Matematica II — a.a. 2024-2025

Esercitazione 3

QUESITI

Quesito 1. Si consideri la seguente struttura dei prezzi a pronti (*spot*).

$$v^0(0;1) = 0.99, \qquad v^0(0;2) = 0.96, \qquad v^0(0;3) = 0.94.$$

Quanto vale il prezzo di un'obbligazione triennale con cedole annue al 5%?

$\boxed{\text{a}}$ Meno di 100. $\boxed{\text{b}}$ Circa 100, a meno dello 0.01.

$\boxed{\text{c}}$ Più di 100. $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

<u>Nota</u>: dato $t > 0$, $v^0(0\,;t)$ rappresenta il prezzo all'istante temporale t di una determinata unità monetaria (ad esempio, di 1€).

Quesito 2. Si consideri la seguente struttura dei tassi a pronti.

$$h^0(0;1) = 3.5\%, \qquad h^0(0;2) = 4\%, \qquad h^0(0;3) = 5\%.$$

A quale intervallo appartengono i tre rispettivi prezzi a pronti degli ZCB (zero coupon bond)?

$\boxed{\text{a}}$ $[80, 95]$. $\boxed{\text{b}}$ $[85, 100]$. $\boxed{\text{c}}$ $[85, 95]$. $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Quesito 3. Viene acquistato un BOT (buono ordinario del tesoro) presso una banca al prezzo d'acquisto di mercato di 98€ per ogni 100€ di valore nominale; per tale operazione, la banca ha trattenuto una spesa di 1.5€. La vita residua del titolo obbligazionario è di 85 giorni *civili* ed il valore che viene pagato alla scadenza del titolo è il valore nominale. Qual'è il valore del tasso annuo implicito di interesse composto i nell'operazione?

$\boxed{\text{a}}$ Meno del 2.5%. $\boxed{\text{b}}$ Più del 2.5%.

$\boxed{\text{c}}$ Non è calcolabile. $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Quesito 4. In un dato mercato finanziario, i tassi a pronti $h^0(0\,;t)$ vengono determinati, per $t = 1, 2, 3, \ldots$, dalla seguente funzione (lineare affine).

$$h^0(0\,;t) = 0.01 + 0.02 \cdot (t - 0.25).$$

Selezionare l'affermazione corretta.

$\boxed{\text{a}}$ $h^0(0\,;1) = 0.03.$ $\boxed{\text{b}}$ $h^0(0\,;2) = 0.05.$

$\boxed{\text{c}}$ $h^0(1\,;2) \simeq 0.07.$ $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Quesito 5. In un dato mercato finanziario, i tassi a pronti $h^0(0\,;t)$ vengono determinati, per $t = 1, 2, 3, \ldots$, dalla seguente funzione.

$$h^0(0\,;t) = 0.005 + 0.001 \cdot t.$$

Quanto vale all'incirca il prezzo a termine $v^0(1\,;3)$ (*forward*)?

$\boxed{\text{a}}$ 0.96. $\boxed{\text{b}}$ 0.97. $\boxed{\text{c}}$ 0.98. $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Quesito 6. Si considerino i flussi generati dalle obbligazioni A, B e C (a partire dal rispettivo prezzo in $t = 0$) come indicato nella seguente tabella.

Scadenze	**Titolo A**	**Titolo B**	**Titolo C**
0	-95	-105	-115
1	100	45	35
2		100	25
3			100

Determinare il prezzo in 0 di uno ZCB con scadenza in 1 che pagherà 700 alla sua scadenza.

$\boxed{\text{a}}$ 645. $\boxed{\text{b}}$ 685.

$\boxed{\text{c}}$ Il problema è mal posto. $\boxed{\text{d}}$ Nessuna delle precedenti.

Quesito 7. Si considerino i seguenti flussi generati dalle obbligazioni A, B e C.

Scadenze	**Titolo A**	**Titolo B**	**Titolo C**
0	-90	-110	-130
1	100	50	40
2		100	20
3			100

Calcolare il prezzo approssimativo in 0 di un'obbligazione con cedola con scadenza triennale, che paga cedole pari a 5 ogni anno, e che paga un valore nominale pari a 100 alla sua scadenza.

a 90.8. b 92.8. c 94.8. d Nessuna delle precedenti.

Quesito 8. Sulla base di un determinato portafoglio, sono previste delle somme da incassare in corrispondenza delle rispettive scadenze annuali, come riportato nella seguente tabella.

$\boldsymbol{t}$	1	2	5	7	9
€	300	1000	1200	1800	2100

Quanto vale la durata media finanziaria (*duration*) dell'operazione in $t = 0$, nel regime di capitalizzazione composta, ad un tasso annuo convertibile trimestralmente del $i_4 = 10.25\%$?

a Meno di 5.5. b Più di 5.5.

c Non è calcolabile. d Nessuna delle precedenti.

Quesito 9. Un dato portafoglio dà diritto alla riscossione di 2500€ tra 2 anni, 3000€ tra 4.5 anni e 7000€ tra 5 anni. Sapendo che il tasso i, attualmente del 6%, subisce una variazione assoluta Δi pari allo 0.24%, calcolare approssimativamente la variazione assoluta ΔV del valore del portafoglio e la rata R della rendita costante equivalente alla rendita data, avente le medesime scadenze, considerando il tasso di valutazione sempre pari al 6%.

a $\Delta V \simeq -91.8$, $R \simeq 4058.1$. b $\Delta V \simeq -91.8$, $R \simeq 4057.1$.

c $\Delta V \simeq -92.8$, $R \simeq 4058.1$. d $\Delta V \simeq -92.8$, $R \simeq 4057.1$.

Quesito 10 (∗). Acquisto oggi, al prezzo di 99€, un'obbligazione di valore nominale 100€, scadente tra 2 anni e di cedola posticipata annua del 3%. Quanto vale il tasso interno di rendimento (*t.i.r.*) di tale operazione?

a Meno del 3%. b Circa 3%, a meno dello 0.001.

c Più del 3%. d Il problema è mal posto.

PROBLEMI

Problema 1. Si consideri la seguente struttura dei prezzi a pronti.

$$v^0(0;1) = 0.98, \qquad v^0(0;2) = 0.96, \qquad v^0(0;3) = 0.945.$$

Determinare il valore dei tre tassi a termine $h^0(1;2)$, $h^0(1;3)$ e $h^0(2;3)$.

Problema 2. Si consideri la seguente struttura dei prezzi a pronti.

$$v^0(0;1) = 0.975, \qquad v^0(0;2) = 0.945, \qquad v^0(0;3) = 0.92.$$

Calcolare il tasso d'interesse nominale effettivo di un'obbligazione a 3 anni che ha prezzo pari a 335.64, valore nominale di 300 e che stacca cedole annuali.

Problema 3. Un'obbligazione annua del valore nominale di 500€, con cedole semestrali al tasso annuo nominale convertibile semestralmente del 6%, è valutata dal mercato 506.5€, mentre uno ZCB ad un anno costa 95.5€. Determinare il tasso a termine (annuo) a sei mesi.

Problema 4. Un titolo obbligazionario paga 80€ ogni anno più, alla sua scadenza, il valore nominale aumentato di 20€. Sapendo che la vita residua del titolo è di 2 anni e 3 mesi, che la sua duration è di 1 anno, 7 mesi e 22 giorni *commerciali* e che il tasso annuo di valutazione utilizzato è del 6% composto, calcolare il valore nominale del titolo.

Problema 5. Trovare il prezzo e la duration di un BTP triennale avente valore nominale di 100€ che paga cedole semestrali del 2% al tasso di valutazione annuo del 5%. Quali pesi deve avere un portafoglio costruito su tale BTP e su di uno ZCB decennale per presentare una duration complessiva pari a 5 anni?

Problema 6. Sia X un BTP a cedole semestrali, con scadenza di due anni, al tasso di valutazione annuo $i = 4\%$, quotato alla pari dopo lo stacco della cedola.

1. Calcolare la duration di X.

2. Stimare la variazione percentuale del valore di X dovuta ad una variazione di i sia di $\Delta i_+ = 0.001$ ché di $\Delta i_- = -0.001$.

Problema 7. Si risponda alle due seguenti domande.

1. Dato il flusso di cassa di un titolo con 3 cedole annuali di 100€ l'una, valutate al tasso semestrale del 2%, quale dev'essere il valore nominale X del titolo affinché la sua duration in $t = 0$ sia uguale a 2 anni e 6 mesi?

2. Data la rendita perpetua posticipata avente rata R costante, con valore attuale pari a $V = 2000$€ calcolato ad un tasso d'interesse annuo i costante, e sapendo che la duration di tale rendita è $D = 21$ anni, quanto valgono i e R?

Problema 8. Sia A uno ZCB con 6 anni di vita residua, sia B uno ZCB con 10 anni di vita residua e sia X un portafoglio obbligazionario di duration pari a $D(X) = 5$.

1. Quale percentuale ω_A di capitale si dovrebbe investire su A affinché $D(X)$ aumenti fino al valore di 5.8?

2. Si desidera incrementare $D(X)$ investendo il 10% di capitale su A ed il 10% di capitale su B con scadenza di 10 anni. Quale duration avrà il portafoglio così costruito?

3. Si desidera che $D(X)$ cresca fino a 5.8, come al punto **1**, ma investendo una percentuale ω_A di capitale su A ed una percentuale $\omega_B = 10\%$ su B. Quanto deve valere ω_A?

Problema 9 (∗). Un determinato impiego finanziario, descritto da una legge finanziaria $F(x, y)$ $(0 \leq x \leq y)$, viene rappresentato dalla seguente intensità istantanea d'interesse.

$$\rho(x, y) = 0.025 + 0.05 \cdot (y - x), \quad 0 \leq x \leq y.$$

1. Esprimere analiticamente la funzione $F(x, y)$.

2. Mediante $F(x, y)$, calcolare il montante ottenuto investendo 3000€ per un periodo di 6 mesi a partire dalla data 3/12.

3. Se l'impiego appena menzionato viene interrotto dopo 3 mesi e ripreso immediatamente per i restanti 3 mesi, si raggiunge lo stesso esito?

Problema 10 (∗). Al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ (numeri reali), si consideri la seguente funzione.

$$F_{a,b}(x, y) = y^2 - (a + x)y + ax + b, \quad 0 \leq x \leq y.$$

1. Descrivere i parametri a e b affinché $F_{a,b}(x, y)$ risulti un fattore di montante, dimostrandolo in particolare per $F_{-1,1}(x, y)$ (cioè $F_{a,b}(x, y)$ con $a = -1$ e $b = 1$).

2. Determinare l'intensità istantanea d'interesse $\rho_{-1,1}(x, y)$ della legge $F_{-1,1}(x, y)$ e stabilire se l'impiego sia scindibile o meno.

3. Relativamente ad un generico intervallo temporale $[x, y]$ $(0 \leq x \leq y)$, esplicitare il tasso d'interesse annuo composto effettivo $i_{-1,1}(x, y)$ finanziariamente equivalente all'impiego.

4. Calcolare il montante di un capitale di 1000€ investito tra 2 mesi per una durata di 3 anni (sempre in corrispondenza di $a = -1$ e $b = 1$).

Università degli Studi dell'Insubria
Dipartimento di Economia
MOD. 2 MATEMATICA II (H–Z)

ESERCITAZIONE 3
Esercitatore: *M. Tarsia*

a.a. 2024–2025
21/03/2025

SVOLGIMENTO

Digressione. Richiamiamo alcune identità fondamentali a riguardo dei tassi, rispettivamente prezzi, a pronti (*spot*) e quindi dei tassi, rispettivamente prezzi, a termine (*forward*).

- Identità che relaziona i tassi a pronti $h^0(0\,;s)$ e $h^0(0\,;t)$ al relativo tasso a termine $h^0(s\,;t)$ $(0 < s < t)$:

$$\big[1 + h^0(0\,;s)\big]^s \cdot \big[1 + h^0(s\,;t)\big]^{t-s} = \big[1 + h^0(0\,;t)\big]^t \tag{1}$$

  o, equivalentemente,

$$h^0(s\,;t) = \left\{\frac{\big[1 + h^0(0\,;t)\big]^t}{\big[1 + h^0(0\,;s)\big]^s}\right\}^{1/(t-s)} - 1. \tag{2}$$

- Identità che relaziona i prezzi a pronti $v^0(0\,;t)$ ai tassi a pronti $h^0(0\,;t)$ $(t > 0)$:

$$v^0(0\,;t) = \big[1 + h^0(0\,;t)\big]^{-t} \tag{3}$$

  o, equivalentemente,

$$h^0(0\,;t) = \big[v^0(0\,;t)\big]^{-1/t} - 1. \tag{4}$$

- Identità che relaziona i prezzi a pronti $v^0(0\,;s)$ e $v^0(0\,;t)$ al relativo prezzo a termine $v^0(s\,;t)$ $(0 < s < t)$:

$$v^0(s\,;t) = \frac{v^0(0\,;t)}{v^0(0\,;s)}. \tag{5}$$

- Identità che relaziona i prezzi a termine $v^0(s\,;t)$ ai tassi a termine $h^0(s\,;t)$ $(0 < s < t)$:

$$v^0(s\,;t) = \frac{1}{\big[1 + h^0(s\,;t)\big]^{t-s}}. \tag{6}$$

- Identità che relaziona i prezzi a termine $v^0(s\,;t)$ ai tassi a pronti $h^0(0\,;s)$ e $h^0(0\,;t)$ $(0 < s < t)$:

$$v^0(s\,;t) = \frac{\big[1 + h^0(0\,;s)\big]^s}{\big[1 + h^0(0\,;t)\big]^t}. \tag{7}$$

- Identità che relaziona i tassi a termine $h^0(s\,;t)$ ai prezzi a pronti $v^0(0\,;s)$ e $v^0(0\,;t)$ $(0 < s < t)$:

$$h^0(s\,;t) = \left(\frac{v^0(0\,;s)}{v^0(0\,;t)}\right)^{1/(t-s)} - 1. \tag{8}$$

Quesito 1. Calcolo diretto:

$$5 \cdot v^0(0;1) + 5 \cdot v^0(0;2) + (5+100) \cdot v^0(0;3) = 108.45$$

(si veda anche l'equazione (3) con $t = 1, 2, 3$).
Risposta: **(c)**.

Quesito 2. Si tratta di calcolare, per ogni $t = 1, 2, 3$,

$$P_t \coloneqq 100 \cdot v^0(0;t) = 100 \cdot \left[1 + h^0(0;t)\right]^{-t} = \frac{100}{\left[1 + h^0(0;t)\right]^t}$$

(si veda nuovamente (3)). È immediato ottenere che

$$P_0 \simeq 96.62, \qquad P_1 = 92.46, \qquad P_2 = 86.38.$$

Risposta: **(b)**.

Quesito 3. Il tasso i in oggetto soddisfa l'uguaglianza

$$(98 + 1.5) \cdot (1+i)^{85/365} = 100$$

e, dunque,

$$i = \left(\frac{100}{99.5}\right)^{365/85} - 1 \simeq 0.02176.$$

Risposta: **(a)**.

Quesito 4. Dall'espressione stessa di $h^0(0;t)$, troviamo subito che

$$h^0(0;1) = 0.025, \qquad h^0(0;2) = 0.045$$

e così, in virtù dell'equazione (2) dove $s = 1$ e $t = 2$ ($t - s = 1$),

$$h^0(1;2) = \frac{\left[1 + h^0(0;2)\right]^2}{1 + h^0(0;1)} - 1 \simeq 0.0654.$$

Risposta: **(d)**.

Quesito 5. Si ha $h^0(0;1) = 0.006$ e $h^0(0;3) = 0.008$ e quindi, dall'equazione (7) con $s = 1$ e $t = 3$,

$$v^0(1;3) = \frac{1 + h^0(0;1)}{\left[1 + h^0(0;3)\right]^3} \simeq 0.9822.$$

Risposta: **(c)**.

Quesito 6. Dalla (prima colonna della) tabella in esame deduciamo che

$$v^0(0;1) = \frac{95}{100} = 0.95$$

e allora il prezzo richiesto vale

$$700 \cdot v^0(0;1) = 665.$$

Risposta: **(d)**.

Quesito 7. Anzitutto,

$$v^0(0;1) = \frac{90}{100} = 0.9$$

(si veda anche il precedente quesito) e dunque, dalla relazione di equivalenza finanziaria

$$110 = 50 \cdot v^0(0;1) + 100 \cdot v^0(0;2)$$

ricaviamo facilmente che $v^0(0;2) = 0.65$. Di conseguenza, analogamente, da

$$130 = 40 \cdot v^0(0;1) + 20 \cdot v^0(0;2) + 100 \cdot v^0(0;3)$$

otteniamo che $v^0(0;3) = 0.81$ e in definitiva, per risolvere il quesito,

$$5 \cdot v^0(0;1) + 5 \cdot v^0(0;2) + (5 + 100) \cdot v^0(0;3) = 92.8$$

(si veda anche il Quesito 1).
Risposta: **(b)**.

Quesito 8. Per definizione, la duration D di un'obbligazione coincide con la scadenza media dei flussi di cassa attesi rapportata per il contributo del valore attuale di ciascun flusso alla formazione del prezzo (valore attualizzato del portafoglio): nella nostra situazione,

$$D = \frac{300 \cdot (1+i)^{-1} + 2 \cdot 1000 \cdot (1+i)^{-2} + 5 \cdot 1200 \cdot (1+i)^{-5} + 7 \cdot 1800 \cdot (1+i)^{-7} + 9 \cdot 2100 \cdot (1+i)^{-9}}{300 \cdot (1+i)^{-1} + 1000 \cdot (1+i)^{-2} + 1200 \cdot (1+i)^{-5} + 1800 \cdot (1+i)^{-7} + 2100 \cdot (1+i)^{-9}}$$

dove, naturalmente,

$$i = \left(\frac{i_4}{4} + 1\right)^4 - 1 \simeq 0.1065.$$

Pertanto,

$$D \simeq \frac{19388.51532}{3551.09136} \simeq 5.45987.$$

Risposta: **(a)**.

Quesito 9. L'operazione può esser schematizzata come segue.

$\boldsymbol{t}$	2	4.5	5
€	2500	3000	7000

La variazione assoluta ΔV del valore del portafoglio è ben approssimata mediante la seguente relazione notevole (della duration *modificata*):

$$\Delta V \simeq -\Delta i \cdot \frac{D}{1+i} \cdot V$$

dove D e V rappresentano rispettivamente la duration e il valore attualizzato del portafoglio. In particolare,

$$D \cdot V = 2 \cdot 2500 \cdot (1.06)^{-2} + 4.5 \cdot 3000 \cdot (1.06)^{-4.5} + 5 \cdot 7000 \cdot (1.06)^{-5} \simeq 40990.2348$$

da cui

$$\Delta V \simeq -0.0024 \cdot \frac{40990.2348}{1.06} \simeq -92.8081.$$

Infine, dall'identità

$$V = R \cdot \left[(1.06)^{-2} + (1.06)^{-4.5} + (1.06)^{-5}\right]$$

(uguaglianza tra i valori attuali delle due rendite in questione), dove appunto

$$V = 2500 \cdot (1.06)^{-2} + 3000 \cdot (1.06)^{-4.5} + 7000 \cdot (1.06)^{-5} \simeq 9763.8464,$$

arriviamo a $R = 4057.1055$.
Risposta: **(d)**.

Quesito 10 (∗). [Quesito 6 della Esercitazione 5] L'operazione $\mathcal{A}$ in oggetto è un investimento in senso stretto dove la somma dei costi, ossia 99€, risulta inferiore alla somma dei ricavi, pari a 106€ = 3€+103€: esiste quindi uno ed un solo tasso implicito i^*, coincidente col *t.i.r.* richiesto, il quale è positivo e tale che

$$0 = \text{r.e.a.}_{\mathcal{A}}(i^*) = 99 - 3(1+i^*)^{-1} - 103(1+i^*)^{-2}$$

(equazione di secondo grado nell'incognita $1/(1+i^*)$), che ammette soluzione positiva $i^* \simeq 0.03527 > 0.03$. Risposta: **(c)**.

Problema 1. L'equazione (8) offre una soluzione diretta al problema:

$$h^0(1;2) = \frac{v^0(0;1)}{v^0(0;2)} - 1 \simeq 0.02083,$$

$$h^0(1;3) = \sqrt{\frac{v^0(0;1)}{v^0(0;3)}} - 1 \simeq 0.01835,$$

$$h^0(2;3) = \frac{v^0(0;2)}{v^0(0;3)} - 1 \simeq 0.01587.$$

Problema 2. Vale

$$\begin{aligned} 335.64 &= 300 \cdot v^0(0;1) \cdot i + 300 \cdot v^0(0;2) \cdot i + 300 \cdot v^0(0;3) \cdot (1+i) \\ &\equiv 292.5 \cdot i + 283.5 \cdot i + 276 \cdot (1+i) \end{aligned}$$

se e solo se

$$i = \frac{335.64 - 276}{292.5 + 283.5 + 276} = 0.07.$$

Problema 3. Dato che $j_2 = 0.06$, è $i_2 = j_2/2 = 0.03$ e quindi il valore della cedola è

$$C = 500 \cdot i_2 = 15.$$

Visto poi che $v^0(0;1) = 95.5/100 = 0.955$, l'equivalenza

$$506.5 = 15 \cdot v^0(0;0.5) + (15+500) \cdot v^0(0;1)$$

implica che

$$v^0(0;0.5) = \frac{506.5 - 515 \cdot 0.955}{15} \simeq 0.97833$$

e in conseguenza, dall'equazione (8) con $s = 0.5$ e $t = 1$,

$$h^0(0.5;1) = \left(\frac{v^0(0;0.5)}{v^0(0;1)}\right)^2 - 1 \simeq 0.04946.$$

Problema 4. Per ipotesi, il valore nominale X desiderato soddisfa l'equazione

$$
\begin{aligned}
1.644 &\simeq \frac{1 \cdot 360 + 7 \cdot 30 + 22}{360} \\
&= \frac{\frac{3}{12} \cdot 80 \cdot 1.06^{-3/12} + \frac{15}{12} \cdot 80 \cdot 1.06^{-15/12} + \frac{27}{12} \cdot (X+20) \cdot 1.06^{-27/12}}{80 \cdot 1.06^{-3/12} + 80 \cdot 1.06^{-15/12} + (X+20) \cdot 1.06^{-27/12}} \\
&\simeq \frac{152.157 + 1.973 \cdot X}{170.766 + 0.877 \cdot X}
\end{aligned}
$$

o, equivalentemente,

$$280.739 + 1.442 \cdot X \simeq 152.157 + 1.973 \cdot X$$

ovvero

$$0.531 \cdot X \simeq 128.582$$

da cui

$$X \simeq 242.151.$$

Problema 5. Il tasso semestrale equivalente a quello dato è

$$i_2 = \sqrt{1.05} - 1 \simeq 0.0247$$

e, così, il valore attuale in euro della componente cedolare risulta

$$V_{\text{ced}} = 2 \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-6}}{i_2} \simeq 11.03$$

mentre quello della componente data dal rimborso del valore nominale è

$$V_{\text{nom}} = 100 \cdot (1+i)^{-3} \equiv 100 \cdot (1+i_2)^{-6} \simeq 86.38.$$

Segue subito che il valore attuale in euro del BTP sia pari a

$$V_{\text{BTP}} = V_{\text{ced}} + V_{\text{nom}} \simeq 97.41.$$

La duration D_{BTP} da calcolare può esser determinata in semestri grazie alla cosiddetta proprietà associativa:

$$D_{\text{BTP}} \equiv D_{\text{BTP}}(i_2) = \omega_{\text{ced}} D_{\text{ced}} + \omega_{V_{\text{nom}}} D_{V_{\text{nom}}}$$

dove

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{ced}} &\doteq \frac{V_{\text{ced}}}{V_{\text{BTP}}} \simeq 0.1132, \\
D_{\text{ced}} &\doteq \frac{1+i_2}{i_2} - \frac{6}{(1+i_2)^6 - 1} \simeq 3.4289 \text{ (semestri)}, \\
\omega_{V_{\text{nom}}} &\doteq \frac{V_{\text{nom}}(1+i_2)^{-6}}{V_{\text{BTP}}} \simeq 0.8868, \\
D_{V_{\text{nom}}} &= 6 \text{ (semestri)}.
\end{aligned}
$$

Il risultato è D_{BTP} uguale circa a 5.71 semestri, cioè a 2.85 anni. Sapendo infine che, in generale, la duration di un portafoglio è pari alla media ponderata delle duration(s) dei titoli che lo compongono, per terminare l'esercizio dovremmo trovare un peso $\omega \in [0,1]$ tale per cui

$$\omega D_{\text{BTP}} + (1-\omega) D_{\text{ZCB}} = 5.$$

Ma la duration dello ZCB è pari a 10: dev'esser $\omega = 0.702$.

Problema 6.

1. Procedendo come nello svolgimento del precedente problema,

$$D_{\mathrm{BTP}} \equiv D_{\mathrm{BTP}}(i_2) = \omega_{\mathrm{ced}} D_{\mathrm{ced}} + \omega_{V_{\mathrm{nom}}} D_{V_{\mathrm{nom}}}$$

dove

$$\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{ced}} &\doteq \frac{V_{\mathrm{ced}}}{V_{\mathrm{BTP}}} \simeq 0.1415, \\
D_{\mathrm{ced}} &\doteq \frac{1+i_2}{i_2} - \frac{4}{(1+i_2)^4 - 1} \simeq 2.4755 \text{ (semestri)}, \\
\omega_{V_{\mathrm{nom}}} &\doteq \frac{V_{\mathrm{nom}}(1+i_2)^{-4}}{V_{\mathrm{BTP}}} \simeq 0.8585, \\
D_{V_{\mathrm{nom}}} &= 4 \text{ (semestri)}.
\end{aligned}$$

Il risultato è D_{BTP} uguale circa a 3.7843 semestri, cioè a 1.8921 anni.

2. Secondo quanto illustrato per il Quesito 9, la variazione percentuale richiesta vale

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq -\Delta i_{\pm} \cdot \frac{D_{\mathrm{BTP}}}{1+i} \simeq \mp 0.00182$$

($D_{\mathrm{BTP}} \simeq 1.8921$), ovvero -0.00182 in corrispondenza di Δi_+ e 0.00182 in corrispondenza di Δi_-.

Problema 7.

1. Per cominciare,

$$i = (1+i_2)^2 - 1 = 0.0404$$

e, similmente al Problema 4, da

$$\begin{aligned}
2.5 &= \frac{100 \cdot 1.0404^{-1} + 2 \cdot 100 \cdot 1.0404^{-2} + 3 \cdot (100 + X) \cdot 1.0404^{-3}}{100 \cdot 1.0404^{-1} + 100 \cdot 1.0404^{-2} + (100 + X) \cdot 1.0404^{-3}} \\
&\simeq \frac{547.2774 + 2.6639 \cdot X}{277.2986 + 0.8879 \cdot X}
\end{aligned}$$

deduciamo

$$693.2465 + 2.2197 \cdot X \simeq 547.2774 + 2.6639 \cdot X$$

cioè

$$0.4442 \cdot X \simeq 145.9691$$

e

$$X \simeq 328.6112.$$

2. Trattandosi di una rendita perpetua posticipata avente rata R costante, valgono le formule

$$\begin{cases} D = \dfrac{1+i}{i} \\ V = \dfrac{R}{i} \end{cases}$$

le quali, nella fattispecie, diventano

$$\begin{cases} 21 = \dfrac{1}{i} + 1 \\ 2000 = \dfrac{R}{i} \end{cases}$$

che portano a $i = 1/20 = 0.05$ (prima equazione) ed infine a $R = 2000 \cdot i = 100$ (seconda equazione).

Problema 8.

1.

$$\begin{cases} \omega_A D(A) + (1-\omega_A) D(X) = 5.8 \\ D(A) = 6,\ D(X) = 5 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega_A = 0.8.$$

2.

$$\begin{cases} \omega_A D(A) + \omega_B D(B) + (1-\omega_A-\omega_B) D(X) = D \\ D(A) = 6,\ D(B) = 10,\ D(X) = 5 \\ \omega_A = \omega_B = 0.1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad D = 5.6.$$

3.

$$\begin{cases} \omega_A D(A) + \omega_B D(B) + (1-\omega_A-\omega_B) D(X) = 5.8 \\ D(A) = 6,\ D(B) = 10,\ D(X) = 5 \\ \omega_B = 0.1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega_A = 0.3.$$

Problema 9 (∗).

1. Per ogni $0 \leq x \leq y$,

$$\begin{aligned} \int_x^y \varrho(x,s)\,ds &= \Big[0.025 \cdot s + 0.025 \cdot s^2 - 0.05 \cdot x \cdot s\Big]_{s=x}^{s=y} \\ &= 0.025 \cdot (y-x) + 0.025 \cdot (y^2 - x^2) - 0.05 \cdot x \cdot (y-x) \\ &= (y-x) \cdot \big[0.025 + 0.025 \cdot (y+x) - 0.05 \cdot x\big] \\ &= (y-x) \cdot \big[0.025 + 0.025 \cdot (y-x)\big] \end{aligned}$$

e, allora,

$$F(x,y) = e^{(y-x)[0.025+0.025(y-x)]}.$$

2. Per definizione, il montante richiesto coincide con

$$3000 \cdot F(3/12, 9/12) \simeq 3056.781$$

in euro (qui, $9 = 3 + 6$).

3. In riferimento al noto Teorema di Cantelli, la dipendenza effettiva di ϱ dalla (prima) variabile x (ovvero la non scindibilità di F) lascia supporre che la risposta sia negativa. In effetti, risulta

$$F(3/12, 6/12) \cdot F(6/12, 9/12) \simeq 0.000061 < 0.01875 \simeq F(3/12, 9/12).$$

Problema 10 (∗).

1. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq x \leq y$,

$$\begin{aligned} F_{a,b}(x,y) &= y^2 - (a+x)y + ax + b \\ &= y^2 - ay - xy + ax + b \\ &= y(y-a) - x(y-a) + b \\ &= (y-x)(y-a) + b \end{aligned}$$

ed in particolare, per ogni $x \geq 0$,

$$F_{a,b}(x,x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 1$$

(valore che fissiamo subito). D'altra parte, è semplice verificare che

$$\frac{\partial}{\partial y} F_{a,b}(x, y) = 2y - x - a \geq 0 \quad \iff \quad a \leq 0$$

e che, proprio per $a \leq 0$, pure $F_{a,b}(x, y) \equiv F_{a,1}(x, y) \geq 0$: come conseguenza,

$$F_{-1,1}(x, y) = (y - x)(y + 1) + 1$$

è un fattore di montante a tutti gli effetti.

2. Per ogni $0 \leq x \leq y$,

$$\varrho_{-1,1}(x, y) \equiv \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{-1,1}(x, y)}{F_{-1,1}(x, y)} = \frac{2y - x + 1}{(y - x)(y + 1) + 1}$$

e dunque, in virtù del Teorema di Cantelli, la legge non è scindibile (ϱ dipende dalla variabile x e, comunque, $F_{-1,1}(x, y)$ non è riducibile alla forma $f(y)/f(x)$).

3. Per definizione,

$$\big[1 + i_{-1,1}(x, y)\big]^{y-x} = F_{-1,1}(x, y)$$

ossia

$$i_{-1,1}(x, y) = F_{-1,1}(x, y)^{1/(y-x)} - 1 = \big[(y - x)(y + 1) + 1\big]^{1/(y-x)} - 1.$$

4. In euro,

$$1000 \cdot F_{-1,1}(2/12, 38/12) = 13500$$

(qui, $38 = 2 + 36$).