat g$ è

C^1 con $\hat g' = \widehat{-ixg(x)}$, e così se pure $x^2 g \in L^1$ allora

$\boxed{\hat g'' = \widehat{-x^2 g(x)}}$ $\left(\hat g'' = (\hat g')' = \widehat{-ixg(x)}\,' \underset{\substack{\uparrow \\ (x(-ixg(x)) = \\ = -ix^2 g(x) \in L^1!)}}{=} \widehat{(-ix)(-ixg(x))} = \widehat{-x^2 g(x)}\ !\ \checkmark \right)$; se $g(x) := e^{-x^2/2}$, allora tutto ciò

è vero e allora $\widehat{-x^2 e^{-x^2/2}}(y) = \widehat{e^{-x^2/2}}\,''(y) = \sqrt{2\pi}\left(e^{-y^2/2}\right)''$:

$$\left(e^{-y^2/2}\right)'' = \left(-y\, e^{-y^2/2}\right)' = -e^{-y^2/2} + y^2 e^{-y^2/2} \Rightarrow$$

$$\hat f(y) = \cancel{\sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}} - \cancel{\sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}} \boxed{+\sqrt{2\pi}\, y^2 e^{-y^2/2}}.\ \square\ ]$$

EX Dato $1 \le p \le \infty$, dare un esempio di successione

LIMITATA in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ che converge q.o. a 0 ma NON in $\mathcal{L}^1$ a 0.

$\forall n \geq 0$, sia $f_n(x) := I_{[0,1]}(x-n) = I_{[n,n+1]}(x)$: è ovvio che $(f_n)_{n\geq 1}$ è successione in $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ $\forall 1 \leq p \leq \infty$ con $\|f_n\|_p = 1$ $\forall p$, quindi limitata, e NON $\xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$, come è ovvio che $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $f_n(x) \to 0$. $\square$

EX TDF di $f(x) := e^{-|x|}\cos(x)$ $(\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})!)$.

Uso che $\widehat{(e^{-|x|})}(y) = \dfrac{2}{1+y^2}$ e che, $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{L}^1$, $\widehat{e^{ihx} f(x)}(y) = \tau_h \hat{f}(y) = \hat{f}(y-h)$: infatti $\cos(x) = \frac{1}{2}[e^{ix}+e^{-ix}] \Rightarrow f(x) = e^{-|x|}\cos(x) = \frac{1}{2}[e^{ix}e^{-|x|}+e^{-ix}e^{-|x|}]$, e allora (per linearità della TDF) $\hat{f}(y) = \frac{1}{2}\left[\widehat{e^{ix}e^{-|x|}}(y) + \widehat{e^{-ix}e^{-|x|}}(y)\right] = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cancel{2}^{1}}{\underbrace{1+(y-1)^2}_{y^2-2y+2}} + \frac{\cancel{2}^{1}}{\underbrace{1+(y+1)^2}_{y^2+2y+2}}\right] =$

$$= \frac{2y^2+4}{(y^2-2y+2)(y^2+2y+2)} = \frac{2y^2+4}{y^4+4}. \quad \square$$

EX Ottenere una base di HILBERT di $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ completando SCS, con $e(x) := \frac{1}{\sqrt{6\pi}}(1+e^{ix}+e^{2ix})$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$.

Lo spazio di HILBERT $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, essendo separabile, ammette certamente base di Hilbert numerabile che può essere ottenuta completando un qualsiasi SISTEMA ORTONORMALE di $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$ stesso, come ad esempio è $\{e\}$: infatti banalmente $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_0 + e_1 + e_2)$, dove $\forall n \in \mathbb{Z}$ $e_n := \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ $(x \in [-\pi,\pi])$ formano la "base canonica" di $L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, per cui $\|e\|^2 \underset{\text{PER ORTOG.}}{=} \frac{1}{3}\left(\underbrace{\|e_0\|^2}_{1} + \underbrace{\|e_1\|^2}_{1} + \underbrace{\|e_2\|^2}_{1}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$, cioè e è già normalizzato. A questo punto basta completare $\{e\}$ ad una base (ortonormale) di $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_0, e_1, e_2\}$, per poi aggiungere TUTTI gli e_n con $n \notin \{0,1,2\}$ (questo per conservare l'ortogonalità e per avere effettivamente un sist. orton. MASSIMALE): presi ad esempio $e_0 + e_1 + e_2$, $e_0 - e_1$ e $e_0 + e_1 - 2e_2$ per avere ortogonalità, quindi normalizzando $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(e_0+e_1+e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_1), \frac{1}{\sqrt{6}}(e_0+e_1-2e_2)\right\}$, e poi appunto aggiungo quindi e_n con $n \notin \{0,1,2\}$. □

EX TDF di $f(x) := \frac{1}{5+2x+x^2}$ $(\in L^1_{\mathbb{R}}!)$. $\left(\tau_a g(x) = g(x-a),\ \sigma_\delta g(x) := \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)$

L'idea è ricondursi al fatto noto $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(x) = \pi e^{-|x|}$ e usare $\widehat{\tau_h f}(x) = e^{-ixh}\hat{f}(x)$ $(\forall h \in \mathbb{R}, f \in L^1)$ e $\widehat{\sigma_\delta f}(x) = \hat{f}(\delta x)$ $(\forall \delta \neq 0)$: infatti $f(x) = \frac{1}{4+(x+1)^2} = \tau_{-1}\frac{1}{4+x^2}$, mentre $\frac{1}{4+x^2} = \left(\frac{1}{1+(x/2)^2}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sigma_2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, e allora

$f(x) = \frac{1}{2}\tau_{-1}\sigma_{1/2}\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{i\omega}\pi e^{-\frac{2|\omega|}{2}} = \frac{\pi}{2} e^{i\omega - 2|\omega|}$.] (10)

EX Trovare i $c_n(f)$ complessi di $f(x) := (\sin(x)\cos(x))^2$.
(in L^2 perché in C^∞, ~~in L^∞~~!)

[$\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x)$; ma $\sin(2x) =$

$= \frac{1}{2i}\left[e^{2ix} - e^{-2ix}\right] \underset{(\frac{1}{i} = -i)}{\Rightarrow} \sin^2(2x) = -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2 \Rightarrow$

$f(x) = -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 2 + e^{-4ix}\right)$; ora, usando che

$\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\,dx \overset{(2\pi\text{-PER.!})}{=} 0$, si ottiene che

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 1/8 & \text{se } n = 0 \\ -1/16 & \text{se } n = \pm 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$.]

(era comunque OVVIO!!)

EX Posto $X := \{u \in L^2_{\mathbb{R}}([0,1]) \mid u \in C^2 \text{ e } \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0\} \subsetneq$
$\subsetneq L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ ($\mathbb{R}$-sottosp. DENSO!), dimostrare che
l'operatore $T: X \to L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $Tu \doteq -\ddot{u}$ (ben definito e LINEARE!), è autoaggiunto e SEMIDEF. ≥ 0.

[$\forall u, v \in X$, $\langle Tu; v\rangle_2 = \int_0^1 (\underbrace{-\ddot{u}}_{\text{INTEGRO}})\underbrace{v}_{\text{DERIVO}}\,dx \overset{\dot{u} \in C^1!}{=} \cancel{\left[-\dot{u}v\right]_0^1}_{0} + \int_0^1 \dot{u}\dot{v}\,dx$
perché $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$

$\overset{(\text{ovvio})}{=} \langle u; Tv\rangle_2$ ✓, e inoltre allora $\langle Tu; u\rangle = \|\dot{u}\|_2^2 \geq 0$ $\forall u \in X$

MA non è 0 solo per $u = 0$, ma in generale per tutte e sole le u COSTANTI su $[0,1]$ (In effetti, cercando

$\begin{cases} u \in \mathcal{D}^2 \\ Tu = \lambda u, \lambda \neq 0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0 \\ \text{(e forse le costanti)} \end{cases}$ $Tu = \lambda u \iff \ddot{u} = -\lambda u$; ora $\lambda > 0$ per forza, altrimenti $\ddot{u} = |\lambda| u \iff$

$u(t) = \underset{0}{\overset{\parallel}{\alpha}} e^{|\lambda| t}$, che però ha derivata sempre > 0! Dunque $\ddot{u} = -\overset{>0}{\lambda} u \iff$

$u(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} t)$; ma $\dot{u}(t) = -\sqrt{\lambda}\alpha \sin(\sqrt{\lambda} t) + \sqrt{\lambda}\beta \cos(\sqrt{\lambda} t)$

si annulla in $0 \iff \beta = 0$, e ora si annulla in 1 $(\alpha \neq 0) \iff$

$\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, e in effetti avere comporterebbe $\lambda = 0$.) $\square$

(EX) TDF di $f(x) := x^2 e^{-|2x|}$.

$g, xg, x^2 g$ stanno in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{g}'' = \widehat{-ixg}' = \widehat{-x^2 g}$,

dove $g(x) := e^{-|2x|}$, $\underline{\text{OSSIA}}$ $\hat{f} = -\hat{g}''$; ora, sapendo che

$\underset{h(x)}{\widehat{e^{-|x|}}}(y) = \dfrac{2}{1+y^2}$ e che $\widehat{\sigma_\delta h}(y) = \hat{h}(\delta y)$ $\forall \delta \neq 0$

$\left(\sigma_\delta h(x) = \frac{1}{\delta} h\left(\frac{x}{\delta}\right)\right)$, allora $e^{-|2x|} = \frac{1}{2}\left(2e^{-\left|\frac{x}{1/2}\right|}\right) = \frac{1}{2}\sigma_{1/2} h(x)$

ha $\hat{g}(y) = \frac{1}{2}\hat{h}\left(\frac{y}{2}\right) = \dfrac{1}{1+(y/2)^2} = \dfrac{4}{4+y^2} \Rightarrow$

$\hat{f}(y) = -\left[\dfrac{4}{4+y^2}\right]'' = -\left[\dfrac{-4\cdot 2y}{(4+y^2)^2}\right]' = \left[\dfrac{8y}{(4+y^2)^2}\right]' =$

$= \dfrac{1}{(4+y^2)^{3}}\Big[\underbrace{8(4+y^2)}_{32+8y^2} - \underbrace{8y\cdot 2\,\cancel{(4+y^2)}\,2y}_{32y^2}\Big] = \dfrac{8(4-3y^2)}{(4+y^2)^3}$. $\square$

$\Rightarrow = 32 - 24y^2$
$8(4-3y^2)$

(EX) Una funzione $g(x_1, x_2) \doteq g_1(x_1) g_2(x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, con $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1_a(\mathbb{R})$, che TDF $_{(\text{in } \mathcal{L}^1_a(\mathbb{R}^2))}$ ha ??

(11)

Infatti $\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x_1,x_2)| dx_1 dx_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} |g_1(x_1)| \cdot |g_2(x_2)| dx_1 dx_2 \; = \;$ (FUBINI!)

$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g_1(x_1)| dx_1 \right] |g_2(x_2)| dx_2 = \|g_1\|_1 \|g_2\|_1 < \infty \Rightarrow g(x_1,x_2) \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$ $(= \langle x, y \rangle)$

A a questo punto $\hat{g}(y_1,y_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{g(x_1,x_2)}_{=g_1(x_1)g_2(x_2)} \underbrace{e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)}}_{=e^{-ix_1y_1} \cdot e^{-ix_2y_2}} dx_1 dx_2 \; = \;$ (FUBINI!)

$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_1(x_1) e^{-ix_1y_1} dx_1}_{\hat{g}_1(y_1)} \Big] g_2(x_2) e^{-ix_2y_2} dx_2 = \hat{g}_1(y_1) \cdot \hat{g}_2(y_2) < \infty$

$\forall y_1,y_2 \in \mathbb{R}$. □

EX Trovare una soluzione $u : [0,+\infty)_t \times [0,\pi]_x \to \mathbb{R}$, $C^1_{\mathbb{R}}$ nella t e $C^2_{\mathbb{R}}$ nella x, del problema

(u_0 è REALE!!)

$$(P) \begin{cases} \boxed{u_t = u_{xx}} \\ u(0,x) = \cos^2(x) \;\; \forall x \in [0,\pi] \quad (\nexists \; u_0(0) = u_0(\pi) = 1!) \\ \quad (=: u_0(x)) \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \;\; \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Se u è soluzione di (P), in particolare $u_t = u_{xx} \Rightarrow$ se $v := u_x$, allora $v_t = (u_x)_t = (u_t)_x = u_{xxx} = v_{xx}$, dunque anche v soddisfa $\boxed{v_t = v_{xx}}$; inoltre chiaramente $v(0,x) = u_x(0,x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x)$ e affinché $v(t,0) = v(t,\pi) = 0$: l'idea è che sarà

$v(t,x) = \sum_{n \geq 1} c_n(t) \sin(nx)$ $\underline{\text{CON}}$ $\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^{(0)} = \text{coeff. di } v \text{ di } -\sin(2x) \end{cases}$,

cioè $c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-n^2 t}$; ove

$-\sin(2x)$ è l' f(x) svolta in serie di $\mathcal{F}$, ovvero $\hat{c}_n^{\cos} = -1$ per $n=2$, e 0 altrimenti, $\Rightarrow$ $c_2(t) = -e^{-4t}$, e gli altri zero, $\Rightarrow$ $w(t,x) = -e^{-4t}\sin(2x)$, $\Rightarrow$

$u(t,x) = e^{-4t}\cos^2(x)$ risolve l'equazione (notare

che $u_{xx} = -2e^{-4t}\underbrace{[\cos^2(x) - \sin^2(x)]}_{= 2\cos^2(x) + \ldots}$!) . . .

Dato $0 < h < \pi$, calcolare i coeff. di Fourier di $I_{[-h,h]}$. (12)

[$I_{[-h,h]} \in L^2_{(\mathbb{R})}(-\pi,\pi)$ è PARI $\Rightarrow$ la sua serie di Fourier è $e_0 +$

$+ \sum_{n\geq 1} e_n \cos(nx)$, $e_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_{[-h,h]}(x)\,dx = \frac{h}{\pi}$ e

$\forall n \geq 1 \quad e_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I_{[-h,h]}\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^h \cos(nx)\,dx \overset{(n\neq 0!)}{=}$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=h} = \frac{2\sin(nh)}{n\pi}$. □]

(EX) Calcolare i coeff. di F. di $e^{|x|}$, $x \in (-\pi,\pi)$.

[$e^{|x|} \in L^2_{(\mathbb{R})}(-\pi,\pi)$ è PARI $\Rightarrow$ la sua serie di F. è $e_0 +$

$+ \sum_{n\geq 1} e_n \cos(nx)$, <u>DOVE</u> ~~[illegible]~~ $e_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\,dx =$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^x\,dx = \frac{e^{\pi}-1}{\pi}$ mentre, $\forall n \geq 1$ $e_n =$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\,dx = \frac{\cancel{2}^{1}}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{e^x\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{\cancel{2}}\right)}_{[e^{(1+in)x}+e^{(1-in)x}]}dx =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(1+in)x}}{(1+in)} + \frac{e^{(1-in)x}}{(1-in)}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\frac{e^{(1+in)\pi}}{1+in} + \frac{e^{(1-in)\pi}}{1-in}}_{= e^{\pi}\cdot(-1)^n \frac{2}{1+n^2}} - \overbrace{\left(\frac{1}{1+in}+\frac{1}{1-in}\right)}^{= \frac{2}{1+n^2}}\right]$

$= \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}$. □]

(EX) Calcolare i coeff. di F. di $\cos^4(x) - 2\sin^2(x)$.

$\Big[\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(\cos^4(x) - 2\sin^2(x)) = c_n(\cos^4(x)) - 2\,c_n(\sin^2(x))$, e allora calcolo separatamente; $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \sin^2(x) =$

$= -\frac{1}{4}\left[e^{2ix} + e^{-2ix} - 2\right] \Rightarrow \quad c_n(\sin^2(x)) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n=0 \\ -1/4 & \text{se } |n|=2 \\ 0 & \text{altrimenti } (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow$

$-2\,c_n(\sin^2(x)) = \begin{cases} -1 & \text{se } n=0 \\ 1/2 & \text{se } |n|=2 \\ 0 & \text{altrimenti } (n\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ Analogamente $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow$

$\cos^2(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2ix} + e^{-2ix} + 2\right] \Rightarrow \cos^4(x) = \frac{1}{16}\left[e^{4ix} + e^{-4ix} + 6 + \right.$
$\left. + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix}\right] \Rightarrow$

$$c_n(\cos^4(x)) = \begin{cases} 3/8 & \text{se } n=0 \\ 1/4 & \text{se } |n|=2 \\ 1/16 & \text{se } |n|=4 \\ 0 & \text{altrimenti } (n\in\mathbb{Z}) \end{cases},$$

$$\Rightarrow c_n(\cos^4(x) - 2\sin^2(x)) = \begin{cases} -5/8 & \text{se } n=0 \\ 3/4 & \text{se } |n|=2 \\ 1/16 & \text{se } |n|=4 \\ 0 & \text{altrimenti } (n\in\mathbb{Z}) \end{cases} \quad . \Big]$$

$\boxed{\text{(EX) Calcolare i coeff. di F. di } f(x) := x,\ x \in [-\pi,\pi), \text{ e dedurre la nota formula } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

$\Big[\ f \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$; $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n := c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \Rightarrow$

$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$ (per disparità), mentre $\forall n \neq 0$ integro per parti: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underset{D}{x}\, \underset{I}{e^{-inx}}\,dx \overset{(-1/i = i)}{=} \frac{1}{2\pi}\left\{ \left[x\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \cancel{\frac{i}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx}^{\,0} \right\} =$

$= \frac{1}{2\pi}\frac{i}{n}(-1)^n\, 2\pi = (-1)^n \frac{i}{n}$; in effetti $f \in \mathcal{C}^1 \overset{(\text{visto!})}{\Rightarrow}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{2\pi}[f(\pi) - f(-\pi)]$; ma $f' \equiv 1$ e $c_n(1) \overset{(e_n^{i0x})}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$: allora ritroviamo che, $\forall n \neq 0$, $0 = in\, c_n(f) + \frac{(-1)^n}{\cancel{2\pi}}\cancel{2\pi} \Leftrightarrow c_n(f) = \frac{(-1)^n}{-in} \overset{(-\frac{1}{i}=i)}{=} (-1)^n \frac{i}{n}$!

Comunque allora posso ottenere la formula di PARSEVAL, cioè che $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$: infatti $\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx =$

$= 2\underbrace{\int_0^{\pi} x^2 dx}_{\left(=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi^3}{3}!\right)} = \frac{2\pi^3}{3}$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} \overset{(\text{ovvio})}{=} 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\pi^3}{3} = 4\pi \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, da cui effettivo $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. $\square$

EX Calcolare i coeff. di F. di $f(x) := x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, e quindi che $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

$x^2 \in C^1_{per} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} x^2 dx}_{\pi^3/3} = \frac{\pi^2}{3}$ e soprattutto,

$\forall n \neq 0$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$, cioè $\underset{(1/i = -i)}{}$ $c_n(f) = -i\frac{c_n(f')}{n} \overset{f'=2x}{=}$

$= \frac{2}{n}(-i)\, c_n(x) \overset{(\text{EX. PREC.!})}{=} \frac{2}{n}(-i)(-1)^n \frac{i}{n} = (-1)^n \frac{2}{n^2}$. Ma allora

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n\neq 0} \underbrace{|c_n(f)|^2}_{\frac{4}{n^4}} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$, mentre

$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = 2\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} \overset{(\text{PARSEVAL})}{\Rightarrow} \frac{2\pi^{\cancel{5}\,4}}{5} = 2\cancel{\pi}\left(\frac{\pi^4}{9} + 8 \cdot \sum_{n\geq 1} 1/n^4\right)$, cioè $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$. $\square$

EX $\forall k \geq 0$, sia $f_k(x) := x^k$ su $[-\pi,\pi]$: trovare una formula ricorsiva per calcolare i coeff. di F. di f_k, $k\geq 1$, e farlo da quelli di f_{k-1}. Calcolare da $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

$\boxed{\forall k\geq 1}$ (anche 0), $f_k \in C^1 \Rightarrow \forall m\in\mathbb{Z}$, $c_m(f_k')\overset{(\star)}{=} im\, c_m(f_k) +$
$+\frac{(-1)^m}{2\pi}\left[f_k(\pi)-f_k(-\pi)\right]$; ora $f_k(x)=x^k \Rightarrow f_k'(x) = k x^{k-1} =$
$= k f_{k-1}$ mentre $f_k(\pi)-f_k(-\pi) = \pi^k - \underbrace{(-\pi)^k}_{\pi^k(-1)^k} = \pi^k(1-(-1)^k)$, da
cui $\frac{(-1)^m}{2\pi}\left(f_k(\pi)-f_k(-\pi)\right) = \frac{(-1)^m\pi^{k-1}}{2}\left[1-(-1)^k\right]$ e allora $(\star)$
È $k\,c_m(f_{k-1}) = im\, c_m(f_k) + \frac{(-1)^m\pi^{k-1}}{2}\left[1-(-1)^k\right]$, cioè $(m\neq 0)$ $\left(\frac{1}{i}=-i\right)$

$$c_m(f_k) = -i\frac{k}{m}\,c_m(f_{k-1}) + i\,\frac{(-1)^m\pi^{k-1}}{2m}\left[\underbrace{1-(-1)^k}_{=0 \Leftrightarrow k \text{ pari; altrimenti } =2}\right]$$; il

passo base vale ovviamente che $f_0\equiv 1$ ha $c_m(f_0)=\begin{cases}1 & \text{se } m=0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$)

mentre, per $m=0$ (e $\forall k\geq 0$), $c_0(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^k\,dx$ $= \xrightarrow[k \text{ pari}]{k \text{ dispari} \to 0} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^k\,dx =$
$=\frac{\pi^k}{k+1}$. In particolare per $k=3$, cioè per x^3, è

$c_0(x^3) = 0$ e, $\forall m\neq 0$, $c_m(x^3) = \underbrace{-i\frac{3}{m}\,c_m(x^2)}_{=\frac{(-i)6(-1)^m}{m^3}} +$
$+\; i\,\frac{(-1)^m\pi^2}{m} = i(-1)^m\underbrace{\left(\frac{\pi^2}{m}-\frac{6}{m^3}\right)}_{>0!}$ $\left(c_m(x^2) \underset{\text{(Ex. prec.)}}{=} (-1)^m\frac{2}{m^2}\right)$,

$\Rightarrow \forall m\neq 0$, $|c_m(x^3)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{m}-\frac{6}{m^3}\right)^2 = \frac{\pi^4}{m^2}+\frac{36}{m^6}-\frac{12\pi^2}{m^4} \Rightarrow$

$\sum_{m\neq 0}|c_m(x^3)|^2 = 2\Big(\underbrace{\sum_{m\geq 1}\frac{\pi^4}{m^2}}_{\pi^4\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^6}{6}} + \sum_{m\geq 1}\frac{36}{m^6} - \underbrace{\sum_{m\geq 1}\frac{12\pi^2}{m^4}}_{12\pi^2\frac{\pi^4}{90}=\frac{2\pi^6}{15}}\Big) = \cancel{36}\,72\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^6} + \frac{\pi^6}{3} -$
$-\frac{4\pi^6}{15} =$

(visto!)

$= 72 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} + \frac{\pi^6}{15}$; ora, $\|x^3\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx =$

$= 2\int_0^{\pi} x^6 dx = \frac{2\pi^7}{7} \overset{\text{PARSEVAL}}{=} 2\pi \underset{\text{(vedi sopra...!)}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}} |c_n(f)|^2$ e' come dire

$\frac{\pi^6}{7} = 72 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} + \frac{\pi^6}{15}$, cioè $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{72}\left[\frac{\pi^6}{7} - \frac{\pi^6}{15}\right] =$

$= \frac{1}{9}\,\frac{\pi^6}{105} = \frac{\pi^6}{945}$. ⌋ (o' "$\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}\setminus\{0\})$")

(EX) Dimostrare che $\ell^2_{\mathbb{R}} := \{(x_n)_{n\geq 1} \text{ in } \mathbb{R} \mid \sum_{n\geq 1} x_n^2 < \infty\}$ CON $\langle (x_n)_{n\geq 1}; (y_n)_{n\geq 1}\rangle_{\ell^2_{\mathbb{R}}} := \sum_{n\geq 1} x_n y_n$ e' $\mathbb{R}$-sp. vettoriale ("+" e "·" definiti "componente per componente"!) con $\langle;\rangle$, ed è anzi DI HILBERT "perchè" ISOMORFO ISOMETRICAMENTE a $X := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}((0,\infty)) \mid \forall k\geq 0, f$ è q.o. COSTANTE in $(k, k+1]\}$.

(X è CHIUSO (perchè!) ($f_n \xrightarrow{L^2(0,\infty)} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2(k,k+1)} f$!...))

Che sia $\mathbb{R}$-sp. vett. è ovvio (con $O = (0,0,0,\dots,0,\dots)$) tranne che $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow \sum_{n\geq 1}(x_n+y_n)^2 < \infty$; ma dalla ovvia disuguaglianza

$\boxed{\forall a,b\in\mathbb{R},\ (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)}$ $((a-b)^2\geq 0!)$ deduciamo tale risultato grazie al teorema del CONFRONTO. Ora, $\langle;\rangle_{\ell^2_{\mathbb{R}}}$ e' ovviamente ben definito PER SCHWARZ in $\mathbb{R}^m$, $\forall m\geq 1$: $\forall m\geq 1$,

$\left|\sum_{n=1}^{m} x_n y_n\right| \leq \left\{\sum_{n=1}^{m} x_n^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n=1}^{m} y_n^2\right\}^{1/2} \overset{\text{CONFRONTO}}{\Rightarrow} \left|\sum_{n\geq 1} x_n y_n\right| \leq$

$\leq \left\{\sum_{n\geq 1} x_n^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n\geq 1} y_n^2\right\}^{1/2} < \infty$; e questo (anche e' ovviamente un prodotto scalare, e esso induce proprio la norma $\|(x_n)_{n\geq1}\|_{l^2_\mathbb{R}} = \{\sum_{n\geq1} x_n^2\}^{1/2}$ (quindi la dis. precedente è la dis. di SCHWARZ in $l^2_\mathbb{R}$!). Allora è noto che avere una ISOMETRIA $\phi : l^2_\mathbb{R} \to X$ (essendo X chiuso in $L^2_\mathbb{R}(1,\infty) \Rightarrow X$ è uno spazio DI HILBERT) $\Rightarrow$ anche $l^2_\mathbb{R}$ è COMPLETO; considero $\phi((x_n)_{n\geq1}) \doteq f(x)$ tale che $f_{|(k,k+1)} \overset{q.o.}{=} x_k \ \forall k\geq1$: è ben definita perché $f \in L^2_\mathbb{R}(1,\infty)$ $\left(\int_1^{+\infty} f(x)^2\,dx \underset{\bigcup_{k\geq1}(k,k+1)}{=} \sum_{k\geq1}\int_k^{k+1} \underbrace{f^2(x)}_{x_k^2}\,dx = \sum_{k\geq1} x_k^2 \cdot 1 < \infty !\right)$, è facilmente LINEARE e suriettiva e iniettiva ($\ker(\phi) \underset{(S)}{=} \{0\}$), e infine conserva la norma (cioè il prodotto scalare!), come già detto. □

($\Rightarrow$ tutto ciò vale per $l^2_\mathbb{R}(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ (perché $\sum_{n\neq0} x_n^2 = \sum_{n\geq1} x_n^2 + \sum_{n\leq-1} x_n^2$ sono $<\infty$ contemporaneamente), e quindi per ultimo ma su $\mathbb{C}$!)

(NOTA: sarà istruttivo verificare direttamente la completezza di $l^2_\mathbb{R}$! Sia infatti $((x_n^{(k)})_{n\geq1})_{k\geq1}$ DI CAUCHY in $l^2_\mathbb{R}$: $\forall \varepsilon>0$, e ne teniamo uno, $\exists \bar{k}\geq1$ tale che $k'>k\geq\bar{k} \Rightarrow \|(x_n^{(k')})_{n\geq1} - (x_n^{(k)})_{n\geq1}\|^2_{l^2_\mathbb{R}} = \sum_{n\geq1}(x_n^{(k')} - x_n^{(k)})^2 \leq \varepsilon$; MA ovviamente, $\forall n\geq1$ fissato, $\forall\varepsilon>0$ gli stessi k rendono vero che $(x_n^{(k')} - x_n^{(k)})^2 \leq \varepsilon \Rightarrow$ $\forall n\geq1$, $(x_n^{(k)})_{k\geq1}$ è DI CAUCHY in $\mathbb{R}$, cioè ivi convergente: diciamo a $x_{(n)}$. Allora $(x_n^{(k)})_{n\geq1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} (x_{(n)})_{n\geq1}$: infatti, in corrispondenza di quel $\varepsilon>0$ (e $\bar{k}$), $\forall k'>k\geq\bar{k}$ e $\forall N\geq1$ $\sum_{n=1}^{N}(x_{(n)} - x_n^{(k)})^2 = \sum_{n=1}^{N}\left(\left(\lim_{k'\to+\infty,\ k'>k} x_n^{(k')}\right) - x_n^{(k)}\right)^2 =$

$n \backslash k$	1	2 3 …	k …	∞
1	$x_1^{(1)}$	…	$x_1^{(k)}$	$x_{(1)}$
2	$x_2^{(1)}$	…	$x_2^{(k)}$	$x_{(2)}$
3	$x_3^{(1)}$	…	$x_3^{(k)}$	$x_{(3)}$
⋮	⋮		⋮	⋮
n	$x_n^{(1)}$	…	$x_n^{(k)}$	$x_{(n)}$
⋮	⋮		⋮	⋮

$$= \lim_{\substack{n' \to +\infty, \\ n' > n}} \underbrace{\sum_{m=1}^{N} \left(x_m^{(n')} - x_m^{(n)}\right)^2}_{\left(\le \sum_{m\ge 1}(\dots) \le \varepsilon\right)} \le \varepsilon \quad \text{, e lo stesso per } N \to +\infty .$$

$(\forall n\ge 1)$ $\|(x_m)_{m\ge1}\|_{l^2_{\mathbb{R}}} \le \|(x_m^{(n)})_{m\ge1}\|_{l^2_{\mathbb{R}}} + \|(x_m - x_m^{(n)})_{m\ge1}\|_{l^2_{\mathbb{R}}}$ e allora $< +\infty$ d'ora!

Notiamo che necessariamente $\|(x_m)_{m\ge1}\|_{l^2_{\mathbb{R}}} < \infty$. □

(EX) Una base di $l^2_{\mathbb{R}}$ è $(e_m)_{m\ge1}$, $e_m := (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ m\text{-esima} \\ \text{coordinata}}}{1}, 0, \dots) =$
$= (x_n^{(m)})_{n\ge1}$ CON $x_n^{(m)} = \text{"}\delta_{n,m}\text{"} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. ($\Rightarrow l^2_{\mathbb{R}}$ è SEPARABILE!)

Infatti $(e_n)_{n\ge1}$ è un SIST. ORT.: $\forall n\ge1$, $\|e_n\|_{l^2_{\mathbb{R}}} = \sqrt{1} = 1$, e $\forall n\ge1$ $m\ne n \Rightarrow \langle e_n; e_m\rangle_{l^2_{\mathbb{R}}} = 0$ è facile; allora, come visto, $(e_n)_{n\ge1}$ è MASSIMALE (cioè BASE) $\Leftrightarrow \{e_n | n\ge1\}^{\perp} = \{0\}$: se $(x_n)_{n\ge1} \in l^2_{\mathbb{R}}$ è $\perp e_n$ $\forall n\ge1$, allora $\forall n\ge1$ $0 = \langle (x_m)_{m\ge1}; e_n\rangle_{l^2_{\mathbb{R}}} \overset{(\text{ovvio})}{=} x_n$, $\Rightarrow (x_n)_{n\ge1} = 0$.

(Posso anche verificare direttamente: $\forall x = (x_n)_{n\ge1} \in l^2_{\mathbb{R}}$, è ovvio $\forall n\ge1$ $x_n = \langle (x_m)_{m\ge1}; e_n\rangle_{l^2_{\mathbb{R}}}$; considero allora $y_m :=$
$:= \sum_{n=1}^{m} x_n e_n \ (\in l^2_{\mathbb{R}}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\forall m\ge1$: dico che
$y_m \xrightarrow{l^2_{\mathbb{R}}} x$. Infatti $\|x - y_m\|_{l^2_{\mathbb{R}}} = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \end{pmatrix} \right\|_{l^2_{\mathbb{R}}} =$
$= \sum_{n\ge m+1} x_n^2 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(x \in l^2_{\mathbb{R}}!)$.) □

(EX) Siano $p_0, p_1, p_2, \dots$ i polinomi ottenuti applicando la procedura di ortonormalizzazione in $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ di Gram-Schmidt ai monomi $1, x, x^2, \dots$: dimostrare che formano una

BASE di $L^2_n(-1,1)$, e che p_n è pari/dispari se n è pari/dispari rispettivamente.

Come nella teoria è $\mathrm{Span}\{p_n \mid n\geq 0\} = \mathrm{Span}\{x^n \mid n\geq 0\} = \{$i polinomi reali su $[-1,1]\}$ $\subsetneq C^0([-1,1])$: qui ciò è denso rispetto a $\|\cdot\|_\infty \underset{(\text{banalmente!})}{\Rightarrow} \|\cdot\|_2$, per STONE-WEIERSTRASS (reale); allora lo è in L^2 perché C^0 lo è in L^2. Ora, per $\underset{(\text{pari!})}{n=0}$ ho la costante 1 su $[-1,1]$ che dà p_0 semplicemente per normalizzazione, CIOÈ $p_0 \equiv \frac{1}{\underset{\sqrt{2}}{\|1\|_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, effettivamente PARI; allora per ottenere p_1 devo ortogonalizzare p_0 e x, (per poi normalizzare, MA tale normalizzazione è ininfluente rispetto al coeff(p_1), dunque la lascio perdere ~~...~~ ora e nel seguito) ossia sostituire x CON $x - \langle x; p_0\rangle_2 p_0$; MA $\begin{cases} x \text{ DISPARI} \\ p_0 \text{ PARI}\end{cases} \Rightarrow$ $\langle x; p_0\rangle_2 = 0$, DATO CHE stiamo integrando su $[-1,1]$, e allora a meno di $n=1$ dispari $\Rightarrow p_1$ dispari. Dimostro in generale per induzione su n: supponendo ~~...~~ le tesi vere $\forall\, 0\leq k\leq n$ ~~...~~, lo è per $n+1$ perché p_{n+1}, a meno di normalizzazione, lo ottengo da $x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle p_k; x^{n+1}\rangle p_k$, ed è chiaro che $n+1$ pari/dispari $\Rightarrow$ nella somma restano solo i p_k pari/dispari (siamo SU $[-1,1]$!), $\Rightarrow$ p_{n+1} è pari/dispari (in effetti NON importava l'induzione). $\square$

(EX) Se X è DI HILBERT, allora tutte le basi hanno sempre la stessa cardinalità.

Possiamo quindi supporre $\dim_{\mathbb{R}} X = \infty$. Cominciamo col seguente

FATTO: $\forall\, V$ $\mathbb{R}$-sp. vett. $\neq \{0\}$, $\dim V = \infty$, $\mathcal{B} \subseteq V$ sottoinsieme di vettori LIN. INDIPENDENTI, $|\mathcal{B}| \geq \aleph_0 \Rightarrow |\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}| \underset{(\leq)}{=} |\mathcal{B}|$.

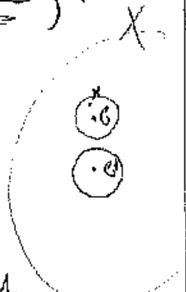
$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B} = \bigcup_{m \geq 1} A_m$, $A_m := \left\{ \sum_{n=1}^{m} a_n b_n \mid \forall\, 1 \leq n \leq m,\ a_n \in \mathbb{Q} \text{ e } b_n \in \mathcal{B} \right\}$; ora

$$A_m \longrightarrow \mathbb{Q}^m \times \mathcal{B}^m, \qquad \sum_{n=1}^{m} a_n b_n \longmapsto ((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m))$$

è BIUNIVOCA (suriettività ovvia, e INIETTIVITÀ $\Leftarrow$ lin. indip. degli $e \in \mathcal{B}$!), dunque $|A_m| = |\mathbb{Q}^m \times \mathcal{B}^m| = |\mathcal{B}^m| = |\mathcal{B}|$. □

Sia ora $\mathcal{B} \subseteq X$ BASE DI HILBERT, cioè SIST. ORT. tale che $\overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \mathcal{B}}^X = X$: allora anche $D := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}$ è tale che $\overline{D}^X = X$, e inoltre abbiamo $|D| = |\mathcal{B}|$. Allora, $\forall$ altra base $\mathcal{B}' \subseteq X$, ovvio che

$$\mathcal{B}' \longrightarrow D, \qquad e \longmapsto \text{un (solo) } x \in D \cap B(e, \tfrac{\sqrt{2}}{2})$$



è ben definita ($\exists\, x$ per densità di D in X!) e INIETTIVA ($e \neq e' \Rightarrow B(e, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap B(e', \frac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$ essendo $\|e - e'\| = \sqrt{2}$!), $\Rightarrow |\mathcal{B}'| \leq |D| = |\mathcal{B}|$, da cui la tesi per simmetria. □

(EX) Con I insieme $\neq \emptyset$ qualsiasi, si consideri le σ-algebre $(I, \mathcal{P}(I), \mu)$ con μ "misura contatrice", cioè data da

$$\mu(J) := \begin{cases} |J| & \text{se } J \text{ è FINITO} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall J \subseteq I.$$

Ogni $f: I \to \mathbb{R}$ è ovviamente MIS. e ha "$\|f\|_2^2$" $:= \int_I f(i)^2 \, d\mu(i) = \sup_{\substack{J \subseteq I \\ \text{FINITO}}} \sum_{i \in J} f(i)^2$

Allora, dato per buono che $\ell^2(I) := \mathcal{L}^2(I,\mu) := \{f \in \mathbb{R}^I \mid \|f\|_2^2 < \infty\}$ con $\langle f;g\rangle_2 := \sup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ FINITO}}} \sum_{i \in J} f(i)g(i)$ sia $\mathbb{R}$-spazio vettoriale DI HILBERT, dimostrare che ha BASE $(e_i)_{i\in I}$, $e_i := I_{\{i\}} = \begin{cases} 1 & \text{su } \{i\} \\ 0 & \text{altrove (di fuori)} \end{cases}$ (per cui $|I| \underset{\neq}{\geq} \aleph_0 \Rightarrow \ell^2(I)$ è di Hilbert NON SEPARABILE!) (Riconoscere che $\ell^2(\mathbb{N}\setminus\{0\}) = \ell^2_{\mathbb{R}}$.)

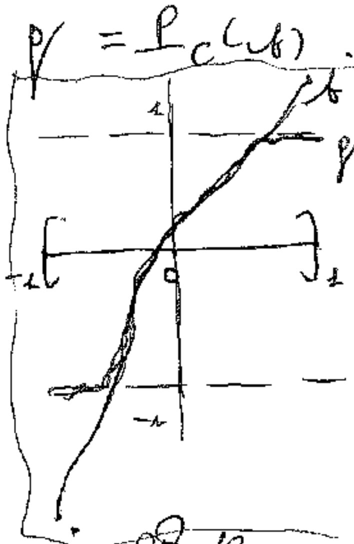
[Tutto calcolabile: $\|e_i\|_2^2 = \overset{\text{max}}{\cancel{\sup}}\{0,1\} = 1 \ \forall i \in I$ (tutte e sole le $\sum_{J \text{ fin}}$!), mentre $\forall i \neq j \ \langle e_i; e_j\rangle_2 = \max\{0\} = 0$ $(I_{\{i\}} I_{\{j\}} = I_\emptyset = 0!)$; allora è base perché $\{e_i \mid i \in I\}^\perp \underset{(\subseteq)}{=} \{0\}$: $\forall j \in I$, $(f(i))_{i\in I} \perp e_j \Leftrightarrow 0 = \langle (f(i))_{i\in I}; e_j\rangle_2 = f(j)$, cioè $f \equiv 0$. $\square$]

(È ovvio che, per crescenza della successione e termini positivi delle somme parziali, $\sup_{\substack{J \subseteq \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ J \text{ FINITO}}} \sum_{i \in J} f(i)^2 = \sum_{j\geq 1} f(j)^2$, e lo stesso per $\langle\, ;\, \rangle_2$. ✓)

(EX) Dimostrare che $C := \{f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1) \mid |f| \leq 1 \text{ q.o.}\}$ è sottoinsieme CHIUSO e CONVESSO di $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ (NON $\mathbb{R}$-sottosp.!), e che $\forall f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$ è $P_C(f) = (f \wedge 1) \vee (-1)$.

[$(f_n)_{n\geq 1}$ in C tale che $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^2} f \Rightarrow$ si può supporre la convergenza q.o.; ora, $N := \{f_n \not\to f\} \cup \bigcup_{n \geq 1}\{|f_n| > 1\}$ è TRASC. e fuori da lui $|f_n(x)| \to |f(x)| \Rightarrow |f| \leq 1$ qui! È cioè CHIUSO; inoltre è convesso: $\forall f, g \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $|f| \le 1$ fuori da A e $|g| \le 1$ fuori da B $\Rightarrow$ $|\lambda f + (1-\lambda) g| \le \lambda |f| + (1-\lambda)|g| \le \lambda + (1-\lambda) = 1$ fuori da $A \cup B$ (oltre che stare in L^2!) ✓. Ora, ovviamente $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$, 1 e $-1 \in L^2(-1,1)$ $\Rightarrow$ $(f \wedge 1) \vee (-1) \in L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$, e inoltre $(f\wedge 1) \vee (-1) \ge -1$ e $\underset{(\le 1)}{(f \wedge 1)} \vee \underset{(\le 1)}{-1} \le 1$ $\Rightarrow g := (f\wedge 1)\vee(-1) \in C$;

se g MINIMIZZA $\|f-g\|_2^2$, allora davvero $g = P_C(f)$.



Ora infatti $\|f-g\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (f-g)^2 \, dx =$

$$= \int_{\{f>1\} (= \{g=1\})} (f-g)^2 dx + \int_{\{f<-1\} (= \{g=-1\})} (f-g)^2 dx + \cancel{\int_{\{-1\le f \le 1\} (= \{g=f\})} (f-g)^2 dx}^{\,0} \text{ e}$$

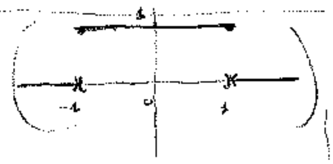
gli altri due integrali sono ≥ 0 e GIÀ MINIMIZZATI (sui rispettivi insiemi): ad es., per $\int_{\{f>1\}} (f-g)^2 dx = \int_{\{f>1\}} (f-1)^2 dx$, $\forall h \in C$ tale che $h < 1$ su $M \subseteq \{f>1\}$ NON TRASC. (ovvero che così stia $\{f>1\}$!), è allora $(f-h)^2 > (f-1)^2$ $\Rightarrow$

$$\int_{\{f>1\}} (f-1)^2 dx = \int_{\{f>1\}\setminus M} (f-1)^2 dx + \int_M (f-1)^2 dx <$$

(come sopra)

$$< \int_{\dots} \dots + \int_M (f-h)^2 dx = \int_{\{f>1\}} (f-h)^2 dx.$$ Analogo per $\{f<-1\}$. □

↳ OVVIAMENTE h deve essere diversa da g su un NON trasc. M che è $\subseteq \{f>1\}$ o $\subseteq \{f<-1\}$ o $\subseteq \{-1 \le f \le 1\}$; nel terzo caso NON può far meglio di f; nel primo NON può che essere $h<1$ $(g=1)$ su M (o $M' \subseteq M$), ecc.

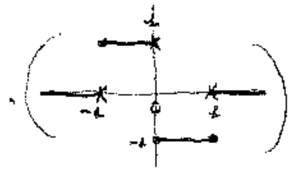
(EX) TDF di $f(x) := I_{[-1,1]}(x)$ 

($\in L^1_x \cap L^2_x$!)

[$\hat{f}(\eta)$ esiste $\forall \eta \in \mathbb{R}$ (e sarà reale e pari MA NON in $L^1_\eta(\mathbb{R})$, perché $f \notin C^0_x(\mathbb{R})$!) ed è $\hat{f}(\eta) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\eta x}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-i\eta x}\,dx \overset{\eta=0 \;\nearrow\; =2}{\underset{\eta\neq 0}{=\!=\!\Longrightarrow}} \left[\frac{e^{-i\eta x}}{-i\eta}\right]_{x=-1}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{\eta}\left(\frac{e^{i\eta} - e^{-i\eta}}{i}\right) = \frac{2\sin(\eta)}{\eta} \quad \left(\xrightarrow[\eta\to 0]{} 2 \,!\right) . \quad \square \;]$$

(EX) TDF di $f(x) := I_{[-1,1]}(x) - 2\, I_{[0,1]}(x)$. 

($\in L^1_x \cap L^2_x$!)

[$\hat{f}(\eta)$ esiste $\forall \eta \in \mathbb{R}$ (e sarà immaginaria pura e dispari MA NON in $L^1_\eta(\mathbb{R})$, essendo $f \notin C^0_x(\mathbb{R})$!) e la posso ottenere per linearità una volta calcolata $\widehat{I_{[0,1]}}(\eta) = \int_0^1 e^{-i\eta x}\,dx \overset{\eta=0 \;\nearrow\; =1}{\underset{\eta\neq 0}{=\!=\!\Longrightarrow}} \left[\frac{e^{-i\eta x}}{-i\eta}\right]_{x=0}^{x=1} \overset{(-\frac{1}{i} = i !)}{=}$

$$= \frac{i}{\eta}\left[\underbrace{e^{-i\eta}}_{(\cos(\eta) - i\sin(\eta))} - 1\right] = \frac{\sin(\eta)}{\eta} + \frac{i\cos(\eta)}{\eta} - \frac{i}{\eta} \quad : \text{ allora}$$

$$\hat{f}(\eta) \overset{\eta=0 \;\nearrow\; 2-2=0}{\underset{\eta\neq 0}{=\!=\!\Longrightarrow}} \frac{2\sin(\eta)}{\eta} - 2\left(\frac{\sin(\eta)}{\eta} + \frac{i\cos(\eta)}{\eta} - \frac{i}{\eta}\right) =$$

$$= -2\frac{i}{\eta}\left(\cos(\eta) - 1\right) = \frac{2i}{\eta}\left(1 - \cos(\eta)\right) \quad \left(\xrightarrow[\eta\to 0]{} 0 \quad (\text{DE L'HOSPITAL})\right)$$

CALCOLO ALTERNATIVO : l'idea è usare $I_{[-1/2,1/2]}$, tale che $I_{[-1/2,1/2]}(x) = I_{[-1,1]}(2x)$ e $I_{[0,1]}(x) = I_{[-1/2,1/2]}(x - 1/2)$, cioè $I_{[-1/2,1/2]} = \frac{1}{2}\sigma_{1/2} I_{[-1,1]}$ e $I_{[0,1]} = \tau_{1/2} I_{[-1/2,1/2]}$; infatti

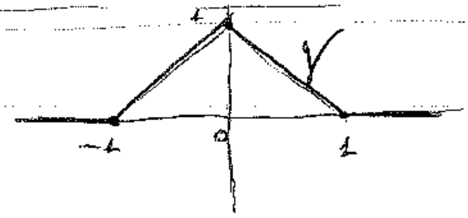
allora $\widehat{I_{[-1/2,1/2]}}(\eta) = \frac{1}{2}\widehat{I_{[-1,1]}}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin(\eta/2)}{\eta/2}\right) = \frac{2\sin(\eta/2)}{\eta}$,

$\Longrightarrow \widehat{I_{[0,1]}}(\eta) = e^{-i\eta/2}\,\widehat{I_{[-1/2,1/2]}}(\eta) = e^{-i\eta/2}\,\frac{2\sin(\eta/2)}{\eta} =$

$= (\cos(\nu/2) - i\sin(\nu/2))\frac{2\sin(\nu/2)}{\nu} = \underbrace{\frac{2\sin(\nu/2)\cos(\nu/2)}{\nu}}_{(=\frac{\sin(\nu)}{\nu}\quad(\nu=\nu/2+\nu/2!))} - 2i\frac{\sin^2(\nu/2)}{\nu}$, e

Allora $\hat f(\nu) = 2\frac{\sin(\nu)}{\nu} - 2(\ldots) = \frac{4i\sin^2(\nu/2)}{\nu}$; MA

infatti: $2\sin^2(\nu/2) = \underbrace{\cos^2(\nu/2)+\sin^2(\nu/2)}_{(=1!)} - (\underbrace{\cos^2(\nu/2)-\sin^2(\nu/2)}_{(=\cos(\nu/2+\nu/2)=\cos(\nu)!)}) = 1-\cos(\nu)$.

EX TDF di 

. ($\in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}\cap\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}$!) (e reale pari)

Il punto è che $g' \overset{q.o.}{=} f$ dell'EX. precedente, solo che $g\notin C^1_0(\mathbb{R})$ ... PERÒ $g\in C^0_0(\mathbb{R})$ e C^1 A TRATTI con $f\in\mathcal{L}^1$, (E A SUPP. COMPATTO...)

per cui comunque $\hat f(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(x)}_{i}\underbrace{e^{-i\nu x}}_{D}dx = \overbrace{\cancel{\left[g(x)e^{-i\nu x}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}}}^{\text{banalmente }0} +$

$+(i\nu)\hat g(\nu)$, ossia possiamo comunque usare che $\widehat{"g'"}(\nu) =$

$= i\nu\hat g(\nu)$: $\hat g(0) = 1$, mentre effettivo $\forall\nu\neq0$ è

$\hat g(\nu) = \frac{1}{i\nu}\hat f(\nu) \overset{(EX.\ PREC.)}{=} \frac{1}{\cancel{i}\nu}\cdot\frac{2\cancel{i}}{\nu}(1-\cos(\nu)) = 2\frac{1-\cos(\nu)}{\nu^2}$ (e reale pari) (Notare: $\xrightarrow[\nu\to0]{} 2\cdot 1/2 = 1$).

EX Date $a,b>0$, calcolare $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+a^2t^2)(1+b^2t^2)}dt$.

Che sia "a" o sia "b", diciamo "a", $\frac{1}{1+a^2t^2}\in C^0_0(\mathbb{R})\Rightarrow$ $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$, ed essendo all'infinito $\sim 1/t^2$ è anche in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ (oltre che $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$!) ; d'altra parte $\frac{1}{1+a^2t^2} = \frac{1}{a}\sigma_{1/a}f(t)$ CON $f(t):=\frac{1}{1+t^2}$ $\Rightarrow \widehat{\frac{1}{1+a^2t^2}}(\nu) = \frac{1}{a}\widehat{f(t)}\left(\frac{\nu}{a}\right) = \frac{\pi}{a}e^{-\frac{|\nu|}{a}}$

(essendo notoriamente $\hat{f}(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$!) $\in L^1_m(\mathbb{R})$), e allora posso usare la formula $\langle f_1 ; f_2 \rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}_1 ; \hat{f}_2 \rangle_2$ (ciò è anche ovvio per PARSEVAL !) : infatti l'integrale del testo è =

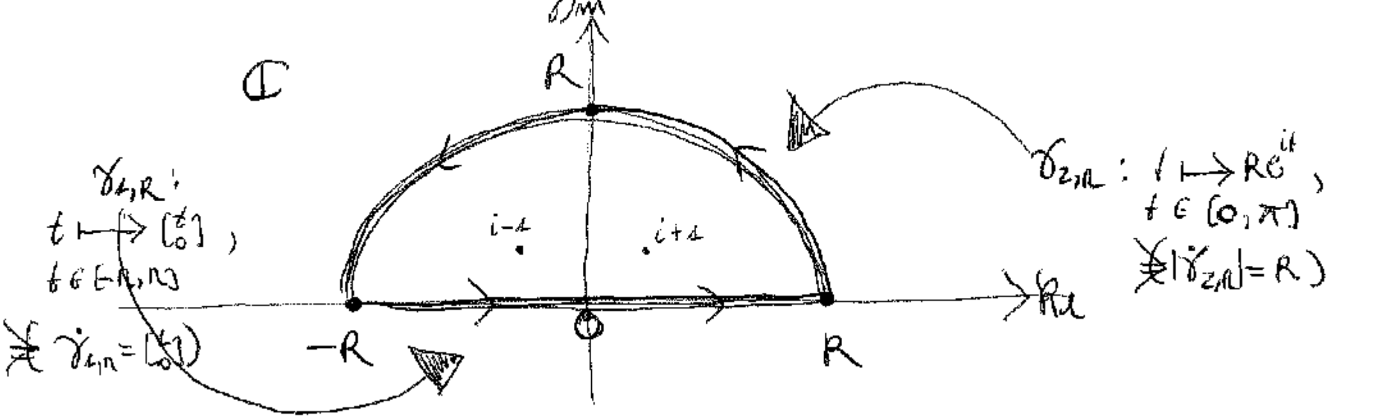
$$= \left\langle \frac{1}{1+a^2t^2} ; \frac{1}{1+b^2t^2} \right\rangle_2 = \frac{1}{2\pi}\left\langle \frac{\pi}{a} e^{-\frac{|\omega|}{a}} ; \frac{\pi}{b} e^{-\frac{|\omega|}{b}} \right\rangle_2 =$$

$$= \frac{\pi}{2ab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})|\omega|}\,d\omega = \frac{\pi}{ab}\int_{0}^{\infty} e^{-(1/a+1/b)\omega}\,d\omega = \frac{\pi}{ab}\left[\frac{e^{-(1/a+1/b)\omega}}{-(1/a+1/b)}\right]_{\omega=0}^{\omega=\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{ab}\underbrace{\frac{1}{1/a+1/b}}_{=\frac{ab}{a+b}} = \frac{\pi}{a+b} \;.\quad \square \;]$$

(EX) TDF di $f(x) := \dfrac{1}{4+x^4}$.
($\in L^1_m \cap L^2_m$, e pari!)

[Consideriamo $g(z) := \dfrac{e^{-i\omega z}}{4+z^4}$ di variabile complessa $z \in \mathbb{C}$, meromorfa tranne che nei suoi poli (semplici!) $\pm(i \pm 1)$ e col numeratore sempre $\neq 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$; essendo $g|_{\mathbb{R}}(x) = \dfrac{e^{-i\omega x}}{4+x^4} = f(x)\,e^{-i\omega x}$, applichiamo allora il teorema dei residui (per g) per il calcolo di $\hat{f}$: consideriamo al solito, $\forall R>0$, la curva regolare a tratti in $\mathbb{C}$ $\gamma_{1,R} \circ \gamma_{2,R}$ (in cui possiamo supporre tranquillamente che $R > \sqrt{2}$!) come in figura



,

è allora $\int_{\gamma_{1,R}} g(z)\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz = \sum_{\substack{z_i \text{ poli di } g \\ \text{"racchiusi" da} \\ \gamma_{1,R}\cup\gamma_{2,R}}} \text{Res}(g,z_i)\,2\pi i$; MA

ovviamente $\int_{\gamma_{1,R}} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-iyx}}{1+x^4}\,dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} \hat f(y)\ \forall y\in\mathbb{R}$,

mentre come vedremo $\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0\ \forall y\le 0$, e infine $\forall y\in\mathbb{R}$

$$\left(\text{Res}(g,i+1)+\text{Res}(g,i-1)\right)2\pi i = 2\pi i\left[\frac{z e^{-iyz}}{4z^4}\Big|_{z=i+1} + \frac{z e^{-iyz}}{4z^4}\Big|_{z=i-1}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{(i+1)\overset{e^{-iy}\cdot e^{y}}{e^{-iy(i+1)}}}{-16} + \frac{(i-1)\overset{e^{iy}\cdot e^{y}}{e^{-iy(i-1)}}}{-16}\right] = -\frac{i\pi e^{y}}{8}\left[(i+1)e^{-iy}+(i-1)e^{iy}\right] =$$

$$= -\frac{i\pi e^{y}}{8}\left[\underbrace{e^{-iy}-e^{iy}}_{(=-2i\sin(y))} + i\underbrace{\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)}_{(=2\cos(y))}\right] = \frac{\pi e^{y}}{4}\left(\cos(y)-\sin(y)\right),$$

$\Rightarrow \hat f(y) = \frac{\pi e^{y}}{4}\left(\cos(y)-\sin(y)\right)\ \forall y\le 0$; ma f reale e pari $\Rightarrow \hat f$ reale e pari, quindi è $\hat f(y) = \frac{\pi e^{-|y|}}{4}\left(\cos(|y|)+\sin(|y|)\right)$ $\forall y\in\mathbb{R}$ ~~(anche in 0 perché $f\in L^1 \Rightarrow \hat f \in C^0$!)~~. Allora resta che provare $\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0\ \forall y<0$: $\left|\int_{\gamma_{2,R}} g(z)\,dz\right| =$

$\overset{(\text{DEF.})}{=} \left|\int_0^\pi g(\gamma_{2,R}(t))\,\dot\gamma_{2,R}(t)\,dt\right| \le \int_0^\pi |g(\gamma_{2,R}(t))|\,R\,dt$; ma $|g(z)| =$ ($\forall t\in[0,\pi]$, $z=\gamma_{2,R}(t)$)

$$= \frac{|e^{-iyz}|}{|4+z^4|} \overset{\text{ovvio}}{=} \frac{e^{y\,\text{Im}(z)}}{|4+z^4|} \underset{(\text{essendo } \text{Im}\ge 0!)}{\overset{\boxed{y\le 0}}{\le}} \frac{1}{|4+z^4|} = O_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{R^4}\right) \text{ (immediato)},$$

e ovviamente $\int_0^\pi \frac{1}{R^4}\cdot R\,dt = \frac{1}{R^3}\pi \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. □

($\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4+x^4} = \frac{\pi}{4}$!!)

(Ex) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ INVERTIBILE: $\widehat{f(Ax)}(y) =$ $(\forall y \in \mathbb{R}^n)$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, e^{-i\langle y;x\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-i\langle (A^{-1})^T y;\, t\rangle} \frac{dt}{|\det A|} =$$

$\left(Ax = t \overset{\det A \neq 0}{\iff} x = A^{-1}t \Rightarrow dx = |\det A^{-1}|\, dt = \frac{dt}{|\det A|}\right.$, e dominio $\mathbb{R}^n$!) $\Rightarrow$ $\left(\langle y;x\rangle = \langle y; A^{-1}t\rangle \overset{\text{ovv.}}{=} \langle (A^{-1})^T y; t\rangle\right)$

$$= \frac{1}{|\det A|}\hat f((A^{-1})^T y)$$

; dunque f RADIALE $\Rightarrow \hat f$ RADIALE:

infatti f RADIALE $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall A \in SO(n)$ (cioè con $A^{-1} = A^T$ e $\det A = +1$!), $f(Ax) = f(x)$; ma allora $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\hat f(y) = \widehat{f(Ax)}(y) = \frac{1}{|\det A|}\hat f((A^{-1})^T y) =$$

$$= \frac{1}{1}\hat f(\underset{(A^{-1})^T}{A}\, y) \quad \forall A \in SO(n). \quad \square$$

(Ex) $X := \{u \in \mathcal{L}^2_m(-1,1) \mid u \in C^2_m[-1,1]$ e $u(-1) = u(1) = 0\} \subsetneq \mathcal{L}^2_m(-1,1)$ ($\mathbb{R}$-sottosp. (proprio) DENSO!), $T: X \to \mathcal{L}^2(-1,1)$ def da $T(u) := (a+x^2)\ddot u + bx\dot u$ (LINEARE!):

$$\forall u, v \in X,\ \langle Tu; v\rangle_2 = \int_{-1}^{1} (a+x^2)\ddot u\, v\, dx + \int_{-1}^{1} bx\dot u v \overset{u \in C^1}{=}$$

$$= \underbrace{\cancel{[(a+x^2)\dot u v]_{-1}^{1}}}_{=0\ (v(1)=v(-1)=0)} - \int_{-1}^{1} \dot u \underbrace{[(a+x^2)v]'}_{2xv + (a+x^2)\dot v} dx + \int_{-1}^{1} bx\dot u v =$$

$$= \int_{-1}^{1} [-(a+x^2)\dot u \dot v + (b-2)x v \dot u]\, dx$$

(per averlo in forma "più" simmetrica"!)

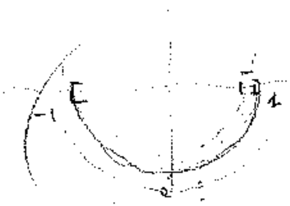
$\Rightarrow \forall u,v \in X$, $\langle Tu;v\rangle_2 - \langle u;Tv\rangle_2 = (b-2)\int_{-1}^{1} x(v\dot u - \dot v u)\,dx$;

allora T è autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $b=2$: infatti se $b=2$ allora è chiaramente autoaggiunto; altrimenti NO perché ad esempio $u \doteq x^2-1$ e $v \doteq x^4-1$ ($\in X$!) $\Rightarrow$ la funzione
($\dot u = 2x$) ($\dot v = 4x^3$)

integranda è ($\not\equiv 0$) PARI!

Per autoaggiunto e DEF. POS., sia $b=2$ e allora, $\forall u \in X$,

$$\langle Tu;u\rangle_2 = \int_{-1}^{1} -\underbrace{(a+x^2)}_{\not\equiv 0}\dot u^2\,dx \geq 0 \Leftarrow a \leq -1$$



e $=0 \Leftrightarrow \dot u = 0$, cioè ($u\in X$!) $u \equiv 0$, ossia

$a+x^2 \leq 0$ m.e. su $[-1,1]$ $\Leftrightarrow$ $a \leq -1$

$a \leq -1$ $\Rightarrow$ T ANCHE DEF. POS.! Se $a>-1$, ($\Leftarrow$:)

allora $-(a+x^2) < 0$ per ad es. $x=1$ $\Rightarrow$ in un opportuno piccolo intorno U (simmetrico) di 1 (diciamo con $1 \notin U$); allora basta prendere $u \doteq I_U$ ($\in X$) e si ha

$\langle Tu;u\rangle < 0$ anche se $u \neq 0$ (oppure u con $\dot u \neq 0$ e compatto supp. $u \subseteq U$, quindi $\langle Tu;u\rangle < 0$!). ✓

Se al posto di X prendiamo $Y := C^2_{x}([-1,1])$ (DIRLO!), allora ovviamente affinché T sia autoaggiunto dovremmo $b=2$ (altrimenti ho un controesempio in $X \subseteq Y$!); allora $\forall u,v \in Y$ $\langle Tu;v\rangle_2 \overset{\text{(come prima)}}{=} (a+1)[\dot u v]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(a+x^2)\dot u \dot v\,dx$;

dunque T autoaggiunto $\Leftrightarrow$ $a=-1$: $\forall u,v \in Y$,
$\langle Tu;v\rangle_2 - \langle u;Tv\rangle = (a+1)[\dot u v - \dot v u]_{-1}^{1} = 0$ se e solo,

1 di $a \neq -1$ allora può AD ES. $u(x) := x^2/2$ e $v(x) \equiv 1 \Rightarrow$ (2)

$[\dot u v - \dot v u]_{-1}^{1} = (x]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2 \neq 0$!

È ANCHE DEF. POS. ?? $\underset{(b=2,\, a=-1)}{}$ $\forall u \in Y$, $\langle Tu; u\rangle_2 = -\int_{-1}^{1} \underbrace{(x^2-1)}_{\le 0}\dot u^2\,dx$

$\geq 0 \Rightarrow$ è SEMIDEF. POS.; però anche NON def. pos.)

perché $u \equiv$ costante $\neq 0 \Rightarrow \langle Tu; u\rangle_2 = 0$. □

(EX) Trovare $u : (0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ del problema

$$(P)\begin{cases} \boxed{u_{ttt} = 2u_{xx}} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), \quad u_0(x) := 4\sin^2(x) \\ u_t(0, \cdot) = u_{tt}(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

(regolare!)

e discuterne l'unicità.

$\exists$ soluzione di (P) $\forall u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞_{per} ??

Scrivendo $\boxed{u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx}}$, $c_n(t) \doteq c_n(u(t,\cdot)) =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\,dx$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow c_n(0) = c_n^{(0)}$, se

$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(0)} e^{inx}$!), $u_{ttt} = 2u_{xx} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}$,

$c_n(u_{ttt}) = 2\, c_n(u_{xx})$, cioè $\dddot c_n(t) = -2n^2 c_n(t)$ almeno a

livello formale (cioè scambiando "$\sum$" con "∂" e ~~[illegible]~~ anche "$\int$" con "∂" per il calcolo $c_n(\partial t) = \dot c_n(t)$!), e quindi

$$(\star)\begin{cases} \dddot c_n(t) = -2n^2 c_n(t) \\ \dot c_n(0) = \ddot c_n(0) = 0 \\ c_n(0) = c_n^{(0)} \end{cases}$$

($\dot c_n(t) = c_n(u_t) \Rightarrow \dot c_n(0) = 0$, e lo stesso per $\ddot c_n(t)$!);

Ora, $\hat{c}_n^{(0)} = c_n(4\sin^2(x)) = 4\,c_n(\sin^2(x))$; ma $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow$

$\sin^2(x) = -\frac{1}{4}\left[e^{2ix} + e^{-2ix} - 2\right]$, già in "serie" di F. complessa,

cioè $\hat{c}_n^{(0)} = \begin{cases} 2 & \text{per } n=0 \\ -1 & \text{per } |n|=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$; ritornando alla e (*),

$\forall n \notin \{-2, 0, 2\}$ $\hat{c}_n^{(0)} = 0 \Rightarrow c_n(t) \equiv 0$; per $n=0$ $c_0(t)$ è un polinomio di grado 2 al più, ma dalle condizioni nelle derivate è ovviamente $c_0(t) \equiv c_n(0) = 2$; per $|n|=2$

invece $\| c_n(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{t}\cos(\sqrt{3}t) + a_3 e^{t}\sin(\sqrt{3}t) \|$

$$\left(\dddot{x} = -8x \iff \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \right.$$

, dove A ha eq. caratt. $\lambda^3 + 8 = 0$, i cui autovalori (semplici) = le radici cubiche di -8, ossia $\sqrt[3]{8} = 2$ moltiplicato per le radici cubiche di -1, che sono -1 e $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; in conclusione ha autovalori -2 e $1 \pm i\sqrt{3}$, da cui $x(t)$ (come le altre) è combinazione lineare di e^{-2t}, $e^{t}\cos(\sqrt{3}t)$ e $e^{t}\sin(\sqrt{3}t)$ ✓),

con gli $a_i \in \mathbb{C}$ univocamente determinati dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} -1 = c_n(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = \dot{c}_n(0) = -2a_1 + a_2 + \sqrt{3}a_3 \\ 0 = \ddot{c}_n(0) = 4a_1 - 2a_2 + 2\sqrt{3}a_3 \end{cases}$$

, cioè

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -1 \\ -2a_1 + a_2 + a_3\sqrt{3} = 0 \\ 2a_1 - a_2 + a_3\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 0 \text{ e } a_2 = 2a_1$$

cioè $\Rightarrow \boxed{a_1 = -\tfrac{1}{3},\ a_2 = -\tfrac{2}{3},\ a_3 = 0}$, cioè per $|m|=2$ $\quad c_m(t) = -\frac{1}{3} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^{t}\cos(\sqrt{3}t) = \left(= -\frac{1}{3}\left[e^{-2t} + 2e^{t}\cos(\sqrt{3}t)\right]\right)$,

$$\boxed{u(t,x) \doteq 2 - \frac{2}{3}\left[e^{-2t} + 2e^{t}\cos(\sqrt{3}t)\right]\cos(2x)} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{i2x} + e^{-i2x} = 2\cos(2x)!\right)$$

Ora guardiamo u: è effettivamente $[0,+\infty)\times[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, di classe C^3 (C^∞) in entrambe le variabili, oltre $u_{ttt} = 2u_{xx}$ per costruzione (i passaggi formali iniziali sono corretti per la convergenza in C^3 delle "serie" che definiscono u, più per la regolarità di u), è 2π-periodica nella x assieme a u_x (ovviamente), $u(0,x) = 2 - 2\underbrace{\cos(2x)}_{(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \underbrace{2 - 2\cos^2(x)}_{2(1-\cos^2(x)) = \sin^2(x)} + 2\sin^2(x) = 4\sin^2(x)$ e chiaramente $u_t(0,x) = u_{tt}(0,x) = 0$, dunque è una soluzione. In realtà è UNICA purché di classe C^3: infatti allora, per il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale, $c_n(t) \in C^3$ e sussistono le formule $c_n(t) = c_n(u(t))$, $\dot{c}_n(t) = c_n(u_t)$, $\ddot{c}_n(t) = c_n(u_{tt})$ e $\dddot{c}_n(t) = c_n(u_{ttt})$; usando poi ancora $c_n(u_{xx}) = (in)^2 c_n(t) = -n^2 c_n(t)$, allora effettivamente $u_{ttt} = 2u_{xx}$ + condizioni iniziali $\Leftrightarrow$ $(*)$, che determina UNIVOCAMENTE i $c_n(t)$.

Sia u soluzione di (P) per una qualche $u_0 \in C^\infty_{per}$; necessariamente i $c_n(t)$ devono risolvere $(*)$ (con $c_n^{(0)}$ non noto!), ossia $\forall n \neq 0$ $c_n(t) = a_1 e^{-2at} + a_2 e^{at}\cos(\sqrt{3}at) + a_3 e^{at}\sin(\sqrt{3}at)$ con

$e := 2^{-1/3} m^{2/3}_{(\neq 0!)}$ e $e_i \in \mathbb{C}$ determinati univocamente dalle cond. iniziali:

$$\begin{cases} c_m^{(0)} = e_1 + e_2 \\ 0 = \cancel{e}(-2e_1 + e_2 + \sqrt{3}\, e_3) \\ 0 = \cancel{2e^2}(2e_1 - e_2 + \sqrt{3}\, e_3) \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 = \frac{c_m^{(0)}}{3} \\ e_2 = 2e_1 = \frac{2c_m^{(0)}}{3} \\ e_3 = 0 \end{cases}, \text{ onde}$$

$(e \neq 0!)$

$$c_m(t) = \frac{c_m^{(0)}}{3}\left[e^{-2et} + 2 e^{et} \cos(\sqrt{3}\, e t) \right] =$$

$$= \frac{c_m^{(0)}}{3}\left[\exp(-2^{2/3} m^{2/3} t) + 2 \exp(2^{-1/3} m^{2/3} t) \cos(3^{1/2} 2^{-1/3} m^{2/3} t) \right].$$

L'idea è che vediamo $u_0 \in C^\infty_{per}$ e t_0 tali che $c_m(t_0)$ NON sia infinitesima, che sarebbe un assurdo; ebbene, sia u_0 con coeff di F. $\boxed{c^{(0)}_{\pm m} := e^{-m^{1/3}}}$ $\forall m \geq 0$ (in effetti $(0 \leq) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-2m^{1/3}} < \infty$),

che essendo $O(|m|^{-k})$ $\forall k > 0$ $\Rightarrow u_0 \in C^\infty_{(per!)}$, e inoltre è PARI perché $c^{(0)}_{-m} = c^{(0)}_{m}$ e REALE perché $\overline{c^{(0)}_{-m}} = \overline{c^{(0)}_{m}} = c^{(0)}_{m}$ ($c^{(0)}_m$ è reale!!);

ora $t_0 := \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ e $M := 2m^3$, $m \in \mathbb{Z}$, il coseno è $\equiv 1$, e allora $c_M(t_0) \underset{M \to +\infty}{\sim} \frac{2}{3} c_M^{(0)} \exp(2^{-1/3} \underbrace{M^{2/3}}_{m^2} t_0) =$

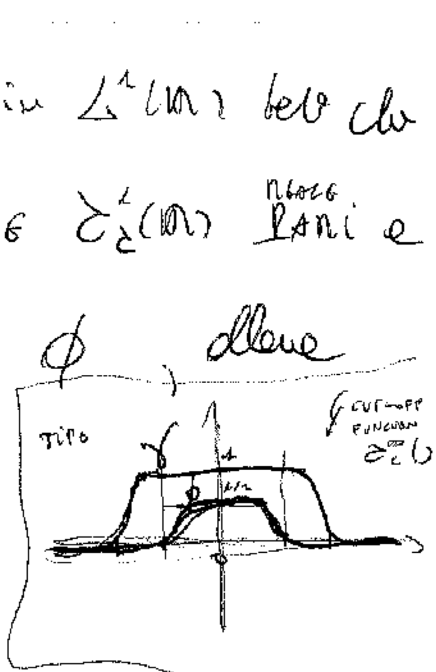
(dato $M \to +\infty$) $\exp(-M^{1/3}) = \exp(-2^{1/3} m)$

$$= \frac{2}{3} \exp(t_0 2^{-2/3} m^2 - 2^{1/3} m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty \quad ! \quad \square$$

(EX) Se per assurdo $\exists\, \rho \in L^1(\mathbb{R})$ tale che, $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * \rho = f$, allora è anche $\hat{f} \cdot \hat{\rho} = \hat{f}$; ma ad esempio $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\hat{f}(y) = e^{-|y|} \neq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\forall y \in \mathbb{R}$, $\hat{\rho}(y) = 1$, che NON è infinitesima all'infinito: assurdo.

Però è possibile trovare $f \neq 0$ e $\rho \neq 0$ in $L^1(\mathbb{R})$ tale che $f * \rho = f$; ad esempio $\phi, \gamma \in C_c^1(\mathbb{R})$ PARI e supporto compatto con $\gamma = 1$ nel supporto di ϕ, allora

$\boxed{\phi \cdot \gamma = \phi}$; inoltre $\phi \in C^1 \cap L^1$,



$\phi' \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \hat{\phi} \in L^1$ (lo stesso per γ!), e allora $f := \frac{1}{2\pi}\hat{\phi}$ è reale, pari e in $L^1(\mathbb{R})$ con $\hat{f} = \frac{1}{2\pi}\underset{\text{pari}}{\hat{\hat{\phi}}} = \phi$ (lo stesso per $\rho := 1/2\pi\, \hat{\gamma}$) : pertanto $f * \rho = f$ in quanto

$$\widehat{f*\rho} = \hat{f} \cdot \hat{\rho} = \phi \cdot \gamma = \phi = \hat{f} \ . \quad \square$$

(EX) $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f \in L^1$ e $f' \in L^2 \Rightarrow \widehat{f'} = iy\hat{f}$

Infatti sia $\rho(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ e $\rho_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\rho(\frac{x}{\delta})$ con $\delta > 0$: allora

$\underset{\in L^2}{f'} * \underset{\in L^1}{\rho_\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{L^2} f'$; ma $f' * \underset{\in L^2}{\rho_\delta} \overset{(f \in C^1 \text{ con } f' \in L^2)}{=} (f * \rho_\delta)' \overset{\text{anche } \rho_\delta \in C^1 \text{ con } \rho_\delta \in L^2!}{=} \underset{L^1}{f} * \rho_\delta'$

$\Rightarrow \widehat{f' * \rho_\delta} = \widehat{f * \rho_\delta'} = \hat f\,\widehat{\rho_\delta'} = \hat f\,(i\xi)\,\hat\rho_\delta$; MA

$\downarrow L^2 \Rightarrow$ anche q.o. $\qquad \rho' \quad \rho' \qquad \in L^1$!!

$\widehat{f'}$ $\qquad\qquad \hat\rho_\delta(\xi) = \hat\rho(\delta\xi) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \hat\rho(0) = 1$ (cont.)

$\downarrow \delta\to 0$

$(i\xi)\hat f$

Da cui $\widehat{f'} \overset{q.o.}{=} i\xi\, \hat f$. □

Ex ($\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$) $(f_n)_{n\ge 1}$, f ~~misurabili~~ CON $f_n \xrightarrow{L^1(B)} f$ $\forall$ palle B centrate in 0 $\Rightarrow$ $f_n \xrightarrow{L^1(E)} f$ $\forall$ E misurabile e limitato.

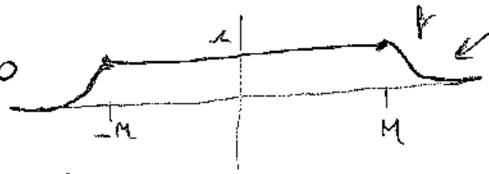
<u>OVVIO</u>: E limitato $\Rightarrow$ $E \subseteq B$ per una certa B, e allora

$$\int_E |f_n - f|\,dx \le \int_B |f_n - f|\,dx = \|f_n - f\|_{L^1(B)} \to 0 \quad . \square$$

Ex $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0^0(\mathbb{R})$, e la TDF in L^1 ha <u>immagine densa</u> in $C_0^0(\mathbb{R})$.

[Infatti C_c^∞ è $\|\cdot\|_\infty$-denso in C_c^0 ; infatti $f \in C_c^0 \Rightarrow$ UNIF. CONT. , e allora segue che $\rho_\delta * f \xrightarrow[\delta\to 0]{L^\infty} f$

($\rho \in C_c^\infty$, se è il pennello, e $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,dx = 1$) ; ora C_c^0 è denso in C_0^0 : infatti, $\forall f \in C_0^0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ tale che $|x| \ge M \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon$, ora fissato $\varphi \in C_c^0$

Tipo 

← Continua e a supp. compatto $\Rightarrow$

$f_\varepsilon \doteq f\varphi$ è tale che $\|f - \underbrace{\varphi f_\varepsilon}_{f\varphi}\|_\infty \overset{\text{Conv}}{\le} \varepsilon$ ✓

Ora $\mathcal{F}(L^1_x(\mathbb{R})) \subsetneq C^0_0(\mathbb{R})$; $f \in C^1_c$ ($\subseteq L^1 \cap C^1$, $f \in L^1$, $f' \in L^1$) $\Rightarrow$ $\hat f \in L^1$ e allora

$\check{\hat f} = 2\pi f$, ossia $2\pi f(-x) = \hat{\hat f}$,

$\Rightarrow C^1_c \subseteq \mathcal{F}(L^1)$ (è infatti ogni $\varphi(x) \in C^1_c$ come $\varphi(x) = 2\pi f(-x) = \widehat{(\hat f)}$!),

e a maggior ragione $C^\infty_c \subseteq \mathcal{F}(L^1)$. $\square$

(Ex) Coeff. di F. di $g(x) \doteq 1 - \cos(2x)$ in $L^2(0,\pi)$ rispetto a $(\sin(nx))_{n\ge 1}$; dim. che il problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,\cdot) = 0 \end{cases}$$

ammette soluzione $u : [0,+\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ C^2 in x e C^1 in t.

Si può dire di più su tale regolarità?

$$\forall n \ge 1,\ a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1 - \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)dx$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_0^\pi \Big(\underbrace{2e^{-inx} - 2e^{inx}}_{-2i\sin(nx)} + \underbrace{e^{i(2+n)x} - e^{-i(n+2)x}}_{2i\sin((n+2)x)} + \underbrace{e^{i(n-2)x} - e^{-i(n-2)x}}_{+2i\sin((n-2)x)}\Big)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[2\sin(nx) - \sin((n+2)x) - \sin((n-2)x)\right] dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\frac{4}{n} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n-2}\right]} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=\pi}^{x=0} = \frac{1-(-1)^n}{n} \begin{cases} 2/n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$b=0$ se $n=0$, altrimenti...

$$\frac{4(n^2-4) \overbrace{- 2n(n-2) - 2n(n+2)}^{= -2n^2+4n-2n^2-4n}}{\pi n (n^2-4)} =$$

$$= \boxed{\frac{-16}{\pi n (n^2-4)}}$$

Formalmente, se $u(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \sin(nx)$, allora $u_t = u_{xx} + f$

$\iff \forall n \geq 1$, $\begin{cases} \dot{c}_n(t) = -n^2 c_n(t) + a_n \\ c_n(0) = 0 \end{cases} \overset{\text{ovvio}}{\iff}$

$c_n(t) = \frac{a_n}{n^2}(1 - e^{-n^2 t})$, e allora

dovrebbe essere $u(t,x) = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{a_n}{n^2}(1-e^{-n^2 t}) \sin(nx)}_{=: u_n(t,x)}$; l'idea è

che tale serie è ben definita e con le richieste regolarità

purché converge in norma C^1 nella t e in norma C^2 nella x;

e questo fatto anche sembra "$\sum$ con ∂", sarà ovvio

che u è soluzione, ed inoltre $\dot{c}_n(t)$ è C^1 e per derivare

sotto il segno di $\int$ con $\dot{c}_n(t) = c_n(t)$, allora

per il conto appena fatto sarà UNICA.

Ebbene, $\|u_n\|_\infty = \frac{|a_n|}{n^2} = O(n^{-5})$
$(t\geq 0!!)$ $\|(u_n)_x\|_\infty = \frac{|a_n|}{n} = O(n^{-4})$

(6)

$\|(u_n)_{xx}\|_\infty = |e_n| = \mathcal{O}(n^{-3})$ E ANCHE

$\|(u_n)_t\|_\infty = |e_n| = \mathcal{O}(n^{-3})$!!

ORA, è chiaro che in realtà $u \in C^3$ nella x, essendo $\|(u_n)_{xxx}\|_\infty = \mathcal{O}(n^{-2})$; inoltre $u(t,x) =$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n^2} \sin(nx)}_{=:\, h(x)} - \sum_{n\geq 1} \frac{e_n}{n^2} e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad , \text{ ove ,}$$

è ovvio che la funzione che ha coeff. $\frac{e_n}{n^2}$ è la sola

che $\begin{cases} \ddot{h}(x) = -f(x) = \cos(2x) - 1 \\ h(0) = h(\pi) = 0 \end{cases}$ $\left(-\overset{e_n}{c_n(f)} = c_n(\ddot{h}) = (-n^2) c_n(h) \,! \right)$)

cioè $h(x) = \frac{1}{2} x(\pi - x) + \frac{1}{4}(1 - \cos(2x))$; in ogni caso $h(x)$ è C^3 nella x e ovviamente C^∞ nella t;

allora u è C^∞ $\forall\, t \geq \delta$, $\delta > 0$:

$$\left|\partial_t^k \frac{e_n}{n^2} e^{-n^2 t} \sin(nx)\right| = |e_n|\, n^{2k-2} e^{-n^2 t} |\sin nx| \Rightarrow$$

$$\|\partial_t^k (\dots)\|_{\underset{L^\infty([\delta,\infty))!}{\infty}} = \boxed{|e_n|\, n^{2k-2} e^{-n^2 \delta}} \text{ , la cui serie è}$$

OVVIAMENTE convergente $\left(|e_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,!\right)$ ✓

ANCHE NELLA x, nel complesso su $(\delta,+\infty) \times \mathbb{R}$.

NON è C^4 in $t=0$ nella x e non è C^2 in $t=0$ nella t : infatti

$$u_t = u_{xx} + f \Rightarrow u_{tt} = u_{xxt} \underset{\text{SCHWARZ}}{=} (u_t)_{xx} = (u_{xxxx} + 4\cos(2x)) ,$$

e ~~[illegible]~~ $u_{tt}(t,0)=0 \Rightarrow u_{xxxx}(t,0)=-4 \quad \forall t>0$;

invece ~~[illegible]~~ $u_{xxxx}(0,x)=0$, e

allora u_{xxxx} è discontinua in $(0,0)$, e allora anche u_{tt}. $\square$]

(Ex) $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ne esprime $\mathcal{F}^*$; calcolare $\mathcal{F}^4$ e gli autovalori di $\mathcal{F}$.

[Infatti anche in $L^2(\mathbb{R})$ è $\langle \hat{f}; g\rangle_2 = \langle f; \check{g}\rangle_2$

(vale, come respiro, per $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f, g \in L^1 \cap L^2$, e allora per $f, g \in L^2$ per densità di $L^1\cap L^2$, per def. di $\hat{f}$ e $\check{g}$, e per continuità $\langle;\rangle_2$!);

ora, visto che è su tutto L^2 $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = 2\pi\, id_{L^2}$,

e inoltre $\mathcal{F}^* f(x) = \mathcal{F} f(-x)$, ossia $\mathcal{F}^* f(-x) = \mathcal{F} f(x)$,

$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}^*\mathcal{F} f(-x)}_{2\pi f(-x)} = \mathcal{F}^2 f(x)$, cioè $\boxed{\mathcal{F}^2 f(x) = 2\pi f(-x)}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}^4 = 4\pi^2\, id_{L^2}}$ $\left(\mathcal{F}^4 f(x) = \mathcal{F}^2 2\pi f(-x) = 4\pi^2 f(x)!\right)$;

Ogni autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ di $\mathcal{F}$ deve allora essere tale che

$\lambda^4 = 4\pi^2$, cioè $\lambda \in \{\pm\sqrt{2\pi}, \pm i\sqrt{2\pi}\}$

(in effetti $\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{2\pi}}$ isometria $\Rightarrow$ ha autovalori di $|\cdot| = 1$!!);

in realtà sono tutti autovalori perché per ognuno esiste autovettore non banale: $\widehat{\pm i e^{-x^2/2}}(\xi) = \pm i\sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$,

usando che $\widehat{e^{-x^2/2}}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}$. $\square$

(Altro modo: $\mathcal{F}g := f + \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}f + \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{F}^2 f + \frac{1}{\lambda^3}\mathcal{F}^3 f$ ($f \in L^2$),

allora $\mathcal{F}g = \mathcal{F}f + \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}^2 f + \frac{1}{\lambda^2}\mathcal{F}^3 f + \underbrace{\frac{1}{\lambda^3}\mathcal{F}^4 f}_{4\pi^2 f}$)

quindi $\boxed{\mathcal{F}g = \lambda g}$ e allora basta scegliere f tale ($\lambda^4 = 4\pi^2$!)

che $g \neq 0$ (in ogni caso per λ); ma $f(x) = e^{-|x|}$ e'

tale che $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$, che ha $\hat{\hat{f}}(\xi) = 2\pi e^{-|\xi|}$

e $\mathcal{F}^3 = \frac{4\pi}{1+\xi^2}$, che va bene per $\pm\sqrt{2\pi}$ (col +

e' ovvio...); nell'altro caso $x e^{-|x|}$ ...)

(EX) Trovare soluzione $u: [0,+\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ di

$$\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad (t \geq 0) \\ u(0,x) = u_0(x) := (1 + 4\cos(x)) \cdot \sin(x) \quad (x \in [0,\pi]) \end{cases}$$

; è unica?

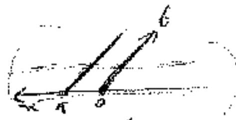
Cercando u della forma a variabili separate $u(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n(t)\sin(nx)$,

almeno formalmente $\begin{cases} u_t = -u_{xxxx} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \geq 1, \ \dot{c}_n(t) = -n^4 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^{(0)} \text{ (coeff. di } u_0) \end{cases}$,

cioè $c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-n^4 t}$ ($\forall n \geq 1$); ora, $u_0(x) =$

$= (1 + 4\cos(x))\sin(x) = \sin(x) + 2\sin(2x)$ che rispettivamente

$$c_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ 2 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \Rightarrow \boxed{u(t,x) := e^{-t}\sin(x) + 2e^{-16t}\sin(2x)};$$

è evidente che u è C^∞ e risolve il problema. 

Ora il fatto è che

, Non è affatto detto che

$c_n(u_{xxxx}) = +n^4 c_n(t)$, perché non avrei stato in grado ottenere condizioni di periodicità! Cerchiamo allora v tale

che
$$\begin{cases} v_t = -v_{xxxx} \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 \\ v(0,x) = 0 \\ v_{xx}(t,0) = v_{xx}(t,\pi) = 2 \ (\neq 0!) \end{cases}, \text{ ossia}$$

w tale che
$$\begin{cases} w_t = -w_{xxxx} \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0 \\ w(0,x) = -x(x-\pi) \\ w_{xx}(t,0) = w_{xx}(t,\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{con}$$

$$\boxed{v(t,x) = w(t,x) + x(x-\pi)}$$; allora cerchiamo

$w(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n(t)\sin(nx)$, dovendo essere $\begin{cases} c_n'(t) = -n^4 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^{(0)} \\ (\text{cioè } c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-n^4 t}) \end{cases}$.

ORA, $c_n^{(0)} = c_n(\underbrace{-x(x-\pi)}_{-x^2+\pi x}) = -c_n(x^2) + \pi\, c_n(x)$;

(8)

(anche $\frac{\pi}{2}C_n(x) = \int_0^\pi \underset{D.}{x}\,\underset{I.}{\sin(nx)}\,dx = \underbrace{\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=-\pi\frac{(-1)^n}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx}$) $(n\geq 1!)$

cioè $C_n(x) = -\frac{2(-1)^n}{n}$; invece $\frac{\pi}{2}C_n(x^2) =$

$= \int_0^\pi \underset{D.}{x^2}\,\underset{I}{\sin(nx)}\,dx = \underbrace{\left[-x^2\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{=-\pi^2\frac{(-1)^n}{n}} + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx =$

$\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \underbrace{\cancel{\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi}}}_{0} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^\pi \sin(nx)\,dx}_{\frac{2}{n}\ n \text{ dispari};\ 0\ n \text{ pari}} = \begin{cases} -\frac{2}{n^2} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$)

$= \begin{cases} -\pi^2\frac{(-1)^n}{n} - \frac{4}{n^3} & n \text{ dispari} \\ -\pi^2\frac{(-1)^n}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$

cioè $C_n(x^2) = \begin{cases} -\pi\frac{2(-1)^n}{n} - \frac{8}{\pi n^3} & n \text{ dispari} \\ -\pi\frac{2(-1)^n}{n} & n \text{ pari} \end{cases}$), e allora

chiaramente $\boxed{-C_n(x^2) + \pi C_n(x) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{8}{\pi n^3} & n \text{ dispari} \end{cases}}$ $\Rightarrow$

$w(t,x) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{\pi n^3} e^{-n^2 t} \sin(nx)$.

(EX) Preso $a : (0,1) \to \mathbb{R}$ mis. limitata $(|a| \leq M$ q.o.$)$, sia

$(f,g) := \int_0^1 a(t)f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$
$(=(f,g)_a)$ $\qquad ((L^2,(\cdot,\cdot)_a) =: L^2_a)$

$\boxed{\text{$a$ tali che $(\cdot,\cdot)$ è prodotto scalare sono esattamente le $a \overset{\text{q.o.}}{>} 0$}}$: intanto è ben def., poiché

$|(f;g)| \le \int_0^1 |f||g||\varphi|\, dt \le M \|fg\|_1 \underset{\text{SCHWARZ}}{\le} M\|f\|_2\|g\|_2 < \infty$;

(E IN PIÙ VALE VALORE NON DIP. DALLA SCELTA DI f e g nelle loro classi!)

inoltre è facilmente bilineare, simmetrica, ed

è certamente def. pos. se $\varphi \overset{q.o.}{>} 0$: infatti in tal caso

$(f;f) = \int_0^1 f^2 \varphi\, dt \ge 0$ ed è $0 \Leftrightarrow f^2\varphi \overset{q.o.}{=} 0 \Leftrightarrow$

$f^2 \overset{q.o.}{=} 0 \Leftrightarrow f = 0$. In realtà se e SOLO SE $\varphi \overset{q.o.}{>} 0$:

$\mathcal{L}(\{x\in(0,1) \mid \varphi(x) \le 0\}) > 0$, allora I_E ($\in L^\infty(0,1) \subseteq L^2$!!)

è $\neq 0$ e tale che $(I_E; I_E) = \int_0^1 I_E^2 \varphi\, dt = \int_E \varphi\, dt \le 0$. ✓

$\boxed{0 < m \overset{q.o.}{\le} \varphi \;(\overset{q.o.}{\le} M) \Rightarrow \|f\|_\varphi := \sqrt{(f;f)} \text{ è COMPLETA}}$: infatti

$\left(= \{\int_0^1 f^2\varphi\, dt\}^{1/2}\right)$

chiaramente $\boxed{\sqrt{m}\,\|f\|_2 \underset{(1)}{\le} \|f\|_\varphi \underset{(2)}{\le} \sqrt{M}\,\|f\|_2}$, quindi sono equivalenti

(comunque, $(f_n)_n$ DI CAUCHY in $L^2_\varphi(0,1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$ in $L^2(0,1)$, ove

qui converge, $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ lo è $(f_n)_n$ in L^2_φ. ✓) ✓

In realtà è se e $\boxed{\text{SOLO SE } 0 < m \overset{q.o.}{\le} \varphi}$ (in particolare,

$\varphi(x) := x$, $x\in(0,1)$, è MIS., limitata e $\overset{q.o.}{>} 0 \Rightarrow (\cdot;\cdot)$ è prod.

scalare; ma tale NON è completo!), e in conclusione

$L^2_\varphi(0,1)$ è SPAZIO DI HILBERT $\Leftrightarrow 0 < m \overset{q.o.}{\le} \varphi$ $(\overset{q.o.}{\le} M)$.

Infatti se φ, pur essendo $\overset{q.o.}{>} 0$, NON è limitata dal basso,

allora alcune funzioni $\notin L^2$ stanno però in L^2_φ :

sia $f \in L^2_{q} \setminus L^2$; allora può $(f \wedge n) \vee -n =: f_n$ (9)

$\in L^2$, $f_n \xrightarrow{L^2_q} f$ ⇒ sono di Cauchy in L^2_q, ma certamente NON lo sono in L^2 perché $f \notin L^2$. ∎

~~ESEMPIO~~ PRECISAMENTE: ∄ $m>0$ tale che $m \le q$ q.o. ⇒ $\forall n \ge 1$, ∃ A_n mis. con $\mathcal{L}^1(A_n) =: e_n > 0$ sul quale $q_{|A_n} \le \frac{1}{n^4}$;

si allora $\boxed{f_n := \frac{1}{\sqrt{e_n}} I_{A_n}}$, $\|f_n\|_q = \Big\{\underbrace{\int_{A_n} \frac{q}{e_n}\, dt}_{\le \frac{1}{n^4}\frac{1}{e_n}\cdot e_n}\Big\}^{1/2} \le \frac{1}{n^2}$

⇒ $\sum_{n \ge 1} \|f_n\|_q$ è FINITA, e allora ovviamente $\Big(\sum_{n=1}^{m} f_n\Big)_{m \ge 1}$ è di Cauchy in L^2_q

ma è anche facilmente $\xrightarrow{L^2_q} \boxed{\sum_{n \ge 1} f_n =: f}$ (ben def, perché $f_n \ge 0$!),

⇒ di Cauchy in L^2_q; MA

$\|f_n\|_2 = \Big\{\int_{A_n} \frac{1}{e_n}\, dt\Big\}^{1/2} = 1$ ⇒

$\|f\|_2 \overset{\forall m \ge 1}{\ge} \sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_2 = m$, dunque $f \notin L^2$. ∎

---

(5) $f_1 \otimes f_2 (x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$; $\forall 1 \le p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R}) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^2)$ e anche Span$(L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R}))$ è DENSO in $L^p(\mathbb{R}^2)$. Inoltre $(e_n)_{n \ge 1}$ BASE di $L^2(\mathbb{R})$ ⇒ $(e_n \otimes e_m)_{n,m \ge 1}$ BASE di $L^2(\mathbb{R}^2)$.

$\boxed{\text{Pkos}}$: $\iint_{\mathbb{R}^2} |\underbrace{g_1 \otimes g_2}_{g_1(x_1)g_2(x_2)}|^p dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |g_1(x_1)g_2(x_2)|^p dx_1 dx_2 \overset{\text{FUBINI}}{=} \|g_1\|_p^p \|g_2\|_p^p < \infty$

$\|g_1 \otimes g_2\|_p^p$

$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |g_1|^p dx_1\right)|g_2|^p dx_2 = \|g_1\|_p^p \|g_2\|_p^p !\right)$

ossia $\|g_1 \otimes g_2\|_p = \|g_1\|_p \|g_2\|_p$! (e allora $g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \Rightarrow$ ~~...~~
$g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2)$) ✓

Pkos! Ogni funzione in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2)$ si approssima (in $\|\cdot\|_p$) con funzioni semplici ~~...~~ s con $\mathcal{L}^2(\{s \neq 0\}) < \infty$, ossia comb. lin. di indicatrici d'insiemi mis. e misura finita; ora tali si approssimano con I_A, A aperto, e tale con I_R, R rettangolo; ma I_R, R rettangolo di $\mathbb{R}^2$ è felicemente in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$!
$(I_{(a,b)\times(c,d)} = I_{(a,b)} \otimes I_{(c,d)}$!)
(altrimenti: in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2)$ è denso $\mathcal{L}^p_c(\mathbb{R}^2)$, e qs funzione nulla fuori da un quadrato Q si approssima su Q con funzioni continue, le quali si approssimano con polinomi di due variabili ($\|\cdot\|_\infty$ su $Q \Rightarrow \|\cdot\|_p$ su Q!), in definitiva approssimo $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2)$ con $P I_Q$, P polinomio di due variabili, che ovviamente sta in $\mathcal{L}^p \otimes \mathcal{L}^p$!!)

$\langle h_1 \otimes h_2 ; f_1 \otimes f_2 \rangle_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{h_1 \otimes h_2(x_1,x_2)}_{h_1(x_1)h_2(x_2)} \underbrace{f_1 \otimes f_2(x_1,x_2)}_{f_1(x_1)f_2(x_2)} dx_1 dx_2$

$\shortparallel$

$= \langle f_1; f_1\rangle_2 \langle f_2; f_2\rangle_2$, per FUBINI ~~...~~), e allora

$(e_n)_{n\geq 1}$ SIST. ORT. in $L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow (e_n \otimes e_m)_{n,m\geq 1}$ SIST. ORT. di

$L^2(\mathbb{R}^2)$ è ovvio, cioè $\langle e_n\otimes e_m; e_k \otimes e_h\rangle_2 = \text{"}\delta_{nm;kh}\text{"} =$

$= \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \text{ e } h=k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$; ora $\overline{\text{span}\{e_n | n\geq 1\}}^{(\|\cdot\|_2)}$ denso in $L^2(\mathbb{R})$

$\overset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow} \mathcal{D} \doteq \overline{\text{span}\{e_n \otimes e_m | n,m\geq 1\}}^{(\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^2)})}$ denso è in $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$,

che denso è in $L^2(\mathbb{R}^2)$ $\checkmark$

(Altro modo: se $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $f_m(x_2) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\, e_m(x_1)\, dx_1$

$(= \langle f(\cdot, x_2); e_m\rangle_{L^2(\mathbb{R})})$; allora $\forall m,n \geq 1$ è

$\langle f; e_m \otimes e_n\rangle_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\, e_m(x_1)\, e_n(x_2)\, dx_1 dx_2 \overset{\text{FUBINI}}{=}$

$=$ ~~...~~ $\langle f_m; e_n\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$; dunque se $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

tale che $\forall m,n\geq 1$ $0 = \langle f; e_m\otimes e_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, allora $0 = \langle f_m; e_n\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow f_m \overset{q.o.}{=} 0$ $\forall m \geq 1$, ossia $\forall m\geq 1$ $\exists N_m$ TRASC.

tale che $\forall x_2 \notin N_m$ è $f_m(x_2) = 0$, $\Rightarrow$

$\forall x_2 \notin N := \bigcup_{m\geq 1} N_m$, $f_m(x_2) = 0$ $\forall m \geq 1$; ma

dalla def. di $f_m(x_2)$ otteniamo che $\forall m\geq 1$ $f(x_1,x_2) = 0$

per q.o. x_1 $(x_2 \notin N)$, dunque $f(x_1,x_2) = 0$

$\forall (x_1,x_2) \notin N_1 \times N$ TRASC. $\checkmark$)

(EX) $\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} & \text{in } [0,+\infty)\times[0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) := 2(1-\cos x)\sin x & \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$

Cerchiamo il risultato (sapendo che dovremo avere $u(t,0)=u(t,\pi)=0$!)

$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} \underbrace{c_n(t)}_{c_n(u(t,\cdot))} \sin(nx)$, almeno formalmente. Quindi

inoltre $\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \geq 1, \begin{cases} \dot{c}_n(t) = (2-n^2)c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^{(0)} = \text{coeff. di } \sin(nx) \text{ di } u_0(x) \end{cases}$

Cioè $c_n(t) = c_n^{(0)} e^{(2-n^2)t}$; MA $u_0(x) =$

$= 2\sin x - \sin(2x)$ che allora $c_n^{(0)} = \begin{cases} 2 & \text{per } n=1 \\ -1 & \text{per } n=2 \\ 0 & n\geq 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Quella sarà $\boxed{u(t,x) = 2e^{t}\sin(x) - e^{-2t}\sin(2x)}$:

che infatti è $[0,+\infty)\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$, C^∞, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$,

$u(0,x) = u_0(x)$ E $u_t = 2u + u_{xx}$, come è immediato verificare. Visto infine che $c_n(u_{xx}) = -n^2 c_n(u)$,

allora tale soluzione è UNICA. $\square$

(EX) $K := \{u \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid u \geq 0 \text{ q.o.}\}$ è sottinsieme CONVESSO e CHIUSO in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$; che proiezione di L^2 su K è $Tf = \max\{f; 0\}$.

$\forall f,g \in K$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda f + (1-\lambda)g \in L^2$; inoltre

$f \geq 0$ fuori da A e $g \geq 0$ fuori da B $\Rightarrow \lambda f + (1-\lambda)g \geq 0$ fuori da $A \cup B$, trascurabile se A e B lo sono. $\checkmark$

Sia poi $(u_n)_{n\ge 1}$ in K tale che $u_n \xrightarrow{L^2_n(q.o.)} u$: allora (11)

($u \in L^2$ e) $u \ge 0$ q.o. Infatti ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ a meno di passare a sottosuccessione. $u_n \xrightarrow{q.o.} u$, e allora $\forall x \notin \underbrace{\{u_n \text{ non} \xrightarrow{q.o.} u\} \cup \bigcup_{n\ge 1}\{u_n<0\}}_{(\text{Trasc.!})}$ è $u_n(x) \to u(x)$,

e $u_n(x) \ge 0 \ \forall n \ge 1 \Rightarrow u(x) \ge 0$. ✓

Ora, $\forall f \in L^2_n$, in effetti $f \vee 0 \ge 0$;

$\forall g \in K$, $f<0 \Rightarrow g-f \ge -f > 0 \Rightarrow$

$$\|g-f\|_2^2 \ge \int_{\{f<0\}} (g-f)^2 dx \ge \int_{\{f<0\}} (f^2)\,dx, \text{ ma}$$

$$\|Tf-f\|_2^2 = \int_0^1 (Tf-f)^2 dx = \int_{\{f<0\}} (\underbrace{Tf}_{0}-f)^2 dx + \cancel{\int_{\{f\ge 0\}} (Tf-f)^2 dx}, \quad (\Leftarrow Tf = f)$$

e allora $\forall g \in K$ risulta $\|Tf-f\|_2 \le \|g-f\|_2$. ✓

(Altro modo: $\langle g; f-Tf\rangle_2 \le \langle Tf; f-Tf\rangle_2$,

perché $\langle g; f-Tf\rangle_2 = \int_0^1 \underset{\ge 0 \text{ q.o.}}{g}\,\underset{\le 0 \text{ q.o.}}{(f-Tf)}\,dx \le 0$, mentre

$\langle \underset{=0 \text{ su } f<0}{Tf}; \underset{=0 \text{ su } f\ge 0}{f-Tf}\rangle_2 = 0$! ✓)

$(f_{k+1} = (x^2-\pi^2) f_k\,!)$

(Ex) $\forall k \geq 0$, $f_k(x) := (x^2-\pi^2)^k$, e $(c_{k,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ siano i coeff. di F. complessi di $f_k|_{[-\pi,\pi]}$. Calcolare i $c_{0,m}$ e $c_{1,m}$; scrivere $\ddot{f}_k$ come comb. lineare ~~in funzione (lineare)~~ di f_{k-1} e f_{k-2} e dedurre una formula per il calcolo di $c_{k,m}$ da $c_{k-1,m}$ e $c_{k-2,m}$.

Cosa possiamo dire nel comportamento asintotico di $c_{k,m}$ per $|m|\to+\infty$?

$$\boxed{f_0(x) \equiv 1} \text{ ha } c_{0,m} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}; \quad f_1(x) = x^2-\pi^2$$

ha $c_{1,m} = c_m(x^2) - \begin{cases} \pi^2 & \text{se } m=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$; ma $c_m(x^2) \overset{\text{(già calcolato)}}{=}$

$$= \begin{cases} \pi^2/3 & \text{per } m=0 \\ (-1)^m \frac{2}{m^2} & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow c_{1,m} = \begin{cases} -\frac{2\pi^2}{3} & \text{se } m=0 \\ (-1)^m\frac{2}{m^2} & \text{altrimenti} \end{cases} \checkmark$$

Ora, $\forall k \geq 1$, $\dot{f}_k = 2kx(x^2-\pi^2)^{k-1} = 2kx f_{k-1} \Rightarrow$

$$\forall k \geq 2 \quad \ddot{f}_k = (\dot{f}_k)^{\cdot} = 2k f_{k-1} + 2kx \underbrace{\dot{f}_{k-1}}_{= 2(k-1)x f_{k-2}} =$$

$= 2k f_{k-1} + 4k(k-1)x^2 f_{k-2}$; ma $\forall k \geq 0$ $x^2 f_k =$

$$= \underbrace{(x^2-\pi^2) f_k}_{f_{k+1}} + \pi^2 f_k = f_{k+1} + \pi^2 f_k \Rightarrow$$

$2k + 4k^2 - 4k = 2k(2k-1)$

$$\ddot{f}_k = 2k f_{k-1} + 4k(k-1)(f_{k-1} + \pi^2 f_{k-2}) =$$

$$= 2k(2k-1) f_{k-1} + 4k(k-1)\pi^2 f_{k-2} \quad \checkmark$$

MA $f_k(x) \in \mathcal{C}^1_{per}$ $(\mu \neq 0)$ $\Rightarrow c_\mu(\dot f_k) = i\mu\, c_\mu(f_k)$; ma anche $\dot f_k$ è limitata $\mathcal{C}^1_{per}$ (si ANNULLA in $\pm\pi$), e allora $c_\mu(\ddot f_k) =$

$= -\mu^2 c_\mu(f_k)$, $\Rightarrow \forall k \geq 2$, $-\mu^2 c_{k,\mu} = 2k(2k-1)\, c_{k-1,\mu} +$

$+ 4k(k-1)\pi\, c_{k-2,\mu}$, $\Rightarrow \forall \mu \neq 0$,

$$c_{k,\mu} = -\frac{1}{\mu^2}\left[2k(2k-1)\, c_{k-1,\mu} + 4k(k-1)\pi\, c_{k-2,\mu}\right].$$

Ora, $c_{0,\mu}$ è banalmente infinitesimo di ordine qualsiasi; $c_{1,\mu} \sim \frac{(-1)^\mu 2}{\mu^2}$ per $|\mu| \to \infty$; allora

$$c_{2,\mu} \overset{\mu\neq 0}{=} -\frac{1}{\mu^2}\left[12\, c_{1,\mu} + \cancel{8\pi\, c_{0,\mu}}\right] = -\frac{(-1)^\mu 24}{\mu^4} \sim \frac{(-1)^\mu 24}{\mu^4},$$

$$c_{3,\mu} \overset{\mu\neq 0}{=} -\frac{1}{\mu^2}\left[30\, \underset{\left(\frac{1}{\mu^4}\right)}{c_{2,\mu}} + 24\pi\, \underset{\left(\frac{1}{\mu^2}\right)}{c_{1,\mu}}\right] \sim \frac{1}{\mu^2} c_{1,\mu};$$

in generale PIÙ PRECISAMENTE $c_{k,\mu} \underset{|\mu|\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^\mu a_k}{|\mu|^{\theta_k}}$, $a_k > 0$ e $\theta_k = \begin{cases} k+1 & k \text{ DISPARI} \\ k+2 & k \text{ PARI} \end{cases}$,

perché se ciò lo supponiamo per $k-1$ e $k-2$ allora è vero per k, che quando k $(k-1)$ DISPARI $\Rightarrow$ chiaramente

$$c_{k,\mu} \sim \frac{1}{\mu^2}\left[2k(2k-1)\frac{(-1)^\mu a_{k-1}}{\mu^{k+2}} + 4k(k-1)\pi\frac{(-1)^\mu a_{k-2}}{\mu^{k-1}}\right] \sim$$

$a_k := 2k(2k-1)a_{k-1} + 4k(k-1)\pi a_{k-2}$

$$\sim \frac{(-1)^\mu a_k}{\mu^{k+1}}, \text{ mentre}$$

(k fissato) $\Rightarrow$ $c_{m,n} \sim \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{(\dots)}{m^k} + \frac{(\dots)}{n^k}\right] \sim \frac{(-1)^m c_n}{n^{k+2}} \dots$]

Ex Con $a>0$ si $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ (o anche in L^1!) con $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq [-\pi a, \pi a]$ e $\hat f_1(n) = \hat f_2(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, allora $a \le 1 \Rightarrow$ $f_1 \overset{q.o.}{=} f_2$; per $a>1$ No in generale.

[$\hat f_i(n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\, e^{-inx}\,dx \underset{a\le 1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(x)\, e^{-inx}\,dx = 2\pi\, c_n(f_i)$,

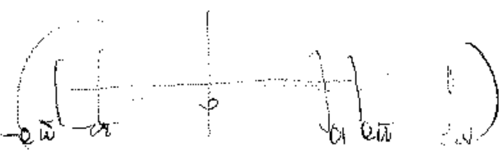
e allora $\forall n\in\mathbb{Z}$ $c_n(f_1) = c_n(f_2)$, $\Leftrightarrow$ $f_1|_{[-\pi,\pi]} \overset{q.o.}{=} f_2|_{[-\pi,\pi]}$,

cioè $f_1 \overset{q.o.}{=} f_2$ (e fuori da $[-\pi,\pi]$ sono 0!).

Altrimenti se $f_2(x) := f_1(x+2\pi) = \tau_{-2\pi} f_1(x)$ ($f_1 \in L^2$):

$$\hat f_2(n) = e^{2\pi i n}\,\hat f_1(n) = \hat f_1(n),$$ ma se $a>1$

allora posso fare in modo che f_1 e f_2 abbiano supporti disgiunti (ma comunque $\subseteq [-\pi a, \pi a]$): prendo $f_1 \in L^2$ con supporto in $[\pi, M]$, $M := a\pi \wedge 3\pi$



$\square$]

Ex Per
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,\cdot) = 0 \end{cases}$$
trovare soluzioni $u: \mathbb{R}\times(0,\pi) \to \mathbb{R}$ con $u_0(x) := \sin^3 x$, e determinare il comportamento asintotico di $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$.

Lo stesso per $u_0(x) = \sin^{2k+1}(x)$, $k \ge 2$.

[Cercando $u(t,x)=\sum_{n\ge 1} \overset{c_n(u(t,\cdot))}{c_n(t)}\sin(nx)$, almeno formalmente

dovrebbe essere $\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = (2-n^2)\,c_n(t) \\ \dot{c}_n(0) = 0 \\ c_n(0) = c_n^{(0)} = \text{coeff. di } u_0 \end{cases}$; ora, per $n=1$

è chiaramente $c_1(t) = \frac{c_1^{(0)}}{2}(e^t + e^{-t})$, mentre per $n\ge 2$

è $c_n(t) = c_n^{(0)}\cos(\sqrt{n^2-2}\,t)$; ora, $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 =$

$(i^3=-i)$

$$= \frac{-1}{8i}\Big(\underbrace{e^{3ix}-e^{-3ix}}_{2i\sin(3x)}\underbrace{-3e^{ix}+3e^{-ix}}_{-6i\sin(x)}\Big) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$ e

allora $c_n^{(0)} = \begin{cases} 3/4 & \text{se } n=1 \\ -1/4 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, pertanto sarebbe

essere soluzione $\boxed{u(t,x) = \frac{3}{8}(e^t+e^{-t})\sin(x) - \frac{1}{4}\cos(\sqrt{7}\,t)\sin(3x)}$;

ma infatti è C^∞, $u(t,0)=u(t,\pi)=0$, $u(0,x)=\sin^3(x)$,

$u_t(0,\cdot) = 0$, e $u_{tt} = u_{xx} + 2u$. Allora

$\|u(t,\cdot)\|_\infty \sim \frac{3}{8}e^t$ per $t\to+\infty$.

Ora no basta di calcolare i $c_n^{(0)}$ di $\sin^{2k+1}(x)$ $(k\ge 1)$; ma

$$\sin^{2k+1}(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2k+1} \overset{(\dots)}{=} \sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^{k-h}}{2^{2k}}\binom{2k+1}{h}\sin((2k-2h+1)x),$$

$\Rightarrow c_1^{(0)} \underset{h=k}{=} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k+1}{k}$, $\Rightarrow \|u(t,\cdot)\|_\infty \sim \frac{1}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k}e^t$ per $t\to+\infty$. ∎]

(Ex) Dato $u_0 \in C^\infty_{per}$, sia D l'insieme dei $\Theta > 0$ tali che
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \\ u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$
abbia soluzione C^∞ definita

in $(-\Theta, 0] \times [-\pi, \pi]$; se c_n = coeff. F. di u_0,

allora $D = (0, \Theta^*]$ CON $\boxed{\Theta^* := -\liminf_{|n|\to\infty} \frac{\log|c_n|}{n^2}}$.

Inoltre $\Theta^* > 0 \Rightarrow u_0(x) = f_1(e^{ix}) + f_2(e^{-ix})$ con f_1 e

f_2 OLOMORFE in $\mathbb{C}$; dare un esempio di u_0 ANALITICA

tale che $\Theta^* = 0$.

$\boxed{(0, \Theta^*] \subseteq D}$, cioè $\Theta^* \in D$ quando $\Theta^* > 0$; ricordando

che $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-n^2 t + inx}$, c'è dunque da far vedere

che u è C^∞ definita anche per $t \in (-\Theta^*, 0]$, ossia su

tutto $(-\Theta^*, \infty) \times \mathbb{R}$; il punto è far vedere la

convergenza in norma delle serie, cioè che $\forall \Theta < \Theta^*$ e

$\forall h, k \geq 1$, se $R_\Theta := [-\Theta, \infty) \times \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \| D_t^h D_x^k (c_n e^{-n^2 t + inx}) \|_{\infty} < \infty \quad ; \text{ ma}$$

$C^0(R_\Theta)$

$$=: a_{khn} = c_n (-n^2)^h (in)^k e^{-n^2 t} e^{inx}$$

$a_{khn} = |c_n| |n|^{2h+k} e^{+n^2 \Theta}$; ORA, $\Theta < \Theta^* \Leftrightarrow$

$\limsup_{|n|\to\infty} \frac{\log|c_n|}{n^2} < -\theta \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ tale che, per $|n|$ abb. grande, $\frac{\log|c_n|}{n^2} \le -(\theta+\varepsilon)$, cioè $|c_n| \le e^{-(\theta+\varepsilon)n^2}$ $(\le e^{-\theta n^2})$)

Da cui $e_{khn} \le |n|^{2k+h} e^{-\varepsilon n^2}$, e allora la serie è convergente. ✓

$\boxed{D \subseteq (0,\theta^*]}$, ovvero, $\forall \theta>0,\ \theta\in D \Rightarrow \theta\le\theta^*$; ciò è comunque facile: se u è soluzione anche in $(-\theta,0]\times(-\infty,\infty)$, allora i suoi coeff. $c_n(t)$ sono comunque $c_n(t)=c_n e^{-n^2 t}$, e restano sempre in $\ell^2_{\mathbb{C}}$ $(\forall t)$, e sono allora infinitesimi e allora limitati: $\forall -\theta<t\le 0$, $\exists M$ tale che $M \ge |c_n(t)| = |c_n| e^{-n^2 t}$, ossia $|c_n| \le M e^{n^2 t}$, ossia $\log|c_n| \le \log(M) + n^2 t$, ossia $\frac{\log|c_n|}{n^2} \le \frac{\log(M)}{n^2} + t \overset{(\limsup_{n\to\infty})}{\Longrightarrow}$

$-\theta^* \le t$, cioè $\theta^* \ge -t \quad \forall -\theta<t\le 0$ (cioè $0\le -t<\theta$): è ovvio che deve essere $\theta\le\theta^*$. ✓

Ora, abbiamo visto prima che $(0<)\ \theta<\theta^* \Rightarrow |c_n|\le e^{-\theta n^2}$;

$u_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n\ge 0} c_n \underset{(e^{ix})^n}{\underbrace{e^{inx}}} + \sum_{n\ge 1} c_{-n} \underset{(e^{-ix})^n}{\underbrace{e^{-inx}}} \Rightarrow$

$u_0(x) = f_1(e^{ix}) + f_2(e^{-ix})$ con $f_1(z) \doteq \sum_{n\ge 0} c_n z^n$ e $f_2(z) \doteq \sum_{n\ge 1} c_{-n} z^n$, sono entrambe divergenti (perché appunto $\sqrt[n]{|c_n|} \le e^{-an} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), ossia hanno raggio di convergenza $\frac{1}{0} = +\infty$!

Infine $u_0 := f(e^{ix}) = \sum_{n\ge 0} c_n e^{inx}$, f funzione olomorfa ma che non può essere estesa a tutto $\mathbb{C}$ e il cui dominio di definizione contiene la circonferenza unitaria (come $\frac{1}{2+z} = f(z)$);

allora $c_n = 0 \ \forall n<0$ e $\forall n\ge 0$ sono i coeff. di Taylor di f in 0; ma il raggio R (>0) di convergenza della serie è FINITO, cioè $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$: a meno di passare a sottosucc. è allora $(|c_n|)^{1/n} \sim \frac{1}{R}$,

cioè $|c_n| \sim \frac{1}{R^n}$ cioè $\log|c_n| \sim \log\left(\frac{1}{R^n}\right) = \cancel{\log(1)} - n\log(R)$,

cioè $\log|c_n| \sim -n\log(R)$, da cui $a^* = 0$. $\square$

(EX) $\forall n\ge 0$, siano p_n i polinomi ottenuti da $1, x, x^2, \dots$ con GRAM-SCHMIDT in $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$, e siano

$$\boxed{q_n(x) = D^n\left((x^2-1)^n\right)}.$$

Allora $(1-x^2)^{n-k}$ DIVIDE $D^k\left((x^2-1)^n\right)$ $\forall\, 0\le k<n$; $\langle q_n ; x^m\rangle_2 = 0$ $\forall\, 0\le m<n$; q_n è MULTIPLO di p_n $\forall n\ge 1$ (per $n=0$, $q_0=1$!)

$q_0 = 1$, $q_1 = 2x$, $q_2 = 12x^2-4$, ecc.; $\forall n>0$,

Dim. per induzione su $0\le k< n-1$ (così attuale?): infatti per $k=0$

$(1-x^2)^m$ divide $\mathcal{D}^0 (x^2-1)^m$ è ovvio; se lo suppongo per k,

allora $\mathcal{D}^{k+1}((x^2-1)^m) = \mathcal{D}(\underbrace{\mathcal{D}^k((x^2-1)^m)}_{\underset{(\text{IP. IND.})}{=:} p(x)(x^2-1)^{m-k}}) = p'(x)(x^2-1)^{m-k} +$

$+ 2x(m-k)(p(x))(x^2-1)^{m-k-1}$, palesemente divisibile per $(x^2-1)^{m-(k+1)}$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{D}^k((x^2-1)^m)\Big|_{x=\pm 1} = 0$! Allora integro per parti in

$\langle q_m ; x^m \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \mathcal{D}^m((x^2-1)^m)\, x^m \, dx =$

$= \cancel{\left[\mathcal{D}^{m-1}((x^2-1)^m)\, x^m\right]_{x=-1}^{x=1}} - m \int_{-1}^{1} \mathcal{D}^{m-1}((x^2-1)^m)\, x^{m-1}$; ora

$-m \left[\cancel{\left(\mathcal{D}^{m-2}((x^2-1)^m)\, x^{m-1}\right]_{x=-1}^{x=1}} - (m-1) \int_{-1}^{1} \mathcal{D}^{m-2}((x^2-1)^m)\, x^{m-2} dx \right] =$

$= m(m-1) \int_{-1}^{1} \mathcal{D}^{m-2}((x^2-1)^m)\, x^{m-2}\, dx$, e allora dopo

m integrazioni per parti ho $(-1)^m m! \left[\mathcal{D}^{m-m-1}((x^2-1)^m)\right]_{x=-1}^{x=1} =$

$= 0$. ✓ Infine, $\forall m \geq 1$, sia $V_m := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, x, \dots, x^m\}$

in $L^2_{\mathbb{R}}(-1,1)$; allora $\boxed{p_m \in V_m \cap V_{m-1}^{\perp}}$ (costruzione) ($\mathbb{R}$-vettoriale!), MA

anche $q_m \in V_m \cap V_{m-1}^{\perp}$ (visto ora!); ora è

ovvio che $\dim_{\mathbb{R}}(V_m \cap V_{m-1}^{\perp}) = 1$, quindi $V_m \cap V_{m-1}^{\perp}$

$= (p_m)$ $(p_m \neq 0 !!)$. $\square$]

(Ex) $Q=[0,1]^2$, $X\subseteq L^2(Q)$ formato delle funzioni costanti (q.o.) rispetto alla seconda variabile è ($\mathbb{R}$-sottosp.) CHIUSO in $L^2(Q)$.
Determinare P_X e $X^\perp$.

($X=\{u\in L^2(Q) \mid u(x_1,x_2)=\tilde u(x_1)$ per q.o. x_2, $\tilde u\in L^2(0,1)$ opportuna$\}$)

$(f_n)_{n\geq 1}$ in X tale che $f_n \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow f\in X$, perché a meno di passare a sottosucc. $f_n \xrightarrow{q.o.} f$, ossia $f_n(x_1,x_2)\to f(x_1,x_2)$ $\forall (x_1,x_2)\notin N$, $\mathcal{L}^2(N)=0$; se si $N':=\bigcup_{n\geq 1}\{f_n(x_1,x_2) \text{ dipende da } x_2\}$ ($\mathcal{L}^2(N')=0$!), allora $\forall (x_1,x_2)\notin N\cup N'$ $f_n(x_1,x_2)=\tilde f_n(x_1)$ $\to f(x_1,x_2)$ ed è chiaro che anche $f(x_1,x_2)$ NON dipende da x_2.

Ora, $\forall f\in L^2(Q)$, sia $Tf(x_1,x_2):=\int_0^1 f(x_1,t)\,dt$:

Tf (dipende solo da x_1 e) $\in L^2(Q)$ perché $\iint_Q |Tf(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2 = \iint_Q \left|\int_0^1 f(x_1,t)\,dt\right|^2$

$\overset{\text{è costante rispetto a } x_2!}{=} 1\cdot \int_0^1 \left|\int_0^1 f(x_1,t)\,dt\right|^2 dx_1 \underset{\text{Jensen: } ((\int f)^2\leq \int f^2)}{\leq} \int_0^1\left(\int_0^1 f(x_1,t)^2\,dt\right)dx_1 =$

$= \int_0^1\int_0^1 f(x_1,t)^2\,dx_1\,dt = \|f\|_2^2 <\infty$; inoltre è (lineare e) CONTINUA, di più perché $\|Tf\|_2\leq \|f\|_2$, ed è UNA proiezione su X perché $f\in X \Rightarrow Tf=f$! (ECCO un altro modo per vedere che X è CHIUSO: $f_n\xrightarrow{L^2} f \overset{\text{cont.}}{\Rightarrow} Tf_n \xrightarrow{L^2} Tf$, $\underset{(\|)}{f_n} \xrightarrow{L^2} f$!)

È $T = \mathcal{L}_X$ il proiettore ortogonale, cioè $\forall f \in L^2(Q)$ è $(f - Tf) \perp X$: $\forall \varphi(x_1,x_2) \overset{q.o.}{=} \tilde\varphi(x_1)$, infatti, è

$$\langle \varphi ; f - Tf \rangle_2 = \iint_Q \varphi (f - Tf)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \tilde\varphi(x_1) \left[f(x_1,x_2) - \int_0^1 f(x_1,t)\,dt \right] dx_1 dx_2 \overset{\text{integro prima in } x_2}{=}$$

$(\mathcal{L}^1((0,1)) = 1!)$

$$= \int_0^1 \tilde\varphi(x_1) \left[\underbrace{\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2 - \int_0^1 f(x_1,t)\,dt}_{=0} \right] dx_1 = 0 !$$

Allo stesso modo è esattamente $X^\perp = \ker(T)$, ossia $f \in X^\perp \iff \int_0^1 f(x_1,t)\,dt = 0$ per q.o. $x_1 \in (0,1)$. ∎

(Ex) Nel problema di raffreddamento calore su u (e u_0) opportune $u : [0,+\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ soluzione di
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } (0,+\infty)\times(0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in (0,\pi) \end{cases}$$

allora $\|u(t,\cdot)\|_1 = O_{t\to+\infty}(e^{-t})$

$\boxed{\text{Cerchiamo } u(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \sin(nx)}$, $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot)) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin(nx)\,dx$, $(\forall n \geq 1)$

allora formalmente è EQUIVALENTEMENTE $\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \overset{c_n^{(0)} = \text{coeff. di } u_0}{\iff}$

$$\begin{cases} c_n'(t) = -n^2 c_n(t) \\ c_n(0) = c_n^{(0)} \end{cases}, \text{ cioè } c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-n^2 t}$$; in effetti

questo porge serie convergenti se u è C^0, C^1 in $t>0$ e C^2 in x con $t > 0$; ora, $\forall t \geq 0$, $u(t,x)$ continua $\Rightarrow$ è in $L^2 \Rightarrow$ la mia serie di $\mathcal{D}$ (in x) di converge in L^2, e QUINDI in $\underset{(\text{ris. cont.})}{L^1}$ ($\subset L^1([0,\pi])$ ...!) e con omissione

$\|u(t,\cdot)\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|c_n(t) \sin(nx)\|_1 \leq 2 \sum_{n\geq 1} |c_n(t)|$

$\leq \frac{2}{\pi}\|u_0\|_1 =: M$

$\int_0^\pi |\sin(nx)| dx \overset{(nx=y)}{=} \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} |\sin y| dy = \frac{1}{n} n \int_0^\pi \sin y \, dy = [\cos y]_\pi^0 = 2$

ma $|c_n(t)| = |c_n^{(0)}| e^{-n^2 t} \leq M e^{-n^2 t}$ $\Rightarrow$

$\sum_{n\geq 1} |c_n| \leq M \sum_{n\geq 1} e^{-n^2 t} \underset{(e^{-n^2 t} \leq e^{-nt})}{\leq} M \sum_{n\geq 1} \underbrace{e^{-nt}}_{(e^{-t})^n} = M \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} =$

$= O_{t\to+\infty}(e^{-t})$. $\square$

Ex Risolvere $\begin{cases} u_t = 2t\,u + u_{xx} & \text{su } [0,+\infty)\times\mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = u_0 := \mathbb{1}_{[-1,1]} & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$ CON

LA TDF, scrivendo u in termini di una funzione di e^{-x^2}; dim. che $u \in C^\infty$ per $t>0$ E continua in ogni $(0,x)$ con $x \notin \{-1,1\}$; calcolare $\lim_{t\to 0} u(t,\pm 1)$.

Applicando la "$\mathcal{F}_{x\mapsto y}$", cioè la TDF rispetto alla x, sia $\hat{u}(t,y) := \widehat{u(t,\cdot)}(y)$ $\forall t\geq 0$; almeno a livello formale si ha $\widehat{u_t} = \partial_t(\hat{u})$, $\widehat{u_{xx}} = -y^2 \hat{u}$ e ovviamente $\widehat{tu} = t\hat{u}$ (t è COSTANTE in x!), per cui u tale che $u_t = 2tu + u_{xx} \Rightarrow \hat{u}$ tale che

$(\hat{u})_t = 2t\hat{u} - y^2\hat{u} = (2t-y^2)\hat{u}$, mentre $\widehat{u(0,\cdot)}(y) =$ (121)

$= \hat{u}(0,y) = \hat{u}_0(y)$ (che si è notoriamente (e comunque ovviamente) $\begin{cases} \frac{2\sin(y)}{y} & y\neq 0 \\ 2 & y=0 \end{cases}$), e

allora ovviamente $\boxed{\hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y)\cdot e^{t^2-y^2t}}$ $\forall t\geq 0, \forall y\in\mathbb{R}$,

cioè $\hat{u}(t,y) = \hat{u}_0(y)\, e^{t^2}\, e^{-y^2t}$; questo suggerisce di cercare $u(t,x)$ della forma $u_0(x) * \ldots$; ma infatti $e^{-y^2t} \overset{(\forall y\in\mathbb{R})}{=}$

$= \widehat{\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}}(y)$ $\underline{\underline{\forall t>0}}$, e allora dovrebbe essere

$$u(t,x) = \begin{cases} e^{t^2}\left(u_0(x) * \rho_t(x)\right), \; \rho_t(x) := \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}, & \text{per } t>0 \\ u_0(x) = I_{[-1,1]}(x) & \text{per } t=0 \end{cases}$$, cioè

per $t>0$ $u(t,x) = e^{t^2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u_0}_{I_{[-1,1]}}(x-s)\,\rho_t(s)\,ds$ $\underset{= I_{(x-1,x+1)}!!}{=}$

$= \frac{e^{t^2}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{x-1}^{x+1} e^{-s^2/4t}\,ds \underset{\uparrow\, s/\sqrt{4t}=r \Leftrightarrow s=r\sqrt{4t}}{=} \frac{e^{t^2}}{\sqrt{4\pi t}}\sqrt{4t}\int_{\frac{x-1}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{4t}}} e^{-r^2}\,dr =$

$= \frac{e^{t^2}}{\sqrt{\pi}}\left[G\left(\frac{x+1}{\sqrt{4t}}\right) - G\left(\frac{x-1}{\sqrt{4t}}\right)\right]$, $G :=$ una primitiva di e^{-r^2};

riassumendo, una soluzione del problema iniziale dovrebbe essere

$$u(t,x) = \begin{cases} I_{[-1,1]}(x) & \text{per } t=0 \text{ e } x\in\mathbb{R} \\ \frac{e^{t^2}}{\sqrt{\pi}}\left[G\left(\frac{x+1}{\sqrt{4t}}\right) - G\left(\frac{x-1}{\sqrt{4t}}\right)\right] & \text{per } t>0, x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

($G :=$ una primitiva di e^{-r^2}); e

in effetti è C^∞ $\forall t>0$ poiché lo è $\frac{e^{t^2}}{\sqrt{4\pi t}}$ e G

e inoltre soddisfa ($u(0,x) = u_0(x)$ e) l'EQUAZIONE (...).

Ora, $\forall x_0 \in (-1,1)$, è costante in $(0,x_0)$: infatti per $x\to x_0$ e $t\to 0^{(+)}$ è $\frac{x+1}{\sqrt{4t}} \to +\infty$ e $\frac{x-1}{\sqrt{4t}} \to -\infty$, per cui

$$u(t,x) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\lim_{s\to+\infty} G(s) - \lim_{s\to-\infty} G(s)\Big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds \underset{(s=t/\sqrt{2})}{=}$$

$\left(\int_{\bar{x}}^{s} e^{-\sigma^2}d\sigma\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt}_{\sqrt{2\pi}} = 1 \quad (= I_{(-1,1)}(x_0)\,!)$$

; analogamente

$\forall x_0 \notin [-1,1]$ è, per $x\to x_0$ e $t\to 0^+$, $\begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{4t}} \to +\infty \text{ e } \frac{x-1}{\sqrt{4t}} \to +\infty \text{ o} \\ \frac{x+1}{\sqrt{4t}} \to -\infty \text{ e } \frac{x-1}{\sqrt{4t}} \to -\infty \end{cases}$,

dunque si ottiene subito che $u(t,x) \to 0$.

Viceversa, ad es. per $x=+1$, per $t\to 0^+$ è $u(t,1) \to$

$$\to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\lim_{s\to+\infty} G(s) - G(0)\Big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds}_{} = \frac{1}{2} \neq 1!!$$

e analog. per $x=-1$ $u(t,x) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 1$

(NOTA: $u_t = 2tu + u_{xx} \iff u_t - 2tu = u_{xx} \iff (u_t - 2tu)e^{-t^2} = u_{xx}e^{-t^2} \iff w_t = w_{xx}$ CON $w := u\cdot e^{-t^2}$, DA CUI $w \in$ QUINDI u ($\in L(\ldots)$!!)!)

(EX) $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ CON $\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n = 0 \quad \forall n \geq 0 \Rightarrow$ $f \overset{q.o.}{=} 0$; se f non è a supp. compatto (ma $fx^n \in L^1$), allora questa implicazione è falsa in generale.

$\boxed{\text{Dunque}}$, $x^n f(x) \in L^1 \; \forall n \geq 0 \Rightarrow \hat{f} \in C^\infty_{(0)}$ CON

$\hat{f}^{(n)}(p) = (-i)^n \widehat{x^n f}(p)$, E IN PARTICOLARE

$\hat{f}^{(n)}(0) = (-i)^n \widehat{x^n f}(0) = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) \overset{\forall n\geq 0}{=} 0$;

ma come sappiamo $\hat f \in L^2_c \Rightarrow \hat f$ è analitica perché restrizione a $\mathbb{R}$ di una funzione definita e olomorfa su tutto $\mathbb{C}$; essendo allora TUTTE derivate nulle in 0, dev'essere ovunque 0, e allora per il teorema di inversione anche $f = 0$ (in L^1, ovvero q.o.). ✓

Ora, il nostro controesempio f deve avere $\hat f \in C^\infty_{(0)}$ con tutte le derivate nulle in 0 MA SENZA ESSERE ANALITICA; sia allora $g \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ REALE E PARI, NON $\equiv 0$ ($\not\equiv$ in L^1), a supp. compatto, e tale che $g^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \geq 0$, e sia $f := \hat g$; allora f è ovviamente $C^\infty_0(\mathbb{R})$ REALE e PARI e ovviamente NON $\equiv 0$.

MA $g \in C^n$ CON $g, g^{(n)} \in L^1 \Rightarrow \widehat{g^{(n)}} = (iy)^n \hat g$, e inoltre $g \in C^1$ con $g \in L^2$, $g' \in L^2 \Rightarrow \hat g \in L^1$

$\Rightarrow g \in C^{n+1}$ CON $g^{(n)} \in L^1$, $g^{(n+1)} \in L^2 \Rightarrow \widehat{g^{(n)}} = (iy)^n \hat g \in L^1$,

$\Rightarrow x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall n \geq 0$, e a questo punto

$$(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx = \hat f^{(n)}(0) = \hat{\hat g}^{(n)}(0) \underset{g \text{ PARI} \Rightarrow \hat{\hat g} = \ldots !!}{=} 2\pi g^{(n)}(0) = 0 \quad \square$$

(ALTRA VIA per la 1ª questione: se $f \in L^2_c$ e supp $f \subseteq [-M, M]$ ($M > 0$), allora $f \perp x^n$ in $L^2(-M,M)$ $\forall n \geq 0$ $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ al loro Span (che sono i polinomi) $\Rightarrow$ alla loro chiusura (CONTINUITÀ $\langle\,;\,\rangle_2$!); ma i polinomi su $[-M,M]$ sono densi in L^2 perché per STONE–WEIERSTRASS lo sono in

C^0 in $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$ $\|\cdot\|_1$ ($\mathcal{L}^1([-M,M]) < \infty$!) , e $f \perp \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow f = 0_{L^2}$.

Se $f \notin \mathcal{L}^2$ (ma $f \in \mathcal{L}^1$), fare la $\rho \in \mathcal{L}^\infty(-M,M)$ tali che $\int_{-M}^{M} f\rho\,dx = 0$ ci sono ~~cerchiati~~ i momenti x^n $\forall n \geq 0$; per Lebesgue è ovvio che ρ_n EQUILIMITATE $\xrightarrow[n\to\infty]{q.o.} \rho$ $\Rightarrow$ Converge ρ integrabile, e allora $\int_{-M}^{M} f\rho_n\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-M}^{M} f\rho\,dx = 0$; è ovvio allora che ρ_n = polinomi $\xrightarrow[q.o.]{\|\cdot\|_\infty}$ $\rho \in C^0$ $\Rightarrow$ $\int_{-M}^{M} f\rho\,dx = 0$, ed ora anche $\rho \in \mathcal{L}^\infty$ generica perché $\rho \in \mathcal{L}^\infty$ è limite q.o. di funzioni continue equilimitate (PER LUSIN, essendo $\mathcal{L}^1([-M,M]) < \infty$!); in particolare se

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{se } f \geq 0 \\ -1 & \text{se } f < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \int_{-M}^{M} f\rho\,dx =$$

(segno(f)!)

$= \int_{-M}^{M} |f|\,dx$, da cui $f \overset{q.o.}{=} 0$ in $[-M,M]$, cioè in $\mathbb{R}$.

(EX) $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con f α-hölderiana in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f*g$ lo è. TROVARE $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ con f continua tali che $f*g$ NON è α-hölderiana $\forall \alpha > 0$ ($\alpha \leq 1$).

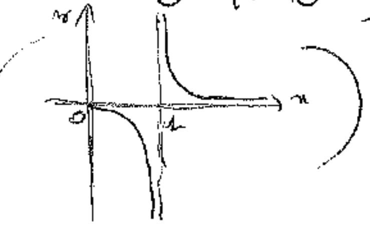
$\boxed{\text{Dopo}}$ che $\exists$ $c > 0$ ($< \infty$) tale che, $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(x')| \leq c|x-x'|^\alpha$, è anche $|f*g(x) - f*g(x')| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x'-y)|\,|g(y)|\,dy \leq$

$(x-y)-(x'-y) = x-x'$!!

$\le |x-x'|^\alpha \, C\|g\|_1$ (costante ≥ 0!) ($<\infty$) ✓. Ora, per il controesempio osserviamo

invece che $\dfrac{1}{|\log(x)|}$ (per $x>0$ e $x\neq 1$, definita valendo 0 in 0)

ha $\left(\dfrac{1}{|\log x|}\right)' = \dfrac{-1}{x\log^2 x}$



non è α-hölderiana per alcun $\alpha\in(0,1)$.

Allora, $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x\le 0 \\ \dfrac{1}{|\log x|} & \text{per } 0< x\le 1/e \\ \dots \left(\dfrac{1}{|\log x|}\right) & \text{per } x>1/e \end{cases}$ in modo che $f>0$, $\in L^1$ e continua)

$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x|\log x|^2} & \text{per } 0< x\le 1/e \\ \dots & \text{per } x>1/e \end{cases}$ in modo che $g>0$ e $\in L^1$,

per $y\geq x$ è $=0$; per $y\geq 0$ è 0 ; $f=g=0$ su $x\le 0$!

$\frac{1}{e} > x > 0 \Rightarrow f*g(x) - f*g(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,[f(x-y) - f(-y)]\,dy =$

$= \displaystyle\int_0^x g(y) f(x-y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{y|\log(y)|^2}\,\frac{1}{|\log(x-y)|}\,dy \geq$

$\geq \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{1}{y|\log(y)|^2}\,\frac{1}{|\log(x-y)|}\,dy \geq \int_0^{x/2} \frac{-1}{y|\log y|^2}\,\frac{-1}{|\log(x/2)|}\,dy =$

$\left(\dfrac{-1}{y(\log y)^2}\;\dfrac{-1}{\log(x-y)}\right)$ $\quad y\le x/2 \Rightarrow |\log(x-y)| \le |\log(x/2)|$

$= \dfrac{-1}{|\log(x/2)|}\left[\dfrac{1}{|\log y|}\right]_0^{x/2} = \dfrac{-1}{(\log(x/2))^2} \Rightarrow$

$|f*g(x) - f*g(0)| \geq \dfrac{1}{(\log x/2)^2} \underset{x\to 0^+}{\gg} x^{\alpha} = |x-0|^{\alpha}$

$\left(\log x/2 \underset{x\to 0^+}{\ll} x^{-\alpha/2} \quad \forall \alpha>0\right)$

$\forall \alpha > 0$, e allora $f*g$ NON è α-hölderiana $\forall \alpha>0$.

(EX) Data $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ continua, si consideri

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(t)\sin(x) & \text{in } (0,\infty)\times(0,\pi) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 & \forall\, t>0 \\ u(0,x)=u_t(0,x)=0 & \forall\, x\in(0,\pi) \end{cases}$$

: risolverla quando $f\equiv 1$; trovare f limitata tale che però $u(t,x)$ è illimitata (nella t),

[Al solito, cerco $u(t,x)=\sum_{n\geq 1} c_n(t)\sin(nx)$, dove $c_n(t)=c_n(u(t,\cdot))=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin(nx)\,dx$, almeno "formalmente"

$c_n(t)$ risolve $\ddot{c}_n(t)+n^2c_n(t)=f(t)\,c_n(\sin(x))$, $\left(=\begin{cases}1 & \text{se } n=1\\ 0 & n>1\end{cases}\right)$

cioè $\begin{cases}\ddot{c}_1(t)+c_1(t)=f(t) & \text{se } n=1\\ \ddot{c}_n(t)+n^2c_n(t)=0 & \text{se } n\geq 2\end{cases}$, con le

condizioni iniziali $c_n(0)=\dot{c}_n(0)=0$. Ma allora

$\ddot{c}_n(t)-n^2c_n(t)=0$ è risolta da 0 (e solo da 0), quindi

$c_n(t)\equiv 0$ $\forall\, n>1$; per $\boxed{n=1}$, $f(t)\equiv 1\Rightarrow$

$c_1(t)$ risolve $\begin{cases}\ddot{c}_1(t)+c_1(t)=1\\ c_1(0)=\dot{c}_1(0)=0\end{cases}$, cioè $c_1(t)=1-\cos(t)$,

da cui $u(t,x)=(1-\cos(t))\sin(x)$, che effettivamente

risolve. Ora l'idea è prendere $f(t):=\cos(t)$ (limitata!)

perché $c_1(t)=\frac{t}{2}\sin(t)\Rightarrow u(t,x)=\frac{t}{2}\sin(t)\sin(x)$ (illimitata!) .]

(c) Vogliamo dim. che $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ è un'orientazione su S,

Cioè che per una qualche famiglia di parametrizzazioni $g: A \subseteq \mathbb{R}^d$ (aperto) $\to S \cap U$ C^1, TALI CHE per ogni aperto U di S, si ha che i vettori $\tilde{v}_i(t) := (Dg(t))^{-1} v_i(\overset{(g(t))}{x})$ determinano una orientazione di $\mathbb{R}^d$ che NON dipende da t. Come sappiamo (...) possiamo supporre che $\forall g$ di tale fam. $\exists\, 0 \in A'$ aperto di $\mathbb{R}^{d}$ e $G: A \times A' \to U$ parametrizz. C^1 tale che $G(t,0) = g(t)$ $\forall t \in A$; se allora $F: U \to A \times A'$ è G^{-1}, si ha $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ $(\tilde{v}_i(t), 0) = \nabla F(x)\, v_i(x)$ $(x := g(t))$; ma $t \mapsto g(t)$, $x \mapsto \nabla F(x)$ e $x \mapsto v_i(x)$ sono continue, per cui lo sono $t \mapsto \tilde{v}_i(t)$, e allora $[\tilde{v}_1(t), \dots, \tilde{v}_d(t)]$ essendo per così continua è COSTANTE. ✓

(b) $\forall x \in S$, completiamo $v_{d+1}(x), \dots, v_n(x)$ di $\mathrm{Tan}(S,x)^\perp$ con $v_1(x), \dots, v_d(x) \in \mathrm{Tan}(S,x)$ tali che $v_1(x), \dots, v_d(x), v_{d+1}(x), \dots, v_n(x)$ sia base di $\mathbb{R}^n$ con orientazione canonica, cioè ovviamente

$$\det\underbrace{\left(v_1(x) \,|\, \dots \,|\, v_n(x)\right)}_{=:V(x)} > 0 \quad \text{(vettori colonna!)}$$

; il problema è che (Voglio fare che $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ è orient. di S, ossia $[\tilde{v}_1(t), \dots, \tilde{v}_d(t)]$ ha det di segno costante) i nuovi vettori $v_1(x), \dots, v_d(x)$ NON possono in generale essere sempre scelti in modo continuo da x ... Sia allora F come prima e sia, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall t \in A$, $w_i(t) = \nabla F(x)\, v_i(x)$ $(x \doteq g(t))$, e sia allora $W(t) \doteq [w_1(t) | \dots | w_n(t)] = \nabla F(x)\, V(x)$ $\Rightarrow$ $\det(W(t)) = \det(\nabla F(x)) \det(V(x))$ $(x \doteq g(t))$; inoltre precisamente $w_i(t) = (\tilde{v}_i(t), 0) \ \forall i \in \{1, \dots, \theta\}$, così

$$W(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix} \quad (A(t) = [\tilde{v}_1(t) | \dots | \tilde{v}_\theta(t)]), \Rightarrow$$

$\det(A(t)) \det(C(t)) = \det(\nabla F(x)) \det(V(x))$; il punto è osservare che $\det(A(t))$ ha segno costante! Infatti $\det(V(x)) > 0$ per costruzione; $\det(\nabla F(x))$ è costante perché $\nabla F \neq 0$ ed è continuo in x (e det è continuo!); $\det(C(t))$ ha segno costante perché è un minore $(n-\theta) \times (n-\theta)$ di $[w_{\theta+1}(t), \dots, w_n(t)]$, continuo in t perché lo sono tali vettori (provato come in (c)!). ✓

(e) Applichiamo (b) prendendo come base di $\mathrm{Tan}(S,x)^\perp$ i vettori riga di $\nabla f(x)$ (sono $(n-\theta)$ lin. indip.!), a questo continui in x (ovvio) e in $\mathrm{Tan}(S,x)^\perp$! ✓

(= in L^2!)

EX $E \subseteq \mathbb{R}$ mis., $X := \{f \in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R}) \mid f \overset{\text{q.o. in } E}{=} 0\}$ ($\mathbb{R}$-sottosp. CHIUSO di $L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R})$!): scrivere P_X.

$\forall f \in L^2_\mathbb{R}(\mathbb{R})$, $P_X f :=$ "$f - f_{|E}$" $= (1 - I_E) f$ è ovviamente $L^2 \to X$ e lineare, inoltre $f - P_X f \perp X \ \forall f \in L^2$ (che conclude): infatti $f - P_X f = I_E f \overset{\text{q.o. in } \mathbb{R} \setminus E}{=} 0$, mentre $\forall g \in X$ è $g \overset{\text{q.o. in } E}{=} 0 \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} (I_E \cdot f) \cdot g \overset{\text{q.o.}}{=} 0$, $\Rightarrow \langle I_E f, g \rangle = \int_\mathbb{R} (I_E f) g \, dx = 0$. ✓

(42)

EX Con $1 < p \le +\infty$, se $f \in \mathcal{L}^p_a(\mathbb{R})$ e $g \doteq I_{[-1,1]}$ (vista come in $\mathcal{L}^q_a(\mathbb{R})$, $q \doteq \frac{p}{p-1}$) : allora $f*g$ è $1/q$ - hölderiana.

$\forall x,y \in \mathbb{R}$, $|f*g(x) - f*g(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)[g(x-t) - g(y-t)]\,dt\right| \le$

$\le \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(t)|}_{\in \mathcal{L}^p} \underbrace{|g(x-t) - g(y-t)|}_{\in \mathcal{L}^q \; =: h(t)}\,dt \le \|f\|_p \|h\|_q \quad (<\infty)$;

ora, $h(t) = |\underset{I_{[-1,1]}(x-t)}{g(x-t)} - \underset{I_{[-1,1]}(y-t)}{g(y-t)}| \overset{(\text{OVVIO})}{=} |I_{[x-1,x+1]} - I_{[y-1,y+1]}|(t) =$

$= I_{\overset{A}{\big(}[x-1,x+1]\setminus[y-1,y+1] \,\cup\, [y-1,y+1]\setminus[x-1,x+1]\big)}(t)$ che allora

$\|h\|_q = (\mathcal{L}^1(A))^{1/q}$; ma effettivamente $\mathcal{L}^1(A) \le 2|x-y| \Rightarrow$

$\|h\|_q \le 2^{1/q}|x-y|^{1/q}$, e allora $\forall x,y \in \mathbb{R}$ in effetti

$|f*g(x) - f*g(y)| \le \underbrace{2^{1/q}\|f\|_p}_{=: C \,(<\infty)} |x-y|^{1/q}$. $\checkmark$

EX Correlazione tra $f \in \mathcal{L}^1_a(\mathbb{R})$ reale e pari in termini della loro TDF.

$\forall f \in \mathcal{L}^1_a(\mathbb{R})$, $\hat{f}(y)$ è ben def. $\forall y \in \mathbb{R}$ ed è $\hat{f}(y) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx}\,dx$; allora $\widehat{f(-x)}(y) =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-iyx}\,dx \underset{(-x=:t)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-y)t}\,dt = \hat{f}(-y)$, mentre

$\widehat{\overline{f(x)}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-iyx}\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iyx}\,dx} = \overline{\hat{f}(-y)}$, per

cui (per iniettività della TDF!) f DISPARI (q.o.) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $f(x) \overset{\text{q.o.}}{=} -f(-x) \Leftrightarrow$
$\widehat{f(x)}(\eta) \overset{(\text{com})}{=} -\widehat{f(-x)} (=) -\hat{f}(-\eta)$, cioè $\hat{f}$ è DISPARI (ovunque),
mentre f REALE (q.o.) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f \overset{\text{q.o.}}{=} \bar{f} \Leftrightarrow \hat{f}(\eta) = \hat{\bar{f}}(\eta) (=) \overline{\hat{f}(-\eta)}$,

per cui f reale e dispari $\Leftrightarrow$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\eta) = -\overline{\hat{f}(-\eta)} = -\overline{\hat{f}(\eta)}$,
cioè $\hat{f}$ dispari ed immaginaria pura. $\square$

(EX) Sia $\omega := x_1 x_2 x_3 (dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1)$ (2-forma C^1 su $\mathbb{R}^3$) e sia $\rho(s_1, s_2) := (s_2^2, s_1^2, s_1 s_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (C^1);
calcolare $d\omega$ e $\rho^\# \omega$.

$d\omega \overset{(\text{def.})}{=} \underset{(x_2x_3dx_1 + x_1x_3dx_2 + x_1x_2dx_3)}{d(x_1 x_2 x_3)} \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1) \overset{(\text{anche})}{=}$

$= (x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. ✓ Infine

$\rho^\# \omega = \underbrace{(s_2^2)(s_1^2)(s_1 s_2)}_{= s_1^3 s_2^3} \Big(\underbrace{\underbrace{d(s_2^2)}_{2s_2 ds_2} \wedge \underbrace{d(s_1^2)}_{2s_1 ds_1}}_{(-4s_1s_2 ds_1 \wedge ds_2)} + \underbrace{\underbrace{d(s_1^2)}_{2s_1 ds_1} \wedge \underbrace{d(s_1 s_2)}_{s_2 ds_1 + s_1 ds_2}}_{(2s_1^2) ds_1 \wedge ds_2} +$
$+ \underbrace{\underbrace{d(s_1 s_2)}_{s_2 ds_1 + s_1 ds_2} \wedge \underbrace{d(s_2^2)}_{2s_2 ds_2}}_{(2s_2^2) ds_1 \wedge ds_2} \Big)$

$= 2 s_1^3 s_2^3 (s_1 - s_2)^2 ds_1 \wedge ds_2$. $\square$

(EX) Calcolare la TDF di $f(x) := \dfrac{3}{(1+x^2)(4+x^2)}$ ($\in L^1$!)

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{4+x^2}$, e come sappiamo $\widehat{\dfrac{1}{1+x^2}}(\eta) =$
$= \pi e^{-|\eta|}$ ($\forall \eta \in \mathbb{R}$); ma allora $\dfrac{1}{4+x^2} = \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{1+(x/2)^2} =$
$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{1+(x/2)^2}\right)$ che $\widehat{\dfrac{1}{4+x^2}}(\eta) \underset{(\forall \eta \in \mathbb{R})}{=} \dfrac{1}{2}\left(\pi e^{-2|\eta|}\right) = \dfrac{\pi}{2} e^{-2|\eta|}$,

perché come è noto $\widehat{\frac{1}{\delta} f(\frac{x}{\delta})}(\omega) = \hat{f}(\delta\omega)$ $\forall \delta \neq 0$, e allora in conclusione (per linearità della TDF) $\hat{f}(\omega) \overset{(\forall \omega \in \mathbb{R})}{=} \pi e^{-|\omega|} - \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$. $\square$]

(EX) Dato $n \geq 0$ intero, sia $\mathcal{G}_n := \{ f(x) = p(x) e^{-x^2/2} \mid p(x)$ polinomio (a coeff complessi) di grado $n\}$: allora la TDF $(\mathcal{F})$ porta $\mathcal{G}_n$ in sé, cioè $\mathcal{F}(\mathcal{G}_n) \subseteq \mathcal{G}_n$.

Anzitutto, $\forall n \geq 0$ $\mathcal{G}_n \subsetneq \mathcal{L}^1_c(\mathbb{R})$, e inoltre se $g(x) := e^{-x^2/2}$ allora $\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, g(\omega)$ (NOTO); ora, per linearità di $\mathcal{F}$, è ovvio che la tesi equivale alla proposizione: "$\forall n \geq 0$, $x^n g(x)$ ha $\mathcal{F}(x^n g(x)) \in \mathcal{G}_n$". Ora, $\forall n \geq 0$, è $x^k g \in \mathcal{L}^1_c(\mathbb{R})$ $\forall 0 \leq k \leq n$ $\underset{\text{(in particolare)}}{\Rightarrow}$ $\hat{g} \in \mathcal{C}^n_{(-\infty, +\infty)}$ con $\hat{g}^{(n)} = \widehat{(-ix)^n g}$: allora, $\forall n \geq 0$, $\widehat{x^n g(x)} = i^n \widehat{(-ix)^n g} = i^n \hat{g}^{(n)} = i^n \sqrt{2\pi} \boxed{g^{(n)}}$, e non resta che dimostrare $\boxed{g^{(n)} \in \mathcal{G}_n}$. Questo si ha subito se dimostro che $\boxed{\mathcal{D} : \mathcal{G}_k \to \mathcal{G}_{k+1}}$ $\forall k \geq 0$, se $\mathcal{D}$ è l'operatore di derivazione (perché allora $\underset{\text{(ovvio)}}{\mathcal{D}^n : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_n}$, e infatti $e^{-x^2/2} = g(x) \in \mathcal{G}_0$!); ma infatti $f = p \cdot g$ con p polin. di grado k $\Rightarrow$ $\mathcal{D}f = f' = (pg)' = p'g + \underset{-xg}{g'} p = \underbrace{[p' + (-x \cdot p)]}_{\text{polin. di grado } k+1 \text{ !}} g$. $\square$]

(EX) Posto $\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4$ (2-forma C^1 in $\mathbb{R}^4$)
Calcolare $\omega \wedge \omega$.

[Calcolo diretto: $(dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_4) = 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ (ovvio). ▫]

(EX) Scrivere le serie di Fourier reale e complessa di $f(x) := |x|$. $(x \in (-\pi,\pi) : f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi))$

[Trovo le serie di F. COMPLESSA di f, per poi dedurre quella reale:

$f(x) = |x| \overset{\text{in } L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)}{\underset{(\text{in realtà unif.})}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$, dove $c_n := c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx =$ ($|x|$ (pari!))

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \underbrace{e^{-inx}}_{(=\cos(nx) + i\sin(nx))} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left\{ \cancel{\frac{1}{n}\left[x\sin(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}} \right.$ $+$ (dispari!) ($=0$) (e $c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \pi/2$!)

$+ \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi n^2}\underbrace{\left[\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}}_{(-1)^n - 1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari } (\neq 0) \\ -\frac{2}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$, per

cui $f(x) = |x| = \pi/2 - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ n \text{ dispari}}} \frac{2}{\pi n^2} e^{inx}$; ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ è allora immediato capire

che $|x| = \pi/2 - \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z},\, n\\ \text{dispari}}} \frac{2}{\pi n^2}\cos(nx) = \pi/2 - \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n \text{ dispari}}} \frac{4}{\pi n^2}\cos(nx)$. ▫]

(EX) Dati $a, b > 0$, sia $f(x) := \frac{|x|^a}{1 + |x|^b}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$:
dire per quali a, b ~~e $p \geq 1$~~ è $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$.

[Ricordiamo le formule per l'"$\int_{\mathbb{R}^n}$" di una funzione radiale $g(|x|)$ definibile su $\mathbb{R}^n$: se $C_n \doteq$ volume della palla unitaria (centrata in 0) di $\mathbb{R}^n$, allora $\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} g(|x|)\,dx = n C_n \int_0^{+\infty} g(\rho)\rho^{n-1}\,d\rho}$!!

Dunque $\|f\|_p^p \underset{(1\le p<\infty)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,dx \underset{(f\ge 0)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{ep}}{(1+|x|^b)^p}\,dx =$

$= n C_n \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{ep}}{(1+\rho^b)^p}\rho^{n-1}\,d\rho$; ma, per $\rho \to +\infty$, è

$\frac{\rho^{ep}}{(1+\rho^b)^p}\rho^{n-1} \sim \rho^{p(e-b)+n-1}$, per cui $\|f\|_p^p < \infty$

$\Longleftrightarrow p(e-b)+n-1<-1$, cioè $n<p(b-e)$ ($\Rightarrow b>e$, come già si poteva dire). Infine, per $p=+\infty$, è ovvio che $f \in L^\infty_m(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow b \ge e$: se $b\ge e$, allora infatti $f \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$; d'altra parte per $b<e$ $f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} +\infty$. ∎

EX Trovare soluzione di $(u(t,x))$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u & \text{su } [0,\infty)\times[0,\pi] \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 \quad \forall t\ge 0 \\ u(0,x) =: u_0(x) \doteq \underset{(\text{reale!})}{x(x-\pi)} \quad \forall x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Viste le condizioni al bordo, cerco soluzione $u(t,x)$ della forma

$u(t,x) = \sum_{n\ge 1} b_n(t)\sin(nx)$ con $b_n(t) := b_n(u(t,\cdot)) =$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t,x)\sin(nx)\,dx$ (cioè $u(t,x)$, $\forall t\ge 0$, è in serie di Fourier reale sviluppata rispetto alla x) ; notiamo che $b_n(0) = b_n(u_0) =: b_n^{(0)}$.

Allora, almeno formalmente, condizione ultimamente necessaria affinché $u(t,x)$ soddisfi $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ è che, $\forall n \geq 1$, $c_n(u_t) = c_n(u_{xx} - u) \overset{(\text{lin.})}{=}$
$= c_n(u_{xx}) - c_n(u)$ $(\forall t \geq 0)$, cioè (almeno formalmente)

$$c_n'(t) = -n^2 c_n(t) - c_n(t) = -(n^2+1)\, c_n(t),$$

unito alle condizioni $c_n(0) = c_n^{(0)}$, OSSIA $\boxed{c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-(n^2+1)t}}$ $\forall n \geq 1$ (e $\forall t \geq 0$).

Calcolo i coefficienti $c_n^{(0)}$ di $u_0(x) = x(x-\pi)$ (in serie di seni):

$$\forall n \geq 1, \quad c_n^{(0)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left\{ \underbrace{\frac{1}{n}\Big[x(x-\pi)\cos(nx)\Big]_{x=\pi}^{x=0}}_{0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_0^\pi (2x - \cancel{\pi})\cos(nx)\,dx \right\} = \frac{4}{\pi \cdot n}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx =$$

$\int \cos = 0!$

$$= \frac{4}{\pi n}\left\{ \cancel{\frac{1}{n}\Big[x\sin(nx)\Big]_{x=0}^{x=\pi}} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^\pi \sin(nx)\,dx}_{} \right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\cos(nx)\Big]_{x=\pi}^{x=0} = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2/n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Pertanto una soluzione del problema iniziale dovrebbe essere

$$u(t,x) := \sum_{\substack{n \geq 1,\\ n \text{ dispari}}} \underbrace{-\frac{8}{\pi n^3} e^{-(n^2+1)t}\sin(nx)}_{=:\, u_n(t,x)}.$$

Infatti: anzitutto, tale funzione è ben definita e continua per convergenza uniforme della serie su tutto $[0,+\infty) \times [0,\pi]$ (anzi $\mathbb{R}$): infatti, $\forall n \geq 1$, $\|u_n\|_\infty \overset{(\text{evidente})}{=} \frac{8}{\pi n^3} \Rightarrow$ la serie converge totalmente;
allora funziona anche subito dire che chiaramente soddisfa $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ $\forall t \geq 0$ e $u(0,x) = x(x-\pi)$ $\forall x \in [0,\pi]$. ✓

Vediamo allora che è "regolare" su $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, precisamente C^∞:
(esatto!)

infatti le serie converge in "norma C^k" $\forall k \geq 1$ su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ (45)

$\forall \delta>0$, perché $\forall h$ e $k \geq 1$ (interi) è $\|\partial_t^h \partial_x^k u_n\|_{L^\infty(\nabla)} =$

$= \left\| \frac{-8}{\pi n^3}(-1)^h (n^2+1)^h e^{-(n^2+1)t} n^k \begin{matrix}\pm\sin(nx)\\ \pm\cos(nx)\end{matrix} \right\|_\infty = \frac{8}{\pi}(n^2+1)^h n^{k-3} e^{-(n^2+1)\delta} \sim$ (chiaro)

$\underset{\text{per } n\to+\infty}{\sim}$ (costante (>0)) $*\ n^{2h+k-3} e^{-\delta n^2}$, e le serie di tali termini (positivi)

è ovviamente convergente (ad es., per il criterio della radice!).

Dunque possiamo anche scambiare i segni di "$\sum_n$" e "∂" (con "∂" di QUALSIASI ordine!), e allora $u_t = u_{xx} - u$ perché tale EQ. è soddisfatta dagli u_n (non solo è evidente: ma è anche per costruzione!). // (Ultima osservazione: la regolarità di u rende RIGOROSI i calcoli iniziali (ad esempio, $c_n(u_t) = c_n(t)$ per il teorema di "∂" sotto "$\int$"!), per cui u C^1 in t e C^2 in x soluzione è automaticamente UNICA, essendo univocamente determinata dai conti nel senso visto, e coincide pertanto con $u \in C^\infty$!) $\square$

EX $S := \{X \in \mathbb{R}_S^{n\times n} \mid X^2$ ha TRACCIA $n\}$ (MATRICI $n\times n$ REALI E SIMMETRICHE!) ($\ni I \in S$!) (I identità $n\times n$) è
$(n\geq 1)$
una superficie (in $\mathbb{R}_S^{n\times n}$) compatta C^∞ senza bordo di dimensione

$d := ??$; determinare lo spazio tangente $\mathrm{Tan}(S, I)$.

$\boxed{\mathbb{R}_S^{n\times n}}$ è $\mathbb{R}$-sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$ con $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_S^{n\times n}) \overset{\text{(STRA-NOTO!)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} =: N$,

nel quale possiamo allora considerare il prodotto scalare "standard"

$\langle X ; Y \rangle := \sum_{i,j} X_{i,j} Y_{i,j}$ (e quindi la norma indotta "$|\cdot|$"!).

Ora, S è definito dall'equazione "$A(X) = n$" dove

$f: \mathbb{R}^{n\times n}_S \to \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^{N-(N-1)})$ è $f(X) := tr(X^2) \underset{(X \text{ simm.!})}{=} tr(X^t X)$ $= \sum_{i,j} X_{i,j}^2 = |X|^2$, cioè S è precisamente la palla in $\mathbb{R}^{n\times n}_S$ centrata in $\underline{O}$ e di raggio $\sqrt{n}$, che è notoriamente una ipersuperficie compatta senza bordo e C^∞; in particolare $d = N-1 =$ $= \frac{n^2+n-2}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$. ✓ (NOTA: sia $S \subseteq V$ e V sottospazio di W; allora S è superficie in $V \underset{\text{(per esercizio)}}{\Leftrightarrow} S$ lo è in W!)

Dunque $Tan(S,I) \underset{\text{(noto)}}{=} \nabla f(I)^\perp$; ma $\nabla f(X) = 2X \Rightarrow$ $Tan(S,I) = I^\perp = \{$matrici simmetriche (reali $n\times n$) con traccia $0\}$.

EX Tra tutti i polinomi pari p di grado al più 4, reali e su $[-\pi,\pi]$, trovare quello che minimizza la distanza in $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ da $f(x) := \cos(x)$. Se rimuoviamo l'ipotesi "pari"...?

Anzitutto, i polinomi "come nelle ipotesi" (pari o no, ovvio) formano chiaramente un $\mathbb{R}$-sottosp. (lo però è) CHIUSO X di $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$, per cui $\forall f \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ esiste in effetti $p \in X$ caratterizzato dal fatto che

$f - p \perp X$, cioè (ovvio) $f-p \perp$ a 1, x^2 e x^4, cioè

$$\begin{cases} \langle p;1\rangle = \langle f;1\rangle \\ \langle p;x^2\rangle = \langle f;x^2\rangle \\ \langle p;x^4\rangle = \langle f;x^4\rangle \end{cases}$$

cioè (se $p(x) = a+bx^2+cx^4$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ e se $f(x)=\cos(x)$)

$$\begin{cases} \langle a+bx^2+cx^4;1\rangle = \langle \cos(x);1\rangle \\ \langle a+bx^2+cx^4;x^2\rangle = \langle \cos(x);x^2\rangle \\ \langle a+bx^2+cx^4;x^4\rangle = \langle \cos(x);x^4\rangle \end{cases},$$

cioè (FACILE)

$$\begin{cases} \cancel{2}(a\cancel{\pi} + b\frac{\pi^{\cancel{3}\,2}}{3} + c\frac{\pi^{\cancel{5}\,4}}{5}) = 0 \\ 2(a\pi^3/3 + b\pi^5/5 + c\pi^7/7) = -4\pi \\ 2(a\pi^5/5 + b\pi^7/7 + c\pi^9/9) = -8(\pi^3 - 6\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b\pi^2/3 + c\pi^4/5 = 0 \\ a/3 + b\pi^2/5 + c\pi^4/7 = \frac{-2}{\pi^2} \\ a/5 + b\pi^2/7 + c\pi^4/9 = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{24}{\pi^4} \end{cases},$$

da cui a, b, c (che $\exists!_{(,)}$) ... Infine è ovvio che tale p è anche la proiezione di f nell'$\mathbb{R}$-sp. X' dei polinomi (reali e su $[-\pi,\pi]$) di grado al più 4, perché $f-p \perp 1, x^2$ e x^4 è appena stato "dimostrato" (è per la nostra scelta di p), mentre è $\perp$ a x e x^3 per il banale motivo che $f-p$ è PARI e $\langle ; \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \ldots$ con $[-\pi,\pi]$ centrato in 0. $\square$

(EX) Dato $k \geq 1$ (intero), sia $X := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid f \in \mathcal{C}^{2k}([0,1])$ $(\in L^{\infty}_{\mathbb{R}}(0,1)!)$ CON $f^{(h)}(0) = f^{(h)}(1) = 0 \ \forall\, 0 \leq h \leq k-1\}$ ($\mathbb{R}$-sottosp. (proprio e DENSO in $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$!) e sia $T : X \to L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dato da $Tu := P(\mathcal{D})u$, con $\mathcal{D} :=$ operatore di derivazione e $P :=$ un fissato polinomio (reale) DI GRADO $2k$: dim. che P pari $\Rightarrow$ T autoaggiunto (T LINEARE!). Vale il viceversa ?? (sì)

[ES.: per $k=1$, $X = \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \mid f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ CON $f(0)=f(1)=0\}$ e $Tu = au + bu' + cu''$ SE $P(x) := a + bx + cx^2$ (a,b,c reali).]

Essendo $P(\mathcal{D}) = \sum_{j=0}^{2k} a_j \mathcal{D}^j$ ($a_j \in \mathbb{R}$ FISSATI), per dimostrare che T è autoaggiunto NEL CASO P PARI basta provare che OGNI $\mathcal{D}^{2h} : X \to L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ è autoaggiunto (per linearità) ($0 \leq h \leq k$); ma, $\forall\, 1 \leq i \leq k$ e $\forall\, 0 \leq j \leq 2k-1$, $\forall u, v \in X$

$$\langle \mathcal{D}^i u ; \mathcal{D}^j v \rangle_2 = \int_0^1 \underbrace{\mathcal{D}^i u}_{\text{INT.}}\, \underbrace{\mathcal{D}^j v}_{\text{DER.}}\, dx = \underbrace{\cancel{\left[\mathcal{D}^{i-1} u\, \mathcal{D}^j v\right]_0^1}}_{=0 \text{ (A CAUSA DI } u)} - \int_0^1 \mathcal{D}^{i-1} u\, \mathcal{D}^{j+1} v\, dx =$$

$$= -\langle \mathcal{D}^{i-1} u ; \mathcal{D}^{j+1} v \rangle_2 \Rightarrow \forall\, 0 \leq h \leq k,\ \langle \mathcal{D}^{2h} u ; v \rangle_2 \overset{\text{che bisogna è proprio } k \geq 1!}{=}$$

$$= (-1)^h \langle \mathcal{D}^h u ; \mathcal{D}^h v \rangle_2 = \langle u ; \mathcal{D}^{2h} v \rangle_2 \quad \forall u, v \in X, \text{ che}$$

è questo enunciato. ✓ Supponiamo ora P polinomio DISPARI (di grado $2n-1$ al più); è allora evidente che allo stesso modo otteniamo che $P(D)$ ha aggiunto $-P(D)$, ed essendo tale UNICA (per densità in L^2 di X!) otteniamo che $P(D)$ è autoaggiunto ($\Leftrightarrow$ $P(D) \equiv 0$, CIOÈ $P \equiv 0$ (e allora NON sarebbe dispari!) ($\Rightarrow$ ovvio: $P(D) \equiv 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(P(D)) = X$; se allora $P \not\equiv 0$, allora avremmo l'assurdo che $\mathrm{Ker}(P(D))$ = particolare $\mathbb{R}$-sottosp. di soluzioni di un eq. diff. lineare e omogenea a coeff. costanti ha DIM. FINITA!)).

Allora, in conclusione, $\forall$ polinomio (reale) P di grado al più $2n$ scritto nella forma $P = \underbrace{P_p}_{\text{che "parte" PARI}} + \underbrace{P_d}_{\text{che "parte" DISPARI}}$, possiamo dire che $P(D)$ autoaggiunto $\overset{(2^a \text{ parte})}{\underset{(1^a \text{ parte})}{\Leftrightarrow}}$ $P_d \equiv 0$, cioè affatto P PARI. ∎

(EX) Siano S_1 e S_2 superfici in $\mathbb{R}^n$ (C^1), di dim. d_1 e d_2 risp., senza bordo e TALI CHE $d_1 + d_2 > n$ e $\boxed{S := S_1 \cap S_2} \neq \phi$.

(1) Se $\mathrm{Tan}(S_1, x) \cap \mathrm{Tan}(S_2, x)$ ha dim. $d := d_1 + d_2 - n$ $\forall x \in S$, allora anche S è superficie (in $\mathbb{R}^n$) (C^1) senza bordo di dim. d.

(2) Se $d \neq d_1 + d_2 - n$, allora ciò NON è detto.

(1) Per ipotesi, $\forall x_0 \in S = S_1 \cap S_2$, $\exists$ intorni (aperti) U_1, U_2 di x_0 in S_1, S_2 risp. TALI CHE S_1 / S_2 è descritta in U_1 / U_2 dall'EQUAZIONE $f_1 = 0 / f_2 = 0$ CON $f_i(x): U_i \to \mathbb{R}^{n-d_i}$ C^1 con $Df_i(x)$ di rango massimo $\forall x \in S \cap U_i$ $(i \in \{1, 2\})$.

Per ciò, $\forall x_0 \in S$, $\exists$ $U := U_1 \cap U_2$ intorno aperto di x_0 in S

tale che S è descritta in U dall'equazione $f(x)=0$, $x\in S\cap U$, dove $f: U \to \mathbb{R}^{n-d_1}\times\mathbb{R}^{n-d_2}\cong\mathbb{R}^{2n-d_1-d_2}=\mathbb{R}^{n-d}$ è data da $f(x):=(f_1(x), f_2(x))$ (TUTTO EVIDENTE), che è anche evidentemente C^1; allora basta far vedere che $Df(x)$ ha rango massimo $(=n-d)$ $\forall x\in U\cap S$, CIOÈ $\ker Df(x)$ ha DIM. $=d$ $\forall x\in U\cap S$: ma infatti $\underset{(x\in S\cap U)}{\ker Df(x)} = \ker Df_1(x)\cap \ker Df_2(x) \overset{\text{ip.}}{=} \mathrm{Tan}(S_1,x)\cap \mathrm{Tan}(S_2,x)$ che ha proprio dimensione d per ipotesi. ✓

(2) Prendiamo con $n=3$ e $d_1=d_2=2$: se $S_1\cap S_2=\{p\}$ (UNO E UN SOLO PUNTO!) e se in p sono tangenti, allora $\mathrm{Tan}(S_1,x)\cap\mathrm{Tan}(S_2,x)$ ha dimensione 2 $(\neq 1\ldots!)$ in $x=p$, cioè $\forall x\in S$, ma S evidentemente non ha dimensione 2 (0, piuttosto). $\square$ (per esempio una superficie regolare)

EX (1) Scrivere $\sin^3(x)$ come comb. lin. reale di $\sin(nx)$, $n\geq 1$.

(2) Trovare una soluzione $u=u(t,x)$ del problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2t\,u & \text{in } (0,+\infty)\times[0,\pi] \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0 & \forall t\geq 0 \\ u(0,x)\doteq u_0(x)\doteq \sin^3(x) & \forall x\in[0,\pi] \end{cases}$$

---

(1) $\sin(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \Rightarrow \sin^3(x)=\frac{-1}{8i}\Big(\underbrace{e^{3ix}-e^{-3ix}}_{=2i\sin(3x)}\underbrace{-3e^{ix}+3e^{-ix}}_{=-6i\sin(x)}\Big)=$

$=\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. ✓

(2) Viste le condizioni al bordo, cerco $u(t,x)$ "a variabili separate" della forma $u(t,x)=\sum_{n\geq 1} c_n(t)\sin(nx)$ in serie di Fourier

di seni RISPETTO alla x, per cui $\forall n\ge 1$ $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot)) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(t,x)\sin(nx)\,dx$ $(\forall t\ge 0)$; avevamo notato che $c_n(0) = c_n(u_0) = c_n(\sin^3(x)) \overset{\text{(punto prec.!)}}{=} \begin{cases} 3/4 & \text{se } n=1 \\ -1/4 & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. In questo modo, infatti, condizione (almeno) necessaria affinché $\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2tu \\ u(0,x) = \sin^3(x) \end{cases}$ è, almeno a livello formale (cioè pretendendo per u abbastanza regolare)

$$\begin{cases} \dot c_n(t) = -n^2 c_n(t) + 2t\,c_n(t) = (-n^2+2t)\,c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\sin^3(x)) \end{cases} \quad \forall n\ge 1 \;)$$

cioè $c_n(t) = c_n(0)\, e^{-n^2t+t^2} = \begin{cases} 3/4\, e^{t^2-t} & \text{se } n=1 \\ -1/4\, e^{t^2-9t} & \text{se } n=3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, per cui proviamo con $u(t,x) := 3/4\, e^{t^2-t}\sin(x) - 1/4\, e^{t^2-9t}\sin(3x)$: in effetti è (ben definita e) CONTINUA ANZI C^∞ su tutto $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ (anzi $\mathbb{R}$), soddisfa chiaramente $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ $\forall t\in\mathbb{R}_+$ (anzi $\mathbb{R}$) e $u(0,x) = \sin^3(x)$ $\forall x\in[0,\pi]$ (anzi $\mathbb{R}$), e infine soddisfa $u_t = u_{xx} + 2tu$ perché la soddisfano separatamente $(\cancel{3/4})\, e^{t^2-t}\sin(x)$ e $(\cancel{-1/4})\, e^{t^2-9t}\sin(3x)$ (che è evidente!) ✓ Una soluzione C^1 in t e C^2 in x deve essere UNICA in quanto i suoi $c_n(t)$ soddisfano effettivamente l'eq. diff. "di prima", e allora devono essere proprio u (e allora C^∞). $\square$

EX $S := \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid y^6 + y^2 = |x|^4\}$ e $S' := S\setminus\{(\underset{\in\mathbb{R}^n}{0},\underset{\in\mathbb{R}}{0})\}$.
$(n\ge 1)$ (1) S' è var. (in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$) n-DIM. senza bordo C^∞.
(2) La proiezione di S su $\mathbb{R}^n$ è proprio tutto $\mathbb{R}^n$.
(3) S è var. senza bordo C^0.

(1) $S = \overset{-1}{f}(0)$ con $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(= \mathbb{R}^{(n+1)-n}\right)$ data da

$f(x,y) := y^6 + y^2 - |x|^4$, che è C^∞ (e anzi polinomiale) su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con $\nabla f(x,y) = (\underbrace{-4|x|^2 x}_{n}, 2y(1+3y^4))$, per cui $\nabla f(x,y) = (\overset{(\in\mathbb{R}^n)}{0}, \overset{(\in\mathbb{R})}{0}) \iff (x,y) = (0,0)$, e allora certamente df ha rango massimo (1) FUORI DA 0, in particolare su S', e in conclusione f funge da "buona equazione" per S' (uso l'aperto $U := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$). ✓

(2) Infatti, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, esiste $y \in \mathbb{R}$ (anzi $\mathbb{R}_+$) tale che $y^6 + y^2 = |x|^4$ perché (equivalentemente), $\forall t \geq 0$, $\exists\, y \in \mathbb{R}$ (anzi $\mathbb{R}_+$) tale che $y^6 + y^2 = t$: infatti $\varphi(y) := y^6 + y^2$ $(: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, C^\infty)$ è tale che $\varphi(0) = 0$, $\varphi(y) \xrightarrow[|y| \to \infty]{} \infty$ e φ è CONTINUA. ✓

(3) S NON è sub. varietà in alcun intorno di $p := (\overset{\mathbb{R}^n}{0}, \overset{\mathbb{R}}{0})$; se infatti per assurdo lo fosse (in un certo intorno (e quindi in quelli $\subseteq$)), allora affatto sarebbe $\boxed{\mathrm{Tan}(S, p) \overset{(\ast)}{=} \mathbb{R}^n \times \{0\}}$ e quindi (come sappiamo) sarebbe possibile in un opportuno intorno di p esplicitare y in funzione di x, che è assurdo perché $\forall x$ e $y \neq 0$ con $(x,y) \in S$ anche $(x,-y) \in S$! Non resta che dimostrare l'uguaglianza $(\ast)$, anzi che $\mathrm{Tan}(S,p) \subseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ (da cui "=" perché anche $\mathrm{Tan}(S,p)$ avrebbe dimensione n): infatti $\forall\, \gamma \doteq (\overset{\text{in } \mathbb{R}^n}{\gamma_x}, \overset{\text{in } \mathbb{R}}{\gamma_y})$ cammino C^1 $[0, \overset{(\delta>0)}{\delta}) \to S$ con $\gamma(0) = p$, $\forall t \in [0,\delta)$

$$|\gamma_x(t)|^4 = \gamma_y^6(t) + \gamma_y^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} \gamma_y^2(t) \Rightarrow \gamma_y(t) = O_{t\to 0}(|\gamma_x(t)|^2), =$$

$= \underset{t\to 0}{O}(t^2)$, $\Rightarrow$ $\dot\gamma_n(0) = 0$, per cui appunto $\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$. $\square$

EX Sia $X := \{u \in L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi) \mid u \in C^2([-\pi,\pi])$ e $u(-\pi) = u(\pi)\}$ ($\mathbb{R}$-sottosp. (peraltro) DENSO di $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$!) e sia allora $T : X \to L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ dato da $Tu(x) \doteq \dot u(-x)$ (lineare!), che in realtà consideriamo come definito su TUTTO $C^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ (ideale).

(1) Calcolare $T^2 u$ $\forall u \in C^2([-\pi,\pi])$.

(2) Dim. che $T : X$ è autoaggiunto.

(3) Trovare una base di Hilbert di $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$ di autovettori di T.

(1) Innanzitutto, $(Tu(x))' \overset{(u \in C^2!)}{=} (\dot u(-x))' = -\ddot u(-x)$, per cui
$T^2 u(x) = T(Tu)(x) = (Tu)'(-x) = -\ddot u(x)$, cioè
$T^2 u = -\ddot u$, cioè $T^2 = -D^2$ (se D è l'operatore di derivat.).

(2) Ora, $\forall u, v \in X$, è $\langle Tu ; v\rangle_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\dot u(-x)}_{\text{int. (come } -u(-x))} v(x)\,dx \overset{(u \in C^2)}{=}$

$-\underbrace{u(-\pi)}_{=u(\pi)} v(\pi) + u(\pi)\underbrace{v(-\pi)}_{=v(\pi)} = 0$

$= \left[-u(-x)v(x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} u(-x)\dot v(x)\,dx \underset{(-x=y)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} u(y)\dot v(-y) = \langle u ; Tv\rangle_2$,
$= 0$ $(u, v \in X!)$

cioè appunto $T (: X)$ è autoaggiunto.

(3) Cerco per cominciare le $u \in C^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ $(u \neq 0)$ tali che $Tu = \lambda u$, (so essendo T autoaggiunto so già che $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti così sfrutto che $T^2 = -D^2$ ottenendo $Tu = \lambda u \Rightarrow \underbrace{T^2 u}_{(-\ddot u)} = \lambda Tu =$
$= \lambda^2 u$, cioè appunto $\ddot u = -\lambda^2 u$, cioè $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $u(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$; ora, per tale u è
$Tu(x) = \dot u(-x) = a\lambda\sin(\lambda x) + b\lambda\cos(\lambda x)$, $= \lambda u(x) \Leftrightarrow$

(FACILE) $\Leftrightarrow a=b$, e in conclusione $\begin{cases} u \in C^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]) \\ Tu = \lambda u \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u(x) = a\cos(\lambda x) + a\sin(\lambda x)$; e questa funzione $u \in X$,

cioè $u(-\pi) = u(\pi) \Leftrightarrow \cancel{a\cos(\lambda\pi)}_{(\text{pari})} - a\sin(\lambda\pi) = \cancel{a\cos(\lambda\pi)} +$

$+ a\sin(\lambda\pi)$ (cioè $2a\sin(\lambda\pi)=0$), per cui $\Leftrightarrow a=0$ o $\lambda \in \mathbb{Z}$ (cioè $\sin(\lambda\pi)=0$!);

dovendo però escludere $u=0$, è allora $\lambda \in \mathbb{Z}$ e riassumendo

$\begin{cases} u \in X \text{ Non banale} \\ Tu = \lambda u \end{cases}$ ha soluzione $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{Z}$, ed in tal caso è

esattamente $\boxed{u(x) = a\left(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x)\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}\ (\setminus\{0\})}$.

(Osservo inoltre che in effetti tale formula vale anche per $\lambda = 0$

(ottenendo $u \equiv$ costante reale) : rifacendo quello svolto, infatti,

$Tu = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0$, cioè $u(x) = a + bx$ con a e b reali,
$(u \in C^2)$

ed ove è ovvio che $u \in X \Leftrightarrow b=0$! ( ) Adesso,

ricordando che due autovettori di un operatore autoaggiunto relativi

ad autovalori DIVERSI sono necessariamente ORTOGONALI, $\forall \lambda = n$

$\in \mathbb{Z}$ scelgo $a \in \mathbb{R}\ (\setminus\{0\})$ in modo che $u_n(x) := a(\cos(nx) + \sin(nx))$

abbia $\|u_n\|_2 = 1$, ossia $a = (\sqrt{2\pi})^{-1}$, ottengo allora

che $\left(u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos(nx) + \sin(nx))\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ è sistema ortonormale in

$L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$; è allora una BASE DI HILBERT per il semplice

motivo che $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{u_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ contiene i polinomi trigonometrici reali,

che sappiamo già essere densi in $L^2_{\mathbb{R}}(-\pi,\pi)$. $\square$

EX $\left(\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C}) =: \mathcal{C}^0_0, \|\cdot\|_\infty\right)$ (chiuso in $\|\cdot\|_\infty$!) consideriamo il $\mathbb{C}$-sottospazio $X := \{v \in \mathcal{C}^0_0 \mid v = \hat{u}$ per una certa $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\}$.

(1) X è DENSO in $\mathcal{C}^0_0$.

(2) $v \in X \Rightarrow v^n \in X \quad \forall n \geq 1$ (ovvero ≥ 2).

(3) $v \in X \Rightarrow f \circ v \in X \quad \forall f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ OLOMORFA con $f(0)=0$.

(1) Come sappiamo, $\mathcal{C}^1_c := \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ è DENSO in $\mathcal{C}^0_0$, e allora basta provare che X ~~......~~ contiene $\mathcal{C}^1_c$; ma infatti, $\forall v \in \mathcal{C}^1_c$, $v \in \mathcal{C}^1$ con $v \in \mathcal{L}^1$ e $v' \in \mathcal{L}^2$ $\overset{\text{(NOTO)}}{\Longrightarrow}$ $\hat{v} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $\Rightarrow \check{v} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ $\left(\check{v}(x) = \hat{v}(-x)!\right)$: dunque $u := \frac{1}{2\pi}\check{v} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ ha $\hat{u} = \frac{1}{2\pi}\hat{\check{v}} \overset{\text{FORMULA INVERSIONE}}{=} \frac{1}{2\pi}(2\pi v) = v$, e allora appunto $v \in X$ (posso usare la formula d'inversione perché $v \in \mathcal{L}^1$ con $\check{v} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \hat{\check{v}} = 2\pi v$: infatti banalmente
$$\hat{\check{v}}(x)(y) = \widehat{\hat{v}(-x)}(y) \overset{(\widehat{g(-x)}(y) = \hat{g}(-y)!!)}{=} \hat{\hat{v}}(-y) = \check{\hat{v}}(y) \overset{\text{FORMULA INV.}}{=} 2\pi v.)$$

(2) Se $v \in X$ perché $v = \hat{u}$ con $u \in \mathcal{L}^1$, allora $v^2 = v \cdot v = \hat{u} \cdot \hat{u} = \widehat{u * u}$ ($u \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow u*u \in \mathcal{L}^1$ e vale la formula!) e allora anche $v^2 \in X$ (essendo ovviamente in $\mathcal{C}^0_0$!). In generale $v^n = \widehat{\underbrace{u * \dots * u}_{n \text{ volte}}}$. ✓

(3) La serie di Taylor in 0 di f OLOMORFA su tutto $\mathbb{C}$ ha raggio di convergenza $+\infty$ e coincide con la funzione stessa, per cui è $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ ($a_0 = 0$ perché $f(0)=0$!); se $v \in X$ con $v = \hat{u}$ ($u \in \mathcal{L}^1$), allora $f(v) = \sum_{n\geq 1} a_n v^n$

dovrebbe stare in X perché dovrebbe essere $f(\sigma) = \hat{w}$ CON $w := \sum_{n\ge1} a_n(\underbrace{u*\cdots*u}_{n\text{ volte}})$; ora verifico che w è (ben definita) e in L^1, e che naturalmente $\hat{w} = f(\sigma)$: posto $\underbrace{u*\cdots*u}_{n\text{ volte}} =: *^n u$, ho infatti la convergenza (in $\|\cdot\|_1$) della serie che dovrebbe definire w (i.e. $\|w\|_1 \le \sum \|\cdot\|_1$!), perché (ricordando le stime $u_1, u_2 \in L^1 \Rightarrow u_1 * u_2 \in L^1$ e $\|u_1 * u_2\|_1 \le \|u_1\|_1 \|u_2\|_1$) $\forall n \ge 1$

$|a_n| \|u*\cdots*u\|_1 \le |a_n|\,\|u\|_1^n$, $\Rightarrow \sum_{n\ge1} \|a_n(*^n u)\|_1 \le \sum_{n\ge1} |a_n|\,\|u\|_1^n$, la quale ha ovviamente raggio di convergenza $+\infty$. ✓ Dimostro infine $f\circ\sigma = \hat{w}$: $\forall m \ge 1$,

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \sigma^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{linearità TDF}\\ \text{+ punto prec.!}}}{=} \widehat{\sum_{n=1}^{m} a_n(*^n u)}$$

$\Rightarrow$ le lim (passando al lim $m\to\infty$) in questa il termine di sinistra converge puntualmente a $f(\sigma)$, mentre il termine di destra converge in norma L^1 a $\hat{w}$ per continuità della TDF e per quanto appena visto (dunque anche q.o. (i.e. uniformemente!)) □ (notare nota ...!)

EX Dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ DISTINTI, sia $S := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X$ ha $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ come autovalori$\}$. $(n \ge 2)$

(1) Per $n = 2$, S è sottovar. (in $\mathbb{R}^4$) senza bordo 2-dim. e C^∞.

(2) S è sottovar. senza bordo di dim. $d := n^2 - n$ C^∞ IN UN INTORNO di $\Lambda := \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ $(\in S!)$.

(3) S è in effetti sottovar. senza bordo e di dim d e C^∞.

[(1) Lo otterrò da "(3)" . ✓ (2) Osservo che $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è $X \in S \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$, $\det(\lambda_i I - X) = 0$ (I è la matrice identità $n\times n$), cioè S è l'insieme delle equazioni $f(X) = 0$ dove $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^n$ $(=\mathbb{R}^{n^2-(n^2-n)})$ è data da $f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{bmatrix}$ con $f_i(X) := \det(\lambda_i I - X)$ $\forall\, 1 \le i \le n$ (intero); essendo anche $f \in C^\infty$ (anzi polinomiale nelle coordinate di X!), che basti si provi che $df(X)$ ha rango massimo $(=n)$ almeno in un intorno di Λ.

Ricordo per questo che $g(X) := \det(X)$ $(\forall X \in \mathbb{R}^{n\times n})$ ha

$$dg(X)(H) = tr(\tilde{X}\cdot H) \quad (\forall H \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

dove $\tilde{X}$ è "l'aggiunta di X", ossia la trasposta della matrice dei cofattori (o complementi algebrici) di X; allora $f_i(X) = \det(\lambda_i I - X)$

$$\overset{\text{(ovvio)}}{\Longrightarrow} df_i(X)(H) = -\,tr\left(\widetilde{(\lambda_i I - X)} \cdot H\right)$$

; in particolare, se $X = \Lambda$, allora chiaramente $\lambda_i I - \Lambda =$

$$= diag[\lambda_i - \lambda_1, \dots, \lambda_i - \lambda_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo posto}}}{0}, \lambda_i - \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_i - \lambda_n]$$

ha tutti cofattori 0 tranne quello di indici ii che ovviamente è

$$e_i := \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j) \quad (\neq 0!)$$

, per cui complessivamente

$$df_i(\Lambda)(H) = -e_i H_{ii} \Rightarrow df(\Lambda)(H) = \begin{pmatrix} -e_1 H_{11} \\ \vdots \\ -e_n H_{nn} \end{pmatrix}$$

, che è in effetti chiaramente SURGETTIVO su $\mathbb{R}^n$. ✓

(3) $\forall A, X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\det A \neq 0$, essendo che il pol. caratt. di $A^{-1}XA$ coincide con quello di X, è ovvio che $f(A^{-1}XA) = f(X)$; allora $\varphi_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ data da $\varphi_A(X) := A^{-1}XA$ (automorfismo lineare!) è tale che $f \circ \varphi_A = f$ e $\underset{\text{(ristretta)}}{\varphi_A : S} \to S$, e così è anche facilmente OMOMORFISMO $S \to S$. Allora $f(X)=0$ è una buona eq. per S in un intorno di qualunque $X_0 \in S$: essendo gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di X_0 reali e distinti, la forma canonica di Jordan (reale) di X_0 è precisamente Λ, per cui $\exists A$ con $\det(A) \neq 0$ tale che $A^{-1}X_0A = \Lambda$, cioè $\varphi_A(X_0) = \Lambda$; ma $f(X)=0$ buona eq. in un intorno di Λ (come visto prima!) $\Rightarrow f(\varphi_A(X)) = (f\circ\varphi_A)(X) = 0$ lo è in un intorno di X_0; ma $f(X) = (f\circ\varphi_A)(X) = 0$! ✓

(Altrimenti, $\forall X_0 \in S$, $\partial f(X_0)$ ha rango n: se $\varphi_A(X_0) = \Lambda$ allora derivando in X_0 $f(X) = f(\varphi_A(X))$ ottengo $\partial f(X_0) = \partial f(\underbrace{\varphi_A(X_0)}_{\Lambda}) \circ \varphi_A$, ed essendo φ_A automorfismo di $\mathbb{R}^{n\times n}$ è rango$(\partial f(X_0))$ = rango$(\partial f(\Lambda)) \overset{\text{(come visto!)}}{=} n$. ✓

(EX) Date $\alpha : [0,+\infty)_t \to \mathbb{C}$ e $\beta : \mathbb{R}_x \to \mathbb{C}$ CON α CONTINUA e β in C^1_{per}, si consideri il problema

$$[P] \begin{cases} \boxed{u_t = -i\,u_{xx}} \ \boxed{+\alpha(t)\,\beta(x)} & \text{su } [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \\ u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi) & \text{su } [0,\infty) \end{cases}$$

$\begin{cases} u(0,x) = u_0(x) \equiv 0 & \text{in } [-\pi,\pi] \end{cases}$.

$(a\in\mathbb{R})$

(1) Dim. che [P] ammette certamente soluzione se $\alpha(t) = e^{iat}$.

(2) Dire sotto quali ipotesi (su a e su $\beta(x)$) tale soluzione è LIMITATA.

(3) Dare ipotesi su $\alpha(t)$ per cui [P] ammette soluzioni.

Cerchiamo $u(t,x)$ soluzione della forma $u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)\, e^{inx}$ e ovviamente regolare, ossia sviluppata in serie di Fourier (complessa) NELLA x per cui $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)\, e^{-inx}\,dx$ $\forall$ $n\in\mathbb{Z}$ (e $\forall t\geq 0$) ($\Rightarrow c_n(0) = c_n(u_0) = 0$ $\forall n\in\mathbb{Z}$!), allora almeno a livello formale u soddisfa $\begin{cases} u_t = -iu_{xx} + \alpha(t)\beta(x) \\ u(0,x) \equiv 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ i $c_n(t)$ soddisfano $\begin{cases} c_n'(t) = in^2 c_n(t) + \alpha(t)\,\beta_n \\ c_n(0) = 0 \end{cases}$, dove

i β_n sono i coeff. di Fourier (complessi) di $\beta(x)$, CIOÈ

$$\boxed{c_n(t) = \beta_n\, e^{in^2 t}\int_0^t e^{-in^2 s}\,\alpha(s)\,ds}$$

, per cui troviamo

$$u(t,x) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\beta_n\, e^{in^2 t}\left[\int_0^t e^{-in^2 s}\,\alpha(s)\,ds\right] e^{inx}}_{=:\,u_n(t,x)} .$$

Ovviamente,

$$u_n(t,x) = \beta_n\left[\int_0^t e^{in^2(t-s)}\,\alpha(s)\,ds\right] e^{inx} .$$

(3) Sia, $\forall\, t\geq 0$, $A(t) := \sup_{0\leq s\leq t}|\alpha(s)|$ $\left(= \max_{0\leq s\leq t}|\alpha(s)|\right)$ $(\alpha\in C^0!)$:

allora, $\forall\, t\geq 0$ e $\forall n\in\mathbb{Z}$, è $\left|\int_0^t e^{in^2(t-s)}\,\alpha(s)\,ds\right| \leq$

$\leq \int_0^t 1\cdot|\alpha(s)|\,ds \leq A(t)\cdot t$, QUINDI

$\|\partial_t u_n\|_\infty = |\beta_n| A(t)(1+n^2 t)$ su $[0,t]\times\mathbb{R}$, mentre $\forall k\ge 0$ $\|\partial_x^k u_n\|_\infty = |\beta_n| A(t)\, t\, |n|^k$ su $[0,t]\times\mathbb{R}$; ora, per ipotesi $\beta\in C^2_{per} \overset{(\text{NOTO})}{\Rightarrow} \sum'_{n\in\mathbb{Z}}|\beta_n|<\infty$, $\Rightarrow \sum'_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\|u_n\|_\infty}_{(\partial_x^0 u_n)}$ converge su $[0,t]\times\mathbb{R}$; supposto allora $\boxed{\sum'_{n\in\mathbb{Z}} n^2|\beta_n|<\infty}$ $\left(\Leftarrow \sum'_{n\in\mathbb{Z}} |n||\beta_n|<\infty\right)$, ad esempio perché $\beta(x)\in C^3_{per}$, per avere CHIARAMENTE la convergenza totale su $[0,t]\times\mathbb{R}$ anche delle serie di funzioni $\|\partial_x u\|_\infty$, $\|\partial_x^2 u\|_\infty$ e $\|\partial_t u_n\|_\infty$. Ne segue dunque che: $u(t,x)$ è in effetti ben definita e continua su tutto $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, C^1 nelle due variabili e C^2 nella x (il che la rende anche UNICA con tale regolarità!); che poi è (chiaramente) 2π-periodica nella x e che $u(0,x)\equiv 0$; che infine soddisfa $u_t = -i u_{xx} + \alpha(t)\beta(x)$ perché, potendo scambiare "$\sum'_n$" con "∂_t" e "∂_x^2", ciò equivale al fatto che le u_n soddisfano $v_t = -i v_{xx} + \alpha(t)\beta_n e^{inx}$.

(1) Se $\alpha(t) = e^{iat}$, con $a\in\mathbb{R}$, allora l'integrale "$\int_0^t\dots$" che compare in $u_n(t,x)$ può essere calcolato esplicitamente:

$$\int_0^t e^{-in^2 s}\underbrace{\alpha(s)}_{e^{ias}}\,ds = \int_0^t e^{i(a-n^2)s}\,ds \overset{\substack{\text{SE } a \text{ NON è}\\ \text{un quadrato perfetto}}}{=} \left[\frac{e^{i(a-n^2)s}}{i(a-n^2)}\right]_{s=0}^{s=t} =$$

$$= \frac{1}{i(a-n^2)}\left(e^{iat}e^{-in^2t}-1\right) \Rightarrow u_n(t,x) = \beta_n\frac{e^{iat}-e^{in^2t}}{i(a-n^2)}e^{inx},$$

ovvero nel caso a NON quadrato perfetto; ma si ha anche come

$e = m^2$ per un certo $m \in \mathbb{Z}$, per tutti gli altri n $u_n(t,x)$ sarebbe come già trovato, mentre chiaramente $u_{\pm m}(t,x) = \beta_{\pm m}\, t\, e^{im^2 t} e^{\pm imx}$, e allora in conclusione

$$u(t,x) := \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \dfrac{e^{iet} - e^{+in^2 t}}{i(e-n^2)} e^{inx} & \text{se } e \text{ NON è un quadrato perfetto} \\ \beta_0 t + \sum_{n\neq 0} \beta_n \dfrac{1 - e^{in^2 t}}{-in^2} e^{inx} & \text{se } e = 0 \ (=0^2) \\ (\beta_m e^{imx} + \beta_{-m} e^{-imx})\, t\, e^{im^2 t} + \sum_{n\neq \pm m} \beta_n \dfrac{e^{im^2 t} - e^{in^2 t}}{i(m^2-n^2)} & \text{se } e = m^2 \\ & (m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}) \end{cases}$$

Comunque, in ogni caso, $\forall k \geq 0$ è $\|\partial_x^k u_n\|_\infty \leq \dfrac{2|\beta_n||n|^k}{|e-n^2|} \sim$
(↑ SPECIE $k \in \{0,1,2\}$!)

$\underset{|n|\to+\infty}{\sim} 2|\beta_n||n|^{k-2}$, mentre $\|\partial_t^1 u_n\|_\infty \leq \dfrac{|\beta_n|(|e|+n^2)}{|e-n^2|} \underset{n\to\infty}{\sim} |\beta_n|$,

e allora (essendo $\beta \in C^1_{per} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\beta_n| < \infty$ (e allora a maggior ragione $\sum \frac{|\beta_n|}{n^{1\circ 2}}$!))

di nuovo $u(t,x)$ è ben definita e C^1 in entrambe le variabili, C^2 nella x, che risolve (P) nel complesso. ✓

(2) Per concludere, la serie che definisce $u(t,x)$ nei 3 casi possibili è in quei casi funzione LIMITATA, essendo totale in $\|\cdot\|_\infty$ di funzioni limitate; inoltre $\beta_0 t$ è illimitata a meno che $\beta_0 = 0$, e così è evidente che, se $e = m^2$, $(\ldots\ldots) t\, e^{im^2 t}$ è illimitata (in t) a meno che $\beta_m = \beta_{-m} = 0$; conclusione: β è già C^1_{per}, e allora SE e non è un quadrato perfetto $u(t,x)$ è limitata; se $e = m^2$ (per un certo $m \in \mathbb{Z}$), allora

$u(t,x)$ è limitata $\Leftrightarrow$ $\beta_m = \beta_{-m} = 0$ $\square$
(↑ va bene anche se $m = 0$!)

EX Date $a, b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, definiamo $a * b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ come

$$a*b(m) \doteq \sum_{k\in\mathbb{Z}}' a(m-n)\, b(n) \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

(1) $a, b \in \ell^2 := \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \Rightarrow a*b$ è ben definita e limitata.

(2) $p_m : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ data da $p_m(a,b) := a*b(m)$ è CONTINUA $\forall m \in \mathbb{Z}$.

(3) Trovare e dimostrare una formula che esprima, $\forall f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, i coeff. di F. (complessi) di $f \cdot g$ in funzione di quelli di f e quelli di g.

Ricordo anzitutto che $\ell^2 := \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \doteq \{ a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \sum_{m\in\mathbb{Z}}' |a(m)|^2 < \infty \}$ è $\mathbb{C}$-sp. di Hilbert col prodotto hermitiano $\langle a ; b \rangle := \sum_{m\in\mathbb{Z}}' a(m)\overline{b(m)}$.

(1) $\forall m \in \mathbb{Z}$, sia $T_m : \ell^2 \to \ell^2$ data da $T_m(a)(n) \doteq a(m-n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (ben definita e anzi ISOMETRIA!) : allora $\forall m \in \mathbb{Z}$ vale $a*b(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}' T_m a(n)\, b(n) = \langle T_m a ; \overline{b} \rangle$ ($\in \mathbb{C}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$!) ; in particolare effettivamente $a*b$ è ben definita, e inoltre $|a*b(m)| = |\langle T_m a ; \overline{b} \rangle| \overset{(\text{SCHWARZ in } \ell^2)}{\leq} \|T_m a\|_2 \|\overline{b}\|_2 = \underset{(<\infty)}{\|a\|_2 \|b\|_2} \Rightarrow$ la sua limitatezza!

(2) Con $a_m \xrightarrow[m]{\ell^2} a$ e $b_m \xrightarrow[m]{\ell^2} b$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ è $|a*b(m) - a_m * b_m(m)| = |\langle T_m(a - a_m) ; \overline{b - b_m} \rangle| \xrightarrow[m]{} 0$ per continuità di $\langle;\rangle$, $\bar{\cdot}$ e T_m. ✓

(3) $\forall f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi,\pi)$, sia $\hat{f}$ ~~[illegible]~~ vista come funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, cioè $\forall m \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}(m) =$ l'm-esimo coeff. di F (complesso) di f, e ANZI (per Parseval) come $\hat{f} \in \ell^2$; allora, $\forall f, g \in L^2$,

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat f(h)\, e^{ihx}\right]\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat g(k)\, e^{ikx}\right] = \quad (\text{FORMALMENTE!})$$

$$= \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \hat f(h)\hat g(k)\, e^{i(h+k)x} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{h,k\in\mathbb{Z},\\ h+k=m}} \hat f(h)\hat g(k)\, e^{i(h+k)x} =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat f(m-k)\hat g(k)\, e^{imx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat f * \hat g(m)\, e^{imx},$$ ossia

dovrebbe essere $\boxed{\widehat{fg}(m) = \hat f * \hat g(m)}$; ma infatti ciò vale per f e g polinomi trigonometrici (per il quale risulta che tutte le somme sopra sono FINITE, per cui tutte le uguaglianze sopra sono corrette!), e i polinomi trigonometrici sono densi in $L^2_p(-\pi,\pi)$, dunque uso che il prodotto $L^2\times L^2\to L^1$ è (fortemente) CONTINUO e che è continuo anche $L^1 \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \hat f(m)$ $\forall m\in\mathbb{Z}$ (ovvio), INOLTRE uso il punto (2) + la continuità di $L^2 \to \ell^2$, $f\mapsto \hat f$ (FACILE (ES.)). ✓

(ALTRO MODO: $\forall m\in\mathbb{Z}$, $\widehat{fg}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-imx}\,dx =$

$$= \frac{1}{2\pi}\langle g(x);\, \underbrace{\overline{f(x)}\, e^{imx}}_{h(x)} \rangle \overset{(\text{PARSEVAL!})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat g(k)\,\overline{\hat h(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat g(k)\hat f(m-k) =$$

$\left(2\pi\overline{\hat h(k)} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx} e^{ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-i(m-k)x}\,dx\right)$

$= \hat f * \hat g(m)$, e non c'è bisogno di altre dimostrazioni!

Anzi si potrebbe partire da qui per provare (1) e (2) ...)

Ex) Dato $a \in (0,+\infty)$, sia $\phi_a : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da

$\boxed{\phi_a(t) := \mathrm{sgn}(t)\,|t|^a}$ (dove al solito $\mathrm{sgn}(t) := \begin{cases} +1 & \text{se } t\ge 0 \\ -1 & \text{se } t<0\end{cases}$).

(1) Dato $1<p<\infty$ (cioè $0<1/p<1$), dim. che $\Phi_p : L^p_m(\mathbb{R}) \to L^1_m(\mathbb{R})$ data da $\Phi_p(f) := \phi_p \circ f$ è ben definita e bigettiva, e quindi scriverne l'inversa Φ_p^{-1}.

(2) Dim. che Φ_p^{-1} è $\frac{1}{p}$-hölderiana.

(3) Dim. che Φ_p^{-1} non è α-hölderiana per $1/p<\alpha$ (≤ 1).

(4) Dim. che però Φ_p è localmente lipschitziana.

(1) Buona definizione: $\forall f \in L^p_m(\mathbb{R})$, $\Phi_p(f)\in L^1_m(\mathbb{R})$ perché (è mis. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e) $|\Phi_p(f)| = |\phi_p(f)| = |f|^p \Rightarrow$
$\|\Phi_p(f)\|_1 = \|f\|_p^p < \infty$. ✓ Allo stesso modo è ben definita $\Phi_{1/p} : L^1_m(\mathbb{R}) \to L^p_m(\mathbb{R})$ data da $\Phi_{1/p}(g) :=$
$:= \phi_{1/p}\circ g$ (perché effettivamente, $\forall g \in L^1_m(\mathbb{R})$, $|\Phi_{1/p}(g)|^p =$
$= |\phi_{1/p}(g)|^p = (|g|^{1/p})^p = |g| \Rightarrow \|\Phi_{1/p}(g)\|_p = \|g\|_1^{1/p} <\infty$),
e sono una l'inversa dell'altra; in particolare $\boxed{\Phi_p^{-1} = \Phi_{1/p}}$ (con Φ ben definita bigettiva): infatti, $\forall f\in L^p$,

$\Phi_{1/p}(\Phi_p(f)) = \phi_{1/p}\circ(\phi_p\circ f) = \underbrace{(\phi_{1/p}\circ\phi_p)}_{\text{identità su } \mathbb{R}}\circ f = f$ (e l'altra allora è ovviamente analoga), perché $\forall t\in\mathbb{R}$ $\phi_{1/p}(\phi_p(t)) \doteq$

$\doteq \mathrm{sgn}(\phi_p(t))\,|\phi_p(t)|^{1/p} \doteq \underbrace{\mathrm{sgn}(\mathrm{sgn}(t)|t|^p)}_{(\equiv\, \mathrm{sgn}(\mathrm{sgn}(t))\,\mathrm{sgn}(|t|^p) = \mathrm{sgn}(t))}\,\underbrace{|\mathrm{sgn}(t)|t|^p|^{1/p}}_{|t|} = \mathrm{sgn}(t)|t| = t$! ✓

(2) ϕ_α è α-hölderiana $\forall\, 0<\alpha\leq 1$ [(*)], in particolare per $\alpha = 1/p$ $(p<\infty)$, e allora $\exists C\in(0,\infty)$ tale che $\forall t,t'\in\mathbb{R}$ $|\phi_{1/p}(t)-\phi_{1/p}(t)|\leq C|t'-t|^{1/p}$, $\Rightarrow \forall f,g\in \mathcal{L}^1_n(\mathbb{R})$, è

$$\|\Phi_{1/p}(f)-\Phi_{1/p}(g)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}}|\phi_{1/p}(f(x))-\phi_{1/p}(g(x))|^p\,dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} C^p\,|f(x)-g(x)|\,dx = C^p\|f-g\|_1,$$ cioè appunto

$$\|\Phi_{1/p}(f)-\Phi_{1/p}(g)\|_p \leq C\,\|f-g\|_1^{1/p}.$$

(*) Il punto è che è α-hölderiana $t\mapsto t^\alpha$ (per $t\geq 0$): infatti, $\forall h\geq 0$ fissato, $t\mapsto (t+h)^\alpha - t^\alpha$ è decrescente (in t) (ovvio: ha $\frac{\partial}{\partial t}\;\alpha\left(\frac{1}{(t+h)^{1-\alpha}}-\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right)\leq 0$!), e allora comunque sia $h\leq t$ o al contrario $(t+h)^\alpha - t^\alpha \leq \underbrace{2^\alpha}_{\leq 2} h^\alpha - h^\alpha \leq h^\alpha$, da cui appunto $(t'=t+h)$ $t'^\alpha - t^\alpha \leq (t'-t)^\alpha$, e cioè $|t'^\alpha - t^\alpha|\leq |t'-t|^\alpha$ per la simmetria in t e h/t'.

(3) $\forall h\geq 0$, $f_h := I_{[0,h]}$ $(\in \mathcal{L}^1_n(\mathbb{R})!)$ $(\cap\mathcal{L}^p_n(\mathbb{R}))$ ha $\Phi_{1/p}(f_h) = \phi_{1/p}(f_h) = f_h$, e inoltre $0\leq h<h' \Rightarrow \|\underbrace{f_{h'}-f_h}_{I_{(h,h']}}\|_1 \overset{(\text{ovvio})}{=} |h'-h|$, e allora $\|\Phi_{1/p}(f_{h'})-\Phi_{1/p}(f_h)\|_p = |h'-h|^{1/p}$, e certamente $\not\exists\, \delta>0$ e $C\in(0,\infty)$ tale che per tutti gli $0\leq h<h'$ è $|h'-h|^{1/p}\leq C\,|h'-h|^{1/p+\delta}$.

(4) $\forall p\geq 1$, ϕ_p è C^1 con $\phi_p'(t) = p|t|^{p-1}$ $(\forall t\in\mathbb{R})$, e allora $t<t' \Rightarrow \phi_p(t')-\phi_p(t) = \int_t^{t'}\phi_p'(s)\,ds =$

$$= \int_t^{t'} p|s|^{p-1}\,ds \le \int_t^{t'} p\,(|t| \vee |t'|)^{p-1}\,ds = p\,(|t| \vee |t'|)^{p-1}(t'-t),$$

(MAX!)

$$\Rightarrow \; |\phi_p(t') - \phi_p(t)| \le p\,(|t| \vee |t'|)^{p-1}\,|t'-t| \quad \forall t,t' \in \mathbb{R};$$

quindi, $\forall f,g \in \mathcal{L}^1_m(\mathbb{R})$, è $\|\Phi_p(f) - \Phi_p(g)\|_1 =$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\phi_p(f(x)) - \phi_p(g(x))|\,dx \le p \int_{\mathbb{R}} \underbrace{(|f| \vee |g|)^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q!\ (\in \mathcal{L}^1,\ q := \frac{p}{p-1}!)} \underbrace{|f-g|}_{\in \mathcal{L}^p}\,dx \le$$

HÖLDER

(allora $q := \frac{p}{p-1}$)

((OVVIO) $|f| \vee |g| \le |f| + |g|$ + MINKOWSKI (OVVIO))

$$\le p\,\|(|f| \vee |g|)^{p-1}\|_q\,\|f-g\|_p \overset{(\text{OVVIO})}{=} p\,\||f| \vee |g|\|_p^{p-1}\,\|f-g\|_p \le$$

$$\le p\,(\|f\|_p + \|g\|_p)^{p-1}\,\|f-g\|_p,$$ da cui la tesi perché in un qualunque sottoinsieme limitato di $\mathcal{L}^1_m(\mathbb{R})$ è $p\,(\|f\|_p + \|g\|_p)^{p-1} \le C$ (costante in $(0,\infty)$).

EX Sia C una CURVA (var. 1-dim.) C^1 COMPATTA e senza bordo contenuta in $Q := (0,+\infty)^2$, e sia

$S := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid (|x_1|, |x_2|) \in C\}$.

(1) S è una var. (in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) senza bordo compatta C^1 e 3-dim.

(2) Data una par. di γ, costruire una di S.

(3) Esprimere il VOLUME di S come integrale di un'opportuna funzione su C.

---

(1) Anzitutto, sia $\varphi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x_1,x_2) :=$ $:= (|x_1|, |x_2|)$: è ovviamente $S = \varphi^{-1}(C)$, e dunque

c CONTINUA E PROPRIA e C compatto $\Rightarrow S$ compatto. Per il resto, sapendo che è possibile ricoprire C con una famiglia di aperti $U \subseteq Q$ in cui C è descritto da un'eq. del tipo "$f(x) = 0$" $(x \in \mathbb{R}^2)$ con $f : U \to \mathbb{R}^{(1=2-1)}$ di classe C^1 avente ∇f MAI NULLO su U, è allora anche vero che S è ricoperto dagli APERTI $V := c^{-1}(U)$ ($C \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \overset{\text{ovvio}}{\Rightarrow} c^{-1}(C) \subseteq c^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) \overset{\text{ovvio}}{=} \bigcup_{i \in I} c^{-1}(U_i)$) dove S è descritto da "$f(c(x)) = 0$"; devo far vedere che $f \circ c$ $(\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{1=4-3})$ è C^1 con ∇f MAI NULLO IN V: ma f è C^1 su U, mentre c è C^∞ su $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid x_1 \text{ e } x_2 \text{ sono} \neq 0_{\mathbb{R}^2}\} \overset{\text{ovvio}}{=} c^{-1}(Q)$, che giustamente $\supseteq$ qui V ($Q \supseteq U$!), e inoltre qui $\nabla(f \circ c)(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{x_1}{|x_1|}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{x_2}{|x_2|}\right)$ (posto $y := c(x)$), e effettivamente x_1 e $x_2 \neq 0$ e $\nabla f \neq 0$ su U. ✓

(2) $\forall\, y = (y_1, y_2) \in Q$, $c^{-1}(y)$ è esattamente il prodotto delle due circonferenze di raggio y_1 e raggio y_2 risp. (in $\mathbb{R}^2$), quindi ne possiamo parametrizzare i punti come $(y_1 \cos(\theta_1), y_1 \sin(\theta_1), y_2 \cos(\theta_2), y_2 \sin(\theta_2))$, con $0 \le \theta_1, \theta_2 \le 2\pi$; per ciò, data una PAR. $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to C$ (di C), una PAR. di S è $g : [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ data da $g(t, \theta_1, \theta_2) :=$
$:= (\gamma_1(t) \cos(\theta_1), \gamma_1(t) \sin(\theta_1), \gamma_2(t) \cos(\theta_2), \gamma_2(t) \sin(\theta_2))$ (in effetti è anche per questo che S è compatto!); noto che se γ è bigettiva $[a, b) \to C$ allora g lo è $[a, b) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to S$.

(3) È chiaro che è rispetto di usare la formula dell'area con f, cioè $\sigma_3(\underset{g(E)}{S}) = \int_E J_f(s)\,ds$ con $E := (a,b)\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$; essendo, $\forall s\in E$, $J_f(s) = \{\det((\nabla f(s))^t\,\nabla f(s))\}^{1/2}$, calcolo anzitutto $\nabla f(s)$: $\underset{(s=(t,\theta_1,\theta_2))}{}$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dot\gamma_1\cos(\theta_1) & -\gamma_1\sin(\theta_1) & 0 \\ \dot\gamma_1\sin(\theta_1) & \gamma_1\cos(\theta_1) & 0 \\ \dot\gamma_2\cos(\theta_2) & 0 & -\gamma_2\sin(\theta_2) \\ \dot\gamma_2\sin(\theta_2) & 0 & \gamma_2\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(facile)

(γ è in Q!)

$$J_f = \sqrt{\det\begin{bmatrix} \dot\gamma_1^2+\dot\gamma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2^2 \end{bmatrix}} = \gamma_1\gamma_2|\dot\gamma|$$, da cui finalmente

$$\sigma_3(S) = \int_E J_f\,dt\,d\theta_1\,d\theta_2 = 4\pi^2\int_a^b \gamma_1\gamma_2|\dot\gamma|\,dt \doteq 4\pi^2\int_C \boxed{y_1 y_2\,ds(y)\ldots}$$

(EX) Dato $\lambda\in\mathbb{R}$, sia $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ soluzione di
$$x^2u - \ddot u = \lambda u.$$
(1) Provare che formalmente anche $\hat u$ soddisfa la stessa eq.
(2) Dim. che, $\forall n\geq 0$, per $\lambda = 2n+1$ $\exists!$ soluzione u_n di tale eq. della forma $u_n = p_n e^{-x^2/2}$ con p_n polinomio (reale) monico di grado n.
(3) Dim. che tali u_n sono autovettori della TDF $\mathcal{F}$.
(4) Dim. che tali u_n sono a due a due $\perp$ in $\mathcal{L}^2_a(\mathbb{R})$.

(1) Almeno a livello formale (come se cioè u fosse "abbastanza" regolare) è $\widehat{x^2u} = -\ddot{\hat u}$, $\hat{\ddot u} = -x^2\hat u$ e $\widehat{\lambda u} = \lambda\hat u$, per cui l'eq. diventa $-\ddot{\hat u} + x^2\hat u = \lambda\hat u$ (linearità).

(2) Sia $g(x) := e^{-x^2/2}$ e $p(x)$ un polinomio (reale): allora $u = pg$ ha $\dot u(x) = \dot p(x) g(x) + p(x) \underbrace{\dot g(x)}_{-x g(x)} = (\underbrace{\dot p - xp}_{\text{altro polinomio!}}) g$, $\Rightarrow$

$$\ddot u = (\dot u)\dot{} = \Big[\underbrace{\dot{(\dot p - xp)}}_{\ddot p - p - x\dot p} \underbrace{- x(\dot p - xp)}_{-x\dot p + x^2 p}\Big] g = (\ddot p - 2x\dot p - p + x^2 p) g,$$

quindi l'eq. diventa $x^2(pg) - \ddot u = \lambda pg$, cioè ($g \neq 0$ ovunque!)

$$\boxed{\ddot p = 2x\dot p + (\lambda - 1) p}$$

, e allora la tesi è che $\exists!\, p$ polinomio monico di grado m che risolve tale eq. per $\lambda = 2m+1$, ovvero per il quale è $\ddot p = 2x\dot p - 2mp$; se $p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ ($a_n \in \mathbb{R}$), allora $\ddot p(x) = \sum_{n=0}^{m-2} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$ mentre $2x\dot p - 2mp = \sum_{n=0}^{m} 2(n-m) a_n x^n$, E IN PIÙ $a_m = 1$, dunque $a_{m-1} = 0$ e "così via" risolvo l'eq. (è chiaro che dunque gli a_m sono univocamente determinati).

(3) Come visto precedentemente, $u_m = p_m g \Rightarrow \hat u_m = c q_m g$ con anche q_m polinomio MONICO di grado m; ma come visto in (2), anche $\hat u_m$ risolve $x^2 v - \ddot v = (2m+1) v$, dunque ovviamente anche $q_m g$; MA per l'unicità appena dimostrata è necessariamente $q_m = p_m$, per cui effettivamente $\mathcal{F}(p_m g) = c\,(p_m g)$. ($c \neq 0$!) (CHE TANTO un "che le definite" finale!)

(4) Sia $X := \{u \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \mid u \in C^2$ con $u \in O(\frac{1}{x^3})$, $\dot u$ e $\ddot u = O(\frac{1}{x})$ per $|x| \to +\infty\}$ ($\mathbb{R}$-sottosp. (proprio e) DENSO di $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (C^2_c)!) e sia $T : X \to L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ data da $Tu := x^2 u - \ddot u$ ($\in L^2$ perché è C^0 e che quadrato $\underset{|x|\to+\infty}{\sim} 1/x^2$!), che è lineare;

Allora, $\forall n \geq 0$, $u_n \in X$ e APPUNTO ne sono autovettori, e corrispondenti ad autovalori (reali) distinti, per cui sarebbero a due a due ortogonali se T fosse autoaggiunto, che infatti è: $\forall u, v \in X$, $\langle Tu; v\rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} Tu(x)\overline{v(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 u \overline{v}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}\overline{v}\,dx$; ma $\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}\overline{v}\,dx = -\cancel{[\dot{u}\overline{v}]_{-\infty}^{\infty}} + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}\dot{\overline{v}}\,dx =$

$= \cancel{[u\dot{\overline{v}}]_{-\infty}^{\infty}} - \int_{-\infty}^{\infty} u\ddot{\overline{v}}\,dx$, cioè $\langle Tu; v\rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u x^2 \overline{v}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} u\ddot{\overline{v}}\,dx = \langle u; Tv\rangle_2$ (NOTA: a parte l'ovvietà delle cancellazioni fatte, notiamo come di nuovo tutti gli integrali in gioco siano ben definiti, più che altro $\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}\dot{\overline{v}}\,dx$!). $\square$

Alcune formuline (dove $v: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (APERTO), $x_0 \in A$, $\rho > 0$ (reale) e $\overline{B(x_0,\rho)} \subsetneq A$):

(ρ, r)

(1) $\int_{\partial B(x_0,\rho)} v(x)\,d\sigma_{n-1}(x) = \int_{\partial B(0_{\mathbb{R}^n},1)} \rho^{n-1} v(x_0+\rho y)\,d\sigma_{n-1}(y)$;

(2) $\int_{B(x_0,r)} v(x)\,dx = \int_0^r \left[\int_{\partial B(x_0,\rho)} v(x)\,d\sigma_{n-1}(x)\right] d\rho$;

(3) $\frac{d}{dr}\int_{B(x_0,r)} v(x)\,dx = \int_{\partial B(x_0,r)} v(x)\,d\sigma_{n-1}(x)$;

(4) $\frac{1}{n}\,\sigma_{n-1}(\partial B(0,1)) = \sigma_n(B(0,1))$;

$$\sigma_{n-1}(\partial B(a,\rho)) = \rho^{n-1}\,\sigma_{n-1}(\partial B(0,1)) \quad \left(= n\,\rho^{n-1}\,\sigma_n(B(0,1))\right),$$

(5) $$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\,dx = n \underset{\substack{\| \\ (\sigma_n(B(0,1)))}}{c_n} \int_0^\infty f(\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho$$