(PROBABILITÀ SUPERIORE, 2017.)

~~(1) Equazioni differenziali rough: una stima e prova di un teorema di esistenza e unicità~~ ("deterministiche") . (FRIZ — HAIRER (A COURSE ON ROUGH PATHS), capitolo 8 (pagina 105), paragrafi 8.4 (pag. 105) e 8.5 (pag. 112) risp.) ~~(Marco Tarsia, 9 maggio 2017)~~

(MARCO TARSIA ; 9/5) (NOTE SINTETICHE)

INTRODUZIONE (cenni, TE(0100)) 1/2

SITUAZIONE / FRAMEWORK. $T>0$, $\alpha \in (0,1]$, $(V, |\cdot|_V)$ e $(W, |\cdot|_W)$ Banach reali ; $\xi \in W$, $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{C}^\infty_{(\text{almeno})}(W,W)$ e $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^\infty_{(\text{almeno})}(W, \mathcal{L}(V,W))$. (non-lineari)

~~(ad es., $f \in \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V,W)) \cong \mathcal{L}(W\times V, W) \underset{\text{dimensione FINITA}}{\cong} \mathcal{L}(W\otimes V, W)$.)~~

Sistema modellizzato da $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}$ ("coefficienti") $\Rightarrow$ determinare, per ogni $t\in[0,T]$, il/un segnale di output "regolare" $Y_t : [0,T] \to W$ (path) con $Y_0 = \xi$ soddisfacendo il sistema stesso al segnale di input "regolare" $X_t : [0,T] \to V$ (path!), in modo che in simboli

$$\begin{cases} dY_t = \mathcal{A}_0(Y_t)\,dt + \mathcal{A}(Y_t)\,dX_t \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

(NEL SENSO: il segnale Y_t, che per $t=0$ è ξ, si evolve in base e nel tempo tramite $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}$, ed è nel mentre "guidato" dal segnale X_t)

("controlled ODEs" (o S)) (ad orizzonte finito) (e autonome)

(ES. (Banach finito-dimensionali.) $V = \mathbb{R}^d$ e $W = \mathbb{R}^m$, $d,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$\Rightarrow \quad Y_t = \begin{bmatrix} Y^1_t \\ \vdots \\ Y^m_t \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} X^1_t \\ \vdots \\ X^d_t \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_0(y_1,\dots,y_m) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^1_0(y_1,\dots,y_m) \\ \vdots \\ \mathcal{A}^m_0(y_1,\dots,y_m) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}(y_1,\dots,y_m) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{1,1}(y_1,\dots,y_m) & \cdots & \mathcal{A}^{1,d}(y_1,\dots,y_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}^{m,1}(y_1,\dots,y_m) & \cdots & \mathcal{A}^{m,d}(y_1,\dots,y_m) \end{bmatrix}.)$$

(!) Ci stiamo occupando solo della costruzione / ~~breve~~ definizione della mappa-soluzione $S : X = (X_t)_{t\in[0,T]} \longmapsto Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$. Rimandiamo al seguito il problema della misurabilità / continuità di S …… (→ "stabilità")

[⇝ mappa di Itô, teorema di Lyons (Terry), mappa di Itô-Lyons ……]
(⇝ le "patate" di Francesco)

Regolarità (analitica) di X e di Y : $\begin{cases} X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V) \text{ e} \\ Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], W) \end{cases}$.

((!) $\alpha \le \frac{1}{2}$!) (→ NON-smooth) (e nemmeno Young)

IDEA (per le X) : che X sia "sollevabile" ad un rough path
(quindi, i dettagli tecnici dopo!)

$\mathbf{X} := (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$, cosicché si saprà integrare (le componenti di) X contro (le componenti di) X stesso, e avere quindi "Y simile a X" $\rightsquigarrow$ Y una funzione regolare di X, o più in generale "Y controllato da X (nel senso di Gubinelli)". [$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{IDEA (conseguente) per i coefficienti } f \text{ e } f_0}$: che siano molto più che continui, diciamo in un qualche C^k_b (ossia derivabili almeno k volte nel senso di Fréchet, con derivate continue e limitate).]

[In effetti, il/un segnale di output $Y = (Y_t)_{t \in [0,T]}$ desiderato dovrebbe possedere "small-scale fluctuations" della forma ("approssimazioni locali")

$$\boxed{\underbrace{Y_{s,t}}_{\substack{\parallel \\ (Y_t - Y_s)}} = f(Y_s)\underbrace{X_{s,t}}_{\substack{\parallel \\ (X_t - X_s)}} + \underbrace{R_{s,t}}_{\text{un resto di ordine "buono"}}}$$

, dove $0 \le s \lesssim t \le T$ e dove...

(incrementi) ("path increment")

Dunque, appunto, se sappiamo "fare" $\int_s^t X^i_{s,r}\, dX^j_r = \int_s^t (X^i_r - X^i_s)\, dX^j_r$, e se $\begin{cases} Y \text{ è "simile" a } X \\ f \text{ (e } f_0\text{) regolare} \end{cases}$, allora anche $f(Y)$ è "simile" a X e sapremmo "fare"

$\int_0^t f(Y_r)\, d\mathbf{X}_r$.] (Vedi richiami successivi...)

Per ciò, interpretiamo la/una soluzione Y della GODE

$$\begin{cases} dY = f_0(Y)\,dt + f(Y)\,dX_t \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

, anzi della GODE rough

$$\begin{cases} dY = f_0(Y)\,dt + f(Y)\,d\mathbf{X}_t \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

(considerando come essenziale la scelta di $X \mapsto \mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ rough path),

come la/una soluzione Y dell'equazione integrale rough

$$\boxed{Y_t = \xi + \underbrace{\int_0^t f_0(Y_s)\,ds}_{\text{(Riemann-Stieltjes)}} + \underbrace{\int_0^t f(Y_s)\,d\mathbf{X}_s}_{\text{(int. rough di Gubinelli)}}}\ .$$

[La forma differenziale del problema è una notazione!]

Foglio (2) Dovrà quindi essere, più precisamente, $\boxed{\frac{1}{3} < \alpha \le \frac{1}{2}}$. (Per poterci appoggiare sulle "Lyons' rough path analysis" che conosciamo.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Invece, per essere sicuri che un cammino (path) $X_t \in C^\alpha([0,T],V)$ ammetta un sollevamento rough path $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, dovremmo supporre anche $\alpha \neq \frac{1}{2}$, e meno che $\dim V < \infty$. [Teorema di Lyons–Victoir.])

In realtà, anche T non può essere arbitrario, in generale, in quanto potrebbe benissimo accadere quanto segue: che l'esistenza di un path-soluzione Y di $dY = f_0(Y)dt + f(Y)d\mathbf{X}_t$ con $Y_0 = \xi$, ossia di $Y_\cdot = \xi + \int_0^\cdot f_0(Y_s)ds + \int_0^\cdot f(Y_s)d\mathbf{X}_s$, e meglio che sia anche unica, può solo su un intervallo $[0,T_0]$ con $0 < T_0 \ll 1$, e non su un intervallo $[0,T]$ di durata magari anche arbitrariamente grande. Detto diversamente, la/una soluzione potrebbe esistere solo localmente.

$\boxed{\text{Ecco infatti come procederemo}}$ (più o meno):

UN'OPPORTUNA STIMA A PRIORI (PROPOSIZIONE 8.3, pagina 109) ("un mezzo")

NO

(TEOREMA DELLE CONTRAZIONI) → ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALI (su $[0,T_0]$, T_0 (>0) sufficientemente piccolo)

→ (imm.) ESISTENZA (ED UNICITÀ) GLOBALE (su $[0,T]$ arbitrario, con $T \in (0,\infty)$)

+

UN TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ GLOBALI! (OBIETTIVO)

(TEOREMA 8.4, pagina 112)

Sotto opportune ipotesi di regolarità

Il tutto sarà prevalentemente questione di opportune stime in norma, o meglio in semi-norma. Cominciamo ordinatamente (le cose) con quelle notazioni e quelle teorie rough, più o meno classiche, che ci permetteranno di raggiungere tale obiettivo.

[**RIFERIMENTI** (FRIZ – HAIRER). Questa introduzione: CAPITOLO 1, PAR. 1.1 (il piano), e "qualcosa" dei CAPITOLI 2, 4 e 8. Richiami che faremo ora: CAPITOLO 1, PAR. 1.4 e 1.5 (gli ultimi due), e CAPITOLI 2, 1° par., 4, 3° par., 7, 3° par. (Più o meno ......)] (--> Insomma, i capitoli 1, 2, 4 e 7.)

PRELIMINARI (continuando l'introduzione)

PRODOTTO TENSORIALE (solo spazi vettoriali). Ricordiamo solo l'isomorfismo (lineare) fondamentale

$$\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V,W)) \overset{\text{(facile)}}{\cong} \mathcal{L}(U\times V, W) \underset{\dim = \infty:\ \hookrightarrow}{\overset{\dim<\infty:\ \cong}{\longrightarrow}} \mathcal{L}(U\otimes V, W).$$

(l'inclusione)

(È che, se $(U,|\cdot|)$ e $(V,|\cdot|)$ sono Banach, allora anche $(U\otimes V, |\cdot|_{U\otimes V})$ è Banach (per un'opportuna $|\cdot|_{U\otimes V}$))

[In particolare, ad esempio, $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(W,\overline{W}))) \underset{(\text{o } \cong)}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(U\otimes V, \mathcal{L}(W,\overline{W}))$.]

DERIVATE DI FRÉCHET (di una funzione fra Banach). Ricordiamo solo che, dati $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $W,\overline{W}$ Banach reali, "$F\in C^k_b(W,\overline{W})$" se e solo se (per definizione) $F: W\to\overline{W}$ Fréchet-derivabile k volte (almeno) con derivate continue e limitate ("rispetto" ai relativi domini e codomini), ed in tal caso F ha norma-C^k_b (per def.)

$$\|F\|_{C^k_b} \overset{(\text{def.})}{=} \sum_{h=0}^{k} \|D^hF\|_\infty = \|F\|_\infty + \|DF\|_\infty + \|D^2F\|_\infty + \ldots + \|D^kF\|_\infty \quad (<\infty).$$

NOTA Dato che $F: W\to\overline{W}$, abbiamo che, $\forall w\in W$, e $\forall h=1,\ldots,k$,

$$D^hF(w) \in \mathcal{L}(W^{h}, \overline{W}) \hookrightarrow \mathcal{L}(\underbrace{W\otimes\ldots\otimes W}_{(h \text{ volte})}, \overline{W}).$$

In pratica,

$$DF(w)\in\mathcal{L}(W,\overline{W}), \quad D^2F(w)\in\mathcal{L}(W,\mathcal{L}(W,\overline{W})) \cong \mathcal{L}(W\times W,\overline{W}) \hookrightarrow \mathcal{L}(W\otimes W,\overline{W}), \text{ ecc.}$$

CAMMINI α-HÖLDER (paths): lo spazio $\boxed{C^\alpha}$. Ricordiamo che "$X\in C^\alpha([0,T],V)$" ($\alpha\in(0,1]$) ($(V,|\cdot|)$ Banach) se e solo se (per def.) $X=(X_t)_{t\in[0,T]} : [0,T]\to V$ è tale per cui $\exists C\in(0,\infty)$ tale che, $\forall s,t\in[0,T]$, $|X_t - X_s|_V \le C|t-s|^\alpha$, o cioè

$$\boxed{|X_{s,t}| \le C|t-s|^\alpha}$$

(se $X_{s,t} \overset{(\text{def.})}{=} X_t - X_s$ è il path increment), ed in tal caso la costante C ottimale è la semi-norma-C^α di X

$$\boxed{[X]_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \sup_{0\le s<t\le T} \frac{|X_{s,t}|_V}{|t-s|^\alpha}} \quad (<\infty).$$

Invece,

$$\boxed{\|X\|_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{|X_0|_V + [X]_\alpha}_{(\text{ad esempio})}}$$

è la norma-C^α di X. (e $(C^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ è di Banach)

3) FUNZIONI SU $[0,T]^2$ "α-HÖLDER-DIAGONALI": LO SPAZIO $\boxed{\mathcal{C}_2^\alpha}$.
("2-CAMMINI")

Dati $(U,|\cdot|)$ Banach (reale) e data una funzione in U di due parametri in $[0,T]$

$\Xi : [0,T]^2_{(s,t)} \to U$ continua, introduciamo, per ogni $(s,t)\in[0,T]^2$,

(Xi)

$$\boxed{\Xi_{s,t} := \Xi(s,t)}$$ (NON è un incremento, in generale!). Allora "$\Xi \in \mathcal{C}_2^\alpha([0,T],U)$"

se e solo se, per definizione, $\exists\, C\in(0,\infty)$ tale che, $\forall (s,t)\in[0,T]^2$,

$$\boxed{|\Xi_{s,t}|_U \le C\,|t-s|^\alpha}$$, ed in tal caso la costante C ottimale è la seminorma-$\mathcal{C}_2^\alpha$ di Ξ

$$\boxed{[\Xi]_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \sup_{s\neq t \text{ in } [0,T]} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}}\ .$$

(**NOTA** Per $\alpha\ge 1$, mentre ogni elemento di $\mathcal{C}^\alpha$ è un path costante, la "maggior parte" degli elementi di $\mathcal{C}_2^\alpha$ restano non-banali, chiaramente, e questo ci piace molto se precisamente $\alpha>1$ e se Ξ è un termine di errore.

Infatti, comunque prendiamo $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $0=:t_0<t_1<\dots<t_{N-1}<t_N:=T$, se indichiamo con $\pi_N := \{[t_{i-1},t_i] \mid i=1,\dots,N\}$ $(\Rightarrow \#\pi_N = N)$ e con $|\pi_N| := \sup_{k=1,\dots,N}|t_k-t_{k-1}|$ $\left(=\max_{k=1,\dots,N}(t_k-t_{k-1})\right)$, e se vogliamo mandare "$|\pi_N|\to 0$" (per $N\to\infty$) ("infittendo t_i"), allora vediamo che

$$\sum_{[s,t]\in\pi_N}|\Xi_{s,t}| \underset{(|\Xi_{s,t}|\le C|t-s|^\alpha)}{\le} C\cdot\sum_{[s,t]\in\pi_N}|t-s|^\alpha \overset{(\text{ovvio})}{=} C\cdot\sum_{[s,t]\in\pi_N}|t-s|^{\alpha-1}\cdot|t-s| \le \quad (|t-s|\le|\pi_N| \text{ e } \alpha-1>0)$$

$$\le C\cdot|\pi_N|^{\alpha-1}\underbrace{\sum_{[s,t]\in\pi_N}(t-s)}_{(=T)} = C\cdot T\,|\pi_N|^{\alpha-1} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(NOTAZIONE CONOSCIUTA!)}}}{\text{“}\lesssim\text{”}} |\pi_N|^{\alpha-1} \xrightarrow[|\pi_N|\to 0]{} 0 \quad (\alpha-1>0!).)$$

NOTAZIONI (e osservazioni) (naturali). Dato $X\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, e dato quindi $I\subseteq[0,T]$ intervallo (non vuoto), poniamo

$$\boxed{[X]_{\alpha;I} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{s<t \text{ in } I}\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}}$$ come la seminorma-$\mathcal{C}^\alpha$

del path ristretto $X|_I : I\to V$. (In effetti, $[X]_{\alpha;I}\le[X]_\alpha$, e $[X]_{\alpha;[0,T]}=[X]_\alpha$.) Dunque, per ogni $h\in(0,T]$, poniamo

$$\boxed{[X]_{\alpha;h} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{I\subseteq[0,T] \text{ intervallo},\\ 0<\text{lungh}(I)\le h}}[X]_{\alpha;I}}$$, ed in particolare otteniamo che

$[X]_\alpha \ge [X]_{\alpha;h}$ $\left(\ge [X]_{\alpha;I}\ \ \forall\, |I|\le h\right)$, e $[X]_{\alpha;T}=[X]_\alpha$.

Analogamente, dato $\Xi \in C_2^\alpha([0,T],U)$ e dato $I \subseteq [0,T]$ intervallo (non $\emptyset$) poniamo $\boxed{[\Xi]_{\alpha;I} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{s\neq t \text{ in } I} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}}$ $\left(\overset{\text{(def.)}}{=} [\Xi|_{I^2}]_\alpha\right)$, per cui $[\Xi]_{\alpha;I} \leq$ $\leq [\Xi]_\alpha$ e $[\Xi]_{\alpha;[0,T]} = [\Xi]_\alpha$. Dato infine $h \in (0,T]$, poniamo $\boxed{[\Xi]_{\alpha;h} \overset{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{I\subseteq[0,T] \text{ intervallo},\\ 0<\text{lungh}(I)\leq h}} [\Xi]_{\alpha;h}}$, per cui $[\Xi]_{\alpha;T} = [\Xi]_\alpha \geq [\Xi]_{\alpha;h}$.
$(\geq [\Xi]_{\alpha;I}$ ecc.....

(UN PAIO DI) OSSERVAZIONI. (elementari) $\boxed{1}$ Se $0\leq\alpha<\beta\leq 1$, allora $C^\beta \hookrightarrow C^\alpha$ e $C_2^\beta \hookrightarrow C_2^\alpha$. (su $[0,T]$)
Precisamente, infatti, vale per "entrambi" gli spazi che $\boxed{[\cdot]_{\alpha;T} \leq T^{\beta-\alpha}[\cdot]_{\beta;T}}$.
[⊙ Sia $X_t:[0,T]\to V$ tale per cui $\exists C\in(0,\infty)$ tale che, $\forall 0\leq s<t\leq T$, valga $|X_{s,t}|\leq C|t-s|^\beta$: allora, $\forall\, 0\leq s<t\leq T$, $|X_{s,t}| \overset{\text{(imm.)}}{\leq} C|t-s|^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha \underset{(\beta-\alpha>0)}{\leq} CT^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha$, per cui $[X]_{\alpha;T} \leq CT^{\beta-\alpha}$; basta ora prendere $C:=[X]_{\beta;T}$. ✓
⊙ È del tutto analogo per $\Xi_{s,t}\in C_2^\beta$: $\Xi_{s,t} \leq C|t-s|^\beta = C|t-s|^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha \leq$ $\leq CT^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha$. ✓]

$\boxed{2}$ Quali che siano $\alpha\in(0,1]$, $h\in(0,T]$ e $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, vale che, per ogni $X\in$ $\in C^\alpha([0,T],V)$, $\boxed{[X]_{\alpha;h} \leq m[X]_{\alpha;\frac{h}{m}}}$.
[Il caso $m=2$ fa capire del tutto il caso generale, per cui dimostriamo che, per ogni $0\leq s<t\leq T$ con $t-s\leq h$, vale $|X_{s,t}|\leq 2[X]_{\alpha;\frac{h}{2}}\cdot(t-s)^\alpha$. Sia per questo $s_1 := \frac{t+s}{2}$ $\left(= s+\frac{t-s}{2} = t-\frac{t-s}{2}\right)$, quindi $|X_{s,t}| \overset{\text{(imm.)}}{\leq} |X_{s_1,t}|+|X_{s,s_1}| \leq$ $\leq [X]_{\alpha;\frac{h}{2}}\left((t-s_1)^\alpha+(s_1-s)^\alpha\right) \overset{\text{(imm.)}}{=} 2[X]_{\alpha;\frac{h}{2}}\left(\frac{t-s}{2}\right)^\alpha \leq 2[X]_{\alpha;\frac{h}{2}}(t-s)^\alpha$ $\left(\frac{t-s}{2}\leq\frac{h}{2}\right)$ (perché $2^{-\alpha}\leq 1$ per $\alpha\geq 0$). ✓]

UN ESERCIZIO. (elementare) (Esercizio 4.24 del libro, pagina 65.) Siano $\alpha\in(0,1]$, $T>0$, $h\in(0,T]$ (con "$X=Z$") e $X:[0,T]\to V$ tali che esiste $M\in(0,\infty)$ tale per cui risulti
$[X]_{\alpha;h} \overset{\text{(def.)}}{=} \sup_{\substack{0\leq s<t\leq T,\\ t-s\leq h}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq M$. Allora $X\in C^\alpha([0,T],V)$ e (ché "I_h" $\in(0,T]$!)
ha $[X]_\alpha \leq M\left(1\vee 2\left(\frac{T}{h}\right)^{1-\alpha}\right) = M\left(1\vee 2T^{1-\alpha}h^{-(1-\alpha)}\right)$. ($\leftarrow \forall a,b\in\mathbb{R}$ $a\vee b \doteq \max\{a,b\}$)
(sul libro manca!) (comunque, è ≤ 1 per $T\leq 1$!)
(NOTA: $0\leq 1-\alpha<1$.)
[Sapendo che, $\forall 0\leq s<t\leq T$ con $t-s\leq h$, vale $|X_{s,t}|\leq M|t-s|^\alpha$, vogliamo dimostrare che, $\forall 0\leq s<t\leq T$, $|X_{s,t}|\leq \max\{M, 2MT^{1-\alpha}h^{\alpha-1}\}\cdot|t-s|^\alpha$, e cioè chiaramente

Foglio

4) che, $\forall\, 0 \le s < t \le T$ con $\boxed{t-s \ge h}$, risulti $|X_{s,t}| \le 2MT^{1-\alpha} h^{\alpha-1} |t-s|^{\alpha}$.
Per ottenere questo (usando di nuovo le ipotesi), consideriamo $0 \le s < t \le T$ con $t-s \ge h$ e i punti di $[s,t]$ della forma $s_i \doteq (s+ih)\wedge t$, $i \in \mathbb{N}$ (dove, $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \wedge b \doteq \min\{a,b\}$), tali che evidentemente sono definitivamente coincidenti con t, in quanto per l'esattezza $s_i = t$ per ogni $i \ge \frac{t-s}{h}$, per cui tali s_i sono in numerosità al più $1 + \frac{t-s}{h}$. Inoltre, $\forall i \in \mathbb{N}$, $s_{i+1} - s_i \le h$, e pertanto

$$X_{s,t} = \sum_{0 \le i \le \frac{t-s}{h}} X_{s_i,s_{i+1}} \quad \text{che} \quad |X_{s,t}| \overset{(d.t.)}{\le} \sum_{0 \le i \le \frac{t-s}{h}} |X_{s_i,s_{i+1}}| \overset{(ip.)}{\le} Mh^{\alpha}\left(1 + \frac{t-s}{h}\right) \overset{(ovvio)}{=}$$

$$= Mh^{\alpha-1}\left(h + (t-s)\right) \overset{(h \le t-s)}{\le} 2Mh^{\alpha-1}(t-s) \overset{(ovvio)}{=} 2Mh^{\alpha-1}\underbrace{(t-s)^{1-\alpha}}_{(\le T^{1-\alpha})}(t-s)^{\alpha}. \ \diamond \Big]$$

ROUGH PATHS α-HÖLDER: ("sentieri impervi" (cammini irregolari)) Lo spazio $\mathscr{C}^{\alpha}$ (deterministici). Una coppia "$\mathbf{X} \doteq (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T],V)$" (relazione analitica)
dove $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, se e solo se (per definizione) $X_t \in C^{\alpha}([0,T],V)$, $\mathbb{X}_{s,t} \in C_2^{2\alpha}([0,T], V \otimes V)$ (processo del "second'ordine")
e soddisfano la "relazione di Chen" (tipo "triangolare"): $\forall\, 0 \le s \le u \le t \le T$,

$$\boxed{\underbrace{\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t}}_{\text{(lineari)}} \underbrace{=}_{\text{(relazione algebrica)}} \underbrace{X_{s,u} \otimes X_{u,t}}_{\text{(quadratica)}}} \left(\doteq (X_u - X_s) \otimes (X_t - X_u)\right).$$

$(\mathbf{X} = (X,\mathbb{X})$ è un ROUGH PATH$) \Longleftrightarrow (\mathbf{X} = (X,\mathbb{X})$ è α-HÖLDER$)$

[Se $V = \mathbb{R}^d$, allora, $\forall i,j = 1,\dots,d$, $\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} - \mathbb{X}^{i,j}_{s,u} - \mathbb{X}^{i,j}_{u,t} = X^{i}_{s,u} \cdot X^{j}_{u,t}$.]

In tal caso, introduciamo

$$\boxed{\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r \overset{(def.)}{\doteq} \mathbb{X}_{s,t}} \quad \forall\, 0 \le s \le t \le T,$$

($\to$ Sappiamo integrare X anche sé stesso nel senso che abbiamo un sollevamento dagli $\mathbb{X}$ di X.)

[Se $V = \mathbb{R}^d$, allora, $\forall i,j = 1,\dots,d$, $\mathbb{X}^{i,j}_{s,t} \doteq \int_s^t X^{i}_{s,r}\, dX^{j}_r$.]

e lo chiamiamo "integrale (2-)iterato di X".
Consideriamo in particolare che $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$ è tale che $(2\alpha \le 1!)$

$$[X]_{\alpha} \overset{(def.)}{\doteq} \sup_{0 \le s < t \le T} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty \quad \text{e pure} \quad [\mathbb{X}]_{2\alpha} \overset{(def.)}{\doteq} \sup_{s \ne t \text{ in } [0,T]} \frac{|\mathbb{X}_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty.$$

NOTA. Lo spazio $\mathscr{C}^{\alpha}$ è "del tutto" non-lineare (non-vettoriale)! Inoltre, nonostante $\mathbb{X}$ sia a due parametri (base), la sua "conoscenza" equivale alla conoscenza del cammino $t \mapsto \mathbb{X}_{0,t}$, $[0,T] \to V \otimes V$, data anche quella di X, e questo grazie alla relazione di Chen.
[Da cui la locuzione "path" anche per $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$.]

Per $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T],V)$, è definita la seminorma-$\mathscr{C}^{\alpha}$ di $\mathbf{X}$ (omogenea!)

$$\boxed{\|\mathbf{X}\|_{\alpha} \overset{def.}{\doteq} [X]_{\alpha} + [\mathbb{X}]_{2\alpha}^{1/2}} \quad \left(= [X]_{\alpha} + \sqrt{[\mathbb{X}]_{2\alpha}}\right).$$

CAMMINI α-HÖLDER CONTROLLATI : Lo SPAZIO $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$. Dato $(\overline{W}, |\cdot|)$ Banach (reale) e
(o rough paths α-hölder controllati ......) (sarà o $\overline{W}=W$, o $\overline{W}=\mathcal{L}(V,W)$)
dato $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ dove $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, una coppia "$(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$" se, e solo se, (per definizione) $Y\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\overline{W})$ mentre $Y'\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,\overline{W}))$ è tale che risulti

$$Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} = \mathcal{O}(|t-s|^{2\alpha}) \quad (\text{"O grande"}), \quad s,t\in[0,T].$$

In altri termini, definito $R^Y: [0,T]^2\to\overline{W}$ come $R^Y_{s,t} \stackrel{def.}{=} Y_{s,t}-Y'_sX_{s,t}$, $(s,t)\in[0,T]^2$, risulta (per def.) (che sta in $\mathcal{C}_2^\alpha$)

$$R^Y\in\mathcal{C}_2^{2\alpha}([0,T],\overline{W}),$$

o cioè che ($R^Y\equiv R^{(Y,Y')}$)

$$[R^Y]_{2\alpha} \stackrel{(def.)}{=} \sup_{s\neq t \text{ in } [0,T]} \frac{|R^Y_{s,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} <\infty.$$

In tal caso, Y ammette uno sviluppo "al second'ordine"

$$Y_{s,t}=Y'_sX_{s,t}+R^Y_{s,t},$$

e Y' è "UNA DERIVATA DI GUBINELLI DI Y (RISPETTO A X)". (o "derivata Gubinelli") (un resto di "ordine due"!)

[**NOTA.** (Non-unicità delle derivate di Gubinelli: X, Y "regolari".) Se $X\in\mathcal{C}^{2\alpha}([0,T],V)$ e "anche" $Y\in\mathcal{C}^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$, allora ogni $Y'\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,\overline{W}))$ è una derivata di G. di Y (rispetto a X), essendo in particolare che $Y'\in\mathcal{C}^\alpha$ è continua.]

Esempio. (Lemma 4.1, pagina 49.) (Lyons) Dato $X\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ dove $\alpha\le\frac{1}{2}$, e data una funzione $F\in\mathcal{C}_b^2(V,\mathcal{L}(V,W))$, definiamo $Y_t=F(X_t)$ e $Y'_t=DF(X_t)$ per ogni $t\in[0,T]$, cosicché $Y=(Y_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ mentre $Y'=(Y'_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(V,W)))$ ($\cong\mathcal{L}(V\otimes V,W)$). [Con $[Y]_\alpha\le\|DF\|_\infty[X]_\alpha$ e $[Y']_\alpha\le\|D^2F\|_\infty[X]_\alpha$.]
Abbiamo, in realtà $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$. [Con $[R^Y]_{2\alpha}\le\frac{1}{2}\|D^2F\|_\infty[X]_\alpha^2$.]
(Brevemente: se $F\in\mathcal{C}_b^2$, allora $(F(X),DF(X))\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$.)

Grazie in particolare alla linearità degli "spazi $\mathcal{C}^\alpha$ e $\mathcal{C}_2^{2\alpha}$", riconosciamo subito che pure lo spazio $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$ è lineare (vettoriale). Precisamente, dato $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$, vale che, per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda Y,\lambda Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^{\lambda Y}=\lambda R^Y$, e vale che, per ogni altro $(\tilde{Y},\tilde{Y}')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$, $(Y+\tilde{Y}, Y'+\tilde{Y}')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^{Y+\tilde{Y}}=R^Y+R^{\tilde{Y}}$. In particolare, $(\lambda Y)'=\lambda Y'$ e $(Y+\tilde{Y})'=Y'+\tilde{Y}'$ (come possibili scelte delle rispettive derivate di Gubinelli (rispetto a X)).

APPLICAZIONE (BANALOTTA) (ma utile). Quale che sia $\xi\in\overline{W}$, il path costante $\equiv\xi$ ammette derivata di G. $\equiv 0_{\mathcal{L}(V,\overline{W})}$ e resto relativo $R^\xi\equiv 0_{\overline{W}}$: brevemente, $(\xi,0)\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^\xi\equiv0$. Dunque, dato $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}$, vale che

FOGLIO 5

$(Y+\xi, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ con $R^{Y+\xi} = R^Y$; in particolare, $(Y+\xi)' = Y'$.

Per $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$, è definita la seminorma-$\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ di (Y,Y')

$$\boxed{[(Y,Y')]_{X,2\alpha} \overset{def.}{=} [Y']_\alpha + [R^Y]_{2\alpha}}$$

, e quindi la norma-$\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ di (Y,Y')

$$\boxed{\|(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \overset{def.}{=} |Y_0|_{\overline{W}} + |Y_0'|_{\mathcal{L}(V,\overline{W})} + [(Y,Y')]_{X,2\alpha}}$$

. (È possibile dimostrare che $(\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W}), \|\cdot\|_{X,2\alpha})$ è uno spazio di Banach.)

NOTA (banalotta) Dato $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ e dato $\xi \in \overline{W}$, vale $[(Y+\xi,Y')]_{X,2\alpha} = [(Y,Y')]_{X,2\alpha}$.

UNA STIMA. (elementare) (Pag. 56) Esiste una costante $C_{\alpha,T} \in (0,\infty)$ (dipendente solo da α e T) tale che, per ogni $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\overline{W})$, valga la „doppia stima"

$$[Y]_\alpha \le [R^Y]_\alpha + \|Y'\|_\infty [X]_\alpha \le C_{\alpha,T}(1+[X]_\alpha)(|Y_0'| + [(Y,Y')]_{X,2\alpha}).$$

(Inoltre (facile...), nel caso che sia $T \le 1$, $C_{\alpha,T}$ può essere scelta uniformemente nella T; dunque, "$C_{\alpha,T} = C_\alpha$".)

TEOREMA DI GUBINELLI. (Teorema 4.10, pag. 57.) (Dimostrato da Carmine.) Siano $T>0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V,|\cdot|)$ e $(W,|\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ e $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$ (per cui $Y_t' \in \mathcal{L}(V\otimes V, W)$), con $R^Y_{s,t} \overset{(def.)}{=} Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}$, $(s,t) \in [0,T]^2$.
Allora, per ogni $0 \le s \le t \le T$ e per ogni partizione π_N di $[s,t]$ (...), esiste ed è indipendente da π_N stessa il limite (in W)

$$\boxed{\int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r \overset{def.}{=} \lim_{|\pi_N| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi_N} (Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v})}$$

, che chiamiamo "L'INTEGRALE (DI GUBINELLI) SU $[s,t]$ DI Y (QUASI, (Y,Y')) CONTRO $\mathbf{X}$". Inoltre, valgono le due seguenti stime:

$\boxed{1}$ esiste una costante $C_{\alpha,T} \in (0,\infty)$ tale che, per ogni $0 \le s \le t \le T$, risulti

$$\left| \int_s^t Y_r \, d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t} \right|_W \le C_{\alpha,T} \left([X]_{\alpha;[s,t]} [R^Y]_{2\alpha;[s,t]} + [\mathbb{X}]_{2\alpha;[s,t]} [Y']_{\alpha;[s,t]} \right) |t-s|^{3\alpha},$$

ed inoltre, nel caso $T \le 1$, possiamo scegliere $C_{\alpha,T} = C_\alpha$;

$\boxed{2}$ è $(\int_0^\cdot Y \, d\mathbf{X}, Y_\cdot) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ (per cui $(\int_0^\cdot Y \, d\mathbf{X})' = Y_\cdot$), e che

$$\left[\left(\int_0^\cdot Y \, d\mathbf{X}, Y_\cdot\right) \right]_{X,2\alpha} \le [Y]_\alpha + \|Y'\|_\infty [\mathbb{X}]_{2\alpha} + C_{\alpha,T} \left([X]_\alpha [R^Y]_{2\alpha} + [\mathbb{X}]_{2\alpha} [Y']_\alpha \right).$$

(Ed inoltre (facile...), se $T \le 1$, allora $C_{\alpha,T} = C_\alpha$.)

OSS. (IMM.) Dalle $\boxed{1}$ segue subito che $\left|\int_s^t Y_{s,r}\, d\mathbf{X}_r\right| \le \|Y'\|_\infty |\mathbb{X}_{s,t}| + O_{\mathbf{X},(Y,Y'),\alpha,T}(|t-s|^{3\alpha})$.

Invece, dalla $\boxed{2}$ segue che la mappa $(Y,Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W)) \longmapsto \left(\int_0^{\cdot} Y\,d\mathbf{X}, Y.\right) \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ è $\|\cdot\|_{X,2\alpha}$ - continua (oltre che lineare).

"LEMMA 7.3". (Lemma 7.3, pag. 97.) (Dimostrato da Umberto.) Siano $T>0$, $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, $(V,|\cdot|)$, $(W,|\cdot|)$ e $(\bar W,|\cdot|)$ Banach (reali), e siano $X\in C^\alpha([0,T],V)$ e $(Y,Y')\in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ ($\Rightarrow Y'_t\in\mathcal{L}(V,W)$). Allora, quale che sia $\boxed{f\in C_b^2(W,\bar W)}$ ($\Rightarrow \forall w\in W,\ Df(w)\in\mathcal{L}(W,\bar W)$), se poniamo, per ogni $t\in[0,T]$,

$f(Y)_t \overset{def.}{=} f(Y_t)$ ($\Rightarrow f(Y):[0,T]\to\bar W$) e $f(Y)'_t \overset{def.}{=} Df(Y_t)\circ Y'_t$ ($\Rightarrow f(Y)':[0,T]\to\mathcal{L}(V,\bar W)$), allora vale che

$(f(Y), f(Y)')\in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar W)$. In effetti, più precisamente, esiste una costante $C_{\alpha,T}\in(0,\infty)$ tale che, se vale $|Y'_0| + [(Y,Y')]_{X,2\alpha}\le M$ per una certa costante $M\in[1,\infty)$, allora vale anche

$$\boxed{[(f(Y),f(Y)')]_{X,2\alpha} \le C_{\alpha,T}\cdot M\cdot \|f\|_{C_b^2}(1+[X]_\alpha)^2\cdot(|Y'_0| + [(Y,Y')]_{X,2\alpha})}.$$

(Inoltre, se $T\le1$, allora $C_{\alpha,T}=C_\alpha$.)

(facile...)

$\Rightarrow$ **"COROLLARIO 7.4"** ("regola di Leibniz"). (Pag. 98.) (scritto diversamente...) Se in più $(Z,Z')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,\bar W))$ (per cui $Z'_t\in\mathcal{L}(V,\mathcal{L}(W,\bar W))\hookrightarrow\mathcal{L}(V\otimes W,\bar W)$), e se poniamo, per ogni $t\in[0,T]$,

$U_t := Z_tY_t$ ($\Rightarrow U:[0,T]\to\bar W$) e $U'_t := Z_tY'_t + Z'_tY_t$ ($\Rightarrow U':[0,T]\to\mathcal{L}(V,\bar W)$) (dove, $\forall v\in V$, $(Z'_tY_t)(v) \doteq Z'_t(v\otimes Y_t)$),

allora vale che $(U,U')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar W)$. (insomma: $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ è un'algebra.)

Esercizio. (elementare) In riferimento al Lemma 7.3 e al Corollario 7.4 appena richiamati, e nelle relative precedenti notazioni, verificare che per $(ZY,(ZY)')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\bar W)$ vale

$$[(ZY,(ZY)')]_{X,2\alpha} \underset{(C_{\alpha,T,X}=C_{\alpha,X}\text{ se }T\le1)}{\lesssim} \|(Z,Z')\|_{X,2\alpha}\cdot\|(Y,Y')\|_{X,2\alpha} \left(\overset{(def.)}{=} (|Z_0|+|Z'_0|+[(Z,Z')]_{X,2\alpha})(|Y_0|+|Y'_0|+[(Y,Y')]_{X,2\alpha})\right).$$

[......]

Un'immediata conseguenza (del Teorema di Gubinelli e del Lemma 7.3): siano $T>0$, $\alpha\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$, $(V,|\cdot|)$ e $(W,|\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$, $(Y,Y')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$ e $f\in C_b^2(W,\mathcal{L}(V,W))$. Allora vale che $(f(Y),f(Y)')\in\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(V,W))$, dove di nuovo $f(Y)'\doteq Df(Y)\circ Y'$, con una stima $[(f(Y),f(Y)')]_{X,2\alpha}\le\ldots$ data dal Lemma 7.3, e quindi

FOGLIO

⑥ è ben definito l'integrale di Gubinelli $\int_s^t \mathcal{A}(Y_r)\,d\mathbb{X}_r$ su $[s,t]$ di $\mathcal{A}(Y)$ contro $\mathbb{X}$ (per ogni $0\le s\le t\le T$), e valgono le due stime per esso come nel Teorema di Gubinelli (sostituendo Y con $\mathcal{A}(Y)$). (In particolare, possiamo prendere $\left(\int_0^\cdot \mathcal{A}(Y)\,d\mathbb{X}\right)' = \mathcal{A}(Y)$.)

ESERCIZI (base) ⓪ Dati $T>0$, $\alpha\in(0,1]$, $(V,|\cdot|)$ Banach (reale) e $X\in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, vale (Luca.)
$\|X\|_\infty \le |X_0| + [X]_\alpha\cdot T^\alpha$. [Dimm.: $|X_t| \overset{(\forall t)}{\le} |X_0|+|X_{0,t}|$, e $|X_{0,t}|\le [X]_\alpha t^\alpha$.]

① Dati $T>0$, $\alpha\in(\frac13,\frac12]$, $(V,|\cdot|)$ e $(\bar W,|\cdot|)$ Banach (reali), ~~$\mathbb{X}\in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$~~, vale che, per ogni $\frac13<\alpha<\beta\le\frac12$ e $\mathbb{X}\in \mathcal{C}^\beta([0,T],V)$, $\mathcal{D}^{2\beta}_X([0,T],\bar W)\hookrightarrow \mathcal{D}^{2\alpha}_X([0,T],\bar W)$ e che $\mathcal{C}^\beta([0,T],V)\hookrightarrow\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, con $|||\cdot|||_\alpha \le T^{\beta-\alpha}|||\cdot|||_\beta$.

[Dimm., perché $\alpha<\beta\overset{\le\frac12}{\vee}\Rightarrow C^\beta\hookrightarrow C^\alpha$ con $[\cdot]_\alpha\le T^{\beta-\alpha}[\cdot]_\beta$ e $C_2^{2\beta}\hookrightarrow C_2^{2\alpha}$ con $[\cdot]_{2\alpha}\le T^{2(\beta-\alpha)}[\cdot]_{2\beta}$.]

② ("LEMMINO.") ("Tipo" Lemma 8.2, pag. 108/109.) Dati $T>0$, $\alpha\in(0,1]$, $(V,|\cdot|)$ e $(W,|\cdot|)$ Banach (reali), e dati $Y_t,\tilde Y_t\in \mathcal{C}^\alpha([0,T],W)$ (Luca.) e $\mathcal{A}\in C^3_b(W,\mathcal{L}(V,W))$, esiste $g\in C^2_b(W\times W,\mathcal{L}(W,\mathcal{L}(V,W)))$ con $\|g\|_{C^2_b}\le C_{\alpha,T}\|\mathcal{A}\|_{C^3_b}$ (dove $C_{\alpha,T}=C_\alpha$ nel caso $T\le1$) tale per cui risulti (per ogni $t\in[0,T]$) (!$[0,T]$ è compatto!)

$$\boxed{\mathcal{A}(Y_t)-\mathcal{A}(\tilde Y_t) = g(Y_t,\tilde Y_t)\cdot(Y_t-\tilde Y_t)}$$

~~{NON c'è bisogno qui di confronto con X e $\tilde Y$!}~~

[Idea della dimostrazione: $\forall\, y,\tilde y\in W$, $g(y,\tilde y) \doteq \int_0^1 D\mathcal{A}((1-t)y+t\tilde y)\,dt$.]

I DUE TEOREMI

(ANZI $T\in(0,1]$, naturalmente) ("e risolviamo" / "e abbandoniamo")

Come nell'introduzione, siano $T>0$ $(<\infty)$, $\alpha\in(\frac13,\frac12]$, $(V,|\cdot|)$ e $(W,|\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\xi\in W$, $\mathcal{A}_0:W\to W$ e $\mathcal{A}:W\to\mathcal{L}(V,W)$ "regolari" con perlomeno $\mathcal{A}$ in C^2_b. Il problema è il seguente: dato pure $\mathbb{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, trovare un $(Y,Y')\in\mathcal{D}^{2\alpha}_X([0,T],W)$ tale che, per ogni $t\in[0,T]$, sia

$$Y_t = \xi + \int_0^t \mathcal{A}_0(Y_s)\,ds + \int_0^t\mathcal{A}(Y_s)\,d\mathbb{X}_s,$$

o cioè, in notazione differenziale "rough":

$$\begin{cases} dY_t = \mathcal{A}_0(Y_t)\,dt + \mathcal{A}(Y_t)\,d\mathbb{X}_t & \text{su } [0,T]\\ Y_0=\xi\end{cases}$$

La difficoltà essenziale di tale problema è pressoché la stessa che sta alla base di tutte le "rough path analysis" studiate fin ora nel corso: consiste nel trovare il modo opportuno di gestire i due processi del second'ordine $\mathbb{X}$, „sollevamento" più o meno scelto di X, e R^Y, resto strettamente legato anche alle derivate di G. Y', più o meno scelta. In particolare, non sufficiente affatto, in questo senso, supporre i coefficienti f_0 e f del problema di un ordine più regolari del caso Young $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Per il resto, le principali idee dietro ai due risultati che dimostreremo sono pressoché identiche a quelle che hanno ispirato gli analoghi risultati del caso Young stesso. (affrontato da Lui

(In particolare, useremo il classico Teorema delle contrazioni per spazi metrici completi.)

Detto questo, ci restringiamo senz'altro al caso di un'equazione differenziale puramente rough (in generale) $\boxed{dY = f(Y)\,d\mathbf{X}}$, in quanto per riuscire ad affrontare con successo il caso generale „$\cdot\, dt + f_0(Y_t)\,dt$" basterà applicare le tecniche e le stime che vedremo a breve con quelle ben note della teoria classica delle ODEs. Inoltre, sapremo di conseguenza risolvere (in ipotesi di regolarità) una più generica equazione differenziale rough non-autonoma

$$\begin{cases} dY_t = f_0(Y_t, t)\,dt + f(Y_t, t)\,d\mathbf{X}_t \quad \text{su } [0,T] \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

, o meglio (per gli stessi motivi di poc'anzi) $dY_t = f(Y_t, t)\,d\mathbf{X}_t$: infatti, naturalmente, basterà risolvere $d\hat{Y} = f(\hat{Y})\,d\hat{\mathbf{X}}$ dove $\hat{Y}_t \doteq (Y_t, t)$ ("allungato"), e dove $\hat{\mathbf{X}} \doteq (\hat{X}, \hat{\mathbb{X}})$ con $\hat{X}_t \doteq (X_t, t)$ ("allungato") e con $\hat{\mathbb{X}}_{s,t} \doteq \int_s^t (X_{s,r}, r-s) \otimes (dX_r, dr)$, intendendo ovviamente che:

$\int_s^t X_{s,r} \otimes dX_r = \mathbb{X}_{s,t}$ (che è dato), mentre $\int_s^t X_{s,r}\,dr$ e $\int_s^t (r-s)\,dX_r$ sono
(integrale iterato) ("integrali incrociati")

elementari integrali di Riemann–Stieltjes. ($s \leq t$ in $[0,T]$) (Alla !: uno studio "diretto" porterebbe (probabilmente) a stime migliori!)

(per rispettare l'ordine del libro) ($\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in [2,3)$)

„PROPOSIZIONE 8.3": „una stima a priori". (Pag. 109.) Siano $T \in (0,1]$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\xi \in W$, $f \in C_b^2(W, \mathcal{L}(V,W))$ e $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$. Supponiamo che esiste $(Y, Y') \doteq (Y, f(Y)) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$ tale che $\boxed{Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r)\,d\mathbf{X}_r}$ per ogni $t \in [0,T]$. (Per cui possiamo davvero prendere $Y' = f$
Allora esiste $C_\alpha \in (0, \infty)$ tale per cui valga la stima (a priori)

$$\boxed{[Y]_\alpha \leq C_\alpha \left\{ (\|f\|_{C_b^2} \|\mathbf{X}\|_\alpha) \vee (\|f\|_{C_b^2} \|\mathbf{X}\|_\alpha)^{1/\alpha} \right\}}$$

, o cioè, più approssimativamente

$$\boxed{[Y]_\alpha \lesssim \|\mathbf{X}\|_\alpha \vee \|\mathbf{X}\|_\alpha^{1/\alpha}}.$$

(→ enunciato analogo al caso Young, ma dimostrazione più laboriosa!)

FOGLIO

(7) [**Qualche commento**: ⊙ $C_\alpha = C_{\alpha,T}$ perché $T \leq 1$, e per il resto $[Y]_\alpha$ è controllato giustamente da f e da X, ma non da ξ (~~→ è pure necessario $f \in C_b^2$~~), ed in effetti in $[Y]_\alpha$ ci sono gli incrementi di Y ("come" in $dY = \ldots$). $\boxed{\text{NOTA}}$ $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$, $Y_{s,t} = \int_s^t f(Y_r)\, dX_r$.

⊙ f potrebbe anche essere più regolare, tipo C_b^3, ma comunque basterebbe $\|f\|_{C_b^2}$ per le stime.

⊙ Il "curioso" max delle stime è dovuto all'ESERCIZIO 4.24 visto, come dimostreremo.

⊙ Come nel caso Young, il teorema di esistenza e unicità in ipotesi di regolarità (C_b^3) NON necessita di alcune stime a priori ...... (Che forse servirà in ipotesi di più scarsa regolarità?...) luce.)]

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE.}}$ (Della Prop. 8.3, in più passi.) I calcoli da fare sono piuttosto numerosi, ma l'idea è molto naturale: anzitutto, in primo luogo, volendo ottenere una maggiorazione per $[Y]_\alpha$, ne cercheremo una opportuna per $[Y]_{\alpha;h}$ con $h \in (0,T]$ (ma... molto analitici!) opportuno, anche forse "molto" ~~sufficientemente~~ piccolo rispetto a T (e così sarà) (alla luce dell'ESERCIZIO 4.24); dopo di che, in secondo luogo, dovremo quindi lavorare per tutto il tempo con $[\cdot]_{\alpha;h}$ anziché $[\cdot]_\alpha$, e con $[\cdot]_{2\alpha;h}$ anziché $[\cdot]_{2\alpha}$, ed il problema principale sarà maggiorare $[R^Y]_{2\alpha;h}$ in funzione di $[Y]_{\alpha;h}$ (almeno per alcuni $h \in (0,T]$). Infatti, una maggiorazione "in senso inverso" (→ DOBBIAMO USARE $Y' = f(Y)$ E R^Y!!) di $[Y]_{\alpha;h}$ con $[R^Y]_{2\alpha;h}$ è data in modo piuttosto immediato dal solito sviluppo al second'ordine "di Gubinelli" $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$, $0 \leq s < t \leq T$, dove prendiamo $Y' = f(Y)$ (data le ipotesi); inoltre, d'altra parte, Y è una "speciale" funzione di sé stessa su piccola scala, per ipotesi, per cui dovrebbe essere possibile stimare a sua volta $[R^Y]_{2\alpha;h}$ con $[Y]_{\alpha;h}$, efficacemente (almeno per $h \ll T$).

Effettivamente, il tutto riuscirà piuttosto bene, a meno di un paio di elementari "scogli" tecnici: il primo, quello di maggiorare $[R^{f(Y)}]_{2\alpha;h}$ con $[R^Y]_{2\alpha;h}$ e $[Y]_{\alpha;h}$; il secondo, in occasione della vera e propria conclusione della dimostrazione.

$\boxed{\text{PASSO 1:}}$ ("STEP") impostiamo la "catena" di maggiorazioni (~~senza usare~~ usando già la speciale forma di Y!) ($Y' = f(Y)$) (ma senza "mandare" $h \downarrow 0$)

Per ogni $h \in (0,T]$, $[Y]_{\alpha;h} \leq \|f\|_\infty \cdot [X]_{\alpha;h} + [R^Y]_{2\alpha;h} \cdot h^\alpha$.

[Dim. Per ogni $h \in (0,T]$ e $0 \leq s < t \leq T$ con $t - s \leq h$, se $I \doteq [s,t]$, allora da $Y_{s,t} \overset{(g.)}{=} Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t} \overset{(ip.)}{=} f(Y_s) X_{s,t} + R^Y_{s,t}$ deduciamo subito che $|Y_{s,t}| \overset{(dis. tr.)}{\leq} \|f\|_\infty |X_{s,t}| + |R^Y_{s,t}| \overset{(imm.)}{\leq} \|f\|_\infty [X]_{\alpha;I} (t-s)^\alpha + [R^Y]_{2\alpha;I} (t-s)^{2\alpha} \overset{(imm.)}{\leq} \left(\|f\|_\infty [X]_{\alpha;h} + [R^Y]_{2\alpha;h} h^\alpha\right)(t-s)^\alpha$ (in evidenza un $(t-s)^\alpha$) da cui subito $[Y]_{\alpha;I} \leq \|f\|_\infty [X]_{\alpha;h} + [R^Y]_{2\alpha;h} h^\alpha$, ossia la tesi.]

$\boxed{\text{PASSO 2:}}$ mettiamo in relazione $R^{f(Y)}$ a Y e R^Y (~~usando ancora~~ senza usare che $Y' = f(Y)$!). (ma senza mandare $h \downarrow 0$)

(lettera: ... un preliminare.)

Per ogni $h\in(0,T]$, $[R^{f(Y)}]_{2\alpha;h} \le \frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty[Y]^2_{\alpha;h} + \|Df\|_\infty[R^Y]_{2\alpha;h}$.

(NOTA. Dato che $f\in C^2_b(W,\mathcal{L}(V,W))$, abbiamo che $D^2f(w)\in\mathcal{L}(W\otimes W,\mathcal{L}(V,W))$ per ogni $w\in W$.)

[Dim. ~~Poiché~~ Abbiamo $f(Y)' = Df(Y)\circ Y'$, e quindi, per ogni $0\le s< t\le T$, è $R^{f(Y)}_{s,t} \overset{(def.)}{=} f(Y)_{s,t} - f(Y)'_s X_{s,t} = f(Y_t)-f(Y_s)-Df(Y_s)Y'_sX_{s,t}$.
D'altra parte, è $Y'_sX_{s,t} \overset{(def.)}{=} Y_{s,t}-R^Y_{s,t}$, dunque (per linearità di $Df(Y_s)$)

$$R^{f(Y)}_{s,t} = \underbrace{f(Y_t)-f(Y_s)-Df(Y_s)Y_{s,t}}_{\left(=\frac{1}{2}D^2f(\eta_{(s,t)})(Y_{s,t}\otimes Y_{s,t})\right)} + Df(Y_s)R^Y_{s,t},$$

da cui immediatamente

$$|R^{f(Y)}_{s,t}| \le \frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty|Y_{s,t}|^2 + \|Df\|_\infty|R^Y_{s,t}| \overset{(imm.)}{\le} \frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty[Y]^2_{\alpha;[s,t]}(t-s)^{2\alpha} + \|Df\|_\infty[R^Y]_{2\alpha;[s,t]}(t-s)^{2\alpha}.$$

(stime ottime!)

Pertanto, per ogni $h\in(0,T]$ e per ogni $0\le s<t\le T$ con $t-s\le h$, vale $|R^{f(Y)}_{s,t}| \le \left(\frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty[Y]^2_{\alpha;h} + \|Df\|_\infty[R^Y]_{2\alpha;h}\right)(t-s)^{2\alpha}$.]

PASSO 3: per ogni $h\in(0,T]$, migliorare $[R^Y]_{2\alpha;h}$ in funzione "anche" di $[Y]_{\alpha;h}$ (usando $Y'=f(Y)$) (+ TEOREMA DI GUBINELLI, PUNTO $\boxed{1}$)

$\to$ $\forall h\in(0,T]$, $[R^Y]_{2\alpha;h} \lesssim_{(\alpha,f,Df)} [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + h^\alpha\Big([X]_{\alpha;h}\underbrace{[R^{f(Y)}]_{2\alpha;h}}_{\lesssim_{(Df,D^2f)}[Y]^2_{\alpha;h}+[R^Y]_{2\alpha;h}\ (\text{PASSO }2)} + [\mathbb{X}]_{2\alpha;h}\underbrace{[f(Y)]_{\alpha;h}}_{\le\|f\|_\infty[Y]}\Big)$

$\to$ di conseguenza (immediata), grazie anche al PASSO 2, esiste $C_1 = C_1(\alpha,f,Df,D^2f)\in(0,\infty)$ tale che

$$\forall h\in(0,T],\ [R^Y]_{2\alpha;h} \le C_1[\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + C_1h^\alpha\underbrace{[X]_{\alpha;h}}_{\le[X]_\alpha}[Y]^2_{\alpha;h} + C_1h^\alpha\underbrace{[X]_{\alpha;h}}_{\le[X]_\alpha}[R^Y]_{2\alpha;h} + C_1h^\alpha[\mathbb{X}]_{2\alpha;h}[Y]_{\alpha;h}.$$

[Dim. Per ogni $h\in(0,T]$ e $0\le s<t\le T$ con $t-s\le h$, abbiamo per ipotesi che $Y_{s,t} = \int_s^t f(Y_r)\,dX_r$ e $Y'_s = f(Y_s)$, per cui $R^Y_{s,t} \overset{(def.)}{=} Y_{s,t} - Y'_sX_{s,t} = \int_s^t f(Y_r)\,dX_r - f(Y_s)X_{s,t}$. Inoltre, "sottraendo ed aggiungendo (al RHS)" il termine $f(Y)'_s\mathbb{X}_{s,t} = (Df(Y_s)Y'_s)\mathbb{X}_{s,t} = (Df(Y_s)f(Y_s))\mathbb{X}_{s,t}$, deduciamo subito che

$$|R^Y_{s,t}| \overset{(dis. tr.)}{\le} \underbrace{\left|\int_s^t f(Y_r)\,dX_r - f(Y_s)X_{s,t} - f(Y)'_s\mathbb{X}_{s,t}\right|}_{\overset{(\text{Gubinelli},\ \boxed{1})}{\underset{(T\le 1!)}{\le}} C_\alpha\left([X]_{\alpha;[s,t]}[R^{f(Y)}]_{2\alpha;[s,t]} + [\mathbb{X}]_{2\alpha;[s,t]}\underbrace{[f(Y)']_{\alpha;[s,t]}}_{(=Df(Y)f(Y))\ \overset{(ok)}{\lesssim_{(Df)}}[f(Y)]_{\alpha;[s,t]}}\right)|t-s|^{3\alpha}} + \underbrace{\left|Df(Y_s)f(Y_s)\mathbb{X}_{s,t}\right|}_{\overset{(ok)}{\lesssim_{(f,Df)}}[\mathbb{X}]_{2\alpha;[s,t]}|t-s|^{2\alpha}},$$

da cui $|R^Y_{s,t}| \lesssim_{(\alpha,f,Df)} \left(\left([X]_{\alpha;h}[R^{f(Y)}]_{2\alpha;h} + [\mathbb{X}]_{2\alpha;h}[f(Y)]_{\alpha;h}\right)h^\alpha + [\mathbb{X}]_{2\alpha;h}\right)(t-s)^{2\alpha}$.]

PASSO 4: alla luce del PASSO 1, "migliorare" la (seconda) stima del PASSO 3

FOGLIO (8) precedente "mandando $h \downarrow 0$", sperando di far "precedere" solo $[\mathbb{X}]_{2\alpha;h}$ e $[Y]^2_{\alpha;h}$. (IDEA: prendere h piccolo abbastanza affinché "$h^\alpha |||\mathbf{X}|||_\alpha \ll 1$". ($\doteq h_{\alpha,f,Df,D^2f,\mathbf{X}}$)) (NOTA. $\forall h \in (0,T]$, $[X]_{\alpha;h} \leq [X]_\alpha$ e $[\mathbb{X}]_{2\alpha;h} \leq [\mathbb{X}$

Esiste una costante $C_2 \doteq C_2(C_1)$ "$\in (0,\infty)$ tale che,

→ per ogni $h \doteq h(\alpha, f, Df, D^2f, (X,\mathbb{X})) \in (0,T]$ piccolo abbastanza affinché risulti

$(C_1 h^\alpha [X]_\alpha) \vee (C_1 h^\alpha [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha}) \leq \frac{1}{2}$ (→ per "ottenere" il quadrato di un opportuno binomio...), (entrambi $\leq \frac{1}{2}$) ← (basta "mandare $h \downarrow 0$") (ricordiamo che in $|||\cdot|||_\alpha$ c'è $[\cdot]^{1/2}_{2\alpha}$!)

sia $[R^Y]_{2\alpha;h} \leq C_2 [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + 2[Y]^2_{\alpha;h}$; (← PASSO 3)

→ di conseguenza (da semplificare...), grazie anche al PASSO 1, esistono costanti $C_3, C_4 \in (0,\infty)$ (dipendenti solo da α, f, Df e D^2f,) tali che, sempre per questi "$h \downarrow 0$", sia

$$C_3 h^\alpha [Y]_{\alpha;h} \leq C_4 h^\alpha |||\mathbf{X}|||_\alpha + (C_3 h^\alpha)^2 [Y]^2_{\alpha;h} .$$

[Dim. Per ogni $h \in (0,T]$ tale che $C_1 h^\alpha [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha} \leq \frac{1}{2}$ (≤ 1), è $C_1 h^\alpha [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} = (C_1 h^\alpha [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}) \cdot [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h} \leq [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}$. Dunque, $\forall h \in (0,T]$ tale che $C_1 h^\alpha [X]_\alpha \leq \frac{1}{2}$ e anche $C_1 h^\alpha [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha} \leq \frac{1}{2}$, la seconda stima del PASSO 3 precedente ci dà (subito) che

$[R^Y]_{2\alpha;h} \leq C_1 [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + \frac{1}{2}[Y]^2_{\alpha;h} + \frac{1}{2}[R^Y]_{2\alpha;h} + [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}[Y]_{\alpha;h}$, o cioè che

$[R^Y]_{2\alpha;h} \leq 2C_1 [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + [Y]^2_{\alpha;h} + 2[\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}[Y]_{\alpha;h}$ (moltiplicando per 2 e portando $[R^Y]_{2\alpha;h}$ al LHS). Infine, visto che $2[\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}[Y]_{\alpha;h} \leq [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + [Y]^2_{\alpha;h}$ (in quanto $([\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h} - [Y]_{\alpha;h})^2 \geq 0$), risulta evidente la prima stima desiderata prendendo (ad esempio) $C_2 \doteq 2C_1 + 1$. ✓ A questo punto, sempre per tali "$h \downarrow 0$", otteniamo che

$[Y]_{\alpha;h} \overset{(\text{PASSO 1})}{\leq} \|f\|_\infty [X]_{\alpha;h} + h^\alpha [R^Y]_{2\alpha;h} \leq \|f\|_\infty [X]_{\alpha;h} + C_2 h^\alpha [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} + 2h^\alpha [Y]^2_{\alpha;h}$. Ma, come visto, $h^\alpha [\mathbb{X}]_{2\alpha;h} \leq \frac{1}{C_1}[\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h}$ e pertanto esiste $C_3 \doteq C_3(\alpha, f, Df, D^2f) \in (0,\infty)$ tale per cui

$[Y]_{\alpha;h} \leq C_3 \underbrace{([X]_{\alpha;h} + [\mathbb{X}]^{1/2}_{2\alpha;h})}_{(\text{ovvio}) \ (\leq |||\mathbf{X}|||_\alpha)} + C_3 h^\alpha [Y]^2_{\alpha;h}$. Così, la seconda stima desiderata discende subito da quest'ultima moltiplicando entrambi i membri per $C_3 h^\alpha$ (e ponendo $C_4 \doteq (C_3)^2$).]

NOTAZIONE: alla luce dell'ultima stima verificata, poniamo per ogni "$h \downarrow 0$"

$\boxed{\psi_h \doteq C_3 h^\alpha [Y]_{\alpha;h}}$ (≥ 0) e $\boxed{\lambda_h \doteq C_4 h^\alpha |||\mathbf{X}|||_\alpha}$ (≥ 0). (NOTA. Una evidente differenza fra le due è che $\lambda_h \downarrow 0$ per $h \downarrow 0$, mentre per ψ_h NON è detto!)

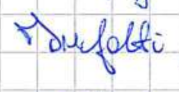
Dunque, nel PASSO 4 precedente abbiamo scoperto che ($\forall$ "$h \downarrow 0$")

$$\boxed{\psi_h \leq \lambda_h + (\psi_h)^2} .$$

$\boxed{\text{PASSO 5 : CONCLUSIONE}}$. Per ogni $h \doteq h(\alpha, f, Df, D^2f, (X, \mathbb{X})) \in (0,T]$ sufficientemente piccolo (in particolare, INDIPENDENTE DA Y), vale $\boxed{t_h \leq \frac{1}{2}}$. Di conseguenza (immediata), grazie anche al PASSO 4, esiste $C_5 \doteq C_5(\alpha, f, Df, D^2f) \in (0, \infty)$ tale che, $\forall h \downarrow 0$,

$\boxed{[Y]_{\alpha;h} \leq C_5 \|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha}$: in virtù dell'ESERCIZIO 4.24, ciò conclude l'intera dimostrazione.

[Dim. Osserviamo subito che, se davvero $t_h \leq \frac{1}{2}$ $\forall h \downarrow 0$, allora $t_h \overset{(\text{PASSO 4})}{\leq} \lambda_h + \underbrace{(t_h)^2}_{(t_h \cdot t_h)} \overset{(\text{im.})}{\leq} \lambda_h + \frac{1}{2} t_h$ ($\forall h \downarrow 0$), e quindi chiaramente $t_h \leq 2\lambda_h$ $\forall h \downarrow 0$. Ma $t_h \doteq C_3 h^\alpha [Y]_{\alpha;h}$ e $\lambda_h \doteq C_4 h^\alpha \|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha$, per cui possiamo affermare che, $\forall h \downarrow 0$, $[Y]_{\alpha;h} \leq 2\frac{C_4}{C_3} \|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha$, dunque sarebbe $C_5 \overset{?}{\doteq} 2\frac{C_4}{C_3}$ (ad esempio). $\checkmark$ Ma allora avremmo veramente le tesi della Proposizione 8.3, prendendo nell'ESERCIZIO 4.24 (con Y al posto di X) uno qualsiasi di questi $h \downarrow 0$ tale che in più $h_0 \lesssim \|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha^{-1/\alpha}$, perché $M \doteq C_5 \|\!|\mathbf{X}|\!\|_\alpha$ e $\left(\|\!|\cdot|\!\|_\alpha^{-1/\alpha}\right)^{-(1-\alpha)} = \|\!|\cdot|\!\|_\alpha^{1/\alpha - 1}$. $\checkmark\checkmark$ Pertanto, la dimostrazione è conclusa appena verifichiamo che $t_h \leq \frac{1}{2}$ per $h \downarrow 0$ (indipendentemente da Y).

Con quest'ultimo obiettivo, cominciamo a restringerci a quegli $h \downarrow 0$ tali per cui $\lambda_h < \frac{1}{4}$ (osservato che $\lambda_h \downarrow 0$ per $h \downarrow 0$). Infatti, dato che (per il PASSO 4 $(t_h)^2 - t_h + \lambda_h \geq 0$ (e visto che, $\forall h \downarrow 0$, $p(x) \doteq x^2 - x + \lambda_h$ ($x \in \mathbb{R}$) ha "$\Delta = b^2 - 4ac$" $= 1 - 4\lambda_h > 0$, $\rightsquigarrow$ ), deduciamo subito che per questi $h \downarrow 0$ è o $t_h \geq t_+$ o $t_h \leq t_-$ dove

$t_\pm \doteq$ "$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$" $= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_h}$. Riassumendo, $\forall h \downarrow 0$ con $\lambda_h < \frac{1}{4}$, vale o $t_h \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\dots} > \frac{1}{2}$ oppure $t_h \leq \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_h}\right) \underset{h \downarrow 0}{\sim} \lambda_h$.

($\boxed{\text{NOTA}}$ Ricordando che $\sqrt{1-x} \overset{(\text{Taylor})}{\underset{x \to 0}{\sim}} 1 - \frac{x}{2}$, ossia che $1 - \sqrt{1-x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$.)

Vogliamo dimostrare che, $\forall h \downarrow 0$ (eventualmente ancora più piccoli dei precedenti), $t_h \leq \frac{1}{2}$ o cioè che, per $h \to 0$, non siamo mai nel "regime" $t_h > \frac{1}{2}$. Ma infatti, anzitutto, esiste di sicuro un $\underset{(\text{anzi "frequenti"})}{h_0 \ll 1}$ tale che $t_{h_0} \leq \frac{1}{2}$, anzi $t_{h_0} < \frac{1}{6}$; per dimostrare che $t_h \leq \frac{1}{2}$ per ogni $h \in (0, h_0]$ basterà verificare che t_h non può fare "salti" (al variare di $h \sim h_0$) di ampiezza > 3, bensì al più ≤ 3.

Per questo basta ricordare/osservare che $[Y]_{\alpha;h} \leq 3 [Y]_{\alpha;\frac{h}{3}} \overset{(\text{im.})}{\leq} 3 \lim_{g \uparrow h} [Y]_{\alpha;g}$, da cui deduciamo $t_h \leq 3 \lim_{g \uparrow h} t_g$ (chiaro), e analogamente capiamo pure che

$\boxed{\lim_{g \downarrow h_0} t_g \leq 3 t_{h_0}}$, e questo chiude ("——").] $\square$

FOGLIO (9)

"TEOREMA 8.4": "di esistenza e unicità". (Pag. 112.) Siano $T \in (0,1]$, $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\xi \in W$, $f \in (C_b^2 \cap C^3)(W, \mathcal{L}(V,W))$ e $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\beta}([0,T], V)$. Allora esiste $T_0 \in (0,T]$ ($T_0 \ll T$) tale per cui esiste uno ed un solo elemento $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,T_0], W)$ tale che

$$\boxed{Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_r)\, d\mathbf{X}_r} \quad \text{per ogni } t \in [0, T_0].$$

Inoltre, è $Y' = f(Y)$ e, se in realtà $f \in C_b^3$, allora possiamo prendere $T_0 = T$.

(→ enunciato tipo Young, ma con ctim. più complesse)

Qualche commento: ⊙ La dimostrazione che proponiamo si basa soprattutto sul classico Teorema delle contrazioni (o del punto fisso) (...) per spazi metrici completi (affini), che noi applicheremo a $(\mathscr{D}_X^{2\beta\,\alpha}([0,T], W), \|\cdot\|_{X,2\beta})$, o meglio ad un suo sottospazio (affine) chiuso (con la stima $\|\cdot\|_{X,2\beta}$) (→ completo) e limitato, anche ispirati dalle precedenti stime e prove. Tuttavia, non sarà affatto automatica quest'applicazione, ed infatti avremo bisogno di "appoggiarci" sull'utilizzo di un altro $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ con $\boxed{\alpha < \beta}$ (di notazione più "familiare"!) in modo che sostanzialmente $T^{\beta-\alpha} \downarrow 0$ per $T \downarrow 0$. ⊙ Guardando invece Y', non stiamo affermando che $Y' = f(Y)$ è l'unica derivata di Gubinelli della "soluzione" Y: semplicemente, $(Y, f(Y))$ sarà il solo punto fisso che troveremo grazie alla pre-enunciata applicazione del Teorema delle contrazioni su $\mathscr{D}_X^{2\beta\,\alpha}$ (anzi, su un suo limitato (e affine)).

⊙ Se $f \in C_b^3$, allora il $T_0 \ll T$ dell'esistenza e unicità locali può esser preso indipendente da ξ, per cui il prolungamento a tutto $[0,T]$ diventa un automatico procedimento standard.

DIMOSTRAZIONE. (Del Teo. 8.4, in più passi.) **PASSO 1:** introduciamo "oggetti", osservazioni (lungo...) e stime in vista di un'applicazione del Teorema delle contrazioni. Grazie al Lemma 7.3 e al Teorema di Gubinelli (e alle ipotesi), risulta (ben definita ed anzi) continua (ma non-lineare, in generale), per ogni $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$, la mappa da $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)_{\|\cdot\|_{X,2\alpha}}$ in sé "$\mathcal{M}_T^{\alpha}$" : $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)_{\|\cdot\|_{X,2\alpha}} \to \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)_{\|\cdot\|_{X,2\alpha}}$ data da

$$\boxed{\mathcal{M}_T((Y_\cdot, Y'_\cdot)) \overset{\text{def.}}{=} \left(\xi + \int_0^{\cdot} f(Y_r)\, d\mathbf{X}_r,\ f(Y_\cdot)\right)}$$

: vogliamo dimostrare che, almeno per "$T \downarrow 0$", $\mathcal{M}_T$ ammette uno ed un solo punto fisso (Y, Y') ($= \mathcal{M}_T(Y, Y')$, appunto), e che anzi $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,T], W)$.

(dato il Teorema di Gubinelli, punto [1] (con $f(Y)$ al posto di Y))

OSS. ($T \leq 1$) Dato che $(X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\beta}([0,T], V)$, è pressoché "automatico" che, $\forall \frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$, se $\underbrace{(Y_\cdot, Y'_\cdot) = \left(\xi + \int_0^{\cdot} f(Y_r)\, d\mathbf{X}_r,\ f(Y_\cdot)\right)}_{\text{(è punto fisso)}} \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T], W)$, allora $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\beta}([0,T], W)$.

Detto brevemente, la "regolarità" sarebbe garantita, per cui possiamo "dimenticarcene".

[Dim. Anzitutto, notiamo che $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$ dà, equivalentemente, sia che $2\alpha > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \geq \beta$ da cui $\boxed{2\alpha > \beta}$, sia che $3\alpha > 1 \geq 2\beta$ da cui $\boxed{3\alpha > 2\beta}$ (monotonamente da $3\alpha = \underset{(>\beta)}{2\alpha} + \underset{(<\beta)}{\alpha}$ non si concluderebbe). Adesso, stiamo supponendo che $Y_t = \xi +$ "$\int_0^t f(Y_r)\, dX_r$", $t \in [0,T_0]$, stia in $\mathcal{C}^\alpha([0,T_0],W)$ con $Y' = f(Y)$ in $\mathcal{C}^\alpha([0,T_0],\mathcal{L}(V,W))$ tale (per cui) risulti che
$$R^Y_{s,t} \overset{(\text{def.})}{=} Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} = \int_s^t f(Y_r)\, dX_r - f(Y_s) X_{s,t}, \quad (s,t) \in [0,T_0]^2,$$
stia in $\mathcal{C}_2^{2\alpha}([0,T],W)$.
Vogliamo dimostrare che, se $(X,\mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\beta([0,T],V)$ (e $T \leq 1$), allora $Y \in \mathcal{C}^\beta([0,T_0],W)$, $Y' \in \mathcal{C}^\beta([0,T_0],\mathcal{L}(V,W))$ e $R^Y \in \mathcal{C}_2^{2\beta}([0,T],W)$. Allora, infatti, da $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$ deduciamo subito che
$$|Y_{s,t}| \leq \|Y'\|_\infty \underbrace{|X_{s,t}|}_{(\lesssim |t-s|^\beta)} + [R^Y]_{2\alpha} \underbrace{|t-s|^{2\alpha}}_{(\leq |t-s|^\beta,\ \text{perché } 2\alpha > \beta \text{ ma } |t-s| \leq 1)} \lesssim |t-s|^\beta,$$
da cui segue che $Y \in \mathcal{C}^\beta$; dunque pure $Y' = f(Y) \in \mathcal{C}^\beta$. Infine, per R^Y, il punto $\boxed{1}$ del Teorema di Gubinelli (con $f(Y)$ al posto di Y) ci dà che $R^Y \in \mathcal{C}_2^{2\beta}$ in quanto
$$|R^Y_{s,t}| \overset{(\text{OK})}{=} \left| \int_s^t f(Y)_{s,r}\, dX_r \right| \leq \|f(Y)'\|_\infty \underbrace{|\mathbb{X}_{s,t}|}_{(\lesssim |t-s|^{2\beta})} + \underbrace{O_{\alpha,(X,\mathbb{X}),(f(Y),f(Y)')}(|t-s|^{3\alpha})}_{(\lesssim |t-s|^{2\beta})} \lesssim |t-s|^{2\beta}$$
come volevasi.

(NOTA. Dunque, la Proposizione 8.3 ci darebbe che $[Y]_\beta \lesssim_{\alpha,f,Df,D^2f} \|X\|_\beta \vee \|X\|_\beta^{1/\beta} \ldots$!)

Più precisamente, tornando al punto essenziale della questione, faremo uso del Teorema delle contrazioni su di un sottoinsieme chiuso ($\Rightarrow$ completo) e limitato ($\mathcal{M}_T$-invariante) di un sottospazio affine ($\mathcal{M}_T$-invariante) ($\Rightarrow$ completo) di $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$, per "$T \downarrow 0$", piuttosto che su tutto $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$; e tale "strada" dimostrativa sarà sì dovuta a vari problemi tecnici nei calcoli (così come è stata l'introduzione di un $\alpha < \beta$), ma si rivelerà pure molto naturale. Infatti, continuiamo con la seguente, elementare osservazione:

per ogni $(Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W)$, vale chiaramente che "$\mathcal{M}_T((Y,Y'))\big|_{t=0}$" $= (\xi, f(Y_0))$, per cui il sottospazio affine ($\Rightarrow$ chiuso, $\Rightarrow$ completo) di $(\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W), \|\cdot\|_{X,2\alpha})$ definito come
$$\boxed{\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))} \overset{\text{def.}}{=} \left\{ (Y,Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T],W) \;\middle|\; Y_0 = \xi,\ Y'_0 = f(\xi) \right\}_{\|\cdot\|_{X,2\alpha}}}$$
risulta $\mathcal{M}_T$-invariante (nel senso che $\mathcal{M}_T(\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}) \subseteq \mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}$). (ciò $\forall T$)

Un "rudimentale" elemento di $\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}$ è, ad esempio, $\boxed{(\xi + f(\xi)X_{0,\cdot},\ f(\xi))}$, ovvero il cammino $t \mapsto \xi + f(\xi)X_{0,t}$ "affiancato" dalla sua derivata di Gubinelli identicamente $\equiv f(\xi)$ (abbiamo scelto lei).

[Il fatto è che $(\xi + f(\xi)X_{0,\cdot})_{s,t} = f(\xi)X_{s,t}$, per cui il cammino $\equiv f(\xi)$ dà resto $\equiv 0$ per $\xi + f(\xi)X_{0,\cdot}$ stesso, com'è immediato riconoscere. | NOTA: invece $(\xi, f(\xi)) \notin$

FOGLIO 10

$\notin \mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T],W)$, poiché $R^{\xi} \doteq -f(\xi)X_{s,t}$ ed in generale $f(\xi)\neq 0$ e $X\notin C^{2\alpha}$.]

Consideriamo quindi la palla unitaria (chiusa) "$\mathcal{B}_T$" di $\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}$ centrata proprio in $(\xi+f(\xi)X_{0,\cdot}\,,\, f(\xi))$ (la quale resta $\|\cdot\|_{X,2\alpha}$ − completa), vale a dire

$$\boxed{\mathcal{B}_T \overset{def}{=} \left\{(Y,Y')\in \mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))} \;\middle|\; \big[(Y,Y')-(\xi+f(\xi)X_{0,\cdot}\,,\,f(\xi))\big]_{X,2\alpha}\leq 1\right\}}.$$

[Su $\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}$, è chiaro che $\|\cdot\cdot\cdot\|_{X,2\alpha}=[\cdot\cdot\cdot]_{X,2\alpha}$.]

Non sorprende affatto notare ora che $\boxed{\mathcal{B}_T=\left\{(Y,Y')\in\mathscr{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}\;\middle|\;[(Y,Y')]_{X,2\alpha}\leq 1\right\}}$.

[Dim. È molto semplice, perché intanto $[(Z,Z')]_{X,2\alpha}\overset{def.}{=}[Z']_{\alpha}+[R^Z]_{2\alpha}$ per ogni $(Z,Z')\in\mathscr{D}^{2\alpha}_X([0,T],W)$ (con $R^Z_{s,t}\overset{(def.)}{=}Z_{s,t}-Z'_sX_{s,t}$) ; ed ora $(Y_\cdot-\xi-f(\xi)X_{0,\cdot}\,,\,Y'_\cdot-f(\xi))=:(Z,Z')$ ha palesemente $[Z']_{\alpha}\underset{(\text{per }\forall)}{=}[Y']_{\alpha}$, mentre $R^Z_{s,t}\overset{(def.)}{=}(Y_{s,t}-f(\xi)X_{s,t})-(Y'_s-f(\xi))X_{s,t}\overset{(def.)}{=}R^Y_{s,t}$, addirittura coincidenti.]

OSS. (Avendo in mente il Lemma 7.3.) Dunque, per ogni $(Y,Y')\in\mathcal{B}_T$, vale la maggiorazione uniforme $\boxed{\underbrace{|Y'_0|}_{(\text{è }=|f(\xi)|\leq\|f\|_\infty)}+\underbrace{[(Y,Y')]_{X,2\alpha}}_{(\text{è }\leq 1)}\leq \text{"}M\text{"}\doteq\|f\|_\infty+1}$. $(\Rightarrow M\in[1,\infty))$

Cosa vogliamo fare: dimostrare che $\mathcal{B}_T$ è $\mathcal{M}_T$ − invariante, almeno per $T\downarrow 0$, e che $\mathcal{M}_T\big|_{\mathcal{B}_T}$ è una $\|\cdot\|_{X,2\alpha}$ − contrazione di $\mathcal{B}_T$ in sé, per $T\downarrow 0$ (eventualmente ancora più "piccoli"), avendo cura nel mentre di rimarcare dove le regolarità di f fa la differenza. In formule, vogliamo verificare che:

$$\begin{cases}\text{"}\boxed{\mathrm{I}}\text{" per } T\downarrow 0,\ \mathcal{M}_T(\mathcal{B}_T)\subseteq\mathcal{B}_T\ ; & (\text{"INVARIANZA"})\\[4pt] \text{"}\boxed{\mathrm{II}}\text{" per } T\downarrow 0,\ \text{esiste } K\in(0,1) \text{ tale che, per ogni } (Y,Y'),(\tilde Y,\tilde Y')\in\mathcal{B}_T, & \\ \quad \big[\mathcal{M}_T((Y,Y'))-\mathcal{M}_T((\tilde Y,\tilde Y'))\big]_{X,2\alpha}\leq K\cdot\big[(Y-\tilde Y\,,\,Y'-\tilde Y')\big]_{X,2\alpha}. & (\text{"CONTRAZIONE"})\end{cases}$$

Da tali $\boxed{\mathrm{I}}$ e $\boxed{\mathrm{II}}$, e dal Teo. delle contrazioni, la tesi desiderata discenderà (quasi) immediatamente (a meno di precisare il ruolo di $f\in C^3_b$), e comunque abbiamo ormai tutti gli strumenti per risolvere $\boxed{\mathrm{I}}$ e $\boxed{\mathrm{II}}$ stessi.

Mettiamo subito da parte un paio di stime (di cui la prima immediata (dal Lemma 7.3), e la seconda leggermente più laboriosa (basata sul Teorema di Gubinelli (punto $\boxed{2}$)) (con $f(Y)$ al posto di Y)), prima di passare a $\boxed{\mathrm{I}}$ e $\boxed{\mathrm{II}}$.

"ⓐ" Per ogni $(Y,Y')\in\mathcal{B}_T$ (e $\forall T$), $\big[f(Y),f(Y)'\big]_{X,2\alpha}\leq C_{\alpha,X}\cdot M\cdot\|f\|_{C^2_b}\cdot\big(|Y'_0|+[(Y,Y')]_{X,2\alpha}\big)$. (valida $\forall T$) (mandando $T\downarrow 0$)

[Dim. È la stima del Lemma 7.3 nel caso $T\leq 1$ $(\Rightarrow C_{\alpha,T}=C_\alpha)$, con costante che "ingloba" $(1+[X]_\alpha)^2$, e dove $M\doteq 1+\|f\|_\infty$ (→ vedi ultima $\boxed{\text{OSS.}}$).] ($\big[\mathcal{M}_T((Y,Y'))\big]_{X,2\alpha}$!)

ⓑ "Per ogni $(Y,Y')\in\mathcal{B}_T$, $\Big[\Big(\int_0^{\cdot} f(Y)\,dX\,,\,f(Y_\cdot)\Big)\Big]_{X,2\alpha}\leq[f(Y)]_\alpha+C_{\beta,\alpha,(X,\mathbb{X})}\Big(|f(Y)'_0|+\big[f(Y),f(Y)'\big]_{X,2\alpha}\Big)\cdot T^{\beta-\alpha}$.

[Dim. Il punto [2] del Teorema di Gubinelli con $T \le 1$ dà $\left[\left(\int_0^\cdot f(Y)\,dX, f(Y_\cdot)\right)\right]_{X,2\alpha} \le [f(Y)]_\alpha +$ (e con $f(Y)'$ al posto di Y)
$+ \|f(Y)'\|_\infty [\mathbb{X}]_{2\alpha} + C_\alpha\left([X]_\alpha [R^{f(Y)}]_{2\alpha} + [\mathbb{X}]_{2\alpha}[f(Y)']_\alpha\right)$. Allora, usando che
$\|f(Y)'\|_\infty \underset{(T\le 1!)}{\overset{(\text{visto})}{\le}} |f(Y)'_0| + [f(Y)']_\alpha$ e che $[X]_\alpha \vee [\mathbb{X}]_{2\alpha} \overset{(\text{ovvio})}{\le} [X]_\alpha + [\mathbb{X}]_{2\alpha}$, otteniamo
(a meno di "ingrandire" C_α)

$$\left[\left(\int_0^\cdot f(Y)\,dX, f(Y_\cdot)\right)\right]_{X,2\alpha} \le [f(Y)]_\alpha + C_\alpha\Big(|f(Y)'_0| + \overbrace{[f(Y)']_\alpha + [R^{f(Y)}]_{2\alpha}}^{(\overset{\text{def.}}{=} [(f(Y), f(Y)')]_{X,2\alpha})}\Big)\left([X]_\alpha + [\mathbb{X}]_{2\alpha}\right).$$

Concludiamo osservando che $[X]_\alpha \le [X]_\beta T^{\beta-\alpha}$ e che $[\mathbb{X}]_{2\alpha} \le [\mathbb{X}]_{2\beta} T^{2(\beta-\alpha)}$; ma $\beta-\alpha>0$,
$2(\beta-\alpha) > \beta-\alpha > 0$, mentre $T \le 1$, quindi $T^{2(\beta-\alpha)} \le T^{\beta-\alpha}$.]

$\boxed{\text{PASSO 2:}}$ dimostriamo $\boxed{\text{I}}$ ("INVARIANZA") usando ⓐ e ⓑ. (Per le quali bastava $f \in C_b^2$, com'è stato per ⓐ e ⓑ stime)

Per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$, è $\boxed{[Y]_\alpha \underset{\alpha,\beta,X,f}{\lesssim} T^{\beta-\alpha}}$ e quindi, usando le stime ⓐ nelle stime ⓑ, è anche

$$\boxed{\left[\mathcal{M}_T((Y,Y'))\right]_{X,2\alpha} \le C_{\alpha,\beta,(X,\mathbb{X}),f} \cdot \|f\|_{C_b^2} \cdot T^{\beta-\alpha}}$$ (il quale è ≤ 1 per $T \downarrow 0$). (indipendentemente da ξ)

[Dim. Dal solito sviluppo $Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$ deduciamo subito che
$|Y_{s,t}| \overset{(\text{disug.})}{\le} \underbrace{\|Y'\|_\infty}_{\left(\underset{(T\le 1)}{\overset{(\text{ok})}{\le}} \underbrace{|Y'_0|}_{\substack{\| \\ f(\xi) \\ (\le \|f\|_\infty)}} + \underbrace{[Y']_\alpha}_{(\le [(Y,Y')]_{X,\alpha} \le 1)},\ \le \|f\|_\infty + 1 \doteq M\right)} |X_{s,t}| + [R^Y]_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}$, $\le M|X_{s,t}| + |t-s|^{2\alpha}$ (anche $[R^Y]_{2\alpha} \overset{(\text{ovvio})}{\le} [(Y,Y')]_{X,2\alpha} \le 1$). Ora basta osservare
che $|X_{s,t}| \le [X]_\beta |t-s|^\beta \le [X]_\beta T^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha$, mentre (come prima) $\begin{cases} 2\alpha > \beta \\ T \le 1 \end{cases} \Rightarrow |t-s|^{2\alpha} \le$
$\le |t-s|^\beta$, $\le T^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha$ di nuovo. ✓ Infine, impostando le stime ⓑ ed applicando
le stime ⓒ, otteniamo che

$$\left[\mathcal{M}_T((Y,Y'))\right]_{X,2\alpha} \overset{(\text{OK})}{=} \left[\left(\int_0^\cdot f(Y)\,dX, f(Y_\cdot)\right)\right]_{X,2\alpha} \overset{(ⓑ)}{\le} \quad (+ⓒ)$$
$$\le [f(Y)]_\alpha + C_{\alpha,\beta,(X,\mathbb{X})}\Big(\underbrace{\underbrace{|f(Y)'_0|}_{\substack{\| \\ (Df(Y_0)f(Y_0) = \\ = Df(\xi)f(\xi))}}}_{(\le \|Df\|_\infty \|f\|_\infty \overset{(\text{ovvio})}{\le} \|f\|^2_{C_b^2})} + M \cdot \|f\|_{C_b^2}\underbrace{\left(|Y'_0| + [(Y,Y')]_{X,2\alpha}\right)}_{(\le M)}\Big) \cdot T^{\beta-\alpha},$$ da cui la tesi

perché' affatto $[f(Y)]_\alpha \le \|Df\|_\infty [Y]_\alpha \underset{\alpha,\beta,X,f}{\lesssim} T^{\beta-\alpha}$.]

$\boxed{\text{PASSO 3:}}$ (CONCLUSIVO) dimostriamo $\boxed{\text{II}}$ ("CONTRAZIONE") (usando davvero che $f \in C^3$ e di nuovo ⓑ (a quest...)).

Per ogni $(Y,Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{B}_T$, osservato che $[f(Y) - f(\tilde{Y})]_\alpha \underset{(\text{a meno di una scalare})}{\lesssim} \|f\|_{C_b^2} \cdot [Y - \tilde{Y}]_\alpha$ (...)
e che una stima "tipo ⓑ" vale in modo del tutto analogo se vi sostituiamo $f(Y)$
con la differenza $f(Y) - f(\tilde{Y})$, ricaviamo subito

$$\left[\mathcal{M}_T((Y,Y')) - \mathcal{M}_T((\tilde{Y},\tilde{Y}'))\right]_{X,2\alpha} \le C\|f\|_{C_b^2}[Y-\tilde{Y}]_\alpha + C_{\alpha,\beta,(X,\mathbb{X})} \cdot \left[\left(f(Y) - f(\tilde{Y}), f(Y)' - f(\tilde{Y})'\right)\right]_{X,2\alpha}$$

FOGLIO (11) (ULTIMO)

D'oltre parte, valgono le due stime seguenti:

(i) → $[Y-\tilde{Y}]_\alpha \le C_{\alpha,\beta,X} \cdot T^{\beta-\alpha} \cdot [(Y-\tilde{Y}, Y'-\tilde{Y}')]_{X,2\alpha}$; ? $D^3 f(\xi)$?

(ii) → $[(f(Y)-f(\tilde{Y}), f(Y)'-f(\tilde{Y})')]_{X,2\alpha} \le C_{\alpha,X,\|f\|_{C^3_b}} \cdot [(Y-\tilde{Y}, Y'-\tilde{Y}')]_{X,2\alpha}$, dove appunto per quest'ultima occorre che $f \in C^3$. Mettendo insieme queste tre stime, la $\boxed{\text{II}}$ ne è immediata conseguenza per $T \downarrow 0$.

Dim. Cominciamo calcolando $(f(Y)-f(\tilde{Y}))_{s,t} \overset{(\text{imm.})}{=} Df(\eta_t)(Y_t-\tilde{Y}_t) - Df(\eta_s)(Y_s-\tilde{Y}_s) \overset{(\text{imm.})}{=}$

$\overset{(\text{imm.})}{=} Df(\eta_t)((Y-\tilde{Y})_{s,t}) - (Df(\eta_s) \mp Df(\eta_t))(Y_s-\tilde{Y}_s)$ („$\mp Df(\eta_t)(Y_s-\tilde{Y}_s)$" al RHS) : dunque

$|(f(Y)-f(\tilde{Y}))_{s,t}| \le \|Df\|_\infty [Y-\tilde{Y}]_\alpha |t-s|^\alpha + \Big| Df(\eta_t)(Y_s-\tilde{Y}_s) - Df(\eta_s)(Y_s-\tilde{Y}_s) +$

$+ Df(\eta_s)(Y_t-\tilde{Y}_t) - Df(\eta_s)(Y_t-\tilde{Y}_t)\Big| \ldots$? ESERCIZIO (VEDI SEGUITO). Invece, è davvero chiaro come ottenere la stima (b) ma con $f(Y)-f(\tilde{Y})$ al posto di $f(Y)$: esattamente come fatto per (b) „ora e prima", ma partendo dal punto $\boxed{2}$ del Teorema di Gubinelli con $T\le 1$ e con $f(Y)-f(\tilde{Y})$ al posto di Y. L'unica differenza formale è dovuta al fatto che

$f(Y)'_0 - f(\tilde{Y})'_0 \equiv 0$, in quanto $f(Y)'_0 = Df(Y_0)\cdot Y'_0 = Df(\xi)\cdot f(\xi) =$

$= Df(\tilde{Y}_0)\cdot \tilde{Y}'_0 = f(\tilde{Y})'_0$ (essendo $(Y,Y'), (\tilde{Y},\tilde{Y}') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{X,(\xi,f(\xi))}$).

Passiamo quindi alla (i), in verità molto facile: visto infatti che, per ogni $(Z,Z') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_X([0,T],W)$, è, come sempre, (e come visto all'inizio del PASSO 2)

$$|Z_{s,t}| \le \underbrace{\|Z'\|_\infty}_{\underset{(T\le 1)}{\le |Z'_0|+[Z']_\alpha}} \underbrace{|X_{s,t}|}_{(\le [X]_\beta T^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha)} + [R^Z]_{2\alpha} \underbrace{|t-s|^{2\alpha}}_{\substack{(\le |t-s|^\beta) \\ (\le T^{\beta-\alpha}|t-s|^\alpha)}} \le$$

$\le T^{\beta-\alpha}\big((|Z'_0|+[Z']_\alpha)\cdot[X]_\beta + [R^Z]_{2\alpha}\big)\cdot|t-s|^\alpha$, basta prendere $Z = Y-\tilde{Y}$ (ed osservare di nuovo che $Y'_0 = f(\xi) = \tilde{Y}'_0$).

Veniamo finalmente alla (ii): usando subito un "LEMMINO" enunciato in precedenza (→ ESERCIZIO (2), FOGLIO (6)) grazie alle ipotesi $f \in C^3(W, \mathcal{L}(V,W))$, prendiamo una $g \in C^2_b(W\times W, \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V,W)))_{(„g(\eta,\tilde{\eta})")}$ con $\|g\|_{C^2_b} \underset{(T\le 1)}{\le} C_\alpha \|f\|_{C^3_b}$ tale per cui, $\forall t \in [0,T]$,

$$\boxed{f(Y_t) - f(\tilde{Y}_t) = g(Y_t,\tilde{Y}_t)(Y_t-\tilde{Y}_t)}$$; in altri termini, per ogni $t\in[0,T]$ è

$f(Y_t) - f(\tilde{Y}_t) = G_t(H_t)$ con $G_t \doteq g(Y_t,\tilde{Y}_t) \overset{(\forall t)}{\in} \mathcal{L}(W,\mathcal{L}(V,W))$ e $H_t \doteq Y_t - \tilde{Y}_t \overset{(\forall t)}{\in} W$.

Ma allora, per un esercizio relativo al Lemma 7.3 e al Corollario 7.4, vale

$[(f(Y)-f(\tilde{Y}), f(Y)'-f(\tilde{Y})')]_{X,2\alpha} = [(GH, (GH)')]_{X,2\alpha} \underset{(T\le 1)}{\le} C_{\alpha,X} \|(G,G')\|_{X,2\alpha} \cdot \|(H,H')\|_{X,2\alpha}$. Ora, essendo $H \doteq Y-\tilde{Y}$, al solito $\|(H,H')\|_{X,2\alpha} = [(H,H')]_{X,2\alpha}$, e questo è un fattore

che vorremmo comparire proprio al RHS di (ii): per ciò, abbiamo finito se verifichi(amo) che $\|(G,G')\|_{X,2\alpha} \le C_{\alpha,X,\|f\|_{C^3_b}}$. In effetti, $G_t \doteq g(Y_t,\tilde{Y}_t)$ implica $G'_t =$ (nel caso che le A... scegliendo)
$= D_y g(Y_t,\tilde{Y}_t)\cdot Y'_t + D_{\tilde{y}} g(Y_t,\tilde{Y}_t)\cdot \tilde{Y}'_t$ (ESERCIZIO) (tipo generalizzazione Lemma 7.3 ...) con la stima
$[(G,G')]_{X,2\alpha} \underset{(T\le 1)}{\le} C_{\alpha,X,\varphi}\|g\|_{C^2_b}\cdot 1$ $((Y,Y'),(\tilde{Y},\tilde{Y}')\in B_T)$, $\le C_{\alpha,X}\|f\|_{C^3_b}$. Ma allora siamo alla fine, perché per il resto $|G_0| \le \|g\|_\infty \le C_\alpha \|f\|_{C^3_b}$ (stessa maggiorazione) e
$|G'_0| \le \|g\|_{C^1_b}(|Y'_0| + |\tilde{Y}'_0|) \overset{\text{(al solito)}}{\le} 2\|g\|_{C^1_b}\|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty\|f\|_{C^3_b}$.] □

NOTA. L'ESERCIZIO iniziale della dimostrazione del PASSO 3 è in realtà un LEMMA (non immediato): è il Lemma 8.2 del libro (pag. 108) (Luca), usando che $Y_0 = \xi = \tilde{Y}_0$. Osserviamo comunque che è dovuta a tale lemma l'introduzione della g che ci ha permesso di concludere.)

Una domanda: (Gioacchino!) cosa dire di una RDE tipo "BACKWARD" (→ paragrafo 5.4)

$$dY = f(Y)\,d\overleftarrow{X} \ ?$$

(Perché porsi il problema, e come si possono sviluppare le cose