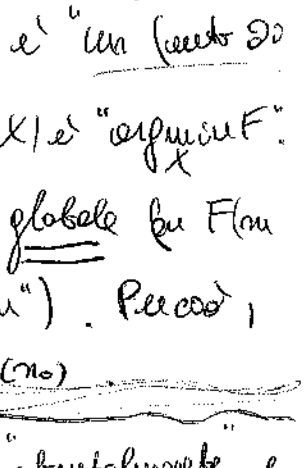
CALCOLO DELLE VARIAZIONI (elementi).

Studiamo problemi di minimo per funzioni scalari (o "funzionali"), ovvero consideriamo un insieme X infinito ed una funzione $F: X \to \mathbb{R}$ ($\cup\{\pm\infty\}$, volendo) e ci proponiamo il calcolo di $\boxed{\inf_X F := \inf\{F(x) \mid x \in X\}}$. Per noi l'ideale sarebbe che tale inf sia in realtà un minimo, per cui ci chiediamo: esiste $\min_X F := \min\{F(x) \mid x \in X\}$? Se sì, quali sono gli $x_0 \in X$ tali per cui $F(x_0) = \min_X F$? Se no, "cosa fare"? Tale problema è intrinsecamente "difficile", e quindi la teoria è costituita più da METODI che da "teoremi rigidi", per così dire. I metodi che introduciamo sono quattro e prendono i seguenti nomi: "METODO INDIRETTO", "METODO DIRETTO", "RILASSAMENTO", e "GAMMA-CONVERGENZA". Li affronteremo in tale ordine.

Notazioni (o nomenclature). Nel caso $\exists \min_X F$, tale numero reale è "il (valor) minimo (assoluto) di F (su X)", ed ogni $x_0 \in X$ tale per cui $F(x_0) = \min_X F$ è "un punto di minimo per F (su X)". L'insieme dei punti di minimo per F (su X) è "$\operatorname{argmin}_X F$". Ad essere precisi, $x_0 \in \operatorname{argmin}_X F \Leftrightarrow x_0$ è punto di minimo globale per F (su X): scriveremo x_0 è "(GM)" per F (su X) ("global minimum"). Perciò, $x_0 \in \operatorname{argmin}_X F \Leftrightarrow x_0$ è (GM) per F (su X) $\Leftrightarrow \forall x \in X,\ F(x) \geq F(x_0)$.

METODO INDIRETTO: andare per condizioni necessarie, anche "brutalmente", e poi "vedere come si aggiustano le cose" (dunque potrebbe essere inutile...!)

EQUAZIONE DI EULERO (- LAGRANGE) Condizione necessaria (ma NON sufficiente) affinché $x_0 \in X$ sia (GM) per F (su X) è che, $\forall \delta \in (0,\infty]$, e $\forall$ (∀ o meno!) curva in X $\gamma : (-\delta,\delta)_t \to X$ avente $\gamma(0) = x_0$ (dunque $\gamma := \gamma^{(x_0)}$), risulti che il punto $t=0$ sia (GM) per $\boxed{\varphi := F \circ \gamma} : (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ su $(-\delta,\delta)$.



[Dim. Se, $\forall x \in X$, $F(x) \geq F(x_0)$, allora $\forall t \in (-\delta,\delta)$ è $\varphi(t) := (F\circ\gamma)(t) = F(\gamma(t)) \overset{\gamma(0)=x_0,\ \gamma(t)\in X}{\geq} F(\gamma(0)) = (F\circ\gamma)(0) =: \varphi(0)$. □]

Pertanto, se ad esempio $\varphi = F(\gamma)$ fosse di classe $C^1((-\delta,\delta))$, allora dovrebbe essere $\varphi'(0)=0$, e cioè $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}F(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0}$, effettivamente $\forall\, \gamma=\gamma^{(x_0)}$ come descritta sopra. Tale proprietà sarebbe chiaramente una proprietà "locale".

Riassumendo, in contesto di "sufficiente regolarità" vale

$$x_0 \text{ è (GM) per } F(\text{su } X) \Rightarrow \underbrace{\forall\, \gamma=\gamma^{(x_0)},\ \frac{\partial}{\partial t}F(\gamma(t))\Big|_{t=0} = 0}_{\text{"equazione di Eulero relativa a } F(\text{su } X)\text{"}} .$$

$\boxed{\text{DEF.}}$ $\forall\, x_0\in X$, se x_0 è tale che in effetti valga l'equazione di Eulero relativa a F, allora diciamo che "x_0 verifica (E)". (o che x_0 è un punto ESTREMALE per F)

Dunque l'implicazione appena scritta diventa $\boxed{x_0 \text{ (GM) per } F \Rightarrow x_0 \text{ verifica (E)}}$.
(che chiaramente è non invertibile)

$\boxed{\text{Caso "usuale"}}$ X è uno $\mathbb{R}$-spazio affine di giacitura V, per cui $\forall x_0\in X$, $\forall\, \omega\in V$ e $\forall\, t\in\mathbb{R}$ è $x+t\omega\in X$. In questa situazione possiamo quindi restringerci alle $\gamma \doteq \gamma^{(x_0)}$ della forma $\gamma_\omega : \mathbb{R}_t \to X$, $\gamma_\omega(t) \doteq x_0+t\omega$, al variare delle $\omega\in V$ (e con x_0 candidato (GM) per F): allora $\varphi_\omega \doteq F\circ\gamma_\omega$ sarebbe $\varphi_\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ed in contesto di regolarità l'equazione di Eulero relativa a F diventa $\varphi'_\omega(0)=0\ \forall\,\omega\in V$, ossia

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}F(x_0+t\omega)\Big|_{t=0} = 0 \quad \forall\,\omega\in V}$$

. In contesto di opportuna regolarità, potremmo anche imporre $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(x_0+t\omega)\Big|_{t=0} \geq 0 \quad \forall\,\omega\in V}$, e volendo (ossia $\varphi''_\omega(0)\geq 0\ \forall\,\omega\in V$) anche andare avanti nel derivare, se possibile.

$\boxed{\text{Notazioni.}}$ Calcolare $\varphi'_\omega(0)$ è calcolare "la variazione prima di F in x_0 lungo $\omega(\in V)$", mentre calcolare $\varphi''_\omega(0)$ è calcolare "la variazione seconda di F in x_0 lungo $\omega(\in V)$". In generale, $\varphi^{(m)}_\omega(0)$ è "la variazione m-esima di F in x_0 lungo $\omega(\in V)$", dato $m\in\mathbb{N}^*$ $(\doteq \mathbb{N}\setminus\{0\})$.

Di nuovo, soddisfare $\varphi_{\sigma}^{(m)}(0)=0$, $\sigma\geq 0$, $\forall\sigma\in V$ sarebbe una proprietà "locale" per x_0.

$\boxed{\text{DEF.}}$ $x_0\in X$ è "un punto di MINIMO LOCALE DIREZIONALE per F", brevemente x_0 è "(DLM)" per F ("directional local minimum"), se per ogni $\sigma\in V$ il punto $t=0$ è di minimo almeno locale per $\varphi_\sigma(t)=F(x_0+t\sigma)$.

Dunque, per ora, $\boxed{x_0 \text{ (GM) per } F \Rightarrow x_0 \text{ (DLM) per } F \Rightarrow x_0 \text{ verifica (E)}}$.

(tutte implicazioni chiaramente NON invertibili)

Per i funzionali che ci interesseranno dovremo presentare punti di minimo né (GM) né (DLM) per F, bensì di una tipologia per così dire "intermedia". Dunque F potrebbe non possedere (GM), ma possedere punti di minimo "locale in qualche senso" comunque interessanti. In ogni caso, un'idea generale ovvia è la seguente: se $x_0\in X$ è punto di minimo "locale" per F, e se $\exists \min_X F$, allora ovviamente $F(x_0)\geq \min_X F$ (cioè il minimo assoluto sta sotto $F(x_0)$).

Prima di passare ai modelli funzionali, presentiamo il procedimento "ideale" (più semplice) di risoluzione del problema di (GM).

$\boxed{\text{LEMMA TRIVIAL}}$ Siano $F: X\to\mathbb{R}$ e $\tilde F: X\to\mathbb{R}$ tali che valgono le tre seguenti condizioni.

(a) $\forall x\in X$, $F(x)\geq\tilde F(x)$.

(b) $\exists x_0\in X$ tale che, $\forall x\in X$, $\tilde F(x)\geq\tilde F(x_0)$. (cioè x_0 è (GM) per $\tilde F$)

(c) Tale x_0 è anche tale che $\tilde F(x_0)=F(x_0)$.

Allora, $\forall x\in X$, $F(x)\geq F(x_0)$. (cioè x_0 è (GM) anche per F)

[Dim. $\forall x\in X$, $F(x)\overset{(a)}{\geq}\tilde F(x)\overset{(b)}{\geq}\tilde F(x_0)\overset{(c)}{=}F(x_0)$. $\square$]

$\boxed{\text{FUNZIONALI INTEGRALI}}$ Siano $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, e sia X un $\mathbb{R}$-spazio affine di giacitura V costituito da certe funzioni $[a,b]\to\mathbb{R}$ "abbastanza regolari", ad esempio di classe $C^1([a,b])$ o $C^2([a,b])$. Osserviamo fin da subito che $C_c^\infty((a,b))\subseteq V$.

($\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}$, C^∞ e a supporto compatto $\subseteq(a,b)$, per cui di sicuro $\sigma(a)=\sigma(b)=0$)

$\boxed{1^a \text{ SPECIE}}$ Sia anche $f:(a,b]_x\times\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_p\longrightarrow\mathbb{R}$ di classe C^1 "ovunque". Allora ci interessano a $F:X\to\mathbb{R}$ della forma $\boxed{F(u)=\int_a^b f(x,u(x),\dot u(x))\,dx}$, $u\in X$. (per tale scrittura basterebbe f continua)

Dunque il funzionale dipende solo da una "variabile" e dalla sua derivata prima, ma in generale può dipendere da più variabili o da derivate di ordine superiore: è per tale motivo che distinguiamo in "specie". Comunque sia, il nostro funzionale di riferimento sarà sempre un funzionale integrale di 1^a specie.

$\boxed{\text{EULERO}}$ Calcoliamo: $\forall u_0\in X$, $\forall v\in V$ e $\forall t\in\mathbb{R}$, $\underset{\text{Def. } F}{F(u_0+tv)=}\int_a^b f(x,u_0+tv,\underset{\text{linearità della derivata}}{\dot u_0+t\dot v})\,dx$

$$\underset{f \text{ regolare}}{\Rightarrow}\ \frac{\partial}{\partial t}F(u_0+tv)=\int_a^b\left[f_s(x,u_0+tv,\dot u_0+t\dot v)\,v+f_p(x,u_0+tv,\dot u_0+t\dot v)\,\dot v\right]dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial t}F(u_0+tv)\Big|_{t=0}=\int_a^b\left[f_s(x,u_0,\dot u_0)\,v+f_p(x,u_0,\dot u_0)\,\dot v\right]dx.$$

Pertanto, l'equazione di Eulero relativa a $F(u)=\int_a^b f(x,u,\dot u)\,dx$ è

$$\boxed{\int_a^b\left[f_s(x,u_0,\dot u_0)\,v+f_p(x,u_0,\dot u_0)\,\dot v\right]dx=0\quad\forall v\in V.}$$

La chiamiamo "Eulero in prima forma integrale", o "Eulero 1", in quanto per funzionali di questo tipo possiamo alternativamente "scriverla", ovvero sotto certe altre ipotesi. Infatti, se $f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))$ fosse ancor più regolare su $(a,b]$, allora $\forall v$ le formule

$$\int_a^b f_p(x,u_0,\dot u_0)\,\dot v\,dx\overset{\text{int. parti}}{=}\Big[f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))\,v(x)\Big]_{x=a}^{x=b}-\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial x}f_p(x,u_0,\dot u_0)\right]v\,dx$$

ci permetterebbe di ottenere "Eulero in seconda forma integrale", o "Eulero 2":

$$\boxed{\int_a^b\left[-\frac{\partial}{\partial x}f_p(x,u_0,\dot u_0)+f_s(x,u_0,\dot u_0)\right]v\,dx+\Big[f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))\,v(x)\Big]_{x=a}^{x=b}=0\quad\forall v\in V}$$

A questo punto, dato che $C_c^\infty((a,b))\subseteq V$, invochiamo il seguente risultato chiave. (che chiameremo lf e ben noto)

$\boxed{\text{LEMMA FCDV}}$ (Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni). Sia data $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{I}}$ Se $\int_{\mathbb{R}} g\,v\,dx=0$ $\forall v\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, allora $g\equiv 0$ q.o. su $\mathbb{R}$ (nel senso che coincide q.o. con la funzione identicamente nulla su $\mathbb{R}$). In particolare, se g fosse continua su $\mathbb{R}$, allora $g\equiv 0$.

$\boxed{\text{II}}$ Se $\int_{\mathbb{R}} g\varphi_0\,dx = 0 \ \ \forall \varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0\,dx = 0$, allora $g \equiv k_0 \in \mathbb{R}$ q.o. in $\mathbb{R}$.

[Dim. $\boxed{\text{I}}$ (Usiamo in modo naturale il fatto che, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, esiste una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \le \varphi_n(x) \le 1$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1_{(a,b)}(x)$.) Infatti la successione $(g\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, perché $\forall x \in \mathbb{R}$ $|g(x)\varphi_n(x)| \overset{(|\varphi_n|\le 1)}{\le} |g(x)|$, ed è tale che $\forall x \in \mathbb{R}$

$g(x)\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)1_{(a,b)}(x)$ ($\forall x \in X$, $g(x)$ è un numero!) : di conseguenza,

$$0 \overset{i.}{=} \int_{\mathbb{R}} g\varphi_n\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} g 1_{(a,b)}\,dx = \int_a^b g\,dx$$ per convergenza dominata di Lebesgue.

Pertanto $\int_a^b g\,dx = 0$ $\forall a<b$ in $\mathbb{R}$, e ciò è la tesi. ✓

($\boxed{\text{NOTA}}$ Visto come abbiamo concluso, possiamo desumere per approssimazione (passando per le funzioni semplici) che $\int_{\mathbb{R}} g\varphi\,dx = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} gh\,dx = 0 \ \forall h \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$. Ma allora basta prendere $h = \bar{g}$. ✓)

$\boxed{\text{II}}$ In modo analogo e forse, possiamo ottenere che $\forall\, a<b<c<d$ in $\mathbb{R}$ con $|b-a|=|d-c|$ sia $\int_a^b g\,dx = \int_c^d g\,dx$, da cui la tesi. □]

Otteniamo così "Eulero in forma differenziale" $\boxed{\frac{d}{dx} f_p(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) = f_s(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) \ \ \forall x\in(a,b)}$

restringendoci dapprima alle $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$, per poi ottenere quindi eventuali condizioni al bordo, o "BC" (boundary conditions), per $f_p(x,u_0,\dot{u}_0)$. (Ad esempio, se X è tale per cui le $\varphi \in V$ possono avere $\varphi(b)$ qualsiasi, allora otterremo di sicuro $f_p(b,u_0(b),\dot{u}_0(b)) = 0$.)

In conclusione, possiamo a concentrarci sul sistema differenziale (NON di Cauchy) (in generale)

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} f_p(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) = f_s(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) \ \ \forall x \in (a,b) \\ + \text{ eventuali BC date in } X \\ + \text{ eventuali BC note su } f_p(a,u_0(a),\dot{u}_0(a)) \text{ o } f_p(b,u_0(b),\dot{u}_0(b)) \\ \quad (\text{senza dover essere nulle}) \end{cases}$$

(→ saranno sempre in n° "giusto"...!)

$\boxed{\text{IDEA GENERALE}}$ Speranza di riuscire a risolvere tale sistema differenziale, ossia di riuscire a trovare $u_0 \in X$ che verifichi Eulero differenziale più le condizioni BC note, e speranza di riuscire a dimostrare che almeno uno di tali $u_0 \in X$ sia davvero (GM) per F. In effetti, è chiaro che un $u_0 \in X$ che verifichi Eulero differenziale, più $\left[f_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))\,v(x)\right]_{x=a}^{x=b} = 0 \quad \forall v \in V$, verifica a maggior ragione Eulero 2 ed Eulero 1 (u_0 sarebbe infatti regolare al punto giusto per usare la formula d'integrazione per parti). Certo potrebbe anche darsi che esiste $u_0 \in X$ (GM) per F NON sufficientemente regolare per poter scrivere Eulero differenziale ...!)

$\boxed{\text{NOTA}}$ L'Eulero Diff. è un'eq. diff. ordinaria generalmente del secondo ordine e NON-lineare, essendo $\frac{d}{dx} f_p(x, u_0, \dot{u}_0) = f_{xp}(x, u_0, \dot{u}_0) + f_{sp}(x, u_0, \dot{u}_0)\,\dot{u}_0 + f_{pp}(x, u_0, \dot{u}_0)\,\ddot{u}_0$, ed inoltre è un'eq. riscrivibile in forma normale (ossia come $\ddot{u} = \dots$) se e solo se $f_{pp}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ (dunque, per continuità, sempre >0 o <0).

$\boxed{\text{Permutazioni sulla CONVESSITÀ.}}$ Sia per il momento $f: \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ C^1 (C^2) e convessa su $\mathbb{R}$: allora vale che, $\forall\, p, p' \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(p+p') \geq f(p) + f'(p)\,p'}$, o equiv. che, $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(q) \geq f(p) + f'(p)(q-p)}$ ("$p' = q-p$") (e cioè che $f(q) - f(p) - (q-p)\,f'(p) \geq 0$). In particolare, se f fosse strettamente convessa su $\mathbb{R}$, allora $f(p+p') \geq f(p) + p' f'(p) \quad \forall p, p' \in \mathbb{R}$ e sono uguali se e solo se $p' = 0$. ✓ Tornando alla nostra $f: [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ C^2 che definisce F, se f fosse convessa nella coppia (s,p) e $x \in [a,b]$ fissato, cioè se $\forall x \in [a,b]$ la funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(s,p) \mapsto f(x,s,p)$ fosse convessa, allora avremmo che $\forall x \in [a,b]$, $\forall\, s_0, s_1, p_0, p_1 \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x, s_0+s_1, p_0+p_1) \geq f(x, s_0, p_0) + f_s(x, s_0, p_0)\,s_1 + f_p(x, s_0, p_0)\,p_1}$, e se anzi avessimo la relativa stretta convessità allora sarebbe l'$=$ se e solo se $s_1 = p_1 = 0$ $(\forall x)$ (perché, dunque, stretta convessità nella p dà $p_1 = 0$). ✓

In particolare, tornando alla nota precedente, se $\forall x\in[a,b]$ e $\forall s\in\mathbb{R}$ $p\mapsto f(x,s,p)$ fosse "fortemente convessa" ovvero $f_{pp}(x,s,p)>0$ $\forall p\in\mathbb{R}$, allora di sicuro sarebbe anche fortemente convessa "lungo" le traiettorie potenzialmente ottimali, ossia $f_{pp}(x,u_0(x),\dot u_0(x))>0$ $\forall x\in[a,b]$. Tuttavia, il nostro interesse nella convessità della f va ben oltre tale constatazione.

CONDIZIONE SUFFICIENTE "classica" per avere $(E)\Rightarrow(GM)$: CONVESSITÀ.

Teorema. • Se $f\in C^1([a,b]_x\times\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_p)$ è convessa in (s,p) a $x\in[a,b]$ fissato, allora ogni $u_0\in X$ che verifichi (E), ossia Eulero 1, è (GM) per F. (In particolare, ogni $u_0\in X$ che risolve il sistema differenziale relativo ad Eulero (differenziale).)

• Se f fosse strettamente convessa in (s,p) a $x\in[a,b]$ fissato, allora esisterebbe al più un (GM) per F e quindi una sola (al più) soluzione $u_0\in X$ di Eulero 1.

• Se infine f fosse strettamente convessa solo in p (ma convessa in (s,p), comunque), allora per ogni $u_0\in X$ (GM) per F ogni altro (GM) per F è della forma u_0+K, $K\in V$ costante su $[a,b]$.

[Dim. Sia $u_0\in X$ che verifica la Eulero 1. La tesi è che $F(w)\geq F(u_0)$ $\forall w\in X$, cioè che $F(u_0+v)\geq F(u_0)$ $\forall v\in V$ (perché, $\forall w\in X$, $\exists!\, v\in V$ tale che $w=u_0+v$, ed è ovviamente $v\doteq w-u_0$). Ma infatti, $\forall v\in V$, abbiamo che

$$F(u_0+v)\doteq\int_a^b f(x,\underset{s_0}{u_0(x)}+\underset{s_1}{v(x)},\underset{p_0}{\dot u_0(x)}+\underset{p_1}{\dot v(x)})\,dx \overset{\text{(convessità)}}{\geq}\int_a^b\Big[f(x,u_0(x),\dot u_0(x))+f_s(x,u_0(x),\dot u_0(x))v(x)+$$

$$=0\ \text{(Eulero 1)}$$

$$+f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))\dot v(x)\Big]dx = F(u_0)+\int_a^b\left[f_s(x,u_0,\dot u_0)v+f_p(x,u_0,\dot u_0)\dot v\right]dx=$$

$=F(u_0)$, quindi effettivamente $F(u_0+v)\geq F(u_0)$ $\forall v\in V$. / Se poi f fosse strettamente convessa in (s,p) a x fissato, allora avrei notato che vale l'$=$ se e solo se $v\ (=\dot v)\equiv 0$ su $[a,b]$ $\left(\int_a^b(\geq 0)\,dx=0\right)$, mentre analogamente la stretta convessità solo nella p darebbe $\dot v\equiv 0$ su $[a,b]$ e cioè $v\equiv K\in\mathbb{R}$ su $[a,b]$. $\square$].

Pertanto, tornando alla nostra "idea generale", in caso di convessità per f nel senso appena descritto tutto si riconduce alla sola risoluzione del sistema diff relativo ad Eulero! A riguardo di tale sistema, diamo tre possibilità:

(1) riusciamo davvero a risolverlo esplicitamente (ie questo è "veramente semplice");

(2) al contrario, riusciamo a dimostrare che è un sistema impossibile, deducendo che un eventuale (GM) per F non è molto regolare ... In tal caso, se f è "semplice", allora "probabilmente" non esisteranno (GM)! (Se ad esempio F non fosse visibilmente limitato dal basso, allora potremmo vedere che succede a $F(u+M\omega)$ per $M\to\infty$ dove $u\in X$ e $\omega\in V$, $\omega\geq 0$ sono fissate.)

(3) non riusciamo proprio a trattarlo ... Allora, se pensiamo che $\nexists$ (GM) per F, possiamo provare a farlo vedere "a mano" (tipo come nell'"esempio" in (2)). Se invece pensiamo che abbia almeno una soluzione, allora possiamo provare ad ottenere qualche risultato di <u>ESISTENZA ASTRATTA</u>: le tecniche base per fare questo sono quelle del metodo diretto.

NOTA: Eulero in forma <u>ERDMANN</u> (caso autonomo). Nel caso particolare in cui la f non dipende in realtà dalla x, ossia "$f(x,s,p)=f(s,p)$", la Eulero Differenziale diventa $\frac{\partial}{\partial x}f_p(u_0,\dot u_0)=f_s(u_0,\dot u_0)$ su $[a,b]$, ed ora mostriamo che se $u_0\in X$ la verifica allora verifica anche la <u>Erdmann</u>

$\boxed{\dot u_0(x)\, f_p(u_0(x),\dot u_0(x)) = K + f(u_0(x),\dot u_0(x))}$ $\forall x\in[a,b]$, $K\in\mathbb{R}$ fisso.

[Dim. Se $u_0\in X$ verifica Eulero Differenziale, allora $\frac{\partial}{\partial x}\left[\dot u_0 f_p(u_0,\dot u_0)-f(u_0,\dot u_0)\right]=0$: infatti tale derivata è $=\ddot u_0 f_p(u_0,\dot u_0)+\dot u_0\left[\frac{\partial}{\partial x}f_p(u_0,\dot u_0)\right]-f_s(u_0,\dot u_0)\dot u_0-$
$-f_p(u_0,\dot u_0)\ddot u_0 = \dot u_0\Big[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}f_p(u_0,\dot u_0)-f_s(u_0,\dot u_0)}_{=0}\Big]\equiv 0$. □] ✓

Prima di affrontare un esempio molto significativo, presentiamo altre due specie di funzionali integrali relativamente ai quali scriveremo ancora Eulero nelle sue tre forme, in virtù sempre dell'idea che si riesce a fare però in questo più grazie a tecniche che a formule "rigide".

2ª SPECIE: "Due variabili". Sia $f:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (variabili x, s_1, s_2, p_1, p_2) di classe C^1 ovunque. Ci interessiamo a $F:X^2\to\mathbb{R}$ della forma $\boxed{F(u_1,u_2)=\int_a^b f(x,u_1,u_2,\dot u_1,\dot u_2)\,dx}$, $u_1,u_2\in X$.

Eulero 1: $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V$, $\int_a^b [f_{s_1}(x,u_1,u_2,\dot u_1,\dot u_2)\varphi_1 + f_{s_2}(x,u_1,u_2,\dot u_1,\dot u_2)\varphi_2 +$

$+ f_{p_1}(x,u_1,u_2,\dot u_1,\dot u_2)\dot\varphi_1 + f_{p_2}(x,u_1,u_2,\dot u_1,\dot u_2)\dot\varphi_2]\,dx = 0$.

Eulero 2: se avessimo "regolarità superiore", allora $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in V$ avremmo che

$$\int_a^b [f_{s_1}(-) - \frac{\partial}{\partial x} f_{p_1}(-)]\varphi_1\,dx + \int_a^b [f_{s_2}(-) - \frac{\partial}{\partial x} f_{p_2}(-)]\varphi_2\,dx + [f_{p_1}(-)\varphi_1]_a^b +$$

$$+ [f_{p_2}(-)\varphi_2]_a^b = 0 .$$

Eulero Diff. (+BC): prendendo alternativamente $\varphi_1 = 0$ o $\varphi_2 = 0$ (, ed usando il LEMMA FCDV)
otteniamo subito i due sistemi diff "separati" (in (u_1, u_2) incognite)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f_{p_1}(-) = f_{s_1}(-) \text{ su } [a,b] \\ (u_1,u_2) \in X^2 \\ [f_{p_1}(-)\varphi]_a^b = 0 \quad \forall \varphi \in V \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f_{p_2}(-) = f_{s_2}(-) \text{ su } [a,b] \\ (u_1,u_2) \in X^2 \\ [f_{p_2}(-)\varphi]_a^b = 0 \quad \forall \varphi \in V \end{cases} .$$

3ª SPECIE: due derivate. Sia $f: [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_q \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ovunque.
Ci interessiamo a $F: X \to \mathbb{R}$ della forma $\boxed{F(u) := \int_a^b f(x,u,\dot u,\ddot u)\,dx}$, $u \in X$.

Eulero 1: $\forall \varphi \in V$, $\int_a^b [f_s(x,u,\dot u,\ddot u)\varphi + f_p(x,u,\dot u,\ddot u)\dot\varphi + f_q(x,u,\dot u,\ddot u)\ddot\varphi]\,dx = 0$.

Eulero 2: se avessimo "regolarità superiore", allora $\forall \varphi \in V$ avremmo che

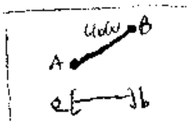
$$\int_a^b [f_s(-) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(-) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_q(-)]\varphi\,dx + [f_p(-)\varphi]_a^b + [f_q(-)\dot\varphi]_a^b -$$

$$- [(\frac{\partial}{\partial x} f_q(-))\varphi]_a^b = 0 .$$

Eulero Diff. (+BC):
$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_q(-) - \frac{\partial}{\partial x} f_p(-) + f_s(-) = 0 \text{ su } [a,b] \\ u \in X \\ [(f_p(-) - \frac{\partial}{\partial x} f_q(-))\varphi]_a^b = 0 \quad \forall \varphi \in V \\ [f_q(-)\dot\varphi]_a^b = 0 \quad \forall \varphi \in V \end{cases} .$$

Esempio significativo. Siano $a<b$ in $\mathbb{R}$, $A,B\in\mathbb{R}$, e $X \doteq \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a)=A,\ u(b)=B\}$ (quindi $V=\{\omega\in C^1([a,b]) \mid \omega(a)=\omega(b)=0\}$), e sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2:

Definiamo $\boxed{F(u) := \int_a^b f(\dot u)\,dx}$, $u\in X$. In particolare, se u_0 è la retta affine che interpola i due punti (a,A) e (b,B), ossia $u_0(x) \doteq \frac{B-A}{b-a}(x-a)+A$ per ogni $x\in[a,b]$, allora $u_0\in X$ (ed anzi $u_0\in C^\infty([a,b])$) e ci chiediamo "quando" u_0 sia (GM) per F, cioè "quando" $\min_X F = (b-a)\,f\left(\frac{B-A}{b-a}\right)$ ($\dot u_0$ è un numero, ed è precisamente $\frac{B-A}{b-a}$).



Affermazioni. [1] Se f è convessa (su $\mathbb{R}$), allora u_0 è (GM) per F. Se f è strettamente convessa, allora u_0 è l'unico (GM) per F.

[2] Se f è convessa, ma coincide con una retta affine su $[c_1,c_2]$, dove $c_1<c_2$, mentre al di fuori è strettamente convessa, allora u_0 NON è l'unico (GM) se e solo se $\dot u_0\in(c_1,c_2)$.

[3] Se f non è necessariamente convessa, ma ammette "convessificata" f^{**} ovunque finita e C^2 (f^{**} è la più grande funzione convessa $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che è $\underset{(\text{su }\mathbb{R})}{\leq} f$), e se $\boxed{f^{**}(\dot u_0)=f(\dot u_0)}$, allora u_0 resta (GM) per F.

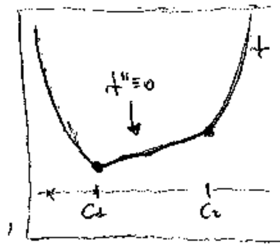
Dim. [1] Per ipotesi $\overset{\text{di convessità di } f,\ e'}{f(p_0+p_1)} \geq f(p_0)+p_1 f'(p_0)$ $\forall p_0,p_1\in\mathbb{R}$, e se assumiamo la stretta convessità di f sarebbe $=$ se e solo se $p_1=0$. D'altra parte, abbiamo tutta la regolarità che basta di f per scrivere Euler Diff, che è

$$\begin{cases} f''(\dot u)\,\ddot u \equiv 0 & \text{su } [a,b] \\ u(a)=A, \quad u(b)=B \end{cases}$$

. Allora u_0 è (GM) per F perché $\ddot u_0\equiv 0$, quindi verifica Euler, e infatti f è convessa. / Se addirittura f fosse strettamente convessa, allora $\operatorname{argmin}_X F$ sarebbe costituito da elementi (di X) della forma u_0+k, $k\in V$ costante. Ma la sola costante di V è lo zero. /

[2] Per ipotesi f resta convessa, e abbiamo dunque l'Euler Diff, per cui u_0 resta (GM). Se $\dot u_0\in(c_1,c_2)$, allora prendiamo una qualsiasi $u(x)\in X$ tale che

$\dot u(x) \in (c_1,c_2)$ $\forall x\in[a,b]$ (ben possibile!) cosicché $f''(\dot u(x))=0$ $\forall x\in[a,b]$, e quindi $u(x)$ soddisferebbe Eulero diff pur non avendo $u''\equiv 0$ su $[a,b]$. / Viceversa, se $\dot u_0 \le c_1$ o $\dot u_0\ge c_2$ allora u_0 è l'unico (GM). Infatti, se ad esempio $\dot u_0\le c_1$, allora $\forall v\in V$ e $\forall x\in[a,b]$, $f(\dot u_0+\dot v(x)) \ge$ $\ge f(\dot u_0)+f'(\dot u_0)\dot v(x)$ per convessità, e chiaramente se vale l'$=_{(\forall x)}$ allora necessariamente $\dot v(x)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ (deve capitare $\dot u_0+\dot v(x)\in[c_1,c_2]$!). Ma la sola funzione monotona in V resta lo zero! Per $\dot u_0\ge c_2$, avremmo dedotto $\dot v\le 0$ da cui di nuovo $v\equiv 0$. /



$\boxed{3}$ Definiamo $\boxed{\hat F(u) := \int_a^b f^{**}(\dot u)\,dx \quad \forall u\in X}$, il quale che serve per ipotesi. Allora la tesi è una diretta applicazione del LEMMA TRIVIAL a F e $\hat F$, perché: da $f(p)\ge f^{**}(p)$ $\forall p\in\mathbb R$, deduciamo subito che $F(u)\ge\hat F(u)$ $\forall u\in X$; dalla convessità di f^{**} su $\mathbb R$, deduciamo da $\boxed{1}$ che u_0 è (GM) per $\hat F$; dalla ipotesi $f^{**}(\dot u_0)=f(\dot u_0)$, deduciamo subito che $\hat F(u_0)=F(u_0)$. □

$\boxed{\text{MINIMI VINCOLATI}}$ ad altri funzionali: MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE.

Per questa sezione conviene indicare la variazione prima di F in u_0 lungo $v\in V$ come "$\delta F(u_0,v)$" $\doteq \varphi_v'(0) = \frac{\partial}{\partial t}F(u_0+tv)\Big|_{t=0}$, dove F resta un funzionale $_{(\text{ad es.})}$ integrale di 1° specie $F(u)=\int_a^b f(x,u,\dot u)\,dx$, $u\in X$. Dato ora un altro funzionale su $X_{(\text{ad es.})}$ $G(u)\doteq\int_a^b g(x,u,\dot u)\,dx$, $u\in X$, "come F", ci proponiamo di minimizzare $F(u)$ sulle $u\in X$ $\boxed{\text{tali che } G(u)=0}$, ossia sulle $u\in X$ vincolate a $G(u)=0$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se $u_0\in X$ è punto di minimo almeno locale per F vincolato a $G(u_0)=0$, allora vale solo una che le due seguenti alternative:

(1) $\forall v\in C_c^\infty((a,b))$, $\delta G(u_0,v)=0$ (cioè u_0 verifica l'(E) di G)

(2) $\exists\lambda\in\mathbb R$ tale che, $\forall v\in C_c^\infty((a,b))$, $\delta F(u_0,v)=\lambda\,\delta G(u_0,v)$ (cioè u_0 verifica l'(E) di $F-\lambda G$). (In questo caso, λ è il moltiplicatore di Lagrange per F e G relativo a u_0.)

Dim. Supponiamo che esiste $v_0\in C_c^\infty((a,b))$ tale che $\delta G(u_0,v_0)\neq 0$, e dimostriamo che (2). Per questo consideriamo, $\forall v \in C^\infty_c((a,b))$ e $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, le due funzioni scalari $f := f_v$, $g := g_v : \mathbb{R}^2_{(t,s)} \to \mathbb{R}$ date da

$$\begin{cases} f(t,s) := F(u_0 + tv + sv_0) \\ g(t,s) := G(u_0 + tv + sv_0) \end{cases} (\in C^1), \text{ cosicché } \begin{cases} f(0,0) = F(u_0) \\ g(0,0) = G(u_0) \end{cases} \text{ e}$$

$$g_s(0,0) \overset{(imm.)}{=} \delta G(u_0, v_0) \overset{(ii.)}{\neq} 0 \quad (\text{mentre, allo stesso modo, } g_t(0,0) = \delta G(u_0,v)) :$$

di conseguenza, grazie al teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$ (Dini), esiste $\delta > 0$ ed $\exists\, s : (-\delta,\delta)_t \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $s(0)=0$ e $g(t,s(t))=0$ $\forall t \in (-\delta,\delta)$, ed inoltre $s'(0) = -\dfrac{g_t(0,0)}{g_s(0,0)} = -\dfrac{\delta G(u_0,v)}{\delta G(u_0,v_0)}$.

Ma allora, $\forall t \in (-\delta,\delta)$, $G(u_0 + tv + s(t)v_0) \doteq g(t,s(t)) = 0$ significa che $\forall t \in (-\delta,\delta)$ $u_0 + tv + s(t)v_0$ "giace sul vincolo", per cui $\forall t \in (-\delta,\delta)$ per di restringere δ

$$f(t,s(t)) \doteq F(u_0 + tv + s(t)v_0) \overset{ii.}{\geq} F(u_0) = f(0,0) \quad : \text{segue ovviamente}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(f(t,s(t)))\Big|_{t=0} = 0, \text{ cioè } (s(0)=0) \quad \delta F(u_0,v) + \delta F(u_0,v_0)s'(0) = 0,$$

o equivalentemente $\delta F(u_0,v) = -\delta F(u_0,v_0)s'(0) = \underbrace{\left(\dfrac{\delta F(u_0,v_0)}{\delta G(u_0,v_0)}\right)}_{=:\lambda}\delta G(u_0,v)$. $\square$

(K)

$\boxed{\text{METODO DI CALIBRAZIONE}}$: LEMMA TRIVIAL "FORTUNATO" (ovvero per il nostro funzionale integrale di 1° specie), quando precisamente $\hat{F}$ risulta identicamente costante su X. Sia $X = \{u \in C^1([a,b]) \mid u(a)=A, u(b)=B\}$, $A,B \in \mathbb{R}$ dati.

▶ Se esiste una funzione $V : [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ di classe C^1 comunque tale per cui, definendo $\hat{f} : [a,b] \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$, $\boxed{\hat{f}(x,s,p) := V_x(x,s) + pV_s(x,s)}$, risultino

(i) $\forall (x,s,p) \in [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x,s,p) \geq \hat{f}(x,s,p)$ o solo $f(x,u(x),\dot{u}(x)) \geq \hat{f}(x,u(x),\dot{u}(x))$ $\forall u \in X$, $\forall x \in [a,b]$;

(ii) $\forall x \in [a,b]$, $\hat{f}(x,u_0(x),\dot{u}_0(x)) = f(x,u_0(x),\dot{u}_0(x))$ per una certa $u_0 \in X$,

allora u_0 è (GM) per F, e diciamo di "aver calibrato u_0 con V".

[Dim. Definiamo $\hat{F}(u) \doteq \int_a^b \hat{f}(x,u,\dot{u})\,dx$ $\forall u \in X$, cosicché per ipotesi (i) e (ii)

si abbia di nuovo che $F(u) \geq \hat{F}(u)$ $\forall u \in X$ e che $\hat{F}(u_0) = F(u_0)$. Dimostriamo ora che $\hat{F}$ è costante su X (per cui ovviamente $\hat{F}(u) = \hat{F}(u_0)$ $\forall u \in X$): $\forall u \in X$,
$$\hat{F}(u) = \int_a^b \left[V_x(x,u(x)) + \dot{u}(x) V_s(x,u(x))\right] dx = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} V(x,u(x))\right) dx = \Big[V(x,u(x))\Big]_{x=a}^{x=b} =$$
$$= V(b,u(b)) - V(a,u(a)) = V(b,B) - V(a,A). \quad \square \;]$$

NOTA Se esiste $V : [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ovunque tale per cui $\hat{f}(x,s,p) \equiv V_x(x,s) + p V_s(x,s)$ $(\forall (x,s,p) \in [a,b] \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p)$ soddisfi $\hat{f}(x,u_0,\dot{u}_0) \equiv f(x,u_0,\dot{u}_0)$ su $[a,b]$ (cioè le (ii)) $_{(u_0 \text{ opportuna})}$, allora $\boxed{F(u) - F(u_0) = \int_a^b [f(x,u,\dot{u}) - \hat{f}(x,u,\dot{u})] dx}$ per ogni $u \in X$ (da cui le tesi si ricava se vale anche le (i)).

[Dim. Torniamo a considerare $\hat{F}$ della dim. precedente: allora, $\forall u \in X$, $\hat{F}(u) = \hat{F}(u_0)$ per la "forma" di $\hat{f}$, e $\hat{F}(u_0) = F(u_0)$ per (ii), da cui $\forall u \in X$
$F(u) - F(u_0) = F(u) - \hat{F}(u)$. $\square$]

OSS Un caso in cui una certa $\hat{f} : [a,b] \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ di classe C^1 sia esattamente della forma $\hat{f}(x,s,p) = V_x(x,s) + p V_s(x,s)$ (per V opportuna) è di nuovo quello in cui esistono $J, K : [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ C^1 tali che $\boxed{\hat{f}(x,s,p) = J(x,s) + p K(x,s)}$ $\forall (x,s,p) \in [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_p$ e con $\boxed{J_s(x,s) = K_p(x,s)}$ $\forall (x,s) \in [a,b] \times \mathbb{R}_s$.

PAUSA: ritorno veloce a Lagrange! **PROP.** Siano $F, G : X \to \mathbb{R}$, e sia $u_0 \in X$ vincolato a $G(u_0) = 0$. Se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che u_0 sia (GM) per $F - \lambda G$, allora u_0 è (GM) per F sul vincolo $G(u) = 0$.

[Dim. $\forall u \in X$ tale che $G(u) = G(u_0) = 0$, $F(u) - \lambda G(u) \overset{ip.}{\geq} F(u_0) - \lambda G(u_0) =$
$= F(u_0) - \lambda G(u)$. $\square$]

(Es.): "interpretazione calibrativa" del teorema di "Eulero + convessità".
Se f è convessa in (s,p) a x fissato $_{(\text{oltre che } C^2)}$, allora come sappiamo vale che, $\forall u_0, u \in X$,

$F(u)=\int_a^b f(x,u,\dot u)\,dx \ \ge\ \int_a^b \left[f(x,u_0,\dot u_0) + (u-u_0)\, f_s(x,u_0,\dot u_0) + (\dot u-\dot u_0)\, f_p(x,u_0,\dot u_0)\right]dx$

Se dunque poniamo $\hat f(x,s,p) := f(x,u_0(x),\dot u_0(x)) + (s-u_0(x))\, f_s(x,u_0(x),\dot u_0(x)) + (p-\dot u_0(x))\, f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))$ per ogni $x\in[a,b]$ e $s,p\in\mathbb{R}$, allora otteniamo per convessità effettiva che $f(x,u(x),\dot u(x)) \ge \hat f(x,u(x),\dot u(x))$ $\forall u\in X$ e $\forall x\in[a,b]$, e per definizione stessa di $\hat f$ che ovviamente $\hat f(x,u_0(x),\dot u_0(x)) = f(x,u_0(x),\dot u_0(x))$ $\forall x\in[a,b]$; pertanto avremmo riottenuto il teorema "f convessa + (E) $\Rightarrow$ (GM)" se dimostreremo che "u_0 verifica (E) $\Rightarrow$ "$\hat f = V_x + pV_s$"" ! Ma infatti, $\forall x\in[a,b]$ e $\forall s,p\in\mathbb{R}$,

$$\hat f(x,s,p) \underset{\text{nota tutte de } x\ldots}{=} \underbrace{\left[f(x,u_0,\dot u_0) + (s-u_0)\, f_s(x,u_0,\dot u_0) - \dot u_0\, f_p(x,u_0,\dot u_0)\right]}_{=:\,J(x,s)} + p\underbrace{\left[f_p(x,u_0,\dot u_0)\right]}_{=:\,K(x,s)\ (\doteq K(x))}$$

e vale $K_x(x,s) = J_s(x,s)$ $\forall (x,s)\in[a,b]\times\mathbb{R}_s$ se e solo se $\frac{\partial}{\partial x} f_p(x,u_0,\dot u_0) = f_s(x,u_0,\dot u_0)$ $\forall x\in[a,b]$, che è esattamente (E) per u_0. □

Prima d'immergerci completamente nella <u>TEORIA CLASSICA</u> del COV, terminiamo la sezione con un risultato astratto di <u>esistenza</u> di una calibrazione per u_0.

Premettiamo una $\boxed{\text{OSS.}}$ Quale che possiamo essere "la" (una) funzione V che calibra un certo $u_0\in X$, possiamo supporre $V(a,A)=0$ in quanto evidentemente la $\hat f$ con le sue proprietà è invariante per aggiunte di scalari alla V. Per ciò, come visto, se effettuo $\hat f(x,s,p) = V_x(x,s) + p\,V_s(x,s)$, allora $\forall u\in X$ è $\hat F(u) = V(b,B)$. A questo punto, se la $\hat f$ gode delle condizioni (i) e (ii), allora $V(b,B) = \hat F(u_0) = \min_X F = \min\left\{\int_a^b f(x,u,\dot u)\,dx \;\middle|\; u\in C^1([a,b]) : \begin{cases} u(a)=A \\ u(b)=B\end{cases}\right\}$.

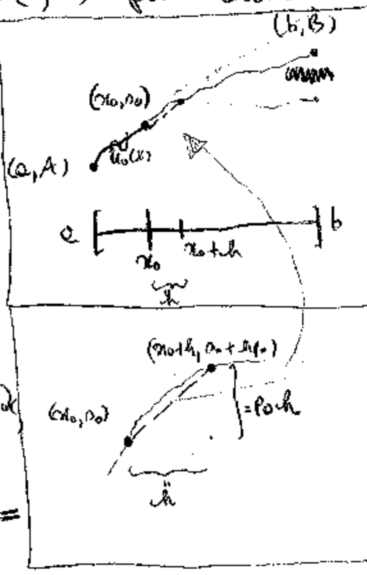
Questa uguaglianza ispira il seguente enunciato.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Supponiamo che la funzione $V:[a,b]_{x_0}\times\mathbb{R}_{s_0}\to\mathbb{R}$, $V(x_0,s_0) := \min\left\{\int_a^{x_0} f(x,u,\dot u)\,dx \;\middle|\; u\in C^1([a,x_0]) : u(a)=A,\ u(x_0)=s_0\right\}$ $\forall (x_0,s_0)\in[a,b]\times\mathbb{R}$, sia ben definita e di classe C^1 ovunque. Allora V è di calibrazione per ogni $u_0\in X$ che sia (GM) per F, nel senso che $\hat f(x,s,p) := V_x(x,s) + p\,V_s(x,s)$ soddisfa le condizioni (i) e (ii) per ogni $u_0\in X$ (GM) per F.

▶ Questa V è chiamata "funzione valore" relativa a F ("VALUE FUNCTION").

L'utilità del risultato è chiara: quale che sia $u_0 \in X$, se u_0 è (Gu) (per F) allora tale V deve soddisfarla; ma, viceversa, se davvero la soddisfa allora u_0 è in effetti (Gu) per F! Ora ogni cosa proviamo per V.

[Dim. (i) Siano $x_0 \in (a,b)$, e s_0 e p_0 in $\mathbb{R}$. Mostriamo che $\hat f(x_0,s_0,p_0) = V_x(x_0,s_0) + p_0 V_s(x_0,s_0) \le f(x_0,s_0,p_0)$, ossia $f(x_0,s_0,p_0) - \hat f(x_0,s_0,p_0) \ge 0$ (da cui, per continuità, pure per $x_0 \in [a,b]$). Sia per questo $h \in (0,1)$ piccolo abbastanza affinché $x_0 + h < b$, e consideriamo su $[a, x_0+h]$ la funzione $C^1([a,x_0+h])$ che su $[a,x_0]$ è una $\tilde u_0(x)$ con $\tilde u_0(x_0) = s_0$ e tale che, ~~...~~ $V(x_0,s_0) = \int_a^{x_0} f(x,\tilde u_0,\dot{\tilde u}_0)\,dx$ (∃ per ipotesi!), mentre su $[x_0, x_0+h]$ "tira dritto" con pendenza p_0, ossia $x \mapsto p_0(x-x_0)+s_0$: così chiaramente



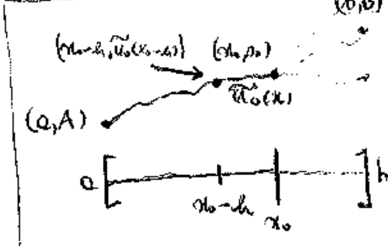
$$V(x_0+h, s_0+hp_0) \overset{(\text{def. } V)}{\le} V(x_0,s_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, p_0(x-x_0)+s_0, p_0)\,dx$$

cioè

$$\frac{V(x_0+h, s_0+hp_0) - V(x_0,s_0)}{h} \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, p_0(x-x_0)+s_0, p_0)\,dx =$$

$= f(z_h, p_0(z_h - x_0)+s_0, p_0)$ per un opportuno $z_h \in (x_0, x_0+h)$ (grazie al teorema della media integrale), da cui per $h \downarrow 0$ $V_x(x_0,s_0) + p_0 V_s(x_0,s_0) \le f(x_0,s_0,p_0)$. ✓

(ii) Siano $x_0 \in (a,b]$, e $s_0 \in \mathbb{R}$. Mostriamo che $\hat f(x_0, u_0(x_0), \dot u_0(x_0)) = V_x(x_0,u_0(x_0)) + \dot u_0(x_0) V_s(x_0,u_0(x_0)) = f(x_0,u_0(x_0),\dot u_0(x_0))$ (da cui pure per $x_0 = a$ facendo $x_0 \downarrow a$). Sia per questo $h \in (0,1)$ piccolo abbastanza affinché $a < x_0 - h$, e consideriamo come prima $\tilde u_0(x)$ su $[a,x_0]$ con $\tilde u_0(x_0) = s_0$ e tale che $V(x_0,s_0) = \int_a^{x_0} f(x,\tilde u_0,\dot{\tilde u}_0)\,dx$: allora $\tilde u_0|_{[a,x_0-h]}$ resta "ottimale" (tra le $C^1([a,x_0-h])$ con $a \mapsto A$, $x_0-h \mapsto \tilde u_0(x_0-h)$) per cui $V(x_0-h, \tilde u_0(x_0-h)) = V(x_0,\tilde u_0(x_0)) - \int_{x_0-h}^{x_0} f(x,\tilde u_0,\dot{\tilde u}_0)\,dx$, ossia



$$\frac{V(x_0,\tilde u_0(x_0)) - V(x_0-h, \tilde u_0(x_0-h))}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0} f(x,\tilde u_0,\dot{\tilde u}_0)\,dx,$$

da cui la tesi come prima. ✓ (Sottolineiamo che nel (ii) appena fatto la u_0 relativa a $\begin{cases} x_0 = b \\ s_0 = B \end{cases}$ è proprio una (Gu) per F.) □]

(La tesi è automatica prendendo $x_0 \in [a,b]$ arbitrario e come una $\tilde u_0$ tale che $\tilde u_0(x_0) = u_0(x_0)$, ad es. ovvio $\tilde u_0 = u_0|_{[a,x_0]}$.)

TEORIA CLASSICA (CDV). (Ancora per il nostro funzionale integrale di 1° specie.)

DEF. $u_0 \in X$ è "un punto di MINIMO LOCALE DEBOLE per F", brevemente u_0 è "(WLM)" per F ("weak local minimum"), se $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che, $\forall u \in X$, se $\|u - u_0\|_{C^1([a,b])} < \delta_0$ allora $F(u) \geq F(u_0)$.

DEF. $u_0 \in X$ è "un punto di MINIMO LOCALE FORTE per F", brevemente u_0 è "(SLM)" per F ("strong local minimum"), se $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che, $\forall u \in X$, se $\|u - u_0\|_\infty < \delta_0$ allora $F(u) \geq F(u_0)$.

Dunque, per $u_0 \in X$ e relativamente a F, $\boxed{(GM) \Rightarrow (SLM) \Rightarrow (WLM) \Rightarrow (DLM) \Rightarrow (E)}$.

E' anche facile convincersi che tutte le quattro implicazioni sono NON invertibili.

NOTA Le due precedenti definizioni equivalgono a richiedere che: $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che, $\forall\, v \in V$, se $\|v\|_{(\dots)} < \delta_0$ allora $F(u_0 + v) \geq F(u_0)$.

Lo scopo che ci proponiamo è quello di trovare condizioni "intermedie" prima necessarie e poi sufficienti per avere prima (WLM) e poi (SLM). (Ad esempio, la condizione (E) (per u_0) risulta abbondantemente necessaria per entrambe (WLM) e (SLM) (per u_0).)

Entreranno in gioco gradualmente varie, nuove condizioni intermedie (per u_0):

$(L) \overset{\text{rinforzo}}{\leadsto} (L^+)$ ← LEGENDRE

$(J) \overset{\text{rinforzo}}{\leadsto} (J^+) \overset{\text{"rinforzo"}}{\leadsto} (J^{++})$ ← JACOBI

(R) ← "Riccati"

$(W) \overset{\text{rinforzo}}{\leadsto} (W^+)$ ← WEIERSTRASS

(F) ← "Field" ("Campo") (MONOTONO...)

Sostanzialmente, il perno fra esse si rivelerà essere un'elementare condizione di base (per u_0):

(+) La variazione seconda di F in u_0 lungo ogni $v \in V$ è ≥ 0, cioè

$$\boxed{Q(v) := \left.\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(u_0 + tv)\right|_{t=0} \geq 0 \quad \forall v \in V}$$

(volendo $Q = Q^{(u_0)}$) (già R-quad.!)

Pertanto, cominciamo col calcolare esplicitamente il funzionale $Q : V \to \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(u_0 + tv) = \int_a^b \{ f_s(x, u_0 + tv, \dot u_0 + t\dot v)\, v + f_p(x, u_0 + tv, \dot u_0 + t\dot v)\, \dot v \}\, dx \quad \Rightarrow \quad (f_{ps} = f_{sp})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(u_0+t\omega) = \int_a^b \left[f_{ss}(x,u_0+t\omega,\dot u_0+t\dot\omega)\,\omega^2 + 2 f_{sp}(x,u_0+t\omega,\dot u_0+t\dot\omega)\,\omega\dot\omega + f_{pp}(\ldots)\,\dot\omega^2\right]dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\forall \omega\in V,\ Q(\omega) = \int_a^b \left[A(x)\omega^2 + 2B(x)\omega\dot\omega + C(x)\dot\omega^2\right]dx \quad \text{dove, } \forall x\in[a,b],\\ A(x) := f_{ss}(x,u_0(x),\dot u_0(x)),\quad B(x):= f_{sp}(x,u_0(x),\dot u_0(x)),\quad C(x):= f_{pp}(x,u_0(x),\dot u_0(x))\end{gathered}}$$

("FUNZIONALE QUADRATICO")

Dunque la condizione (+) è $Q(\omega)\ge 0\ \forall \omega\in V$, e chiaramente (DLM)$\Rightarrow$(+): tale condizione (+) risulta quindi necessaria. Attenzione a non sottovalutarla, in quanto lei assieme ad altre condizioni implicheranno (WLM)!

OSS. Condizione decisamente sufficiente per garantire (+) sarebbe che, $\forall x\in[a,b]$, la forma quadratica $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(\mu,\nu)\mapsto A(x)\mu^2 + 2B(x)\mu\nu + C(x)\nu^2$, risulti semidefinita positiva (cioè $\ge 0\ \forall \mu,\nu\in\mathbb{R}$), com'è facile riconoscere.

Quindi <u>CONDIZIONE MEGA-SUFFICIENTE PER (+)</u> (per u_0): $\forall x\in[a,b]$, $\begin{cases} A(x)C(x)\ge B^2(x)\\ A(x)\ge 0\\ C(x)\ge 0\end{cases}$. $\begin{pmatrix} A(x) & B(x)\\ B(x) & C(x)\end{pmatrix}$

(Ad esempio, se $\begin{cases} AC\ge B^2\\ C>0\end{cases}$).

NOTA È (+) $\Leftrightarrow \min_V Q = 0$. Infatti, per ($\Rightarrow$), basta osservare che $0\in V$. Invece, per ($\Leftarrow$), se $\exists\, \omega_0\in V$ tale che $Q(\omega_0)<0$, allora $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $Q(n\omega_0) \overset{\text{(omogeneità)}}{=} nQ(\omega_0) \downarrow_{n\to\infty} -\infty$.

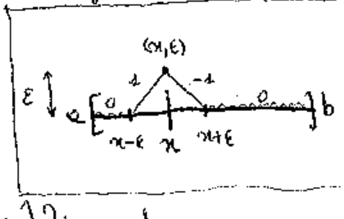
DEF. $(\mathcal{L})$ (per u_0) $\forall x\in[a,b]$, $C(x) = f_{pp}(x,u_0(x),\dot u_0(x)) \ge 0$.

$(\mathcal{L}^+)$ (per u_0) $\forall x\in[a,b]$, $C(x) = f_{pp}(x,u_0(x),\dot u_0(x)) > 0$.

Dunque, ovviamente, $(\mathcal{L}^+)\Rightarrow(\mathcal{L})$, e per compattezza di $[a,b]$ e continuità di C esiste $c_0>0$ tale che, $\forall x\in[a,b]$, $C(x)\ge c_0$ (sempre se vale $(\mathcal{L}^+)$).

Teorema (COND. NECESSARIA DI LEGENDRE) $\boxed{(+)\Rightarrow(\mathcal{L})}$.

Dim. Sappiamo che $Q(\omega)\ge 0\ \forall \omega\in C_c^\infty((a,b))$, e vogliamo ottenere che $C(x)\ge 0\ \forall x\in[a,b]$, cioè $C(x)\ge 0\ \forall x\in(a,b)$ (per continuità di C). Cominciamo osservando che allora $Q(\omega)\ge 0$ per ogni $\omega:[a,b]\to\mathbb{R}$ C^1 a tratti ($\boxed{EX}$) (continue e C^1 a tratti). Consideriamo quindi, $\forall x\in(a,b)$ e $\forall \varepsilon>0$ (da immaginarsi $\downarrow 0$), le ω_ε come in figura:



Dunque $\omega_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{\|\cdot\|_\infty} 0$. Abbiamo allora che $0 \overset{(+)}{\le} Q(\omega_\varepsilon) \overset{(\text{def.})}{=}$

$$= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left[A(x)\omega_\varepsilon^2 + 2B(x)\omega_\varepsilon\dot\omega_\varepsilon + C(x)\dot\omega_\varepsilon^2\right]dx = \int_{x-\varepsilon}^{x}\left[A(x)\omega_\varepsilon^2 + 2B(x)\omega_\varepsilon + C(x)\right]dx \ +$$

$+\int_x^{x+\varepsilon}[A(x)\bar\omega_\varepsilon - 2B(x)\bar\omega_\varepsilon + C(x)]dx$, ossia ... che medesime disuguaglianze ... per ε. Ma adesso basta applicare "la media integrale" e mandare $\varepsilon \downarrow 0$, ottenendo subito $2C(x) \geq 0$. $\square$]

$\boxed{EX}$ $(+) \Rightarrow Q(\omega) \geq 0$ per ogni $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e C^1 a tratti (finiti).

[Dim. Infatti, anzitutto, il funzionale Q ha senso per ogni ω continua avente $\dot\omega \in L^2([a,b])$ $(\Rightarrow \dot\omega \in L^1([a,b]))$, anche perché per A, B e C sono continue. Ora basta osservare che, $\forall\, \omega$ C^1 a tratti, $\exists\,(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty_c([a,b])$ tale che $\begin{cases}\omega_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \omega \\ \dot\omega_n \xrightarrow{L^2} \dot\omega\end{cases}$ (in questo caso su ogni tratto posso avere $\dot\omega_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \dot\omega$), e che allora $0 \overset{(+)}{\leq} Q(\omega_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} Q(\omega)$. $\square$]

$\boxed{DEF.}$ Chiamiamo "EQUAZIONE (diff.) DI JACOBI relativa a F ed a u_0 (o "per α")" l'equazione di Eulero in forma differenziale relativa a Q (nell'incognita $\omega_0 \in V$) (ω_0 più regolare!), ovvero

$$\boxed{[C(x)\dot\omega_0(x) + B(x)\omega_0(x)]' = B(x)\dot\omega_0(x) + A(x)\omega_0(x) \quad \forall x \in [a,b]}.$$

Osserviamo subito che almeno $\omega_0 \equiv 0$ risolve l'equazione, e che si tratta di un'eq. diff. ordinaria, generalmente del secondo ordine, e lineare, risolvibile in forma normale se e solo se $C(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$, cioè (L^+)!

$\boxed{Notazione.}$ "(JDE)" (Jacobi differential equation) "$[C(x)\dot w + B(x)w]' = B(x)\dot w + A(x)w$", $w(x) \in C^2([a,b])$.

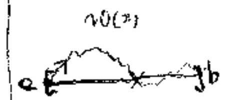
$\boxed{DEF.}$ Chiamiamo "SISTEMA (diff.) DI JACOBI relativo a F ed a u_0 (o "per α")" il sistema ai valori iniziali di Cauchy seguente, nel caso valga la (L^+) (per u_0):

(JDS) (Jacobi Differential system)
$$\begin{cases}[C(x)\dot w + B(x)w]' = B(x)\dot w + A(x)w \\ w(a) = 0 \\ \dot w(a) = 1\end{cases}.$$

Dunque, se u_0 verifica (L^+), allora $\exists!$ soluzione w_0 (C^2) $(\neq 0)$ del (JDS). (def. su tutto $[a,b]$!)

$\boxed{OSS.}$ Infatti, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists!$ soluzione w del sistema diff. $\begin{cases}(JDE) \text{ in } w \\ w(a) = 0 \\ \dot w(a) = \alpha\end{cases}$ (ed in particolare $\alpha = 0 \Leftrightarrow w \equiv 0$), e facilmente possiamo anche affermare che $w = \alpha w_0$ (linearità!). In particolare, $\forall \alpha \neq 0$, e $\forall x_0 \in [a,b]$, $w_0(x_0) = 0 \Leftrightarrow w(x_0) = 0$.

Mettiamoci nelle condizioni (L^+), e sia w_0 la soluzione del (JDS) $(\in C^2([a,b]))$.



$\boxed{\text{DEF.}}$ $(\mathcal{L}^+)$ Diciamo che $x_0 \in (a,b]$ è "un PUNTO CONIUGATO ad a relativamente al (JDS)" se $w_0(x_0)=0$ ($\Rightarrow \dot w_0(x_0)\neq 0$)

$\boxed{\text{DEF.}}$ $(\mathcal{L}^+)$

- (J) (per w_0) $\nexists$ punti coniugati ad a relativamente al (JDS) in (a,b).
- (J^+) (per w_0) $\nexists$ punti coniugati ad a relativamente al (JDS) in $(a,b]$.
- (J^{++}) (per w_0) $\exists\, w_+ \in C^2[a,b]$ soluzione della (JDE) tale che $w_+(x)>0\ \forall x\in[a,b]$. (Per cui, nel caso, $\exists\, c_+>0$ tale che $w_+(x)\geq c_+\ \forall x\in[a,b]$.)

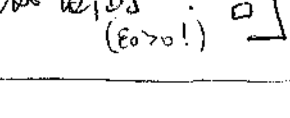
Dunque, (J) $\Leftrightarrow$ l'unico punto coniugato ad a rel. al (JDS) può essere solo $x_0=b$, $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x\in(a,b)$, $w_0(x)>0$, mentre $(J^+) \Leftrightarrow \nexists$ punti coniugati ad a rel. al (JDS), $\Leftrightarrow \forall x\in(a,b]$, $w_0(x)>0$ $\Leftrightarrow \forall x_0\in[a,b]$, $w_0(x_0)=0$ se e solo se $x_0=a$.

$\boxed{\text{Prop.}}$ $(\cancel{\mathcal{L}^+})$ $\boxed{(\mathcal{L}^+)+(J^+) \Rightarrow (J^{++})}$. (Dunque, sotto $(\mathcal{L}^+)$, $(J^+) \Rightarrow (J),\ (J^{++})$)

[Dim. In realtà, si tratta di un fatto elementare sui sistemi di Cauchy. Consideriamo infatti (valendo $(\mathcal{L}^+)$) il (JDS) e la sua soluzione w_0, che si annulla solo in a (valendo (J^+)): Dunque (per continuità) $\exists\, c\in(a,b)$ ($c \neq a$) tale che $\begin{cases} \dot w_0(x)\geq \frac{1}{2}\ \forall x\in[a,c] \\ w_0(x)\geq 2c_+>0\ \forall x\in[c,b] \end{cases}$ (cost. opportuna).

Affiancando a tale (JDS) il sistema diff $\begin{cases} (\text{JDE}) \text{ in } w_\varepsilon \\ w_\varepsilon(a)=\varepsilon \\ \dot w_\varepsilon(a)=1 \end{cases}$, $\varepsilon\in(0,1)$, per dipendenza continua dai dati iniziali (C^1) avremmo $\begin{cases} w_\varepsilon \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} w_0 \\ \dot w_\varepsilon \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \dot w_0 \end{cases}$ per $\varepsilon\downarrow 0$ (e $\forall \varepsilon$, $\exists ! w_\varepsilon$) e quindi seguirebbe subito che $\exists\, \varepsilon_0\in(0,1)$ tale che, $\forall \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, risulta $\begin{cases} \dot w_\varepsilon(x)\geq 0\ \forall x\in[a,c] \\ w_\varepsilon(x)\geq c_+>0\ \forall x\in[c,b] \end{cases}$. Allora $w_+ := w_{\varepsilon_0}\in C^2[a,b]$, risolve la (JDE), ed è $w_+>0$ su tutto $[a,b]$ ($\varepsilon_0>0$!) $\square$]

$\boxed{\text{Teorema}}$ (COND. NECESSARIA DI JACOBI) $\boxed{(+)+(\mathcal{L}^+) \Rightarrow (J)}$.



[Dim. Supponiamo per assurdo che $\exists\, x_0\in(a,b)$ tale che $w_0(x_0)=0$. Certo però è che (allora) $\dot w_0(x_0)\neq 0$, per cui la funzione continua $w_{00}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $w_{00}(x) \doteq \begin{cases} w(x) & \text{se } x\in[a,x_0] \\ 0 & \text{se } x\in[x_0,b] \end{cases}$ $\forall x\in[a,b]$, NON è derivabile nel punto $x=x_0$, dunque NON è di classe $C^2[a,b]$ (però è C^1 a tratti!). Può essere mostrato che, per com'è fatta w_0, risulta $\boxed{Q(w_{00})=0}$; ma, per ipotesi, $Q(v)\geq 0\ \forall v\ C^1$ a tratti: seguirebbe quindi che w_{00} è (Bm) per Q, e che come tale deve soddisfare se (ODE) "quasi su tutto $[a,b]$", e allora dovrebbe invece essere $C^\infty([a,b])$, che è assurdo.

Pertanto, calcoliamo $Q(w_0) \overset{(\text{def.})}{=} \int_a^{x_0} [A(x) w_0^2 + 2B(x) w_0 \dot{w}_0 + C(x) \dot{w}_0^2]\,dx$: osservato che $[C(x)\dot{w}_0 + B(x) w_0]' \overset{(\text{ODE})}{=} B(x)\dot{w}_0 + A(x) w_0 \underset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} [C(x)\dot{w}_0 + B(x) w_0]' w_0 = B(x)\dot{w}_0 w_0 + A(x) w_0^2$, si ha appunto $\int_a^{x_0}[B(x)\dot{w}_0 w_0 + A(x) w_0^2]\,dx = \int_a^{x_0}[C(x)\dot{w}_0 + B(x)w_0]' w_0\,dx$

$$\overset{(\text{int. parti})}{=} \underbrace{\cancel{\left[(C(x)\dot{w}_0 + B(x) w_0) w_0\right]_{x=a}^{x=x_0}}}_{\substack{=0,\\ (\text{poiché } w_0(a)=w_0(x_0)=0\,!)}} - \int_a^{x_0}(C(x)\dot{w}_0 + B(x) w_0)\dot{w}_0\,dx \qquad \square \quad]$$

Dunque, per ora, $(DLM) \Rightarrow \begin{cases} (E) \\ (+) \\ (L) \\ (L^+)\Rightarrow(J) \end{cases}$, in questo $(+) \Rightarrow \begin{cases} (L) \\ (L^+)\Rightarrow(J) \end{cases}$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (COND. SUFFICIENTE DI LEGENDRE E JACOBI) $\boxed{(L^+)+(J^+) \Rightarrow (+)}$.

[Dim. $\underset{(L^+)}{\boxed{\text{DEF.}}}$ (R) $\exists\, z(x) \in C^1([a,b])$ tale che, $\forall x\in[a,b]$, $\dot{z} = \frac{[z+B(x)]^2}{C(x)} - A(x)$;

Questo in generale NON è affatto scontato (per fenomeni di "blow-up")!)

Mostriamo allora che $(L^+)+(J^+) \overset{(\text{Prop.})}{\Rightarrow} \boxed{(J^{++}) \Rightarrow (R) \Rightarrow (+)}$.

$\boxed{(J^{++})\Rightarrow(R)}$ Consideriamo, $\forall x\in[a,b]$, $z(x) := -\frac{C(x)\dot{w}_+(x) + B(x) w_+(x)}{w_+(x)}$, ossia

$z(x) = -C(x)\frac{\dot{w}_+(x)}{w_+(x)} - B(x)$ (per cui $z(x)+B(x) = -C(x)\frac{\dot{w}_+(x)}{w_+(x)}$) : allora

$z\in C^1([a,b])$ e che

$$\dot{z}(x) = -\underbrace{\frac{[C(x)\dot{w}_+ + B(x)w_+]'}{w_+}}_{\overset{(\text{ODE})}{=} -\frac{B(x)\dot{w}_+ + A(x) w_+}{w_+} = -B(x)\frac{\dot{w}_+}{w_+} - A(x)} + \underbrace{\frac{C(x)\dot{w}_+ + B(x) w_+}{w_+^2}\dot{w}_+}_{= C(x)\frac{\dot{w}_+^2}{w_+^2} + B(x)\frac{\dot{w}_+}{w_+}} =$$

$$= C(x)\left(\frac{\dot{w}_+}{w_+}\right)^2 - A(x). \quad ✓$$

$\boxed{(R)\Rightarrow(+)}$ Grazie al fatto che, $\forall v\in V$, $v(a)=v(b)=0$, abbiamo di sicuro che $\forall v\in V$ $\boxed{\hat{Q}(v) := Q(v) + \int_a^b [z(x)v^2(x)]'\,dx}$ è $\hat{Q}(v) = Q(v)$. Ma

$[zv^2]' = \dot{z} v^2 + 2 z v\dot{v} \Rightarrow \hat{Q}(v) = \int_a^b\{[A(x)+\dot{z}(x)]v^2 + 2[B(x)+z(x)]v\dot{v} + C(x)\dot{v}^2\}\,dx$

ed ora, $\forall x\in[a,b]$, $\begin{cases} [A(x)+\dot{z}(x)]C(x) \geq [B(x)+z(x)]^2 \\ C(x)>0 \end{cases}$ ← (vale esattamente l'= ! (che fra l'altro era probabilmente la sola nostra possibile!!)

implica per "cond. nec. e sufficiente" che $\hat{Q}(\varpi)\ge 0$ $\forall \varpi\in V$, cioè $Q \ge 0$. □]

NOTA Il nome "Riccati" per la condizione (R) trova "giustificazione" ragionando nelle (J^{++}), e nel farlo si dovrebbe intuire come la $z(x)$ non sia davvero così "miracolosa".

[La (ODE) con (L^+) è della forma $\ddot w = \alpha(x)\dot w + \beta(x) w$, ed imponendo $w = e^{\varpi}$ (cioè $w>0$)
($\Rightarrow \dot w = e^{\varpi}\dot\varpi \Rightarrow \ddot w = e^{\varpi}(\dot\varpi)^2 + e^{\varpi}\ddot\varpi$) ottengo $\ddot\varpi = -\dot\varpi^2 + \alpha(x)\dot\varpi + \beta(x)$, ossia la Riccati $\dot\eta = -\eta^2+\alpha(x)\eta+\beta(x)$ dove $\eta=\dot\varpi$. ✓ Se avessimo $w>0$, allora $\varpi = \log(w)$ e quindi $\eta = \dot\varpi = \frac{\dot w}{w}$!]

Prop. (Corollario) Precisando il precedente teorema, $(L^+)+(J^+) \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0\in(0,1)$ ed $\exists\, M_0\in(0,\infty)$ tale che, $\forall\varpi\in V$,

$$\boxed{\varepsilon_0\int_a^b \dot\varpi^2(x)\,dx \le Q(\varpi)\le M_0\int_a^b\dot\varpi^2(x)\,dx}$$

(per cui $Q(\varpi)\ge0$ $\forall\varpi\in V$, e $Q(\varpi)=0 \Leftrightarrow \varpi=0$)
(quindi, in effetti, meglio il simbolo (+) che il (≥))
vale sempre! (e col valore assoluto)

Inoltre la costante M_0 dipende solo dalle norme $\|\cdot\|_\infty$ di $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$.

[Dim. $\boxed{\forall\varpi\in V,\ \varepsilon_0\|\dot\varpi\|^2_{L^2} \le Q(\varpi)}$ (più delicato). (Ricordiamo subito un altro elementare risultato di base sulle (ODE): se $\begin{cases}\ddot w_\varepsilon = \alpha_\varepsilon(x)\dot w_\varepsilon + \beta_\varepsilon(x) w_\varepsilon & \text{in } \varepsilon\in(0,1) \\ \alpha_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty}\alpha_0,\ \beta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty}\beta_0\end{cases}$ (w_ε la soluzione della (ODE) coi coeff α_ε e β_ε), allora vale

$w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty} w_0$ dove $w_0(x)$ è tale che $\ddot w_0 = \alpha_0(x)\dot w_0+\beta(x)w_0$.) $\forall\varepsilon>0$ e $\forall\varpi\in V$, definiamo $Q_\varepsilon(\varpi) \doteq Q(\varpi) - \varepsilon\|\dot\varpi\|^2_{L^2}$ e mostreremo (per ε abb. piccoli) le relative (L^+) e (J^{++}). (per poi usare il prec. teorema)
Ma $Q_\varepsilon(\varpi)=\int_a^b\{A(x)\varpi^2+2B(x)\varpi\dot\varpi+[C(x)-\varepsilon]\dot\varpi^2\}dx$, quindi anzitutto restringendoci a $\varepsilon\in(0,c_0)$ otteniamo $C(x)-\varepsilon>0$ $\forall x\in[a,b]$. ✓ Adesso, visto che $C(x)-\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty} C(x)$, vale che la (ODE) per Q_ε ha coefficienti che tendono uniformemente a quelli della (ODE) per Q, quindi effettuate le relative soluzioni w_ε con $w_\varepsilon(a)=w_+(a)$ (>0) e $\dot w_\varepsilon(a)=\dot w_+(a)$ sarà tale che $w_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty} w_+$: per $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0<c_0$ abb. piccolo, è $w_\varepsilon>0$ su tutto $[a,b]$. ✓

$\boxed{\forall\varpi\in V,\ Q(\varpi)\le M_0\|\dot\varpi\|^2_{L^2}}$ (più semplice!). Si tratta di immediate stime dirette sui tre addendi integrali che formano Q. Infatti $\int_a^b C(x)\dot\varpi^2dx \le \|C\|_\infty\|\dot\varpi\|^2_{L^2}$ è ovvia; poi da $\varpi(x)-\cancel{\varpi(a)}^{=0} = \int_a^x\dot\varpi(t)\,dt$ ottengo per Hölder (o C.-S.) $|\varpi(x)|\le\|\dot\varpi\|_{L^2}\sqrt{b-a}$, da cui $\varpi^2(x)\le(b-a)\|\dot\varpi\|^2_{L^2}$ e quindi $\int_a^b A(x)\varpi^2dx \le \|A\|_\infty(b-a)^2\|\dot\varpi\|^2_{L^2}$. Infine, $\int_a^b 2B(x)\varpi\dot\varpi\,dx \underset{(C.-S.)}{\le} 2\|B\|_\infty\|\dot\varpi\|_{L^2}\|\varpi\|_{L^2} \le 2\|B\|_\infty(b-a)\|\dot\varpi\|^2_{L^2}$. ✓ □]

TEOREMA (COND. SUFFICIENTE DI EULERO, LEGENDRE E JACOBI)

$$\boxed{(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (WLM)} .$$

(NOTA che $(+)$ NON compare in modo esplicito nell'enunciato!)

[Dim. Sia $u_0 \in X$ che verifica (E), (L^+) e (J^+), e mostriamo che $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che, $\forall \omega \in V$, se $\|\omega\|_{C^1(a,b)} < \delta_0$ allora $F(u_0+\omega) \geq F(u_0)$. Ma, se $\varphi_\omega(t) \doteq F(u_0+t\omega)$ per ogni $\omega \in V$ e $t \in \mathbb{R}$, allora φ_ω è di classe $C^2(\mathbb{R})$ e quindi possiamo sviluppare in $t=0$ con Taylor con resto di Lagrange per ogni fissato $\omega \in V$: otteniamo che, $\forall \omega \in V$, $\exists\, t_0 \doteq t_0^{(\omega)} \in (0,1)$ tale per cui $F(u_0+\omega) = \varphi_\omega(1) \left(= \underbrace{\varphi_\omega(0)}_{=F(u_0)} + \underbrace{\varphi'_\omega(0)}_{=0 \text{ per } (E)!!} + \frac{1}{2}\varphi''_\omega(t_0)\right) =$

$= F(u_0) + \frac{1}{2}\varphi''_\omega(t_0)$ perché u_0 verifica (E). Dimostriamo in seguito che $\varphi''_\omega(t_0) \geq 0$ per $\omega \in V$ in $\|\cdot\|_{C^1(a,b)}$ sufficientemente piccola. Ma infatti, come già calcolato, è

$\varphi''_\omega(t_0) = \int_a^b [A^{t_0}(x)\omega^2 + 2B^{t_0}(x)\omega\dot\omega + C^{t_0}(x)\dot\omega^2]\,dx$, dove $A^{t_0}(x) \doteq f_{ss}(x, u_0(x)+t_0\omega(x), \dot u_0(x)+t_0\dot\omega(x))$,

$B^{t_0}(x) \doteq f_{sp}(x, u_0(x)+t_0\omega(x), \dot u_0(x)+t_0\dot\omega(x))$ e $C^{t_0}(x) \doteq f_{pp}(x, u_0(x)+t_0\omega(x), \dot u_0(x)+t_0\dot\omega(x))$, e allora ponendo $Q^{t_0}(\omega) \doteq \varphi''_\omega(t_0)$ e scrivendo $\boxed{Q^{t_0}(\omega) = Q(\omega) + \tilde{Q}^{t_0}(\omega)}$, dove naturalmente $\tilde{Q}^{t_0}(\omega) := Q^{t_0}(\omega) - Q(\omega)$, osserviamo che: ⊙ $(L^+)+(J^+) \overset{(\text{Prop})}{\Rightarrow} \exists\, \varepsilon_0 \in (0,1)$ tale che, $\forall \omega \in V$, $Q(\omega) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot\omega^2\,dx$; ⊙ più banalmente, d'altra parte, $\exists\, M_0 > 0$ tale che, $\forall \omega \in V$, $|\tilde{Q}^{t_0}(\omega)| \leq M_0 \int_a^b \dot\omega^2\,dx$ dove M_0 dipende solo dalle "$\|\cdot\|_\infty$ dei coefficienti" di $\tilde{Q}^{t_0}(\omega)$, cioè solo dalle $\|\cdot\|_\infty$ di $A^{t_0}(x) - A(x)$, $B^{t_0}(x) - B(x)$ e $C^{t_0}(x) - C(x)$. Guardandoli un attimo, è immediato ricavare che per $\|\omega\|_{C^1(a,b)}$ (con $\|\cdot\|_\infty$ NON funziona!) sufficientemente piccola tali funzioni hanno $\|\cdot\|_\infty$ arbitrariamente piccola, dunque M_0 arbitrariamente piccola (da cui, $M_0 \leq \varepsilon_0$!): in conclusione, $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che, $\forall \omega \in V$, se $\|\omega\|_{C^1(a,b)} < \delta_0$ allora $|\tilde{Q}^{t_0}(\omega)| \leq \varepsilon_0 \int_a^b \dot\omega^2\,dx$, da cui chiaramente $Q^{t_0}(\omega) \geq 0$ (per le stesse ω). □

Cerchiamo di tirare rapidamente le somme, giacché le verifiche (E) e (L) "non sono un problema", e spesso viene anche (L^+) senza problemi (che influiscono), tutto (che appaiono) (più o meno) sta nello studiare i punti coniugati o relativamente al (JDS): infatti, come visto, nel caso valga (L^+) deve valere anche (J); se abbiamo solo (J^+), allora abbiamo un (WLM). Per quest'ultima implicazione è bastato "sviluppare" le condizioni di Jacobi, perché tanto per def stessa di (WLM) potevamo davvero appoggiarci alla condizione $(+)$! Adesso, invece, per lo (SLM) dobbiamo fare "acrobazie" decisamente diverse.
(Non possiamo sperare di appoggiarci su Q, su $(+)$...!)

DEF. Sia $f:[a,b]_x\times\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_p\to\mathbb{R}$ continua, e "di classe $C^1(\mathbb{R}_p)$ nella p" (o meglio, anche f_{pp} è continua). Allora "LA FUNZIONE ECCESSO DI WEIERSTRASS", o solo "ECCESSO DI W.", "relativa a f" è la funzione $E:=E^{(f)}:[a,b]_x\times\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_p\times\mathbb{R}_q\longrightarrow\mathbb{R}$ definita ponendo

$$\boxed{E(x,s,p,q):=f(x,s,q)-f(x,s,p)-(q-p)f_p(x,s,p)}\quad \forall x\in[a,b] \text{ e } \forall s,p,q\in\mathbb{R}.$$

($\Rightarrow E$ ha la regolarità di f_p)

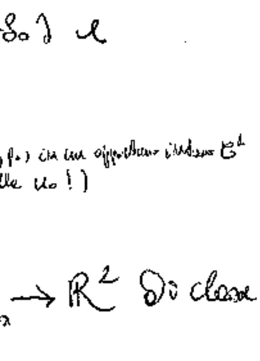
NOTA È $E(x,s,p,q)\ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ e $\forall s,p,q\in\mathbb{R}$ se, e solo se, f è convessa nella p. In particolare capiamo che E misura effettivamente l'eccesso di f di essere o non essere convessa.

DEF.
(W) (per u_0) $\forall x\in[a,b]$ e $\forall q\in\mathbb{R}$, $E(x,u_0(x),u_0'(x),q)\ge 0$.

(W+) (per u_0) $\exists\delta_0>0$ tale che, $\forall x\in[a,b]$ e $\forall q\in\mathbb{R}$, $\forall s_0\in[u_0(x)-\delta_0,u_0(x)+\delta_0]$ e $\forall p_0\in[u_0'(x)-\delta_0,u_0'(x)+\delta_0]$, $E(x,s_0,p_0,q)\ge 0$ (cioè (s_0,p_0) in un opportuno intorno C^1 della u_0!)

Dunque chiaramente (W+) $\Rightarrow$ (W).

DEF. (F) (per u_0) $\exists\varepsilon_0\in(0,1)$ tale che esiste un campo "$u(\varepsilon,x)$" $:[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]_\varepsilon\times[a,b]_x\to\mathbb{R}^2$ di classe almeno C^2 ovunque che gode delle tre seguenti proprietà:



(a) $\forall x\in[a,b]$, $u(0,x)=u_0(x)$;
(b) $\forall\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$, $x\mapsto u(\varepsilon,x)$ verifica (E);
(c) $\forall x\in[a,b]$, $\varepsilon\mapsto u(\varepsilon,x)$ è strettamente crescente (o monotona).

A parole, u_0 verifica (F) se può essere "immersa" in un campo strett. monotono e regolare ("CAMPO DI WEIERSTRASS") di soluzioni di Eulero (per F) (cioè di estremali per F). In particolare, (F) $\Rightarrow$ (E).
(L'idea sarebbe che, se u_0 verifica (F), allora sostanzialmente la si può calibrare in un suo intorno in C^0!)

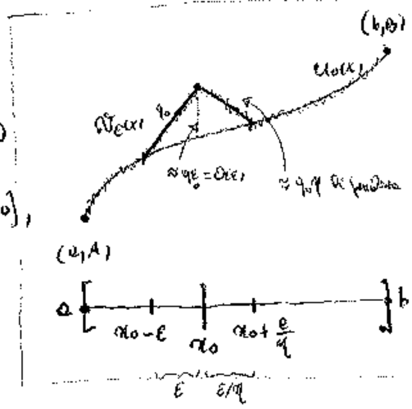
OSS. NOTAZIONI (per il seguito). Supponiamo che u_0 verifichi (F). Segue allora dalla def. che, $\forall(x_0,s_0)\in u([-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[a,b])$, $\exists!\,\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ tale che $u(\varepsilon,x_0)=s_0$ e quindi a (x_0,s_0) resta univocamente associato il numero $\boxed{u_x(\varepsilon,x_0)=:p(x_0,s_0)}$ (= effettivamente, il valore che la derivata (in x) dell'unico elemento del campo passante per (x_0,s_0) assume nel punto x_0 stesso). Quindi, $\forall(x,s)\in u([-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[a,b])$, $p(x,s)=u_x(\varepsilon,x)$ o anche $\boxed{u_x(\varepsilon,x)=p(x,u(\varepsilon,x))}$ ed in particolare p è di classe C^1 "ovunque". In particolare abbiamo che $u_{xx}(\varepsilon,x)=p_x(x,u(\varepsilon,x))+p_s(x,u(\varepsilon,x))\,u_x(\varepsilon,x)$, dove naturalmente $u_x(\varepsilon,x)=p(x,u(\varepsilon,x))$: brevemente, "$\boxed{u_{xx}=p_x+p\,p_s}$". Grazie a questo bastano ad esempio risolvere usando (sopra) la $p(\cdot)$ che Eulero soddisfatta da ciascuna delle $x \mapsto u(\varepsilon,x)$: infatti: $(\forall \varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0])$ $\frac{\partial}{\partial x} f_p(x, u(\varepsilon,x), \underbrace{u_x(\varepsilon,x)}_{p(\cdot)}) \overset{(E)}{=} f_s(x,u(\varepsilon,x),\underbrace{u_x(\varepsilon,x)}_{p(\cdot)})$ $(\forall x\in[a,b])$ Dunque

$$f_{xp}(-) + f_{sp}(-)\underbrace{u_x(\varepsilon,x)}_{p(\cdot)} + f_{pp}(-)\underbrace{u_{xx}(\varepsilon,x)}_{p_x(\cdot)+p(\cdot)p_s(\cdot)} = f_s(-)$$, ovvero usando la $p(\cdot)$

$$f_{xp}(x,s,p(x,s)) + f_{sp}(x,s,p(x,s))\,p(x,s) + f_{pp}(x,s,p(x,s))\big[p_x(x,s)+p(x,s)p_s(x,s)\big] =$$
$$= f_s(x,s,p(x,s))$$ se $s=u(\varepsilon,x)$ (negli argomenti). ✓

Teorema (COND. NECESSARIA DI WEIERSTRASS) $\boxed{(SLM) \Rightarrow (W)}$.

[Dim. Sia $u_0\in X$ (SLM) per F, e sia $q_0\in\mathbb{R}$: allora la tesi è che, $\forall x\in[a,b]$,
$E(x,u_0(x),\dot u_0(x),q_0) = f(x,u_0(x),q_0) - f(x,u_0(x),\dot u_0(x)) - (q_0-\dot u_0(x))\,f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))$
sia ≥ 0. Ma $x\mapsto E(x,u_0(x),\dot u_0(x),q_0)$ è continua, per cui basta $x\in(a,b)$.
Sia dunque $x_0\in(a,b)$, e siano $\varepsilon,\eta\in(0,1)$ piccoli abbastanza affinché $a<x_0-\varepsilon$ e $x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}<b$ $(\varepsilon<\eta)$. Consideriamo quindi la funzione $v_\varepsilon := v_{\varepsilon,\eta}$ su $[a,b]$ ottenuta da $u_0(x)$ come segue: $v_\varepsilon(x)=u_0(x)$ $\forall x\in[a,x_0-\varepsilon]\cup[x_0+\frac{\varepsilon}{\eta},b]$, poi $v_\varepsilon(x)$ è retta affine di pendenza q_0 su $[x_0-\varepsilon,x_0]$, mentre su $[x_0,x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}]$ si ricongiunge sempre in modo lineare affine.



Dunque $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\|\cdot\|_\infty} u_0$, e allora per ε abbastanza piccolo è (per ipotesi di (SLM)) $F(v_\varepsilon)\geq F(u_0)$, ossia $0\leq F(v_\varepsilon)-F(u_0) = \int_a^b f(x,v_\varepsilon,\dot v_\varepsilon)dx - \int_a^b f(x,u_0,\dot u_0)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x,v_\varepsilon,q_0)dx - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x,u_0,\dot u_0)dx + \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon/\eta} f(x,v_\varepsilon,\dot v_\varepsilon)dx - \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon/\eta} f(x,u_0,\dot u_0)dx$: di conseguenza (dividendo per ε), grazie alla media integrale, esistono $x_\varepsilon,y_\varepsilon\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ e $z_\varepsilon,w_\varepsilon\in(x_0,x_0+\frac{\varepsilon}{\eta})$ tali che $0\leq f(x_\varepsilon,v_\varepsilon(x_\varepsilon),q_0) - f(y_\varepsilon,u_0(y_\varepsilon),\dot u_0(y_\varepsilon)) + \frac{1}{\eta}\big[f(z_\varepsilon,v_\varepsilon(z_\varepsilon),\dot v_\varepsilon(z_\varepsilon)) - f(w_\varepsilon,u_0(w_\varepsilon),\dot u_0(w_\varepsilon))\big]$. Adesso, visto che $v_\varepsilon(x_0-\varepsilon) = u_0(x_0-\varepsilon)$ e $v_\varepsilon(x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}) = u_0(x_0+\frac{\varepsilon}{\eta})$, è $\dot v_\varepsilon(z_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to0}{\approx} \dfrac{v_\varepsilon(x_0+\frac{\varepsilon}{\eta})-v_\varepsilon(x_0)}{\frac{\varepsilon}{\eta}} \underset{\varepsilon\to0}{\approx}$ $(v_\varepsilon(x_0) \underset{\varepsilon\to0}{\approx} v_\varepsilon(x_0-\varepsilon)+q_0\varepsilon)$

$\underset{\varepsilon\to0}{\approx} \dfrac{u_0(x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}) - u_0(x_0-\varepsilon) - q_0\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\eta}}$, ed usando che $\begin{cases} u_0(x_0+\frac{\varepsilon}{\eta}) = u_0(x_0)+\frac{\varepsilon}{\eta}\dot u_0(x_0)+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon) \\ u_0(x_0-\varepsilon) = u_0(x_0)-\varepsilon\,\dot u_0(x_0)+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon)\end{cases}$

Otteniamo $\dot{w}_\varepsilon(\bar{x}_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\approx} \dfrac{\varepsilon \dot{u}_0(x_0)\left(1+\frac{1}{\eta}\right) - q_0\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{\eta}} = \dot{u}_0(x_0)(1+\eta) - \eta q_0$: pertanto, mandando $\varepsilon \to 0$, ricordando $0 \le f(x_0, u_0(x_0), q_0) - f(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0)) +$

$$+ \frac{f(x_0, u_0(x_0), \underbrace{\boxed{\dot{u}_0(x_0)(1+\eta) - \eta q_0}}_{\dot{u}_0(x_0)+\eta(\dot{u}_0(x_0)-q_0)}) - f(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))}{\eta\,(\dot{u}_0(x_0)-q_0)}\,(\dot{u}_0(x_0)-q_0)$$

, e se ora mandiamo $\eta \to 0$ otteniamo esattamente $E(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0), q_0) \ge 0$. □]

$\boxed{\text{Teorema}}$ (IMMERSIONE) $\boxed{(E) + (J^{++}) \Rightarrow (F)}$.

[Dim. $\forall \varepsilon \in (-1,1)$, consideriamo la soluzione di Euler (per F) "$u(\varepsilon,\cdot)$" (in $[a,b]$) avente dati iniziali

$$\begin{cases} u(\varepsilon,a) = u_0(a) + \varepsilon w_+(a) \\ u_x(\varepsilon,a) = \dot{u}_0(a) + \varepsilon \dot{w}_+(a) \end{cases}$$

, per cui di sicuro $u(0,x) \equiv u_0(x)$ (per (E)). Inoltre, per dipendenza C^1 dei dati iniziali, abbiamo $u(\varepsilon,x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1[a,b]} u_0(x)$: per di restringere gli ε, possiamo immaginare le $u(\varepsilon,x)$ tutte vicine in $C^1[a,b]$ alla $u_0(x)$. Vogliamo ora verificare che $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ piccolo abbastanza affinché, $\forall (\varepsilon,x) \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times[a,b]$, sia $u_\varepsilon(\varepsilon,x) > 0$.

Per questo basta ottenere $\boxed{u_\varepsilon(0,x) > 0\ \ \forall x \in [a,b]}$: dimostriamo per l'esattezza che, $\forall x \in [a,b]$, $u_\varepsilon(0,x) = w_+(x)$. Ora infatti, per costruzione con Euler, abbiamo (in $[a,b]$) ($\forall \varepsilon$)

$$\left[f_p(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) + f_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))\right]' = f_s(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) + f_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

, ed ora invocando Lagrange troviamo che, $\forall x \in [a,b]$,

•) $\exists\, \xi_x^{(1)}$ fra $u(\varepsilon,x)$ e $u_0(x)$ tale che $f_p(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) = f_p(x, u_0(x), u_x(\varepsilon,x)) + (u(\varepsilon,x) - u_0(x))\, f_{sp}(x, \xi_x^{(1)}, u_x(\varepsilon,x))$;

•) $\exists\, \xi_x^{(2)}$ fra $u_x(\varepsilon,x)$ e $\dot{u}_0(x)$ tale che $f_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = -f_p(x, u_0(x), u_x(\varepsilon,x)) + (u_x(\varepsilon,x) - \dot{u}_0(x))\, f_{pp}(x, u_0(x), \xi_x^{(2)})$, $\Rightarrow f_p(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) + f_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) =$

$= (u(\varepsilon,x) - u_0(x))\, f_{sp}(x, \xi_x^{(1)}, u_x(\varepsilon,x)) + (u_x(\varepsilon,x) - \dot{u}_0(x))\, f_{pp}(x, u_0(x), \xi_x^{(2)})$. Allo stesso modo, $\forall x \in [a,b]$, troviamo $\xi_x^{(3)}$ fra $u(\varepsilon,x)$ e $u_0(x)$ e $\xi_x^{(4)}$ fra $u_x(\varepsilon,x)$ e $\dot{u}_0(x)$ tali che $f_s(x, u(\varepsilon,x), u_x(\varepsilon,x)) + f_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) = (u(\varepsilon,x) - u_0(x))\, f_{ss}(x, \xi_x^{(3)}, u_x(\varepsilon,x)) +$

$+ (u_x(\varepsilon,x) - \dot{u}_0(x))\, f_{sp}(x, u_0(x), \xi_x^{(4)})$. Per cui, se consideriamo $w(\varepsilon,x) := \dfrac{u(\varepsilon,x) - u_0(x)}{\varepsilon}$ (per $\varepsilon \ne 0$)

allora $\dot w(\varepsilon,x) = w_x(\varepsilon,x) = \frac{u_x(\varepsilon,x)-\dot u_0(x)}{\varepsilon}$ e, effettuato, dividendo per ε,
($\Rightarrow w(\varepsilon,a)=w_+(a)$ e $\dot w(\varepsilon,a)=\dot w_+(a)$!)

$$\left[f_{pp}(x,u_0(x),\xi_x^{(1)})\,\dot w(\varepsilon,x) + f_{ps}(x,\xi_x^{(2)},u_x(\varepsilon,x))\,w(\varepsilon,x)\right] = f_{sp}(x,\xi_x^{(2)},u_0(x))\,\dot w(\varepsilon,x) +$$

$$+ f_{ss}(x,\xi_x^{(3)},u_x(\varepsilon,x))\,w(\varepsilon,x)$$

. Ma ora chiaramente (dipendono da ε!) i coefficienti $f_{pp}(-)$, $f_{sp}(-)$ e $f_{ss}(-)$ di tale eq. diff in $w(\varepsilon,\cdot)$ tendono uniformemente per $\varepsilon\to 0$ a rispettivamente $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$, ($\Rightarrow$) $w(\varepsilon,\cdot)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\|\cdot\|_\infty} w_+(\cdot)$. Ma, d'altra parte, $w(\varepsilon,x) = \frac{u(\varepsilon,x)-u(0,x)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u_\varepsilon(0,x)$ $\forall x\in[a,b]$, da cui la tesi. □]

TEOREMA (COND. SUFFICIENTE DI WEIERSTRASS)

$$\boxed{(E) + (L^+) + (J^+) + (W^+) \Rightarrow (SLM)}.$$

[Dim. Sappiamo che $(E)+(L^+)+(J^+) \Rightarrow (E)+(J^{++})$, $\overset{(\text{imm.})}{\Rightarrow}$ (F) : mostriamo che $\boxed{(F)+(W^+) \Rightarrow (SLM)}$. Ma infatti vale la seguente proposizione (che unita a (W^+) dà subito la (SLM)!)

Se u_0 verifica (F), allora $\forall u\in X$ che sia vicina abbastanza in norma $\|\cdot\|_\infty$ alla u_0 affinché permanga $(x,u(x))\in\mathcal{U}([-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[a,b])$ $\forall x\in[a,b]$ risulta

$$\boxed{F(u)-F(u_0) = \int_a^b E(x,u(x),p(x,u(x)),\dot u(x))\,dx}.$$

Dimostriamola addirittura in due modi: alla HILBERT, e alla WEIERSTRASS in un sottocaso.

ALLA HILBERT (via calibrazione). Visto che $E(x,u(x),p(x,u(x)),\dot u(x)) \underset{(x\in[a,b])}{=} f(x,u(x),\dot u(x)) - f(x,u(x),p(x,u(x))) - (\dot u(x)-p(x,u(x)))f_p(x,u(x),p(x,u(x)))$, consideriamo $\forall (x,s)\in \mathcal{U}([-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\times[a,b])$ e $\forall p\in\mathbb{R}$ la funzione $\hat f(x,s,p) \equiv f(x,s,p(x,s)) + (p-p(x,s))f_p(x,s,p(x,s))$: in questo modo, infatti, $E(x,u(x),p(x,u(x)),\dot u(x)) = f(x,u(x),\dot u(x)) - \hat f(x,u(x),\dot u(x))$ $\forall x\in[a,b]$, ed inoltre $\hat f(x,u_0(x),\dot u_0(x)) = f(x,u_0(x),\dot u_0(x))$ $\forall x\in[a,b]$ (giacché $p(x,u_0(x))=\dot u_0(x)$). Pertanto abbiamo la tesi se riusciamo che, per gli stessi x,s e p, sia $\hat f(x,s,p) = J(x,s) + pK(x,s)$ per opportune J e K di classe C^1 con $J_s = K_x$, come abbiamo già avuto modo di capire. Ma infatti possiamo prendere $J(x,s) := f(x,s,p(x,s)) - p(x,s)f_p(x,s,p(x,s))$ e $K(x,s) := f_p(x,s,p(x,s))$, ed avere che quindi $J_s(x,s) = f_s(x,s,p(x,s)) +$

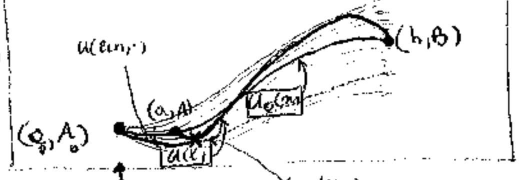
$+ f_p(x,s,p(x,s))\, p_s(x,s) - p_s(x,s)\, f_p(x,s,p(x,s)) - p(x,s)\, f_{sp}(x,s,p(x,s)) -$

$- p(x,s)\, f_{pp}(x,s,p(x,s))\, p_s(x,s)$, e che $K_x(x,s) = f_{xp}(x,s,p(x,s)) + f_{pp}(x,s,p(x,s))\cdot$

$\cdot\, p_x(x,s)$: allora $J_s(x,s) = K_x(x,s)$ se e solo se (ricordiamoci) $f_{xp}(x,s,p(x,s)) + p(x,s)\, f_{sp}(-) +$

$+ f_{pp}(-)\left[p_x(x,s) + p(x,s)\, p_s(x,s)\right] = f_s(-)$, che è esattamente la Eulero per quell'unica $u(\varepsilon,\cdot)$ tale che $u(\varepsilon,x) = s$ (che esiste!). □

$\boxed{\text{ALLA WEIERSTRASS}}$ "PER UN CAMPO DEL TIPO



(stesso "punto base") "

$(a_0 < a)$

Per ogni $x \in [a,b]$ (ma $s = u(x)$...), consideriamo la funzione $[a_0,b] \to \mathbb{R}$ (continua) data da $\begin{cases} u(t) & \text{se } t \in [x,b] \\ u(\varepsilon(x),t) & \text{se } t \in [a_0,x] \end{cases}$

dove "$u(\varepsilon(x),\cdot)$" è quella funzione del campo tale che $u(\varepsilon(x),x) = u(x)$ (su $[a_0,b]$). (In particolare, per $x=a$ sarebbe $\begin{cases} u_0(t) & \text{se } t \in [a_0,a] \\ u(t) & \text{se } t \in [a,b] \end{cases}$, e per $x = b$ sarebbe proprio $u_0(t)$.) Consideriamo quindi

$$\mathcal{A}(x) \doteq \int_{a_0}^{x} f(t, u(\varepsilon(x),t), u_t(\varepsilon(x),t))\,dt + \int_x^b f(t,u(t),\dot u(t))\,dt \quad \forall x \in [a,b]$$ (che sarebbe $x \mapsto F$("tale funzione"))

: allora $\mathcal{A}$ è $C^1([a,b])$, e $\mathcal{A}(b) = \int_{a_0}^{b} f(t,u_0(t),\dot u_0(t))\,dt$ mentre $\mathcal{A}(a) = \int_{a_0}^{a} f(t,u_0(t),\dot u_0(t))\,dt + \underbrace{\int_a^b f(t,u(t),\dot u(t))\,dt}_{(=F(u))}$, quindi chiaramente $\mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a) =$

$= F(u_0) - F(u)$. Dimostriamo che $\mathcal{A}'(x) = -E(x,u(x),p(x,u(x)),\dot u(x))$ (da cui la tesi):

ma infatti $\frac{\partial}{\partial x}\int_x^b f(t,u(t),\dot u(t))\,dt = -f(x,u(x),\dot u(x))$, mentre $\frac{\partial}{\partial x}\int_{a_0}^{x} f(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\,dt =$

$= \int_{a_0}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\right]dt + f(x, \underbrace{u(\varepsilon(x),x)}_{(=u(x))}, \underbrace{u_t(\varepsilon(x),x)}_{(=p(x,u(x)))})$, per cui vogliamo

$\int_{a_0}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial x} f(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\right]dt = \left[\dot u(x) - p(x,u(x))\right] f_p(x,u(x),p(x,u(x)))$. Calcoliamo:

$\int_{a_0}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\dots\right]dt = \int_{a_0}^{x}\Big[f_s(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),t)\, \varepsilon_x(x) + f_p(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\, u_{\varepsilon t}(\varepsilon(x),t)\cdot$

$\cdot\, \varepsilon_x(x)\Big]dt$, ed ora sapendo che, su $[a_0,x]$ (lo fa su $[a_0,b]$), $t \mapsto u(\varepsilon(x),t)$ verifica (E), integriamo per parti il termine con la $t \mapsto u_{\varepsilon t}(\varepsilon(x),t)$ (per "trasformarlo" in $u_\varepsilon(\varepsilon(x),t)$) ottenendo $\underset{(\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_x \equiv 0)}{=}$

$= \left[f_p(t,u(\varepsilon(x),t),u_t(\varepsilon(x),t))\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),t)\, \varepsilon_x(x)\right]_{t=a_0}^{t=x} = f_p(x, \underbrace{u(\varepsilon(x),x)}_{(=u(x))}, \underbrace{u_t(\varepsilon(x),x)}_{(=p(x,u(x)))})\, u_\varepsilon(\varepsilon(x),x)\,\varepsilon_x(x)$

($u_\varepsilon(\varepsilon(x),a_0) = 0$ perché c'è 1 punto base!)

Ma adesso, infine, $u(x) = u(\varepsilon(x),x) \Rightarrow \dot u(x) = u_\varepsilon(\varepsilon(x),x)\,\varepsilon_x(x) + p(x,u(x))$. □ ☺

NOTA Nel caso volessimo studiare "allo stesso modo" le $u:\Omega\to\mathbb{R}$ "regolari" con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ "regolare", le formule d'integrazione per parti e le formule di Gauss-Green: se $\begin{cases} v:\Omega\to\mathbb{R} \text{ è } C^1 \\ V:\Omega\to\mathbb{R}^n \text{ è } C^1\end{cases}$, allora $\int_\Omega \langle V;\nabla v\rangle dx = \int_{\partial\Omega}\langle V;\vec{n}\rangle v\, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{div}(V)\, v\, dx$.

METODO DIRETTO.

: esistenza "astratta" di punti di minimo globale.

Il procedimento generale s'ispira a quello del LEMMA TRIVIAL, ma generalizzandolo: cercare un insieme $\hat{X}\supseteq X$ ed una funzione $\hat{F}:\hat{X}\to\mathbb{R}$ tali per cui mostrare

(a) $\forall x\in X$, $F(x)\geq \hat{F}(x)$; ← "FORMULAZIONE DEBOLE" (del problema)

(b) $\exists x_0\in\hat{X}$ tale che, $\forall x\in X$, $\hat{F}(x)\geq\hat{F}(x_0)$; ← "ESISTENZA ASTRATTA" (del (GM))

(c) tale x_0 è in realtà $x_0\in X$ e tale che $\hat{F}(x_0)=F(x_0)$. ← "REGOLARITÀ" (del (GM))

Infatti, in tale situazione, $\forall x\in X$, $F(x)\geq F(x_0)$.

Caso ricorrente è quello in cui $\hat{X}\supsetneq X$ e, $\forall x\in X$, $\hat{F}(x)=F(x)$ (per cui potremmo "confondere" ed indicare $\hat{F}$ con F), quando allora basta trovare $x_0\in\hat{X}$ (GM) per $\hat{F}$ e verificare solo che in realtà $x_0\in X$.

IDEA GENERALE PER L'ESISTENZA ASTRATTA (alla Weierstrass): scegliere $\hat{X}$ (e $\hat{F}$) in modo che su $\hat{X}$ si possa fissare una "NOZIONE DI CONVERGENZA "$\xrightarrow{\hat{X}}$"" rispetto alla quale la $\hat{F}$ risulti "SEMI-CONTINUA INFERIORMENTE ("s.c.i.") su $\hat{X}$", e rispetto alla quale la $\hat{F}$ ammette almeno un sottolivello non vuoto $\hat{F}_M:=\{x\in\hat{X}\mid \hat{F}(x)\leq M\}$, $M\in\mathbb{R}$, che sia "COMPATTO" (per successioni). In tal caso, infatti, qualche che sia la $\xrightarrow{\hat{X}}$ che faccia funzionare le cose nel senso esposto, possiamo affermare che $\exists \min_{\hat{X}}\hat{F}$.

Spieghiamo meglio l'idea e dimostriamo l'affermazione. Dato un insieme infinito Y, consideriamo tutti i sottoinsiemi "S" di $Y^{\mathbb{N}^*}\times Y$. Questi S sono dunque costituiti esattamente da coppie del tipo $((y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, y_\infty)$ con $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ successione in Y e con $y_\infty\in Y$: pensando quindi tali coppie come formate da tutte e sole le successioni "convergenti in Y" (a sinistra (nella coppia)) con esplicitato il relativo "limite in Y" (a destra (della coppia)), ciascuno di tali S equivale appunto ad una nozione di convergenza su Y, "$\xrightarrow{Y}$". Più brevemente, si tratta di dichiarare quali sono le successioni in Y da intendersi convergenti, e

Dichiariamo il punto limite in Y. Notazione: $((y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}, y_\infty)\in S \overset{\text{(def.)}}{\Longleftrightarrow} y_m \xrightarrow[(m\to\infty)]{Y} y_\infty$.

⚠ S può davvero essere qualsiasi, in generale, per cui ad esempio le successioni costanti in Y potrebbero non convergere secondo come le intendiamo noi, o potrebbero convergere "ad altro". Oppure potrebbe accadere che, pur essendo $y_m \xrightarrow{Y} y_\infty$, esiste una sottosuccessione di $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ che non converge, o di nuovo che converge "ad altro". Addirittura una successione in Y potrebbe avere più di un limite!

Fissiamo quindi una nozione di convergenza $\xrightarrow{Y}$ su Y nel senso appena descritto, e diamo le due seguenti definizioni notevoli e riguardo di $K\subseteq Y$ e di $G: Y\to\mathbb{R}$, più teorema relativo.

$\boxed{\text{DEF.}}$ K è "compatto in Y" se, e solo se, ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K, cioè: $\forall (y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ in Y, se $y_m\in K$ $\forall m\in\mathbb{N}^*$, allora $\exists (m_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ in $\mathbb{N}^*$ con $m_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ (brevemente "$\exists\, m_k\to\infty$") ed $\exists\, y_\infty\in K$ tale che $y_{m_k}\xrightarrow[K]{Y} y_\infty$.

$\boxed{\text{DEF.}}$ G è "s.c.i. su $Z\subseteq Y$" se, e solo se, $\forall (y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ in Z e $\forall y_\infty$ in Y, se $y_m\xrightarrow{Y} y_\infty$ allora $\liminf_{m\to\infty} G(y_m)\ge G(y_\infty)$.

(Notiamo bene che, più successioni consideriamo come convergenti, e più facile è "essere compatti" MA più difficile è essere s.c.i., e viceversa.)

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Weierstrass). Sia Y un insieme infinito, e sia $G: Y\to\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{I}}$ Se esiste una nozione di convergenza $\xrightarrow{Y}$ su Y rispetto alla quale esiste $K\subseteq Y$ compatto (non vuoto), e tale per cui la G risulti s.c.i. su K, allora $\exists \min_K G$.

$\boxed{\text{II}}$ Se esiste una nozione di convergenza $\xrightarrow{Y}$ su Y rispetto alla quale esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che $G_M := \{y\in Y \mid G(y)\le M\}$ sia compatto (non vuoto), e rispetto alla quale la G risulti s.c.i. su tutto Y, allora $\exists \min_Y G$ (ed è assunto su G_M!)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{I}}$ La tesi è che $\exists\, y_0\in K$ con $G(y)\ge G(y_0)$ per ogni $y\in K$: in altri termini, posto $I := \inf\underbrace{\{G(y) \mid y\in K\}}_{(\neq\emptyset)}$ $(\in\mathbb{R})$, si tratta di trovare $y_0\in K$ tale che $G(y_0)=I$. Consideriamo per questo una delle successioni $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ in K tale che $G(y_m)\xrightarrow{(\mathbb{R}!)} I$ (esiste per def. di inf). Ma K è compatto in Y, dunque $\exists\, m_k\to\infty$ ed $\exists\, y_\infty\in K$ tale che $y_{m_k}\xrightarrow[(K)]{Y} y_\infty$, ed ora inoltre G è s.c.i. su K, dunque $\liminf_{k\to\infty} G(y_{m_k})\ge G(y_\infty)$. Mettendo insieme il tutto, otteniamo $I \underset{(y_\infty\in K!)}{\overset{\text{(def. inf)}}{\le}} G(y_\infty)\le \liminf_k G(y_{m_k}) = \lim_k G(y_{m_k}) = I$ ($(G(y_{m_k}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ è s.succ. di $(G(y_m))_{m\in\mathbb{N}^*}$ in $\mathbb{R}$!), da cui $G(y_\infty)=I$: $y_0 := y_\infty$.

[II] Essendo G s.c.i. su tutto Y, G è a maggior ragione s.c.i. nel compatto non vuoto G_M,

(II) $\Rightarrow$ $\exists \min_{G_M} G$, cioè $\exists\, y_0 \in Y$ con $G(y_0) \leq M$ tale che $G(y) \geq G(y_0)$ per ogni $y \in Y$ con $G(y) \leq M$. Ma allora, $\forall y \in Y$, anche se fosse $G(y) > M$ avremmo $G(y) \geq G(y_0)$, da cui la tesi, in quanto semplicemente $G(y) > M \geq G(y_0)$. □]

Chiarito tutto questo, potremmo dire che i quattro passi fondamentali del m. diretto sono:

→ FORMULAZIONE DEBOLE (del problema)

→ COMPATTEZZA SOTTOLIVELLI (non vuoti) — rispetto ad una opportuna nozione di Convergenza (legata...)

→ SEMI-CONTINUITÀ INFERIORE (almeno su essi) — (esistenza soluzione!) (G_M)

→ REGOLARITÀ (della soluzione) (G_M)

CASO TIPICO per i nostri funzionali integrali: $\hat{X}$ un $\mathbb{R}$-spazio di SOBOLEV e $\hat{F}|_X = F$ su X. Chiamiamo $\hat{F} \doteq F$ pure su $\hat{X}$. Si tratta dunque di avere a disposizione risultati piuttosto generali di compattezza, di s.c.i. e di regolarità.

COMPATTEZZA Si basa in genere sul teorema di Ascoli-Arzelà "base".

ASCOLI-ARZELÀ Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ in $C^0([a,b])$. Se

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è "equicontinua" (nel senso che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta \doteq \delta_\varepsilon > 0$ tale che, $\forall x, y \in [a,b]$, se $|y - x| < \delta$ allora $|u_n(y) - u_n(x)| < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$) e

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è "precompatta" (nel senso che, $\forall x \in [a,b]$, ogni sottosuccessione di $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ammette a sua volta una sottosuccessione convergente)

allora $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ammette una sottosuccessione convergente uniformemente su $[a,b]$, cioè $\exists\, n_k \to \infty$ ed $\exists\, u_\infty \in C^0([a,b])$ tale che $u_{n_k}(x) \xrightarrow[(k)]{\|\cdot\|_\infty} u_\infty(x)$.

NOTA Se, $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, M \doteq M^{(x)} \in (0,\infty)$ tale che $|u_n(x)| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, allora vale (ii).

▷ Concentriamoci sul caso $\boxed{\hat{X} \subseteq W^{k,p}([a,b]),\ k \in \mathbb{N}^* \text{ e } p \in [2,\infty]}$, per cui $\hat{X} \subseteq H^1([a,b]) \doteq W^{1,2}([a,b])$. (Ricordiamo subito che una funzione di $W^{k,p} \subseteq W^{1,p}$ (su $[a,b]$) coincide q.o. su $[a,b]$ con una funzione continua su $[a,b]$, ed anzi $\frac{1}{q}$-hölderiana se $q\,(\in [1,2])$ è tale che $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.) **Notazione**: "$(x_n)$" $:= (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia (u_n) in $H^1((a,b))$. Se

(i) $\exists M_1 \in (0,\infty)$ tale che $\|\dot u_n\|_{L^2}^2 \doteq \int_a^b \dot u_n^2\, dx \le M_1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $\exists M_2 \in (0,\infty)$ ed $\exists (x_n)$ in $[a,b]$ tale che $|u_n(x_n)| \le M_2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$,

allora $\exists n_k \to \infty$ ed $\exists u_\infty \in H^1((a,b))$ tale che $\boxed{\begin{cases} u_{n_k}(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u_\infty(x) \\ \dot u_{n_k} \overset{L^2}{\rightharpoonup} \dot u_\infty \end{cases}}$. $(\Rightarrow \|\dot u_\infty\|_{L^2}^2 \le M_1)$

[Dim. La successione $(\dot u_n)$ in $L^2(a,b)$ è limitata in $L^2(a,b)$ grazie a (i), per cui $\exists n_h \to \infty$ ed $\exists v_\infty \in L^2(a,b)$ tale che $\dot u_{n_h} \overset{L^2}{\rightharpoonup} v_\infty$. Osserviamo subito che $\|v_\infty\|_{L^2}^2 \overset{(\text{n.s.c. debole di } \|\cdot\|_{L^2}^2)}{\le} \liminf_h \underbrace{\|\dot u_{n_h}\|_{L^2}^2}_{\overset{(i)}{(\le M_1)}} \le M_1$. Se adesso prendiamo $x,y \in [a,b]$ con $x<y$, allora $\forall h \in \mathbb{N}^*$ è

$$|u_{n_h}(y) - u_{n_h}(x)| \overset{(\text{NOTA})}{=} \Big|\int_x^y \underset{(\mathbb{1}_{[x,y]}(t))}{\dot u_{n_h}(t)}\, dt\Big| \overset{(\text{Hölder})}{\le} \|\dot u_{n_h}\|_{L^2((x,y))}\sqrt{y-x} \overset{(\text{ovvio})}{\le} \|\dot u_{n_h}\|_{L^2}\sqrt{y-x} \overset{(i)}{\le} \sqrt{M_1}\sqrt{y-x},$$

da cui $\forall h \in \mathbb{N}^*$ e $\forall x,y \in [a,b]$ $\boxed{|u_{n_h}(y) - u_{n_h}(x)| \le \sqrt{M_1}\sqrt{|y-x|}}$: quindi (u_{n_h}) è equicontinua, ed anzi è equi-$\frac{1}{2}$-hölderiana (come è tutta (u_n), allo stesso modo). ✓ Ma ora da questa stessa relazione otteniamo per (u_{n_h}) anche la precompattezza (per (u_n)), ossia la equilimitatezza (grazie a (ii)) ✓: infatti, $\forall h \in \mathbb{N}^*$ e $\forall x \in [a,b]$,

$$\boxed{|u_{n_h}(x)|} \overset{(\text{dis. tri.})}{\le} |u_{n_h}(x) - u_{n_h}(x_{n_h})| + |u_{n_h}(x_{n_h})| \overset{(\text{detto ora, + (ii)})}{\le} \sqrt{M_1}\sqrt{|x - x_{n_h}|} + M_2 \ \boxed{\le \sqrt{(b-a)M_1} + M_2}$$

= costante in $(0,\infty)$ indipendente da $h \in \mathbb{N}^*$ (e perfino da $x \in [a,b]$)! ✓ Pertanto, in virtù di Ascoli-Arzelà, $\exists n_{h_k} \to \infty$ ed $\exists u_\infty \in C^0([a,b])$ $(\subseteq L^2(a,b))$ tale che $u_{n_{h_k}}(x) \underset{(k)}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} u_\infty(x)$, per cui di sicuro

$\begin{cases} u_{n_{h_k}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u_\infty \\ \dot u_{n_{h_k}} \overset{L^2}{\rightharpoonup} v_\infty \end{cases}$. Da questo segue subito[(#)] che allora $u_\infty \in H^1((a,b))$ e $\dot u_\infty = v_\infty$ (in senso debole), quindi poniamo "$n_k := n_{h_k}$". □]

$\boxed{\text{EX}}$[(#)] Sia (w_n) in $H^1((a,b))$ e siano $u_\infty, v_\infty \in L^2(a,b)$ tale che $\begin{cases} w_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} u_\infty \\ \dot w_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} v_\infty \end{cases}$: allora $u_\infty \in H^1((a,b))$ e $\dot u_\infty = v_\infty$. ($\boxed{\text{NOTA}}$ $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \Rightarrow \xrightarrow{L^2} \Rightarrow \overset{L^2}{\rightharpoonup}$.)

[Dim. Basta dimostrare che, $\forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$, $\int_a^b u_\infty \varphi'\, dx = -\int_a^b v_\infty \varphi\, dx$. Ma infatti, $\forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$, e $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_a^b w_n \varphi'\, dx = -\int_a^b \dot w_n \varphi\, dx$ perché $w_n \in H^1((a,b))$, ed ora, usando che per $\varphi' \in C_c^\infty(a,b)$ e le ipotesi di $\xrightarrow{L^2}$ per u_n e $\dot u_n$, otteniamo chiaramente che $\int_a^b u_n\varphi' dx \to \int_a^b u_\infty \varphi' dx$ e $\int_a^b \dot u_n \varphi dx \to \int_a^b \dot u_\infty \varphi dx$, da cui la tesi. $\square$]

$\boxed{\text{OSS.}}$ Dal precedente risultato può trovarsi essere un "vero" risultato di compattezza, in questo coincidendo con l'analizzare una relazione "di sottolivello" del tipo

$\boxed{F(u_n) \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$, $M \in \mathbb{R}$, se effettivamente ne deduciamo una limitazione uniforme di $\|\dot u_n\|^2_{L^2}$ come in (i), e se d'altra parte deduciamo limitazioni (puntuali come in (ii) grazie a BC in $\hat X$, o limitazioni dedotte, di tipo puntuale o integrale, allora effettivamente (su u, per cui "passare al limite" per $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}$!)

$\exists n_k \to \infty$ ed $\exists u_\infty \in H^1(a,b)$ tale che $\begin{cases} u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u_\infty \\ \dot u_n \xrightarrow{L^2} \dot u_\infty \end{cases}$. Di conseguenza, se $\boxed{\hat X = H^1(a,b)} +$

$+$ eventuali BC stabili per $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}$, e se consideriamo la nozione di convergenza su $\hat X$ data da

$\boxed{u_n \xrightarrow{\hat X} u_\infty \overset{(def)}{\iff} \begin{cases} u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u_\infty \\ \dot u_n \xrightarrow{L^2} \dot u_\infty \end{cases}}$, allora F_M sarebbe compatto in $\hat X$ se dimostrassimo infine

che $F(u_\infty) \leq M$, "ad esempio" mostrando che F è s.c.i. su $\hat X$, e cioè che

$u_n \xrightarrow{\hat X} u_\infty \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$.

$\boxed{\text{NOTA}}$ L'ovvio fatto che (u_n) in $W^{k,p}$, $p \geq 2 \Rightarrow (u_n)$ in H^1, mentre $u_\infty \in H^1 \not\Rightarrow u_\infty \in W^{k,p}$, $p \geq 2$, ci costringe per il momento a $\hat X = H^1(a,b) + \dots$. Tuttavia, non solo ci occuperemo delle "crescite superquadratiche" (in $\dot u$) più avanti ed anzi a breve: potremmo anche più dire che $u_\infty \in W^{k,p}$, $p \geq 2$, da $F(u_\infty) \leq M$ a seconda di com'è fatta f di F ...! ✓

Non ci resta dunque che passare alle s.c.i. . Volendo però lasciare come ultima da "soddisfare" con calma", accenniamo all'idea generale per guadagnarci la regolarità di una soluzione nei casi più "semplici".

(3) $\boxed{\text{REGOLARITÀ}}$ Supponiamo che $F(u) = \int_a^b f(x,u,\dot u)dx$ (+ regolarità...) con $\hat X$ $\mathbb{R}$-spazio affine di giacitura $\hat V$, con naturalmente $\hat X \supseteq X$ e $\hat V \supseteq V$. Supponiamo di sapere che esiste $u_0 \in \hat X$ (GM) per F su $\hat X$, e possiamo e dimostrare che in realtà $u_0 \in X$. Allora, anzitutto, u_0 verifica la Eulero 1 relativa a F (su $\hat X$), la quale coincide formalmente con la Eulero 1 relativa a $F|_X$ su X : precisamente vale che

$\int_a^b [f_s(x,u_0,\dot u_0)\vartheta + f_p(x,u_0,\dot u_0)\dot\vartheta]\,dx$ per ogni $\vartheta \in \hat V$. Di conseguenza, vale che e meglio ancora $\int_a^b f_p(x,u_0,\dot u_0)\dot\vartheta\,dx = -\int_a^b f_s(x,u_0,\dot u_0)\vartheta\,dx \quad \forall \vartheta \in C_c^\infty(a,b)$,

"cioè" $f_p(x,u_0(x),\dot u_0(x))$ è derivabile in senso debole con $[f_p(x,u_0,\dot u_0)]' = f_s(x,u_0,\dot u_0)$ (in senso debole). Adesso si "spera" che $f_s(x,u_0,\dot u_0)$ sia continua in $[a,b]$ grazie a u_0 (ad esempio perché dipende solo da x e da $u_0(x)$), e da questo dedurre che $\dot u_0'$ (debole) sia continua, cioè (NOTO!) $\dot u_0 \in C^1([a,b])$, cioè $\boxed{u_0 \in C^2([a,b])}$ (da cui, ripetendo il trucco, $u_0 \in C^\infty([a,b])$ per "BOOTSTRAP" immediato). A questo punto u_0 verifica Eulero 2 per $F|_X$, perché è sufficientemente regolare (per integrare per parti), e quindi Eulero diff. + BC nota: l'idea è ottenere che in effetti $u_0 \in X$. (se già non l'avevo)

S.C.I. | Caso convesso al più quadratico. (in $\dot u$) (ma CONVESSA) Supponiamo che esistano $A : [a,b]_x \times \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ovunque (o solo C^1 nella p), e convessa nella p (a x fisso), e $g : [a,b]_x \times \mathbb{R}_s \to \mathbb{R}$ anche solo continua (non C^1) (in ogni caso misurabile) tali che, $\forall (x,s,p) \in [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, sia $\boxed{f(x,s,p) = A(x,p) + g(x,s)}$.

▶ Se esistono $A, B, C : [a,b]_x \to \mathbb{R}_+$ continue ($\Rightarrow$ limitate) tali che, $\forall x \in [a,b]$ e $\forall p \in \mathbb{R}$, $|A(x,p)| \le A(x) + B(x)|p| + C(x)p^2$, allora $F(u) = \int_a^b f(x,u,\dot u)\,dx$, $u \in \hat X$, è s.c.i. (rispetto alla $\overset{\hat X}{\to}$ definita prima). Inoltre, a ben vedere, la g potrebbe anche essere tale che sia soltanto: continua nella s ma con (·) $\exists\, \bar g : [a,b]_x \to \mathbb{R}_+$ integrabile tale che, $\forall x \in [a,b]$ e $\forall s \in \mathbb{R}$, $|g(x,s)| \le \bar g(x)$.
OPPURE, limitata dal basso e con (·) $\forall x \in [a,b]$, se $s_n \xrightarrow{\mathbb{R}} s_\infty$ allora $\liminf_{n\to\infty} g(x,s_n) \ge g(x,s_\infty)$.

[Dim. Mostriamo che, date (u_n) in $H^1(a,b)$ $(\hat X)$ tale che $\begin{cases} u_n \xrightarrow{\text{unif}} u_\infty \\ \dot u_n \xrightarrow{L^2} \dot u_\infty \end{cases}$ per una certa $u_\infty \in H^1(a,b)$ $(\hat X)$,

risulta
$$\begin{cases} \liminf_{n\to\infty} \int_a^b A(x,\dot u_n(x))\,dx \ge \int_a^b A(x,\dot u_\infty(x))\,dx & (\text{"}A\text{"}) \\ \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g(x,u_n(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x,u_n(x))\,dx = \int_a^b g(x,u_\infty(x))\,dx & (\text{"}g\text{"}) \end{cases}$$

(o $\ge$ se la g è dell'ultima "specie")

Da cui $\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \ge F(u_\infty)$ (perché $\liminf_n \int_a^b [A(x,\dot u_n) + g(x,u_n)]\,dx \ge$ (limitate $\int_a^b$, + fz. dove divise)
$\ge \liminf_n \int_a^b A(x,\dot u_n)\,dx + \liminf_n \int_a^b g(x,u_n)\,dx$), che è esattamente la tesi. Allora,

$\boxed{f}$ $\forall x\in[a,b]$, $\forall p,q\in\mathbb{R}$, $f(x,q) \overset{(\text{CONV.})}{\geq} f(x,p) + f_p(x,p)(q-p) \overset{(\text{limiti})}{\Longrightarrow} \int_a^b f(x,\dot u_m(x))\,dx \geq$

$\geq \int_a^b f(x,\dot u_\infty(x))\,dx + \int_a^b f_p(x,\dot u_\infty(x))(\dot u_m(x)-\dot u_\infty(x))\,dx$, ed ora basta osservare che

$\liminf_{m\to\infty} \int_a^b f_p(x,\dot u_\infty(x))(\dot u_m(x)-\dot u_\infty(x))\,dx = \lim_{m\to\infty}\int_a^b \dots dx = 0$ semplicemente perché $\dot u_m \overset{L^2}{\rightharpoonup} \dot u_\infty$

e $x\mapsto f_p(x,\dot u_\infty(x))$ sta in $L^2(a,b)$ per ipotesi di crescita sulla f in p. ✓ (la dipendenza della f da x non è essenziale...)

$\boxed{g}$ Se g è continua, allora $u_m(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u_\infty(x) \Rightarrow g(x,u_m(x)) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g(x,u_\infty(x))$, da cui al solito possiamo scambiare $\lim_{m\to\infty}$ con $\int_a^b$. ✓ Se invece g fosse solo ~~integrabile~~ continua in p ma con $|g(x,s)| \leq \bar g(x)$ (come nelle ipotesi alternative), allora da $g(x,u_m(x)) \xrightarrow[m\to\infty]{} g(x,u_\infty(x))$ $\forall x\in[a,b]$ concluderei per convergenza dominata di Lebesgue. ✓ Nell'ultimo caso potremmo usare soltanto Fatou:

$$\liminf_{m\to\infty}\int_a^b g(x,u_m(x))\,dx \overset{(\text{FATOU})}{\geq} \int_a^b \liminf_{m\to\infty} g(x,u_m(x))\,dx \overset{(u_m(x)\to u_\infty(x))}{\geq} \int_a^b g(x,u_\infty(x))\,dx \;. \;✓ \qquad \square$$

Es.) $F(u) \doteq \int_a^b [\dot u^2 + g(x,u)]\,dx$, $u\in\hat X$, g ~~continua~~ C^2 "ovunque". Allora F è s.c.i. rispetto alla $\overset{\hat X}{\rightarrow}$, per cui se da $F(u_m)\leq M$ deduciamo (i), e (ii) se già non l'abbiamo, allora $\exists \min_{\hat X} F$ (da cui anzi $\exists \min_X F$, perché $2(\dot u_\infty)' = -g_s(x,u_\infty)$ è continua, ecc.)!

Se ad esempio la g fosse inferiormente limitata, o più in generale se esistesse una $\bar g: [a,b]_x\to\mathbb{R}$ integrabile tale per cui $g(x,s)\geq \bar g(x)$ $\forall (x,s)\in[a,b]_x\times\mathbb{R}_s$, allora da $F(u_m)\leq M$ avremmo immediatamente (i). ✓ Mostriamo che, avendo ottenuto (ii), ~~avrebbe~~ avremmo fare pure che, $\forall (x,s)\in[a,b]_x\times\mathbb{R}_s$, $|g(x,s)|\leq A + B|s|^\alpha$ per opportune costanti $A,B\in(0,\infty)$ e $\alpha\in[0,2)$.

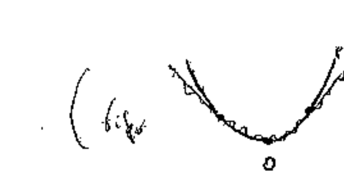
Ma, infatti, sapendo che, $\forall m\in\mathbb{N}^*$ e $\forall x\in[a,b]$, $|u_m(x)|\leq \sqrt{b-a}\,\|\dot u_m\|_{L^2} + M_2$, avremo anche $|g(x,u_m(x))| \leq A + B|u_m(x)|^\alpha \leq A + B\left(\sqrt{b-a}\,\|\dot u_m\|_{L^2}+M_2\right)^\alpha$, da cui se $F(u_m)\leq M$ allora $\|\dot u_m\|^2_{L^2} - \int_a^b |g(x,u_m(x))|\,dx \leq M$ e cioè $\|\dot u_m\|^2_{L^2}\leq M + \int_a^b |g(x,u_m(x))|\,dx \leq$

$\leq M + (b-a)\left[A + B\left(\sqrt{b-a}\,\|\dot u_m\|_{L^2} + M_2\right)^\alpha\right]$: pertanto $\|\dot u_m\|^2_{L^2}$ è $\leq$ di una espressione che per $m\to\infty$ cresce come $\|\dot u_m\|^\alpha_{L^2}$. Ma $\underset{(e\,\geq 0)}{\alpha<2}$, dunque $(\|\dot u_m\|_{L^2})_{m\in\mathbb{N}^*}$ deve essere (uniformemente) limitata.

$\boxed{\text{CRESCITA SUPER-QUADRATICA.}}$ (in $\dot u$) (ma sempre convessa) Supponiamo che esistano $f:\mathbb{R}_p\to\mathbb{R}$ di classe C^1 e convessa, e $g: [a,b]_x \times \mathbb{R}_v \to \mathbb{R}$ "regolare" tali che, $\forall (x,v,p) \in [a,b]_x \times \mathbb{R}_v \times \mathbb{R}_p$, sia $f(x,v,p) = A(p) + g(x,v)$ e tali che i soli problemi nel verificare coercitività e s.c.i. derivino dalla A". Supponiamo, in effetti, che $\liminf_{p \to \pm\infty} \frac{A(p)}{p^2} > 0$. (Ricordiamo il seguente, fondamentale risultato di approssimazione per $A: \mathbb{R}_p \to \mathbb{R}$ convessa:

▷ $\exists (A_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ in $C^1(\mathbb{R}_p)$ di funzioni convesse su $\mathbb{R}$ tale che

- $\forall m \in \mathbb{N}^*$ e $\forall p \in \mathbb{R}$, $A_m(p) \leq A(p)$;
- $\exists N \in (0,\infty)$ tale che, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ e $\forall p \in \mathbb{R}$, $|A_m'(p)| \leq N$;
- $\forall p \in \mathbb{R}$, $A_m(p) \underset{(m\to\infty)}{\uparrow} A(p)$.

(fig. )

Supponiamo inoltre che da $F(u_m) \leq M$ si deduce $\|u_m'\|_{L^2} \leq M_1$, ad esempio perché si deduce prima $\|u_m\|_{L^2} \leq M_0$, e consideriamo quindi la stessa "nozione di convergenza su $\hat{X}$" (impropria...!) ossia

$$\begin{cases} u_m \xrightarrow{\text{H-Ho}} u_\infty \\ u_m' \xrightarrow{L^2} u_\infty' \quad (u_\infty \in H^1(a,b)) \end{cases}$$

La domanda è: $\boxed{\liminf_{m\to\infty} \int_a^b A(u_m')dx \overset{(\star)}{\geq} \int_a^b A(u_\infty')dx}$? Ciò risolverebbe in quanto avremmo di conseguenza $u_\infty \in \hat{X}$ $(W^{1,1})$ ed anzi $F(u_\infty) \leq M$, fine della s.c.i.!

NOTA Una volta ottenuto che $u_\infty \in \hat{X}$, quindi $u_\infty' \in L^p(a,b)$, la vera nozione di convergenza su $\hat{X}$ diventa $\begin{cases} u_m \xrightarrow{\text{H-Ho}} u_\infty \\ u_m' \xrightarrow{L^p} u_\infty' \end{cases}$. Infatti, in generale, $\forall p \in (1,\infty)$ e $\forall (w_m)$ in $L^p(a,b)$,

se $\begin{cases} (w_m) \text{ è limitata in } L^p(a,b) \\ \exists w_\infty \in L^p(a,b) \text{ tale che } w_m \xrightarrow{L^1} w_\infty \end{cases}$ allora $w_m \xrightarrow{L^p} w_\infty$.

[Dim. La tesi è che, $\forall \varphi \in L^q(a,b)$ con $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, risulti $\int_a^b w_m \varphi\, dx \to \int_a^b w_\infty \varphi\, dx$. Ma infatti, $\forall \varphi \in L^q$ e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi_\varepsilon \in L^\infty(a,b)$ tale che $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq \varepsilon$, e quindi, per ogni $m \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_a^b (w_m - w_\infty)\varphi\, dx\right| \overset{(D.T.)}{\leq} \left|\int_a^b (w_m - w_\infty)\varphi_\varepsilon\, dx\right| + \left|\int_a^b (w_m - w_\infty)(\varphi - \varphi_\varepsilon)dx\right|$ ed ora $\left|\int_a^b (w_m - w_\infty)\varphi_\varepsilon\, dx\right| \underset{(m\to\infty)}{\longrightarrow} 0$ in quanto $\varphi_\varepsilon \in L^\infty(a,b)$ e $w_m \xrightarrow{L^1} w_\infty$ (ipotesi), mentre

$$\Big|\int_a^b \underbrace{(w_m - w_\infty)}_{\in L^p}\underbrace{(\varphi - \varphi_\varepsilon)}_{\in L^q}dx\Big| \overset{(Hö)}{\leq} \|w_m - w_\infty\|_{L^p}\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^q} \leq (\|w_m\|_{L^p} + \|w_\infty\|_{L^p})\varepsilon \overset{(lim.)}{\leq} \varepsilon \cdot \text{costante}:$$

pertanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\limsup_{m\to\infty} \left|\int_a^b (w_m - w_\infty)\varphi\, dx\right| \leq \text{cost.} \cdot \varepsilon$, da cui la tesi per $\varepsilon \downarrow 0$. □]

DIM. S.C.I. $(\star)$ Prendiamo infatti le (A_m) che approssimano la A come ricordato sopra: allora, $\forall m \in \mathbb{N}^*$ fissato, otteniamo $\int_a^b A(u_m')dx \overset{(A \geq A_m)}{\geq} \int_a^b A_m(u_m')dx \overset{(A_m\ C^1 \text{ e convessa})}{\geq} \int_a^b A_m(u_\infty')dx +$
$+ \int_a^b A_m'(u_\infty')(u_m' - u_\infty')dx$, e qui $|A_m'(u_\infty')| \leq N$ e $u_m' \xrightarrow{L^1} u_\infty'$ dà immediatamente che

$\int_a^b c\,f_m'(u_\infty)(u_m-u_\infty)\,dx \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, da cui $\liminf_{m\to\infty}\int_a^b c\,f(u_m)\,dx \geq \int_a^b c\,f_m(u_\infty)\,dx \quad \forall m\in\mathbb{N}^*$,

cioè $\liminf_{m\to\infty}\int_a^b c\,f(u_m)\,dx \geq \sup_{m\in\mathbb{N}^*}\int_a^b c\,f_m(u_\infty)\,dx \overset{(\mathrm{lim}\,1.A)}{=} \int_a^b c\,f(u_\infty)\,dx$ per Beppo Levi. □

$\boxed{\text{RILASSAMENTO}}$: cosa "dire o fare" quando $\nexists \min_X F$.

Siano (X,d) uno spazio metrico, e sia $F : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

$\boxed{\text{DEF.}}$ Chiamiamo "IL RILASSATO DI F" la funzione $\overline{F} : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$,

$$\overline{F}(x) := \inf\left\{\liminf_{m\to\infty} F(x_m) \;\middle|\; (x_m)_{m\in\mathbb{N}^*} \text{ in } X \text{ tale che } x_m \xrightarrow{d} x\right\} \quad \forall x\in X.$$

Brevemente, $\boxed{\forall x\in X,\ \overline{F}(x) = \inf\left\{\liminf_{m\to\infty} F(x_m) \mid x_m \xrightarrow{d} x\right\}}$.

In particolare, visto che è "competere" per tale inf c'è pure la successione costantemente x, abbiamo subito due proprietà basilari del rilassato:

- $\forall x\in X$, $\boxed{F(x) \geq \overline{F}(x)}$;
- $\forall x\in X$, $\liminf_{y\to x} F(y) \geq \overline{F}(x)$.

L'idea è che il rilassato $\overline{F}$ di F sia esattamente la più grande funzione $X\to\overline{\mathbb{R}}$ ad essere $\leq F$ su tutto X che sia semi-continua inferiormente su X, ottenendo inoltre che $\inf_X F = \inf_X \overline{F}$ (il quale è più facile che sia un minimo per $\overline{F}$ che un minimo per F) e che, sotto ragionevoli ipotesi, le sottosuccessioni convergenti (in X) delle successioni "minimizzanti" $_{(\inf)}$ della F convergono in realtà a punti di minimo di $\overline{F}$, se esistono.

Per tutto questo, naturalmente, occorre compiere un percorso piuttosto tecnico.

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{OSS.}}$ (utile per $\boxed{3}$) $\forall x\in X$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta = \delta_{x,\varepsilon} > 0$ tale che, $\forall y\in B_\delta(x)$, $F(y) \geq \overline{F}(x) - \varepsilon$.

[Dim. Supponiamo per assurdo che $\exists x_0\in X$ ed $\exists \varepsilon_0>0$ tali che, $\forall\delta>0$, $\exists y_\delta\in B_\delta(x_0)$ tale per cui $F(y_\delta) < \overline{F}(x_0) - \varepsilon_0$. In particolare, $F(y_\delta)\in\mathbb{R}$ (cioè $F(y_\delta)<\infty$) e $\overline{F}(x_0) > -\infty$.

Comunque ne ricaviamo che $\exists (y_m)$ in X tale che $d(x_0,y_m) < \frac{1}{m}$ e tale che $F(y_m) <$
$< \overline{F}(x_0) - \varepsilon_0$ (per ogni $m\in\mathbb{N}^*$). Ma allora $y_m \xrightarrow{d} x_0$, dunque $\overline{F}(x_0) \overset{(\mathrm{def.}\,\overline{F})}{\leq}$
$\leq \liminf_{m\to\infty} F(y_m) < \overline{F}(x_0) - \varepsilon_0$: assurdo. □]

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{Teorema}}$ $\forall x\in X$, $\exists (\overline{x}_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ in X tale che $\overline{x}_m \xrightarrow{d} x$ e tale che $\lim_{m\to\infty} F(\overline{x}_m) = \overline{F}(x)$,
o brevemente $\boxed{\exists\, \overline{x}_m \xrightarrow{d} x \text{ tale che } F(\overline{x}_m) \to \overline{F}(x)}$. Di conseguenza, l'inf che definisce il rilassato è in realtà un minimo.

⇝ **DEF.** Per ogni $x \in X$, una successione $(\bar{x}_n)$ in X con $\bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ tale che $F(\bar{x}_n) \to \bar{F}(x)$ si chiama "una RECOVERY (SEQUENCE) per x (relativamente a F)".

[Dim. Anzitutto possiamo supporre $\bar{F}(x) < \infty$, perché se fosse $\bar{F}(x) = \infty$ allora ovviamente $F(x) = \bar{F}(x)$ e prenderemmo $\bar{x}_n := x$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Caso $\bar{F}(x) \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$, per def. di inf, $\exists$ $(x_n^{(\varepsilon)})$ in X tale che $x_n^{(\varepsilon)} \xrightarrow{d} x$ e $\liminf_{n\to\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \le \bar{F}(x) + \varepsilon$, ed anzi a meno di passare a s.succ. possiamo immaginare che tale liminf sia un limite: $\lim_{n\to\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \le \bar{F}(x) + \varepsilon$ (tutto ciò!).
Risulta quindi evidente che, a patto di prendere $\bar{n} \in \mathbb{N}^*$ sufficientemente grande, il punto $x^{(\varepsilon)} := x^{(\varepsilon)}_{\bar{n}}$ soddisfi a $\begin{cases} d(x, x^{(\varepsilon)}) < \varepsilon \\ F(x^{(\varepsilon)}) \le \bar{F}(x) + 2\varepsilon \end{cases}$, e ciò per ogni $\varepsilon \downarrow 0$: pertanto, definendo $\bar{x}_n := x^{(1/n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ abbiamo $d(x, \bar{x}_n) < \frac{1}{n}$ ($\Rightarrow \bar{x}_n \xrightarrow{d} x$), e che al tempo stesso $F(\bar{x}_n) \le \bar{F}(x) + \frac{2}{n}$, da cui $\bar{F}(x) \underset{(\text{def.}\,\bar{F})}{\le} \liminf_n F(\bar{x}_n) \le \liminf_n [\bar{F}(x) + \frac{2}{n}] = \bar{F}(x)$, e anche $\limsup_n F(\bar{x}_n) \le \bar{F}(x)$, da cui la tesi. ✓ Caso $\bar{F}(x) = -\infty$: $\forall M > 1$, $\exists$ $x_n^{(M)} \xrightarrow{d} x$ tale che $\lim_{n\to\infty} F(x_n^{(M)}) \le -M$, $\Rightarrow$ $\forall M > 1$, $\exists$ $x^{(M)} \in X$ tale che $\begin{cases} d(x, x^{(M)}) < \frac{1}{M} \\ F(x^{(M)}) \le -\frac{M}{2} \end{cases}$: allora $\bar{x}_n := x^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, risolve. □]

Corollario $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $x_\varepsilon \in B_\varepsilon(x)$ tale che $F(x_\varepsilon) \le \bar{F}(x) + \varepsilon$.

[Dim. Sia $(\bar{x}_n)$ una recovery per x, cioè $\bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ e $F(\bar{x}_n) \to \bar{F}(x)$: è evidente che possiamo prendere, $\forall \varepsilon > 0$, $x_\varepsilon := \bar{x}_{\bar{n}}$ per $\bar{n} \in \mathbb{N}^*$ sufficientemente grande. □]

[3] TEOREMA Il rilassato $\bar{F}$ della F è semi-continuo inferiormente su X.

[Dim. 1) (con [1]) La tesi è che, $\forall x \in X$ e $\forall x_n \xrightarrow{d} x$, sia $\liminf_n \bar{F}(x_n) \ge \bar{F}(x)$. Quindi, volendo, possiamo restringerci agli $x \in X$ tale che $\bar{F}(x) > -\infty$ (ovvio). Quale che sia $x \in X$, e $\forall \varepsilon > 0$, consideriamo un $\delta > 0$ tale che, $\forall y \in B_\delta(x)$, $F(y) \ge \bar{F}(x) - \varepsilon$ come in [1]. Ma allora fissato uno di tali y e $\forall y_n \xrightarrow{d} y$, (y_n) giace definitivamente in $B_\delta(x)$ (essendo aperta!), e quindi effettivamente $F(y_n) \ge \bar{F}(x) - \varepsilon$ definitivamente, da cui sicuramente $\liminf_{n\to\infty} F(y_n) \ge \bar{F}(x) - \varepsilon$: per def. di inf, segue $\bar{F}(y) \ge \bar{F}(x) - \varepsilon$. Riassumendo, $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$ è $\liminf_{y \to x} \bar{F}(y) \ge \bar{F}(x) - \varepsilon$, da cui la tesi mandando $\varepsilon \downarrow 0$. □

Dim. 2) (con [2]) Verifichiamo che, $\forall x_n \xrightarrow{d} x$, è $\liminf_n \bar{F}(x_n) \ge \bar{F}(x)$ usando il corollario al teorema delle recovery sequences: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, applicandolo a $x_n \in X$ e $\frac{1}{n} > 0$, ricaviamo che $\exists$ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ in X tale che $d(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$ e tale che $F(y_n) \le \bar{F}(x_n) + \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Ma allora anche $y_n \xrightarrow{d} x$, perché $d(x, y_n) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, per cui per def. di $\bar{F}$

$\overline{F}(x) \leq \liminf_M F(x_M)$, $\leq \liminf_M \left(\overline{F}(x_M) + \frac{1}{M}\right) = \liminf_M \overline{F}(x_M)$. □]

$\boxed{4}$ $\boxed{\text{TEOREMA}}$ Consideriamo $G : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $G(x) := \sup\{g(x) \mid g : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ s.c.i. su X tali che $F(y) \geq g(y)\ \forall y \in X\}$ $\forall x \in X$, ossia la più grande funzione $X \to \overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. su X che sia $\leq F$ su X . Allora, $\forall x \in X$, $\boxed{\overline{F}(x) = G(x)}$.

[Dim. Grazie al precedente teorema (ed al fatto che $\overline{F} \leq F$), siamo sicuri che $\overline{F}(x) \leq G(x)\ \forall x \in X$. Mostriamo che vale pure il $\boxed{\geq}$; per questo, $\forall x \in X$, consideriamo una recovery $(\overline{x}_M)$ per x, tale che cioè $\overline{x}_M \xrightarrow{\mathcal{D}} x$ e $F(\overline{x}_M) \to \overline{F}(x)$: allora $F(\overline{x}_M) \underset{(F \geq G)}{\geq} G(\overline{x}_M)$ $\forall M \in \mathbb{N}^*$, per cui
$\overline{F}(x) \underset{(2)}{=} \lim_{M \to \infty} F(\overline{x}_M) = \liminf_{M \to \infty} F(\overline{x}_M) \geq \liminf_{M \to \infty} G(\overline{x}_M) \underset{(\overline{x}_M \xrightarrow{\mathcal{D}} x)}{\overset{(G\ \text{s.c.i.})}{\geq}} G(x)$, come volevamo. □]

$\boxed{5}$ $\boxed{\text{Teorema}}$ Vale $\boxed{\inf_X F = \inf_X \overline{F}}$. (Su effetti, ad esempio, se esiste $x_0 \in X$ tale che sia (GM) per $\overline{F}$ su X (s'intende che $\overline{F}(x_0) > -\infty$) e tale che $\overline{F}(x_0) = F(x_0)$, allora x_0 è (GM) anche per F su X .) [Dim. $\forall x \in X$, $F(x) \geq \overline{F}(x) \geq \overline{F}(x_0) = F(x_0)$. √]

[Dim. Visto che $F \geq \overline{F} \Rightarrow \inf_X F \geq \inf_X \overline{F}$, la tesi è $\boxed{\leq}$. Ma infatti, potendo supporre $\inf_X \overline{F} < \infty$, nel $\boxed{\text{caso } I := \inf_X \overline{F} \in \mathbb{R}}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in X$ tale che $\overline{F}(x) \leq I + \varepsilon$; se ora $\overline{x}_M \xrightarrow{\mathcal{D}} x$ e $F(\overline{x}_M) \to \overline{F}(x)$ (recovery), allora definitivamente si ha $F(\overline{x}_M) \leq I + \varepsilon \Rightarrow \inf_X F \leq I + \varepsilon$. √ Se invece $\boxed{I = -\infty}$, allora $\forall M > 1$, $\exists x \in X$ tale che $\overline{F}(x) \leq -M \underset{(\dots)}{\Rightarrow} F(\overline{x}_M) \leq -\frac{M}{2} \Rightarrow \forall M > 1,\ \inf_X F \leq -\frac{M}{2}$. √ □]

$\boxed{6}$ $\boxed{\text{TEOREMA}}$ Supponiamo che il rilassato $\overline{F}$ della F ammette valor minimo (reale) su X , cioè che $\inf_X \overline{F} = \min_X \overline{F} =: m \in \mathbb{R}$, e supponiamo pure che esista $M > m$ (in $\mathbb{R}$) (e purtroppo...!) tale che il sottolivello (della $\overline{F}$) $\overline{F}_M = \{x \in X \mid \overline{F}(x) \leq M\}$ $(\neq \emptyset!)$ sia compatto (in X) .

Allora
(1) $\inf_X F = m$ (teorema precedente!) , e
(2) ogni (x_M) in X tale che $F(x_M) \to m$ ("succ. minimizzante") è tale che ogni suo punto di accumulazione sia un (GM) per $\overline{F}$.

In particolare, se $\overline{F}$ ammette un solo (GM) su X , allora ogni successione minimizzante della F tende proprio a tale (GM) .

[Dim. Quale che sia (x_M) in X con $F(x_M) \to m$, essendo $M > m$ abbiamo pure allora che

Definitivamente $M \ge F(x_n)$ $(\ge m)$ $\overset{(F\ge\overline F)}{\ge} \overline{F}(x_n)_{(\ge m)}$, cioè che definitivamente $x_n \in \overline{F}_M$: per compattezza di $\overline F_M$, quindi, $\exists\, n_k\to\infty$ ed $\exists\, x_\infty\in\overline F_M$ tale che $x_{n_k}\xrightarrow{d} x_\infty$. Abbiamo per sempre che $\lim_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = m$ e che $F(x_{n_k}) \ge \overline F(x_{n_k}) \ge m$, da cui $\lim_{k\to\infty}\overline F(x_{n_k}) = m$.
Ma allora $\boxed{\overline F(x_\infty)=m}$, in quanto $m\le \overline F(x_\infty) \overset{(x_{n_k}\xrightarrow{d}x_\infty)}{\underset{(s.c.i.)}{\le}} \liminf_{k\to\infty}\overline F(x_{n_k}) = m$. □]

$\boxed{\text{EX}}$ Siano $F: X\to\mathbb R\cup\{\infty\}$ e $G: X\to\overline{\mathbb R}\cup\{\infty\}$. Se G è continua, allora $\boxed{\overline{F+G} = \overline F + G}$.

[Dim. Anzitutto, $\begin{cases}F\ge\overline F, & \overline F \text{ è s.c.i.}\\ G\ge G, & G \text{ è s.c.i.}\end{cases} \Rightarrow F+G \ge \overline F + G$ e quest'ultima è s.c.i., per cui $\overline{F+G}\ge\overline F+G$. Mostriamo il $\boxed{\le}$: $\forall x\in X$, se $\bar x_n \xrightarrow{d} x$ e $F(\bar x_n)\to\overline F(x)$ (recovery), allora anche $G(\bar x_n)\to G(x)$ per continuità di G, dunque $\lim_{n\to\infty}(F+G)(\bar x_n) = (\overline F+G)(x)$.
Ma, per def. di rilassato, $(\overline{F+G})(x) \overset{(\bar x_n\xrightarrow{d}x)}{\le} \liminf_{n\to\infty}(F+G)(\bar x_n) = (\overline F+G)(x)$. □]

? Come calcoliamo in pratica il rilassato $\overline F$ della F? Candidata $G: X\to\overline{\mathbb R}$ (s.c.i.) che per qualche motivo "pensiamo essere" proprio il rilassato della F, osserviamo che $\overline F(x)=G(x)\ \forall x\in X$ se e solo se

$\boxed{\overline F\ge G} \Leftarrow \begin{cases}\forall x\in X,\ F(x)\ge G(x)\\ G \text{ è s.c.i. su } X\end{cases}$ (ovvia) fin'

$\boxed{\overline F\le G} \Leftarrow \forall x\in X,\ \exists\, \bar x_n\xrightarrow{d} x$ tale che $F(\bar x_n)\to G(x)$. (← data la precedente!)

Equivalentemente, (G s.c.i.)

[Dim. $\forall x\in X$, $\overline F(x) \overset{(def.)}{\le} \liminf_n F(\bar x_n) = G(x)$. □]

$\boxed{\text{LIMINF}}$ (inequality) $\forall\, x_n\xrightarrow{d} x$, $\liminf_{n\to\infty} F(x_n)\ge G(x)$ $(\Leftrightarrow \overline F\ge G)$

$\boxed{\text{LIMSUP}}$ (inequality) $\forall x\in X$, $\exists\, \bar x_n\xrightarrow{d}x$ tale che $\limsup_{n\to\infty}F(\bar x_n)\le G(x)$ $(\Leftrightarrow \overline F\le G$, direttamente$)$. (Cioè, data la LIMINF, $F(\bar x_n)\to G(x)$!)

$\boxed{\text{DEF.}}$ Data $G: X\to\overline{\mathbb R}$, un $D\subseteq X$ è "un DENSO IN ENERGIA per G" se, $\forall x\in X$, $\exists\,(x_n)_{n\in\mathbb N}$ succ. in D tale che $x_n\xrightarrow{d}x$ e $G(x_n)\to G(x)$.

$\boxed{\text{Lemma}}$ (del denso in energia). Se $D\subseteq X$ è un denso in energia per G, e se consideriamo

(a) $\forall x\in D$, $\exists\,\bar x_n\xrightarrow{d}x$ tale che $F(\bar x_n)\to G(x)$ (basta $\limsup_{n\to\infty} F(\bar x_n)\le G(x)$!)

(b) $\forall x\in D$, $\overline F(x)\le G(x)$

(c) $\forall x\in X$, $\overline F(x)\le G(x)$

, allora (a) $\underset{(\Leftarrow \text{ se } F\ge G)}{\Rightarrow}$ (b) $\underset{(\Leftarrow)}{\Rightarrow}$ (c), da cui chiaramente l'equivalenza con la LIMSUP.

[Dim. (a)⇒(b): $\forall x\in D$, $\overline F(x) \overset{(def. \overline F)}{\underset{(a)}{\le}} \liminf_{n\to\infty} F(\bar x_n) \le \limsup_{n\to\infty} F(\bar x_n) \underset{(a)}{\le} G(x)$.

(b)⇒(c): $\forall x\in X$, se $D \ni x_n \xrightarrow{d} x$ e $G(x_n)\to G(x)$ (D è denso in energia per G), allora la (b) ci dà $F(x_n) \le G(x_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, da cui $F(x) \overset{(s.c.i.)}{\le} \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \overset{(b)}{\le} \liminf_{n\to\infty} G(x_n) =$
$= \lim_{n\to\infty} G(x_n) = G(x)$. □]

IDEA Ciò che interessa a noi dell'operazione di rilassamento è a priori più generale di quanto fin ora visto: infatti l'idea sarebbe quella di applicare un metodo diretto "astratto" ad un'"estensione per rilassamento" della mappa $F: X\to\mathbb{R}$ in uno spazio metrico $(\hat{X},\hat{d}) \supseteq (X,d)$ (nel senso che $\hat{X}\supseteq X$ e ~~...~~), così che scegliendo $\boxed{\hat{\to} := \overset{\hat{d}}{\to}}$ si abbia automaticamente la s.c.i.! Ma, attenzione: vorremmo anche farlo mantenendo le relazioni trovate in $\boxed{6}$ (nel teorema) (o quasi...) e riguardo dell'$\inf_X F$ e delle successioni minimizzanti della F stessa.

DEF. Per tutto il seguito della sezione, siano (X,d) e $(\hat{X},\hat{d})$ spazi metrici con $\hat{X}\supseteq X$ e ~~con $\overset{d}{\to} \Rightarrow \overset{\hat{d}}{\to}$~~, e sia $F: X\to\mathbb{R}$. Consideriamo $F^*: \hat{X}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ così definita:
$$\forall x\in\hat{X},\quad F^*(x) := \begin{cases} F(x) & \text{se } x\in X \\ \infty & \text{se } x\in \hat{X}\setminus X \end{cases}$$
Allora "L'ESTENSIONE PER RILASSAMENTO di F a $\hat{X}$" è il rilassato di F^*, sia "$\hat{F}$": $\hat{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ (cioè $\hat{F} \equiv \overline{F^*}$)
Dunque, visto che l'operazione di rilassamento è sempre possibile, l'estensione per rilassamento esiste sempre. "Viceversa", prendendo $\hat{X} = X$ ($\Rightarrow \hat{d}=d$) stiamo prendendo proprio $\hat{F} = \overline{F}$.)

NOTA L'estensione per rilassamento $\hat{F}$ della F a $\hat{X}$ coincide con la più grande funzione $\hat{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ s.c.i. su $\hat{X}$ ed essere $\le F$ su X.

[Dim. Innanzitutto, $\hat{F}: \hat{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ è s.c.i. rispetto a $\overset{\hat{d}}{\to}$ ed è tale che, $\forall x\in\hat{X}$, risulta $\hat{F}(x)\le F^*(x)$ ($\hat{F}$ è il rilassato della F^*), cioè $\hat{F}(x)\le F(x)$ $\forall x\in X$. Ma, analogamente, sappiamo che $\hat{F}$ è la più grande funzione s.c.i. $\hat{X}\to\overline{\mathbb{R}}$ ed essere $\le F^*$ su $\hat{X}$; ma essere $\le F^*$ su $\hat{X}$ equivale ad essere $\le F$ su X. □]

Teorema Supponiamo che l'estensione per rilassamento $\hat{F}$ della F a $\hat{X}$ ammette valor minimo nel (su $\hat{X}$) $m := \min_{\hat{X}} \hat{F} \in\mathbb{R}$, e supponiamo che esiste $M > m$ tale che $\hat{F}_M$ sia compatto (in $\hat{X}$). Allora $\inf_X F = m$ ed ogni successione minimizzante di F ha come punti di accumulazione (rispetto a $\hat{d}$ in) (GM) per $\hat{F}$. ~~...~~

~~...~~

Dim. Grazie al teorema in [6], sappiamo che $m = \inf_{\hat X} F^*$ e che ogni successione minimizzante di F^* si accumula $(\hat\partial)$ su (GM) di $\hat F$. Alla $m \in \mathbb{R}$, dunque necessariamente $\inf_{\hat X} F^* = \inf_X F$ ed è $= m$. (Dunque ogni (x_n) in $\hat X$ tale che $F^*(x_n) \to \inf_{\hat X} F^* = m$ giace definitivamente in X (dove poi $F^* = F$), quindi i punti di accumulazione $(\hat\partial)$ delle successioni minimizzanti di F^* ed i punti di accumulazione $(\hat\partial)$ di quelle minimizzanti di F sono gli stessi. $\square$) [NOTA] Nelle situazione del precedente teorema, se $\inf_X F$ non è un minimo, e se $x_0 \in \hat X$ è un (GM) per $\hat F$, allora o $x_0 \notin X$, o $x_0 \in X$ ma $\hat F(x_0) < F(x_0)$!)

Dunque la $\hat F$ rispecchia esattamente le nostre idee di partenza, con l'unica alterazione delle convergenze in $\xrightarrow{\hat\partial}$, e non in $\xrightarrow{\partial}$ (ai (GM) di $\hat F$) per le sottosuccessioni convergenti delle successioni minimizzanti di F nelle ipotesi del precedente teorema. Sia quindi $G : \hat X \to \overline{\mathbb{R}}$: quando possiamo affermare che $G(x) = \hat F(x)$ per ogni $x \in \hat X$? Come già capito,

$$\boxed{\hat F \geq G} \Leftarrow \begin{cases} \forall x \in \hat X,\ F^*(x) \geq G(x) \\ G \text{ è s.c.i. su } \hat X \end{cases},\ \underset{(\text{ovvio})}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \forall x \in X,\ F(x) \geq G(x) \\ G \text{ è s.c.i. su } \hat X \end{cases}.$$

$\boxed{\hat F \leq G} \Leftarrow \forall x \in \hat X,\ \exists\, \bar x_n \xrightarrow{\hat\partial} x$ tale che $F^*(\bar x_n) \to G(x)$, o anche solo $\limsup_{n\to\infty} F^*(\bar x_n) \leq G(x)$ (per cui basta restringersi agli $x \in \hat X$ tali che $G(x) < \infty$). (Meglio avere ciò trovando $(\bar x_n)$ in X tale che $\bar x_n \xrightarrow{\hat\partial} x$ e $\boxed{\limsup_{n\to\infty} F(\bar x_n) \leq G(x)}$. Osserviamo qui che, per avere questo, basterebbe trovare un $D \subseteq \hat X$ denso in energia per G "in $\xrightarrow{\hat\partial}$" tale che, $\forall x \in D$, $\exists (\bar x_n)$ in X con $\bar x_n \xrightarrow{\hat\partial} x$ e $\limsup_{n\to\infty} F(\bar x_n) \leq G(x)$. E per questo ~~[illegible]~~ è "quasi" come rilassare F e X ma nella metrica $\hat\partial$!)

"Quasi" equivalentemente, $\hat F = G$ se

$\boxed{\text{LIMINF}}$ $\forall x \in \hat X$, $\forall (x_n)$ in X con $x_n \xrightarrow{\hat\partial} x$, $\liminf_{n\to\infty} F(x_n) \geq G(x)$.

$\boxed{\text{LIMSUP}}$ $\forall x \in D \subseteq \hat X$ denso in energia per G "in $\xrightarrow{\hat\partial}$", $\exists (\bar x_n)$ in X con $\bar x_n \xrightarrow{\hat\partial} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F(\bar x_n) \leq G(x)$ $(\rightsquigarrow F(\bar x_n) \to G(x))$.

Comunque sia, non serve molto a renderci conto di quanto possa essere complesso il calcolo del rilassato di una F^*, quindi anche il calcolo di un'estensione per rilassamento. Noi però riusciremo a portare i calcoli fino in fondo per il nostro solito funzionale integrale F di 1ª specie in un caso speciale.

▶ Sia $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}$ (f) di classe $C^2(\mathbb{R}_1)$ a crescita almeno quadratica (anche polinomiale...) (↳ ci appoggiamo a H^1...), e consideriamo

$\boxed{F(u) \doteq \int_a^b f(\dot u)\,dx}$ per ogni $u \in X \doteq C^1(a,b)_{(\|\cdot\|_{C^1})}$. Siano ~~...~~ $p \in (1,\infty)$ tale per cui $F(u)$ sarebbe senso e finito in $\mathbb R$ per ogni u effettivamente su un certo sottospazio chiuso $\boxed{H_F}$ (risp. $\|\cdot\|_{1,p}$) di $W^{1,p}(a,b)$ $(\subseteq H^1(a,b))$ che contenga almeno le funzioni affini a tratti su $[a,b]$ (n° finito di tratti) (oltre che $C^1(a,b)$ stesso).

Allora, se $\hat X := L^2(a,b)_{(\|\cdot\|_{L^2})}$ ma anche se $\hat X := C^0(a,b)_{(\|\cdot\|_\infty)}$, allora:

[1] se f è convessa su $\mathbb R$, allora l'estensione per rilassamento $\hat F$ di F a $\hat X$ è $(\forall u \in \hat X)$

$$\hat F(u) \doteq \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in H_F \\ \infty & \text{se } u \in \hat X \setminus H_F \end{cases};$$

(nella "solita" ipotesi che da $F(u) \le M$ o da $F^{**}(u) \le M$ si deduce che $\|\dot u\|_{L^2} \le M_1$)

[2] se f ammette convessificata f^{**} ovunque finita e C^1 e avente "come f" ~~...~~,
e se $\boxed{F^{**}(u) \doteq \int_a^b f^{**}(\dot u)\,dx}$ $\forall u \in X$, allora $(\forall u \in \hat X)$

$$\hat F(u) \doteq \begin{cases} F^{**}(u) & \text{se } u \in H_{F^{**}} = H_F \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}; \quad \left(\overset{[1]}{=} \widehat{F^{**}}(u)\right)$$

[3] il rilassato di F (su X) è $\bar F(u) = F^{**}(u)$ $(\forall u \in X)$.

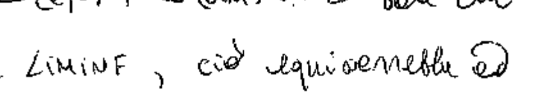
Dim. $\boxed{[1]}$ Sia $G(u) := \begin{cases} F(u) & \text{se } u \in H_F \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$ per ogni $u \in \hat X$. Allora $\boxed{\hat F \ge G}$, in quanto, $\forall u \in X$, $F(u) \ge G(u)$ essendo addirittura $F(u) = G(u)$ (e ciò vale $\forall u \in H_F$, anzi), e d'altra parte G è s.c.i. sia rispetto a $\xrightarrow{L^2}$, sia quindi rispetto a $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}$, perché risulta debolmente s.c.i.: infatti, $\forall u_m \xrightarrow{L^2} u$, $\liminf_{m\to\infty} G(u_m) \ge G(u)$ in quanto ~~...~~ possiamo supporre che $M := \liminf_{m\to\infty} G(u_m) \in \mathbb R$, per cui $\exists m_h \to \infty$ tale che $M = \liminf_{m\to\infty} G(u_m) = \liminf_{h\to\infty} G(u_{m_h}) = \lim_{h\to\infty} G(u_{m_h})$ e $G(u_{m_h}) \le M + 1 =: M_0$ $\forall h \in \mathbb N^*$ (cioè possiamo raggiungere M sotto forma di limite e stando sotto $M+1 = M_0$) $\Rightarrow$ $\forall h \in \mathbb N^*$, $u_{m_h} \in H_F$ e quindi $G(u_{m_h}) = F(u_{m_h})$, affatto $\le M_0$ $\overset{(i.)}{\Rightarrow}$ $\forall h \in \mathbb N^*$, $\|\dot u_{m_h}\|_{L^2} \le M_1$ $\Rightarrow$ $\exists m_{h_k} \to \infty$ ~~...~~ ed $\exists v_0 \in L^2(a,b)$ tali che $\dot u_{m_{h_k}} \xrightarrow{L^2} v_0$ $\overset{(u_{m_{h_k}} \xrightarrow{L^2} u_0)}{\Rightarrow}$ $u_0 \in H^1(a,b)$ e $\dot u_0 = v_0$ (e comunque, per A.-A., avrà $\xrightarrow{L^2}$ delle funzioni, di cui per una loro s.succ. la $\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}$). Ma ora da $u_{m_{h_k}} \xrightarrow{L^2} u$ deduciamo (come visto) che $u \in H_F$ ed anzi $F(u) \le M_0$ e $\liminf_{k\to\infty} F(u_{m_{h_k}}) \underset{(G)}{\ge} F(u)$, ed infine basta osservare che $\liminf_{k\to\infty} F(u_{m_{h_k}}) = \lim_{h\to\infty} F(u_{m_h}) = M$ (G). ✓ Concentriamoci dunque su $\boxed{\hat F \le G}$, provando a dimostrare preventivamente che, $\forall u \in L^2(a,b)$, $\exists (\bar u_m)$ in $C^1(a,b)$ tale che (anzi in H_F, dove G è $< \infty$)

$\bar u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ ($\Rightarrow$ in $\xrightarrow{L^2}$) e $\limsup_{m\to\infty} F(\bar u_m) \le G(u)$. Proviamo e per questo in due fasi, dimostrando dapprima che ciò sussiste per ogni $u \in D$, $\subseteq H_F \subseteq \hat X$, costituito dalle funzioni affini a tratti su $[a,b]$; verificando quindi dopo che tale D è un denso in energia per G in $\hat X$. Affermiamo già quanto segue:

(a) per ogni u affine a tratti su $[a,b]$ (cioè $u \in D$), esiste $C^1([a,b]) \ni \bar u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ tale che $\limsup_{m\to\infty} F(\bar u_m) \le G(u)$ $(F(u))$ $(F(\bar u_m) \to F(u))$

(b) $\forall u \in H^1([a,b])$, $\exists (u_m)$ in D tale che $u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ e $\limsup_{m\to\infty} F(u_m) \le F(u)$ (ossia $F(u_m) \to F(u)$)

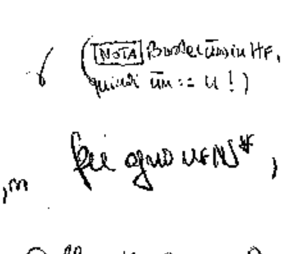
Allora da questi due fatti avremmo la tesi, giacché la (a) sarebbe esattamente il primo fatto, mentre la (b) ci darebbe il secondo, ossia che, $\forall u \in L^2(a,b)$, $\exists (u_m)$ in D tale che $u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ e $G(u_m) \to G(u)$ $(F(u_m))$: infatti, per le LIMINF, ciò equivarrebbe ad avere $\limsup_{m\to\infty} F(u_m) \le G(u)$, ed ora possiamo restringerci alle $u \in H_F$ (dove $G(u) < \infty$) ($\Rightarrow G(u) = F(u)$), le quali sono a maggior ragione in $H^1([a,b])$, e quindi invochiamo proprio (b). ✓

Allora dimostriamoli: (a) $\forall u \in D$, come $(\bar u_m)$ in $C^1([a,b])$ richiesta prendiamo $(\bar u_m)$ ottenute da u "smussandone gli angoli" (cioè, su ogni tratto $[x_{k-1}, x_k]$, ), cosicché $\bar u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$, $\dot{\bar u}_m \xrightarrow{L^2} \dot u$ (basta su quasi tutte le derivate; ma dove u è retta $\dot{\bar u}_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \dot u$!) e cosicché

$$\limsup_{m\to\infty} \int_a^b f(\dot{\bar u}_m)\,dx \le \sum_{k=1}^N \underbrace{\liminf_{m\to\infty} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot{\bar u}_m)\,dx}_{(\text{su } [x_{k-1},x_k],\ \dot{\bar u}_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \dot u\,!)} = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot u)\,dx = \int_a^b f(\dot u)\,dx$$

, che è la tesi (se $x_0 := a < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N := b$, $N \in \mathbb{N}^*$, sono gli estremi dei tratti della u). ✓ ($\boxed{\text{NOTA}}$ Basterebbe $\bar u_m$ in H_F, quindi $\bar u_m := u$!)

(b) $\forall u \in H^1([a,b])$, dunque u è $\frac{1}{2}$-hölder, se $\begin{cases} x_0 := a \\ x_k := x_{k-1} + \frac{b-a}{m} \text{ per ogni } k = 1,\dots,m \end{cases}$ per ogni $m \in \mathbb{N}^*$, allora consideriamo $u_m \in D$ di tratti esattamente $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,\dots,m$, ottenute dalla u congiungendo linearmente i punti $u(a) = u(x_0)$ con $u(x_1)$, $u(x_1)$ con $u(x_2)$, …, $u(x_{m-1})$ con $u(x_m) = u(b)$. Allora "di nuovo" $u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ (~~e $\dot u_m \xrightarrow{L^2} \dot u$ per convergenza su quasi tutte le derivate~~), e d'altra parte $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot u_m)\,dx \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot u)\,dx$ per ogni $m \in \mathbb{N}^*$ e ogni $k = 1,\dots,m$ in quanto, come visto nell'esempio a pagina 5, essendo f convessa il valor minimo per $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot w)\,dx$ al variare delle $w \in C^1([x_{k-1}, x_k])$ tali che $w(x_{k-1}) = u(x_{k-1})$ e $w(x_k) = u(x_k)$ (fissi!) è ottenuto proprio per w = la retta affine che interpola i due punti $(x_{k-1}, u(x_{k-1}))$ e $(x_k, u(x_k))$: di conseguenza, infine,



$\int_a^b f(\dot u_m)\,dx \le \int_a^b f(\dot u)\,dx$, da cui subito la tesi. ✓ □

[2] Sia $G(u) := \begin{cases} F^{**}(u) & \text{se } u \in H_{F(u)} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$ per ogni $u \in \hat{X}$. Allora $\boxed{\hat F \ge G}$, poiché $\forall u \in X$ è

$(f \ge f^{**})$

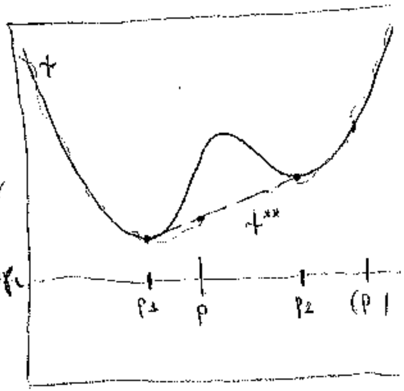
$F(u) \ge G(u)$ essendo che ($\forall u \in H_F$, ovviamente) $F(u) \ge F^{**}(u) = G(u)$, e d'altra parte

$\liminf_{m\to\infty} G(u_m) \ge G(u)$ per ogni $u_m \xrightarrow{L^2} u$ essendo esattamente come prima (f^{**} convessa e crescita almeno 2). ✓ Per $\boxed{\hat F \le G}$,

basta dimostrare che, per ogni u affine a tratti su $[a,b]$, esiste $(\bar u_m)$ in $C^1([a,b])$ e in H_F tale che

$\bar u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ e $\boxed{\limsup_{m\to\infty} F^{\cancel{**}}(\bar u_m) \le F^{**}(u)}$, poiché le affini a tratti su $[a,b]$ costituiscono un

denso in energia per G in $\hat X$ esattamente come prima (f^{**} convessa). Vediamolo:



$\boxed{\text{CASO } u(x) = px + q}$ (retta affine) $(x \in [a,b])$. Allora u è $C^1([a,b])$, quindi se

$\dot u \equiv p$ è tale che $f(p) = f^{**}(p)$ allora basta $\bar u_m := u$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$. ✓

Siano pertanto $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ con $p_1 < p_2$ e $\lambda \in (0,1)$ tale che $p = \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2$

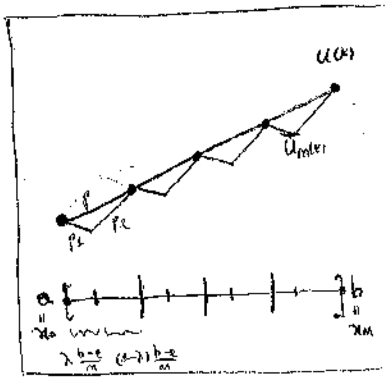
e $f^{**}(p) = \lambda f(p_1) + (1-\lambda) f(p_2)$. Allora, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, definendo

$\begin{cases} x_0 := a \\ x_k := x_{k-1} + \frac{b-a}{m}, \ k = 1, \dots, m \end{cases}$, consideriamo $(\bar u_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ (in H_F) di ~~affini~~ affini a tratti su $[a,b]$

di tratti (ad esempio) $[x_{k-1}, x_{k-1} + \lambda \frac{b-a}{m}]$ ~~...~~ e $[x_{k-1} + \lambda \frac{b-a}{m}, x_k]$, $k = 1, \dots, m$,

tale che $\bar u_m(x_{k-1}) = u(x_{k-1})$, $\bar u_m(x_k) = u(x_k)$, $\dot{\bar u}_m|_{(x_{k-1}, x_{k-1} + \lambda \frac{b-a}{m})} \equiv p_1$ e $\dot{\bar u}_m|_{(x_{k-1} + \lambda \frac{b-a}{m}, x_k)} \equiv p_2$,

$k = 1, \dots, m$: così abbiamo che di sicuro $\bar u_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$, e che (per ogni



$m \in \mathbb{N}^*$ e $k = 1, \dots, m$) $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(\dot{\bar u}_m)\,dx = \lambda \frac{b-a}{m} f(p_1) + (1-\lambda) \frac{b-a}{m} f(p_2), =$

$= \frac{b-a}{m}\left[\lambda f(p_1) + (1-\lambda) f(p_2)\right] = \frac{b-a}{m} f^{**}(p), = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f^{**}(\dot u)\,dx$,

da cui $\displaystyle\int_a^b f(\dot{\bar u}_m)\,dx = \int_a^b f^{**}(\dot u)\,dx$! ✓

$\boxed{\text{CASO } u \in D}$ (qualsiasi) È ~~...~~ evidente che si possa ragionare allo stesso modo ! ✓ □

$(f \ge f^{**})$

[3] Sostanzialmente lo abbiamo dimostrato: $\forall u \in X$, $F(u) \ge F^{**}(u)$, ed inoltre

F^{**} è s.c.i. su X (f^{**} convessa e a crescita almeno 2); infine le "affini smussate" a

tratti su $[a,b]$ formano un denso in energia per F^{**} in X, e al tempo stesso per ogni affine

smussata a tratti su $[a,b]$, u, trovo $(\bar u_m)$ in X tale che $\bar u_m \xrightarrow{C^1} u$ e $\limsup_{m\to\infty} F(\bar u_m) \le F^{**}(u)$. ✓

□ ✓

GAMMA CONVERGENZA : estensione del concetto di rilassamento, quindi numerabile approssimazione di problemi di minimo.

DEF. Sia (X,d) uno spazio metrico, sia, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_n : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, e sia $F_\infty : X\to\overline{\mathbb{R}}$.
Diciamo che "la successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ Gamma-converge a F_∞ su X", o brevemente "Γ- CONVERGE", scrivendo "$F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x)$" o "$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} F_\infty(x)$" per ogni $x\in X$, se sussistono le due seguenti condizioni.

LIMINF (inequality) $\forall x\in X$ e $\forall x_n \xrightarrow{d} x$, $\liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$.

LIMSUP (inequality) $\forall x\in X$, $\exists\ \overline{x}_n \xrightarrow{d} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\overline{x}_n) \leq F_\infty(x)$.

Una tale $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è sempre chiamata "recovery sequence per x relativamente a (F_n) e F_∞", ed in definizione è tale che $F_n(\overline{x}_n) \to F_\infty(x)$.

(Es.) Sia $F : X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, e sia $\overline{F} : X\to\overline{\mathbb{R}}$ il rilassato di F. Allora $F_n := F$, $n\in\mathbb{N}^*$, Γ-converge proprio a $F_\infty \equiv \overline{F}$. / (In particolare, l'operazione di Γ-limite NON è lineare!)

NOTA Naturalmente, il Γ-limite non esiste sempre. Però, quando esiste, è unico.
[Dim. Supponiamo $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} F(x)$ e $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} G(x)$ per ogni $x\in X$. Per simmetria basta ottenere $G\leq F$.
Ora infatti, $\forall x\in X$, se $\overline{x}_n \xrightarrow{d} x$ è tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\overline{x}_n) \leq F(x)$ (recovery per x relativa a (F_n) e F), allora $G(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(\overline{x}_n) \overset{(*)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} F_n(\overline{x}_n) \leq F(x)$. □]

NOTA Supponiamo che $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\Gamma} F_\infty(x)$ per ogni $x\in X$, e supponiamo anche che esiste $F : X\to\overline{\mathbb{R}}$ tale che $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ per ogni $x\in X$. Allora è vero che una LIMSUP vale anche per F ($\forall x\in X$, $\overline{x}_n := x$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$), ma in generale NON una LIMINF, ed infatti vale solo $\boxed{F_\infty \leq F}$.
[Dim. Ovvia proprio per la LIMINF, in quanto, $\forall x\in X$, $x \xrightarrow{d} x$. □]

DEF. Per ogni $x\in X$, definiamo "$\Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x) := \inf\{\liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \mid x_n \xrightarrow{d} x\}$" e "$\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x) := \inf\{\limsup_{n\to\infty} F_n(x_n) \mid x_n \xrightarrow{d} x\}$", e anche "$\Gamma^+\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x)$" e "$\Gamma^+\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x)$" come i precedenti "rispettivi" ma prendendo il sup invece che l'inf.
(Dunque, tali Gamma-$\liminf_n$ o $\limsup_n$, invece, esistono sempre.) (e restano funzioni $X\to\overline{\mathbb{R}}$)

PROP. (0) $\forall x\in X$, $\Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x)$ (evidente)
(1) $\Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n$ e $\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n$ sono s.c.i. su X.
(2) $\forall x\in X$, $\Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x) = \Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \iff \exists\ \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$, ed in tale

caso queste due funzioni coincidano (su X).

(3) Sia $F_\infty : X \to \overline{\mathbb{R}}$ che esiste e (F_n) verifica la LIMINF. Allora verifica pure la LIMSUP se (e solo se) esiste un denso in energia $D \subseteq X$ per F_∞ (in X) tale che, $\forall x \in D$, $\exists \bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$. (cioè $F_n(\bar{x}_n) \to F_\infty(x)$)

["Dim." ⚠ Mentre la (1) (?) è ovvia e la (⇐) della (2) è immediata, la (⇒) della (2) e (3) richiedono di lavorare con successioni a due indici e di utilizzare effettivamente il seguente, fondamentale risultato per esse.

▶ Sia $(z_{m,k})_{m\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}}$ in (Z,d) metrico, e sia $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Z e $z_\infty \in Z$.

$$
\begin{tikzcd}
z_{m,k} \arrow[r, "d"', "m\to\infty"] \arrow[dr, dashed, "?"'] & z_k \arrow[d, "d", "k\to\infty"'] \\
& z_\infty
\end{tikzcd}
$$

Se $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^k, \ z_{m,k} \xrightarrow[m\to\infty]{d} z_k, \\ z_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} z_\infty \end{cases}$, allora:

$\begin{cases} ▷ \ \exists\, k_m \uparrow_{m\to\infty} \infty \text{ tale che } z_{m,k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{d} z_\infty, \\ ▷ \ \exists\, m_k \uparrow_{k\to\infty} \infty \text{ tale che } z_{m_k,k} \xrightarrow[k\to\infty]{d} z_\infty. \end{cases}$

Ora, detto questo, sarebbe sicuramente istruttivo fare ragionamenti con successioni siffatte, se non fosse per il fatto che ricalcherebbero ragionamenti già fatti nella precedente sezione sul rilassamento, rivelandosi di conseguenza solo come complicazioni tecniche. Pertanto daremo per buono questo tutto, tranne qualcosa di (2) e tutto (3) che fungerà da esercizio sulle successioni a due indici. (dunque (1) si ignora)

(2) (⇐) Supposto che $\exists F_\infty(x) = \Gamma^-\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x)$, $x \in X$, vogliamo ottenere che $\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F_\infty(x) \le \Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x)$ per ogni $x \in X$. Ma infatti $F_\infty \le \Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n$ è ovvia confrontando la LIMINF con la def. di $\Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty}$, mentre $\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n \le F_\infty$ è immediata allo stesso modo confrontando la LIMSUP con la def. di $\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n$. /

(⇒) Poniamo, $\forall x \in X$, $F(x) := \Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \overset{(ii)}{=} \Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n(x)$, e vediamo come riusciamo a dire della LIMINF e della LIMSUP. $\boxed{\text{LIMINF}}$ $\forall x_n \xrightarrow{d} x$, $\liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \ge F(x)$ è ovvio, perché $F(x) = \Gamma^-\text{-}\liminf_{n\to\infty} F_n(x)$. / $\boxed{\text{LIMSUP}}$ $\forall x \in X$, $\exists \bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F(x)$? Ciò è come dimostrare che l'inf che definisce il $\Gamma^-\text{-}\limsup_{n\to\infty} F_n$ è in realtà un minimo (così come quello di $\Gamma^-\text{-}\liminf$), cosa questa analoga al teorema in $\boxed{2}$ del rilassamento ⟶ succ. a due indici ... /

(3) Sia $D \subseteq X$ un denso in energia per F_∞, per cui, $\forall x \in X$, $\exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D tale che

$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} x$ e $F_\infty(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_\infty(x)$. Ora, $\forall x\in X$, consideriamo dapprima $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$: per ipotesi, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\exists (\bar{x}_{m,k})_{m\in\mathbb{N}^*}$ in X tale che $\bar{x}_{m,k} \xrightarrow[m\to\infty]{d} x_k$ e $\limsup_{m\to\infty} F_m(\bar{x}_{m,k}) \le F_\infty(x_k)$, cioè $F_m(\bar{x}_{m,k}) \xrightarrow[m\to\infty]{} F_\infty(x_k)$ per l'ipotesi di LIMINF. Abbiamo così i due seguenti diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} \bar{x}_{m,k} & \xrightarrow[m\to\infty]{d} & x_k \\ & & \downarrow{\scriptstyle k\to\infty}\,d \\ & & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F_m(\bar{x}_{m,k}) & \xrightarrow[m\to\infty]{} & F_\infty(x_k) \\ & & \downarrow{\scriptstyle k\to\infty} \\ & & F_\infty(x) \end{array}$$

. Se ora $k_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$ è tale che $\bar{x}_{m,k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{d} x$ grazie al risultato richiesto sulle successioni a due indici in (X,d), allora d'altra parte $F_m(\bar{x}_{m,k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} F_\infty(x)$ perché "siamo" in $\overline{\mathbb{R}}$, e ciò conclude. □]

$\boxed{\text{IDEA BASE}}$ della Γ-convergenza nei problemi di minimo:

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\in X,\ \exists F_\infty(x) \doteq \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x) \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists x_n\in X\ \text{(GM) per } F_n \\ \exists x_\infty\in X \text{ tale che } \boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x_\infty} \end{array}\right. \Rightarrow x_\infty \text{ è (GM) per } F_\infty .$$

[Dim. Anzitutto $F_\infty(x_\infty) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n)$ per la LIMINF. Ora, $\forall x\in X$ qualsiasi, se $\bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ e $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$ (LIMSUP!), allora (usando che $F_n(x_n) \le F_n(\bar{x}_n)$ (x_n (GM) per F_n) $\forall n\in\mathbb{N}^*$) $F_\infty(x_\infty) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \underset{(\text{anzi } =)}{\le} F_\infty(x)$. □]

Generalizziamo tale idea nell'unico, vero risultato sulla Γ-convergenza che chiuderemo. Alla prima un fatto tecnico basilare al quale non aggiungiamo più prove.

$\boxed{\text{EX}}$ Supponiamo che, $\forall x\in X$, $\exists F_\infty(x) \doteq \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x)$, e sia $G: X\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Se G è ~~[illegible]~~ continua, oppure se G è $\underset{(3)}{\text{s.c.i.}}$ MA $\forall x\in X$, $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\infty(x)$, allora $\forall x\in X$,

$$F_\infty(x) + G(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} (F_n+G)(x) .$$

[Dim. $\boxed{\text{LIMINF}}$ $\forall x_n \xrightarrow{d} x$, $\liminf_{n\to\infty} (F_n+G)(x_n) \ge F_\infty(x)+G(x)$. Alle infatti vale la LIMINF per F_∞, e G in ogni caso è s.c.i., dunque $\liminf_{n\to\infty} [F_n(x_n)+G(x_n)] \underset{(\text{OK})}{\ge} \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) + \liminf_{n\to\infty} G(x_n) \ge F_\infty(x)+G(x)$. / $\boxed{\text{LIMSUP}}$ $\forall x\in X$, $\exists \bar{x}_n \xrightarrow{d} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} (F_n+G)(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)+G(x)$. Alle infatti, se G fosse continua, allora grazie alla LIMSUP per F_∞

prendersi $\bar{x}_n \overset{\partial}{\to} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$, che' tanto $G(\bar{x}_n) \to G(x)$. (Se invece sapessi solo che F_∞ è pure il limite puntuale delle F_n, allora semplicemente prendersi $\bar{x}_n := x$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\square$)

$\boxed{\text{OSS}}$ Se $F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ $\forall x \in X$, allora $F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(x)$ $\forall x \in X$ quale che sia $n_k \to \infty$.

[Dim. $\boxed{\text{LIMINF}}$ $\forall x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\overset{\partial}{\to}} x$, $\liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \ge F_\infty(x)$. Sia infatti completare (x_{n_k}) a (x_n), $x_n \doteq \begin{cases} x_{n_k} & \text{se } n_k = n \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, cosicché $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\partial}{\to}} x \overset{(i.)}{\Rightarrow} \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \ge F_\infty(x)$. Ma ora $\liminf_{k\to\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \ge \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n)$ è ovvio. ✓ $\boxed{\text{LIMSUP}}$ $\forall x \in X$, $\exists (\bar{x}_{n_k})$ in X tale che $\bar{x}_{n_k} \underset{k\to\infty}{\overset{\partial}{\to}} x$ e $\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(\bar{x}_{n_k}) \le F_\infty(x)$. Ma questo è ovvio prendendo $\bar{x}_n \underset{n\to\infty}{\overset{\partial}{\to}} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$ (recovery per x relativamente a F_∞). ✓ $\square$]

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FONDAMENTALE DELLA Γ-CONVERGENZA (per i problemi di minimo)).

Supponiamo che esiste $F_\infty(x) := \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ per ogni $x \in X$, e che esiste pure un (equi-) compatto $K \subseteq X$ non vuoto tale per cui, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{I_n := \inf_X F_n = \inf_K F_n}$ $\in \mathbb{R}$ (per ipotesi, sempre)

Allora vale che

(i) F_∞ ammette valor minimo su X, sia $m := \min_X F_\infty$, ed in realtà F_∞ lo assume su K;

(ii) $I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$

(iii) per ogni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in K tale che $F_n(x_n) - I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, se $n_k \to \infty$ è tale che $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\overset{\partial}{\to}} x_\infty$ per un certo $x_\infty \in X$ (anzi $x_\infty \in K$) allora $F_\infty(x_\infty) = m$.

[Dim. Cominciamo proprio col prendere una delle (x_n) in K tale che $|F_n(x_n) - I_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, e, quindi $n_k \to \infty$ tale che $x_{n_k} \overset{\partial}{\to} x_\infty$ per un $x_\infty \in K$ (ne esiste almeno una perché K è compatto!). Sia ora $I_\infty := \liminf_{n\to\infty} I_n$, e sia $m_k \to \infty$ tale che $I_\infty = \lim_{k\to\infty} I_{m_k}$: possiamo supporre che "$m_k = n_k$" (da (m_k) trovo "$(n_k) \subseteq (m_k)$", ecc). Vogliamo dimostrare che $F_\infty(x) \ge F_\infty(x_\infty)$ $\forall x \in X$ (da cui (iii) e (i)) e che $I_n \underset{n\to\infty}{\to} I_\infty$, nel senso che sia un "vero" limite, e, $\boxed{I_\infty = F_\infty(x_\infty)}$ $(= m)$, ossia (ii). Sia dunque $x \in X$ qualsiasi, e consideriamo $\bar{x}_n \overset{\partial}{\to} x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$ (RECOVERY): visto che, $\forall n$, $F_n(\bar{x}_n) \ge I_n$, otteniamo ovviamente $F_\infty(x) \ge \limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \ge \limsup_{n\to\infty} I_n \underset{(\text{ovvio})}{\ge} I_\infty$, quindi $F_\infty(x) \ge I_\infty$ per ogni $x\in X$. In particolare, $F_\infty(x_\infty)\ge I_\infty$. Ma, d'altra parte,

$I_\infty \doteq \lim_{k\to\infty} I_{m_k} \overset{(\text{i.c.})}{=} \underbrace{\lim_{k\to\infty}}_{(=\liminf_{k\to\infty})} F_{m_k}(x_{m_k}) \ge F_\infty(x)$ (usando la LIMINF di $F_{m_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\Gamma} F_\infty$), da

cui effetto $I_\infty = F_\infty(x_\infty)$: quindi non solo x_∞ è (GM) per F_∞ (risolto sopra), ma

tornando alla 1ª catena di $\ge$ otteniamo anche $\lim_{n\to\infty} I_n = I_\infty = F_\infty(x_\infty)$. □]

(mettendo $x=x_\infty$)

Applicazione interessante: moltiplicatori di Lagrange in dimensione finita.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Siano $m,k\in\mathbb{N}^*$, $x_0\in\mathbb{R}^m$, $\delta>0$, $f:\overline{B_\delta^{(m)}(x_0)}\to\mathbb{R}$ di classe C^1,

$\phi_i:\overline{B_\delta(x_0)}\to\mathbb{R}$ di classe C^1 per $i=1,\dots,k$, e $V \doteq \{x\in\overline{B_\delta(x_0)} \mid \phi_i(x)=0\ \forall i=1,\dots,k\}$.
("VINCOLO")

Se $x_0\in V$ e se $f(x)\ge f(x_0)$ per ogni $x\in V$, allora sussiste solo una fra le due seguenti possibilità (che quindi diventano "alternative"):

1) $\nabla\phi_1(x_0),\dots,\nabla\phi_k(x_0)$ sono linearmente dipendenti;

2) $\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ tali che $\nabla f(x_0)=\lambda_1\nabla\phi_1(x_0)+\dots+\lambda_k\nabla\phi_k(x_0)$.
("MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE")

[Dim. $\boxed{\text{I}}$ La tesi equivale alla condizione di avere rango $\le k$ per la matrice reale $m\times(k+1)$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \nabla f(x_0) & \nabla\phi_1(x_0) & \dots & \nabla\phi_k(x_0) \end{array}\right].$$

$\boxed{\text{II}}$ Possiamo supporre che $f(x)>f(x_0)$ per ogni $x\in V\setminus\{x_0\}$: per il caso generale, infatti, applicheremo il caso particolare a $f(x)+|x-x_0|^2$.

$\boxed{\text{III}}$ ("PENALIZZAZIONE DEL VINCOLO") Definiamo $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $F_n:\overline{B_\delta(x_0)}\to\mathbb{R}$, ponendo $\boxed{F_n(x):=f(x)+n\phi_1^2(x)+\dots+n\phi_k^2(x)}$ per ogni $n\in\mathbb{N}^*$ e $x\in\overline{B_\delta(x_0)}$. Allora, per compattezza di $\overline{B_\delta(x_0)}$, ogni F_n ha (GM) x_n su $\overline{B_\delta(x_0)}$. L'idea base nella def. delle F_n è che x_n non possa stare "troppo lontano" da V (dove le ϕ_i sono nulle), per $n\to\infty$ almeno; inoltre in F_n compare f, e ci sono i quadrati... Mostriamo che $\boxed{x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0}$ (a meno di sottosuccessioni), ma anzi dapprima verifichiamo che ciò basterebbe a concludere: ma infatti $x_n\to x_0$ $\Rightarrow$ (x_n) è definitivamente in $B_\delta(x_0)$ (aperta!) $\Rightarrow$ definitivamente $0=\nabla F_n(x_n) \overset{(\text{def.})}{=} \nabla f(x_n)+2n\phi_1(x_n)\nabla\phi_1(x_n)+\dots+2n\phi_k(x_n)\nabla\phi_k(x_n)$ $\Rightarrow$ definitivamente (in n)

Rango $\left[\begin{array}{c|c|c|c} \nabla f(x_n) & \nabla\phi_1(x_n) & \dots & \nabla\phi_k(x_n) \end{array}\right] \le k$. Ma $x\mapsto \text{Rango}\left[\nabla f(x)\,|\,\nabla\phi_1(x)\,|\dots|\,\nabla\phi_k(x)\right]$, $x\in B_\delta(x_0)$, è s.c.i., e $x_n \to x_0$! ✓ Per vedere infine che dovrà $x_n \to x_0$, premettiamo una osservazione elementare sulle F_n: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) \overset{(\phi_i^2)}{\le} F_n(x_n) \overset{(x_n \, (Gm))}{\le} F_n(x_0) \overset{(x_0 \in V)}{=} f(x_0)$. Ora, se $n_k \to \infty$ e $x_\infty \in \overline{B_\delta(x_0)}$ sono tali che $x_{n_k} \to x_\infty$ (compattezza), oltre che da $f(x_{n_k}) \le f(x_0)$ (e da $\boxed{\text{II}}$) deduciamo $\underset{(k\to\infty)}{}$ $f(x_\infty) \le f(x_0)$, e quindi che per forza $x_\infty \notin V$ se $x_\infty \neq x_0$. Se quindi, per assurdo, $x_\infty \neq x_0$, allora $x_\infty \notin V$ e cioè esiste almeno un $i \in \{1, \dots, k\}$ tale che $\phi_i(x_\infty) \neq 0$; di conseguenza, però, $F_{n_k}(x_{n_k}) \overset{(\phi_i^2)}{\ge}$

$$\ge \underbrace{f(x_{n_k})}_{\to f(x_\infty)} + \underbrace{n_k}_{\to\infty} \underbrace{\phi_i^2(x_{n_k})}_{\to \phi_i^2(x_\infty) \neq 0 \; (\text{anzi} > 0)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

mentre dovrebbe essere $F_{n_k}(x_{n_k}) \le f(x_0)$. □

Cosa c'entra la Γ-convergenza? C'entra che sostanzialmente $F_\infty : \overline{B_\delta(x_0)} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$F_\infty(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)}, \text{ è } F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n(x) \quad \forall x \in \overline{B_\delta(x_0)}.$$

Per cui, essendo tutto $\overline{B_\delta(x_0)}$ compatto $(=: K = X)$, possiamo tranquillamente trarre le stesse conclusioni del precedente teorema fondamentale della Γ-convergenza, ed in particolare che: se x_n è (Gm) per F_n (su $\overline{B_\delta(x_0)}$) per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, per cui $I_n = \min_{\overline{B_\delta(x_0)}} F_n \equiv F_n(x_n)$, e se $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_\infty$ per opportuni $n_k \to \infty$ e $x_\infty \in \overline{B_\delta(x_0)}$, allora x_∞ è (Gm) per F_∞, cioè necessariamente $x_\infty = x_0$. ✓ Verifichiamo dunque la Γ-convergenza dichiarata:
(tutto è in $\overline{B_\delta(x_0)}$)

$\boxed{\text{LIMINF}}$ $\forall x_n \to x$, $\liminf_{n\to\infty} F_n(x_n) \ge F_\infty(x)$. Infatti possiamo supporre che $\liminf_{n\to\infty} F_n(x_n)$ sia $< \infty$, e quindi necessariamente $x \in V$ (analogo a (sopra)). Ma $x \in V \Rightarrow F_\infty(x) = f(x)$, ed in effetti $F_n(x_n) \ge f(x_n) \; (\to f(x))$. ✓

$\boxed{\text{LIMSUP}}$ $\forall x \in \overline{B_\delta(x_0)}$, $\exists\, \bar{x}_n \to x$ tale che $\limsup_{n\to\infty} F_n(\bar{x}_n) \le F_\infty(x)$. Ma ciò è ovvio per convergenza puntuale delle F_n alle F_∞, e infatti basta prendere $\bar{x}_n := x \; \forall n \in \mathbb{N}^*$. ✓