+ VETRO
− PLASTICA

attrazione ⇔ segni opposti → corpi elettrizzati

FISICA 2 (VAI AVANTI...)

CORPO → NUCLEO → uguale quantità di carica + e carica − elettroni

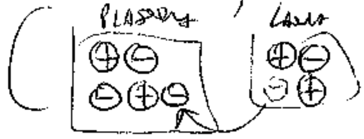
(CORPO) MATER. NEUTRO : uguale quantità di c. + e c. −

Mater. carico +/− : contiene eccesso di cariche +/−

Le cariche si spostano AD ES. per strofinio

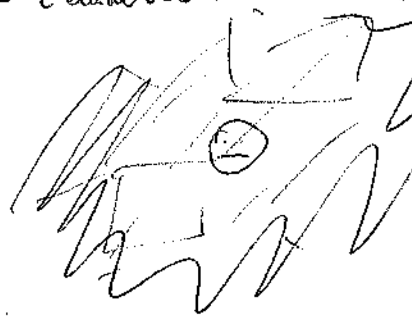
i solidi perdono più facilmente gli elettroni ; ES : plastica S lana

⇒ plastica si carica − cioè lana +



NOTA: le cariche totali sono le stesse!!)

i corpi sono più o meno conduttori. ~

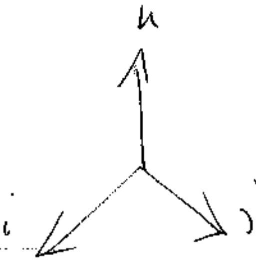


VUOTO ISOLANTE, aria tanto più rarefatta quanto più isolante

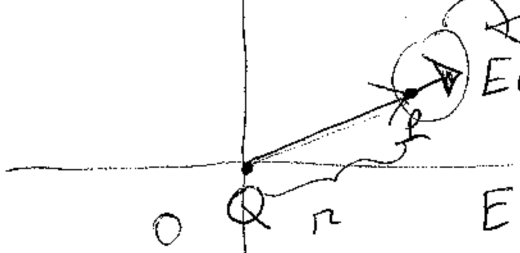
CARICA (−) dell'elettrone è $-e := -1,6(022)\cdot 10^{-19}\,C$;

CIOÈ $1C = e \cdot 1,6 \cdot 10^{19}$; CONSERVAZIONE C.E.

Carica $q = ne$, $n \in \mathbb{N}$



(destro)



$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,r}{|r|^3}$$, [illegible]

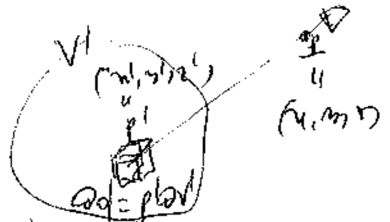
$$E(r)\cdot q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q q\, r}{|r|^3}$$ che sarebbe forza di Coulomb e avrei le dim. GIUSTE.

Per n° finito di cariche puntiformi gli E si sommano, mentre in generale :

$dq = \rho\, dV$ (DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA) $\Rightarrow q = \int \rho\, dV =$

$= \int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ (o altrimenti σ S, λ l),

$$\Rightarrow \quad d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho' dV' \,\vec{P'P}}{|\vec{PP'}|^3} \quad \Rightarrow$$



$$E(P) = \int dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho'(x',y',z')\,\vec{P'P}}{|\vec{PP'}|^3}\,dV' \qquad (dV' = dx'\,dy'\,dz'),$$

(o con σ/S, λ/l).

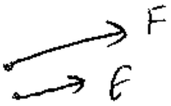
Una carica Q genera in TUTTO lo spazio una alterazione tale per cui, $\forall$ carica q, conoscendo la distanza r tra q e Q

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} \; ;$$

(vuoto)

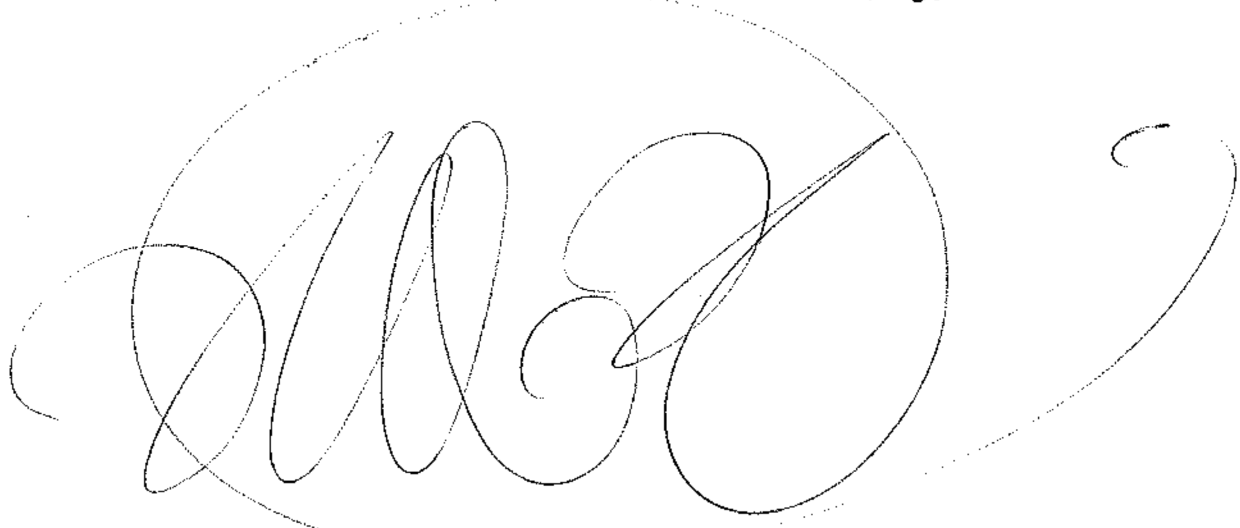
allora Q genera CAMPO ELETTRICO $\vec{E}(r) := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{F}{q}$

cosicché ovviamente $F = E \cdot q$.



Rapp. con "linee di campo".

Vorremo ottenere E da $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ $(E = -V')$



(Ex) Qual è l'intensità della forza che agisce su ciascuna di due cariche $q_1 = q_2 = 1\,C$ (in quiete e nel vuoto) poste a distanza di $r = 1\,m$? Troviamo la massa che ha tale peso.

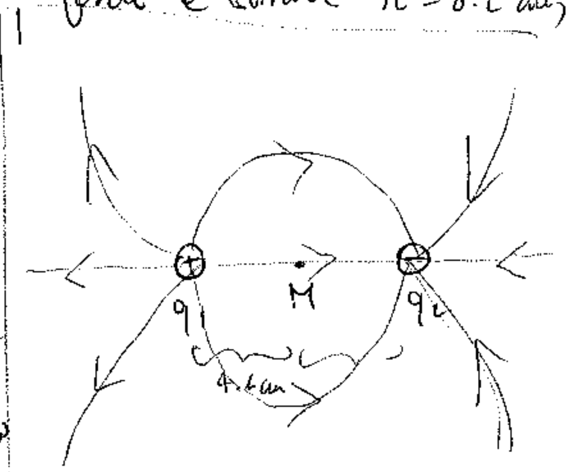
[Per Coulomb è $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1N}{4\pi\, 8.854\cdot 10^{-12}} \simeq$

$\simeq 8.99 \cdot 10^9\,N$; ora, una massa m è tale che $F = m\cdot g$ ($g := 9.8\,N/Kg$) $\Longleftrightarrow m \simeq 9\cdot 10^8\,Kg$]

(Ex) Qual è l'intensità del campo elettrico generato da una carica $Q = 12\cdot 10^{-9}\,C$ (nel vuoto e in quiete) alla distanza di $r = 6$ cm?

[È $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \left(8.99\cdot 10^9 \cdot \frac{\cancel{12}\cdot 10^{-9}}{\cancel{6}\cdot 6\cdot 10^{-4}}\right)\frac{N}{C} \simeq 3\cdot 10^4\,\frac{N}{C}$]

(Ex) Qual è il vettore campo elettrico E generato da due cariche $q_1 = 6\,pC$ e $q_2 = -6\,pC$ poste a distanza $r = 8.2$ cm, nel punto medio M tra le due q.



[E ha direzione la congiungente di q_1 e q_2, il verso da q_1 a q_2 e intensità la somma delle intensità dei campi elettrici generati da q_1 e q_2 come se fossero "soli" (poiché è così per i vettori campo elettrico nel complesso), cioè è uguale a

$2\cdot \frac{1}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{(r/2)^2} = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\frac{6\cdot 10^{-12}}{67.24\cdot 10^{-4}}\frac{N}{C}$ $(8.859\cdot 10^{-12})$

$\simeq 64\,N$]

(Ex) Che eccesso di elettroni avrebbe un corpo di carica 1C?

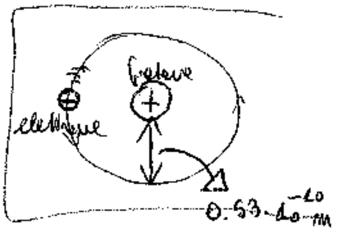
Dire che un elettrone ha carica $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C equivale e dire che 1C corrisponde a un eccesso di elettroni pari a

$$\frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} \cong 6 \cdot 10^{18}$$

, semplicemente perché 1C = (n° elettroni in eccesso) × (carica elettrone)

(Ex) Confrontare attrazione elettrica e attrazione gravitazionale tra elettrone e protone in un atomo di idrogeno.

Carica elettrone $\overset{\text{in modulo}}{=}$ carica protone $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ C,



quindi la forza attrattiva tra le due particelle (elettrica) ha intensità

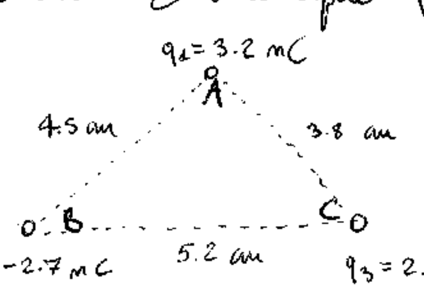
$$\frac{1}{4\pi\, 8.854 \cdot 10^{-12}} \, \frac{(1.6)^2\, 10^{-38}}{(0.53)^2\, 10^{-20}} \, N = $$

10^{-6}

$(\cong)$ $8.2 \cdot 10^{-8}$ N ; INVECE la forza (attrattiva) gravitazionale ha modulo $G \cdot \frac{m_e \cdot m_p}{r^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.673 \cdot 10^{-27}}{(0.53)^2 \cdot 10^{-20}} \; (\cong) \; 3.6 \cdot 10^{-47}$ N !! Dunque possiamo scrivere

$$|F_{elettrica}| = 10^{39}\, |F_{gravitazionale}| \; !$$

(Ex) Determinare l'energia potenziale del seguente sistema di cariche:



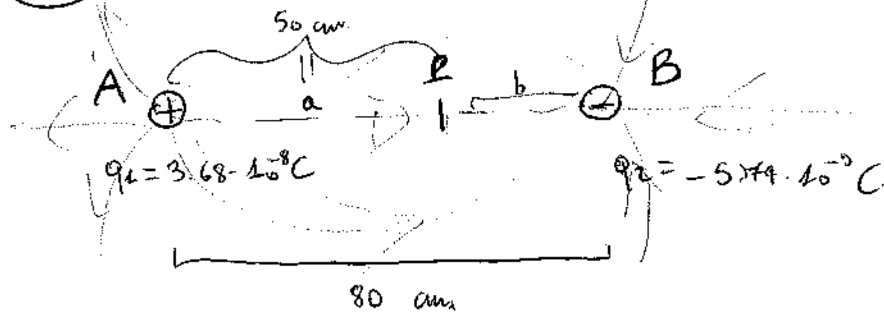
($mC = 10^{-3}$ C)

Ovviamente l' $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{AB} + \frac{q_2 q_3}{BC} + \frac{q_1 q_3}{AC}\right) =$

$= 8.99\cdot 10^{9}\cdot \frac{10^{-19}}{10^{-2}} \left(\underbrace{\frac{3.2\times 2.7}{4.5}}_{1.92} - \underbrace{\frac{2.7\times 2.5}{5.2}}_{1.29} + \underbrace{\frac{3.2\times 2.5}{3.8}}_{2.1}\right) J =$ 10^{-17}

$= -9.9\cdot 10^{-17}\ J \quad (= -0.99\ \mu J)$.

(EX) Calcolare il potenziale elettrostatico nel punto P in figura:



Intanto, $V(P) = V_1(P) + V_2(P)$ con V_1 risp. V_2 i pot. el. che ci sarebbero in P se le cariche q_1 risp. q_2 fossero sole;

ma $V_1(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{a} = 8.99\cdot 10^{9}\cdot\frac{3.68\cdot 10^{-8}}{5\cdot 10^{-1}}\ V = 662 V$,

mentre $V_2(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{b} = -8.99\cdot 10^{9}\,\frac{5.74\cdot 10^{-9}}{3\cdot 10^{-1}} = -172 V$,

quindi $V(P) = 490 V$.

(EX) Una distribuzione piana di carica contiene $Q = 8.4\cdot 10^{-9} C$ di carica su una superficie $\Delta S = 3.4\ m^2$: quanto vale l'intensità del campo elettrico da essa generato, "molto vicino" alla superficie stessa?

La risposta è $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{4.2\cdot 10^{-9+12}}{8.854\cdot \cancel{10^{-12}}\cdot 3.4}\frac{N}{C} =$

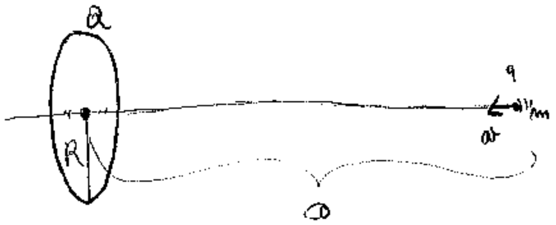
$= 1.3\cdot 10^{2}\ N/C$.

(Ex) Nel campo el. puntiforme di una carica puntiforme Q è

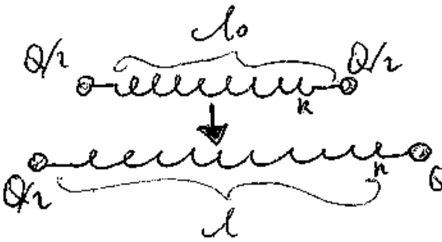
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = \frac{F(q,r)}{q}$$, se $F(q,r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$;

Altro modo di scrivere $E(r) = \ldots$?

$$\vec{E} = \frac{\partial F}{\partial q} \;\ldots$$



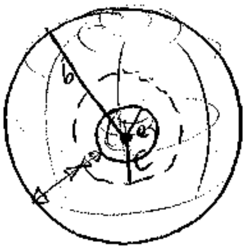
$$\frac{mv^2}{2} = q\Delta V = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2}}\right]$$



$$\frac{1}{4}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{l_0} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{l},$$

ciel $\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 = \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{(=:k_0)} Q^2 \underbrace{\left[\frac{1}{l_0}-\frac{1}{l}\right]}_{\frac{l-l_0}{ll_0}},$

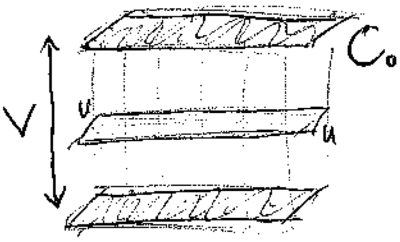
De aici $l^2 - l_0 l - \frac{k_0 Q^2}{2kl_0} = 0$



([illegible])

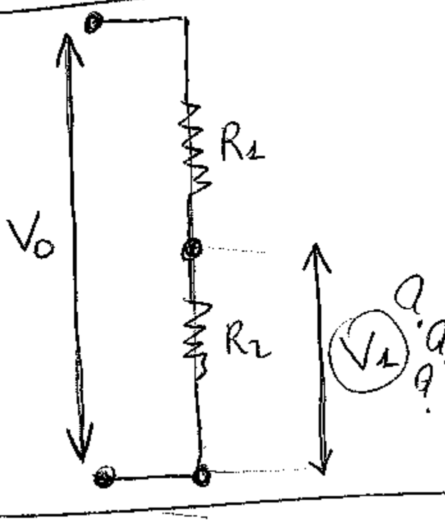
$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b} = \frac{1}{e}-\frac{1}{c},$$

ciel $c = \frac{2eb}{e+b}$



$$\frac{1}{2}\overbrace{C_r}^{(\varepsilon_r C_0)} V^2 = L + \frac{1}{2}C_0V^2,$$

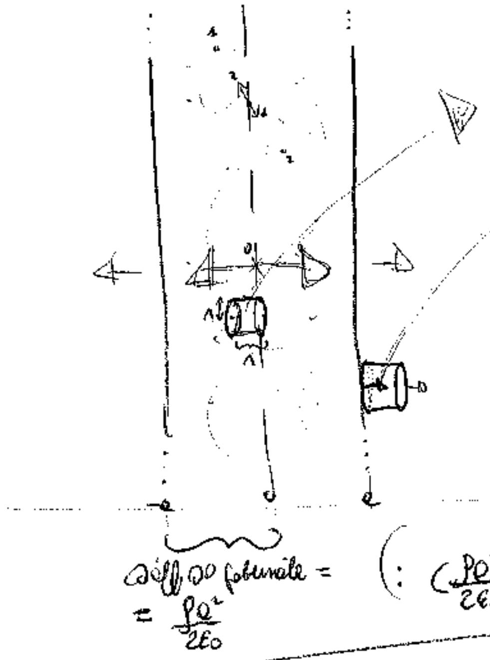
ciel $L = (\varepsilon_r - 1)\frac{1}{2}C_0V^2$



$V_1 = V_0 - R_1 i = V_0 - R_1\left(\frac{V_1}{R_2}\right)$, ciel

$V_1\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right) = V_0$, ciel

$$V_1 = \frac{V_0R_2}{R_1+R_2}$$

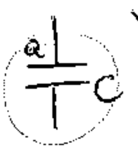


$(\pi r^2)|E| = \frac{\rho}{\varepsilon_0}(\pi r^2)r$, cioè $|E| = \frac{\rho r}{\varepsilon_0}$;

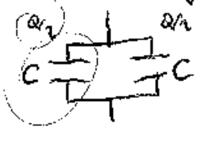
$(\pi r^2)\left(|E| - \frac{\rho e}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 0$, cioè $|E| = \frac{\rho e}{\varepsilon_0}$!

(in effetti LA MEDIA di $\frac{\rho r}{\varepsilon_0}$ da 0 a $|e|$ è $\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{1}{e}\left(\frac{e^2}{2}\right) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$, da cui il lavoro è $F\cdot e = [e(\frac{\rho e}{2\varepsilon_0})]\cdot e$!)

$\left(:\ \left(\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\right)\cdot e\right)$

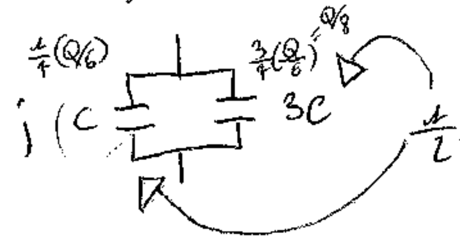


$\xrightarrow{} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} =: W$;



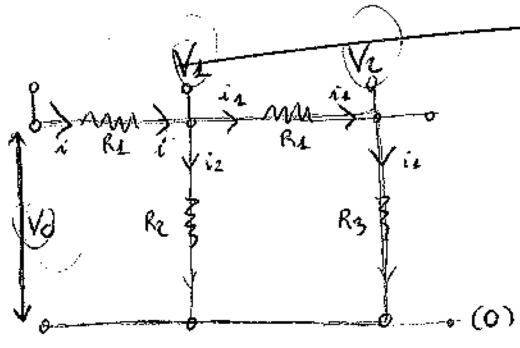
$\xrightarrow{} \frac{1}{2}\frac{(Q/2)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{(Q/2)^2}{C} = \frac{1}{2}W$ $\left(\frac{1}{4}W\right)$, dunque parte dell'energia è andata persa! Ora

$\xrightarrow{} \frac{1}{2}\frac{(Q/6)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{(Q/3)^2}{2C} = \dots$ $\left(\frac{1}{18}W\right)$



; $\frac{1}{2}\frac{(Q/8)^2}{3C} + \frac{1}{2}\frac{(Q/24)^2}{C} = \dots = \frac{1}{2}\frac{(Q/6)^2}{4C} = \frac{1}{144}W$,

onde è andata persa $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{144}\right)$ (in %).



Affinché, con $k \geq 2$ intero, sia $V_1 = \frac{V_0}{k}$ e $V_2 = \frac{V_1}{k}$ $\left(= \frac{V_0}{k^2}\right)$ dobbiamo (equiv.) $R_1 : R_2 : R_3 = (k-1)^2 : k : k-1$;

infatti
$$\begin{cases} V_1 = V_0 - iR_1 = i_2R_2 \\ V_2 = V_1 - i_1R_1 = V_0 - (i+i_1)R_1 = i_1R_3 \\ i_1 + i_2 = i \end{cases} \Rightarrow$$

$V_1 = \frac{V_0}{k} = \frac{V_1 + iR_1}{k} \iff \underbrace{V_1}_{(i_2R_2)}\overbrace{\left(1 - \frac{1}{k}\right)}^{(k-1)/k} = \frac{iR_1}{k} \iff i_2R_2(k-1) = iR_1$, cioè $\frac{R_1}{R_2} = \frac{i_2(k-1)}{i}$;

analogamente $V_2 = \frac{V_1}{k} = \frac{V_2 + i_1R_1}{k} \iff (i_1R_3)\frac{k-1}{k} = \frac{i_1R_1}{k}$, cioè $\frac{R_1}{R_3} = k-1$; infine

$\frac{i_1}{i} = \frac{k-1}{k}$:
$$\begin{cases} iR_1 = V_0 - V_1 = V_0 - \frac{V_0}{k} = \frac{k-1}{k}V_0 \\ i_1R_1 = V_1 - V_2 = V_1 - V_1/k = \frac{k-1}{k}V_1 = \frac{k-1}{k^2}V_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{i}{i_1} = k \text{ dunque},$$

cioè $i = k(i - i_2) = ki - ki_2$, cioè $ki_2 = (k-1)i$!

Semplificazione delle formule per dipolo elettrico e dipolo magnetico (spira) (con magnete a barretta)

perché a grande distanza ("approx. di dipolo") entrambi E e B

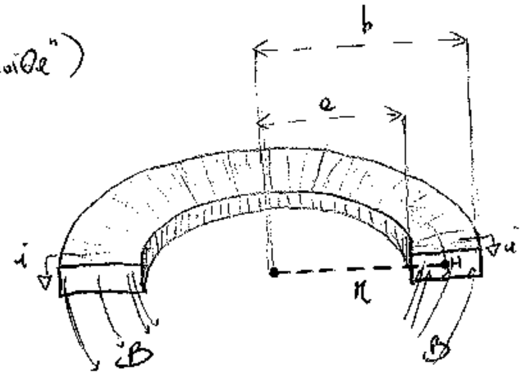
soddisfano $\begin{cases} \mathrm{rot}\, E = 0 \ \text{(sempre)} \\ \mathrm{div}\, E = \rho/\varepsilon_0 \simeq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \mathrm{div}\, B = 0 \ \text{(sempre)} \\ \mathrm{rot}\, B = \mu_0 i \simeq 0 \end{cases}$! (come nel vuoto)

Per lo stesso motivo potevamo esprimere in lontananza i rispettivi tipi di sistema.

$$\mathrm{rot}\, B = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right) \Rightarrow$$ l'equazione di continuità "giusta":

$$0 = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, B) = \cancel{\mu_0}(\mathrm{div}\, i) + \cancel{\mu_0}\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\mathrm{div}\, E)}_{\rho/\varepsilon_0} = \mathrm{div}\, i + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad !$$

("toroide")

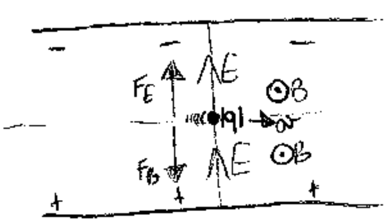


$(2\pi r)|B| = \mu_0 N i$, cioè

$|B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ni}{r}$ (anche se è circolare); allora $\frac{\Phi(B)}{N} =$

$$= \int_a^b |B|(h\,dr) = \frac{\mu_0 N h i}{2\pi}\underbrace{\int_a^b \frac{dr}{r}}_{\log(b/a)},$$

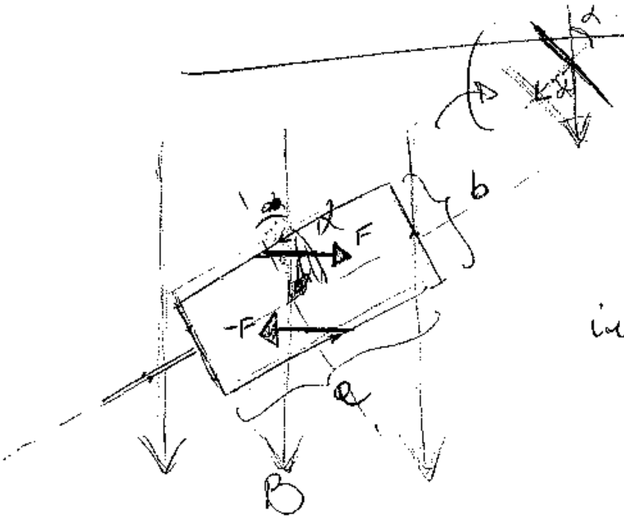
Da cui facilmente $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\log(b/a)$.



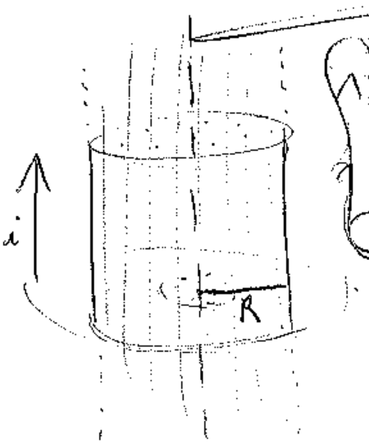
$|q||E| = |q||v||B| \Leftrightarrow |v| = \frac{|E|}{|B|}$

$\frac{m|v|^2}{r} = q|v||B| \Leftrightarrow r = \frac{m|v|}{qB}$; nel caso generale

$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ ($\parallel$ e $\perp$ a B), dove $v_{\parallel}$ non viene modificata da B, mentre $v_\perp$ viene modificata continuamente nel suo effetto completo, e allora la traiettoria del moto è un'elica cilindrica e passo costante.



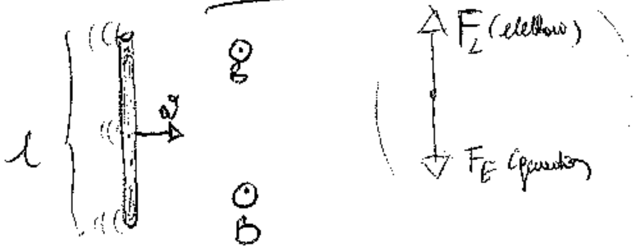
$|M| = b\,|F| = b\,(ie\,|B|\cos(\alpha))$, e più in generale $|M| = i\,a\,b\,|B|\cos(\alpha)\,N_{spire}$.



$r \geq R$: $(2\pi r)|B| = \mu_0 i$, cioè $|B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$;

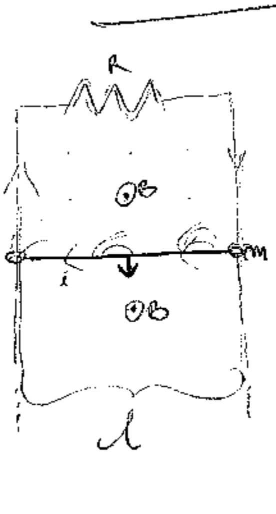
$r \leq R$: $(2\pi r)|B| = \mu_0 \left(\frac{i}{\pi R^2}\right)(\pi r^2)$, cioè $|B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i r}{R^2}$;

$\left(\frac{i}{\pi R^2}\right)\pi R^2$



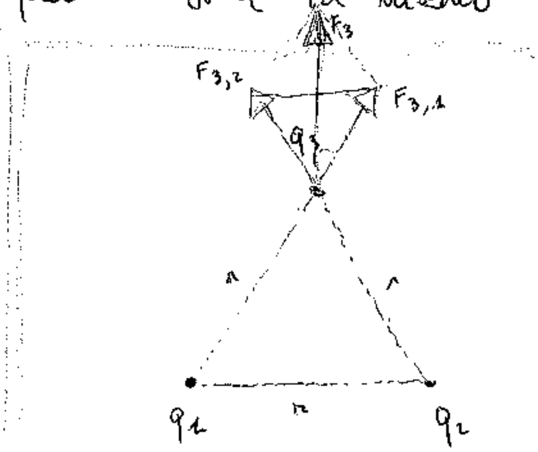
$e\,|v|\,|B| = e\,|E| = \frac{e\,\Delta V}{l}$, cioè

$\Delta V = l\,|v|\,|B|$



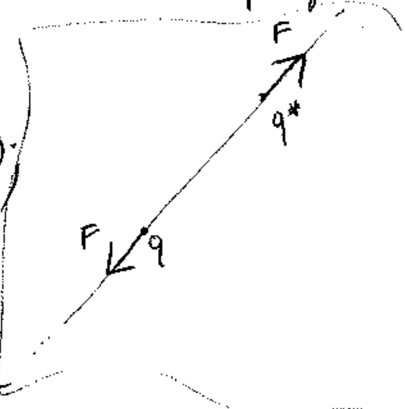
Dopo "abbastanza" tempo: $mg = i\,l\,|B|$; ma $i = \frac{l\,(|v|t)\,l|B|}{R\,t} = \frac{l|B|}{R}|v|$: $|v| = \frac{mgR}{l^2|B|^2}$; istante per istante invece $mg - \frac{|v|\,l^2|B|^2}{R} = ma$, da cui (derivando) $m\dot{a} = -\frac{l^2 B^2}{mR}a$, cioè $(a(0) = g!)$ $a(t) = g\,e^{-\frac{l^2|B|^2}{mR}t}$.

(EX) Tre cariche puntiformi $q_1 = q_2 = 50\,mC$ e $q_3 = 80\,mC$ sono poste nel vuoto (e in quiete) e le distanze fra le ~~cariche~~ tre coppie di cariche sono uguali a $r = 2\,cm$; quanto vale il modulo della forza agente su q_3?



(NOTA: $1\,mC = 10^{-3}\,C$)

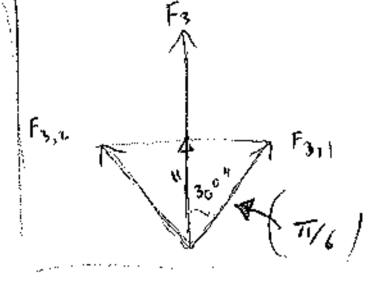
Le forza agente su q_3 per effetto delle due cariche q_1, q_2 è la risultante vettoriale delle due forze tra q_1, q_3 e q_2, q_3; ora, la forza che due cariche q, q^* puntiformi, nel vuoto e in quiete a distanza $r\,(>0)$ fra loro, esercitano una sull'altra ha intensità $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq^*}{r^2}$ (dove $\varepsilon_0 := 8{,}854 \times 10^{-12}\,C^2/(Nm^2)$), direzione la retta congiungente le due cariche e verso dato dal segno delle cariche (+ e +, − e − si respingono; + e − si attraggono); ma allora la forza (repulsiva) $F_{3,1}$ che agisce su q_3 a causa di q_1 è chiaramente uguale in modulo alla forza $F_{3,2}$ di q_2 su q_3, e precisamente $F_{3,2} = F_{3,1} =$



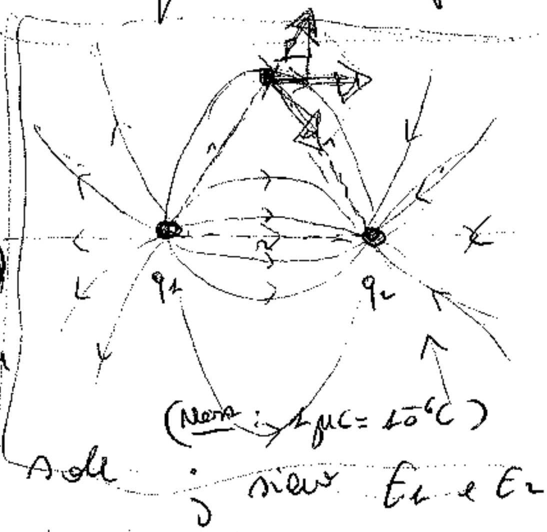
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,C^2/(Nm^2)}\;\frac{5\cdot 10^{-8}\cdot 8\cdot 10^{-8}\,C^2}{\underbrace{(2\cdot 10^{-2})^2}_{4\cdot 10^{-4}}\,m^2} =$$

$$= \frac{5}{2\pi\cdot 8.854}\,N \simeq 0.09\,N$$; dalla situazione è infatti chiaro che allora F_3 ha modulo $F_3 =$

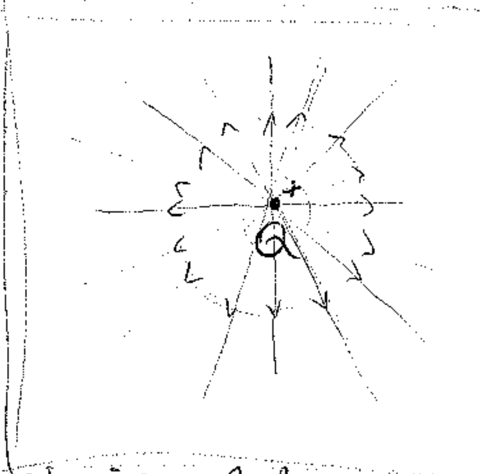
$$= 2\,F_{3,1}\underbrace{\cos(30^\circ)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.09\cdot\sqrt{3}\,N \quad \square$$



(Ex) Due cariche puntiformi $q_1 = 0.4\mu C$ e $q_2 = -0.4\mu C$ sono poste nel vuoto a distanza $r = 2$ cm: quanto vale l'intensità del campo elettrico da loro generato in un punto P a distanza r da ciascuna di loro?



Il campo elettrico E generato da q_1 e q_2 (in un qualsiasi punto dello spazio) è la somma vettoriale dei campi elettrici (in quel punto) che q_1 e q_2 genererebbero da sole; siano E_1 e E_2 risp. Ora, in generale, il campo elettrico E generato da una carica puntiforme Q (nel vuoto e in quiete) in un punto a distanza $|r|>0$ da Q è



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r}{|r|^3}$$

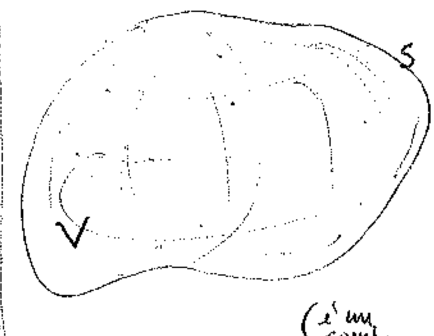
(cioè E ottiene direzione radiale, verso dato dalla carica di Q (verso l'esterno se Q è +, altrimenti verso l'interno) e modulo $|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}$): quindi in P

$$|E_1| = |E_2| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2} = \left(\frac{1}{4\pi\, 8.854\cdot10^{-12}}\,\frac{4\cdot10^{-7}}{4\cdot10^{-4}}\right)\frac{N}{C} = \frac{1}{4\pi\, 8.854}\,10^{9}\ N/C \simeq 8.99\cdot10^{6}\ N/C$$

, e in conclusione chiaramente

$$|E| = |E_1| \quad \left(= 2|E_1|\underbrace{\cos(60°)}_{1/2}\right).$$

(EX) Supponiamo di avere una regione di spazio V, delimitata da una superficie S, sede di una distribuzione continua di cariche elettriche, specificata per mezzo della funzione



(è un campo scalare!)

"DENSITA' VOLUMETRICA DI CARICA ELETTRICA" "$\rho(x,y,z)$":

$\rho(x,y,z) := \dfrac{dq}{dV}$ dove dq è la carica totale contenuta nel volume infinitesimo dV attorno al punto $P:=(x,y,z)$, cosicché in dV c'è $dq = \rho(x,y,z)\,dV$

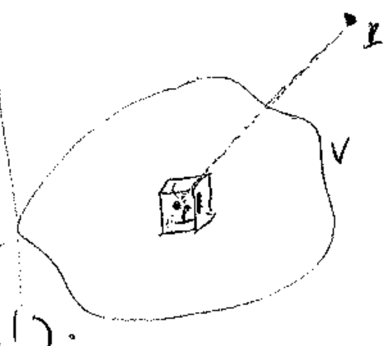
($dV = dx\,dy\,dz$!)

e quindi la carica totale interna al volume V è data da

$q = \int_V \rho\, dV = \int_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$. Si trova una formula per il calcolo dell'intensità del campo elettrico, in un punto $P := (x,y,z)$ dello spazio, generato da una tale distribuzione continua di cariche elettriche.

($\Rightarrow \rho(r) = q\,\delta(r)$, se q è nell'origine)

Per ogni $P' := (x',y',z')$ in V, una regione infinitesima dV' di volume che contiene P' ha al suo interno una carica di $dq' = \rho(x',y',z')\,dV'$ (per def!);



ma allora il campo elettrico in P generato dalla carica infinitesima dq' è esattamente $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{dq'}_{\rho(x',y',z')dV'}\dfrac{\vec{P'P}}{|P'P|^3}$, dove $P'P$

è il vettore congiungente $\underline{r}'$ a $\underline{r}$; per l'esattezza di $\underline{r}'$ è

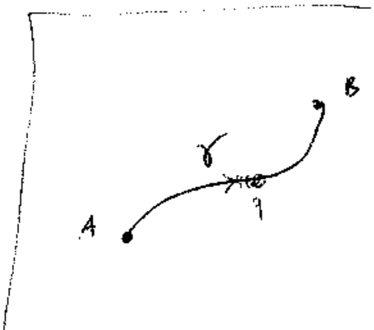
quindi $E(\underline{r}) = $ ~~[illegible]~~ $= "\int dE" \left(= \int dE(\underline{r}')dV'\right)$

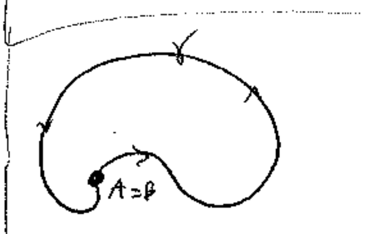
($\underline{r}' = (x', y', z')$!)

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(x', y', z') \frac{\underline{r}'\underline{r}}{|\underline{r}'\underline{r}|^3} \underbrace{dx' dy' dz'}_{(dV'!)} .$$

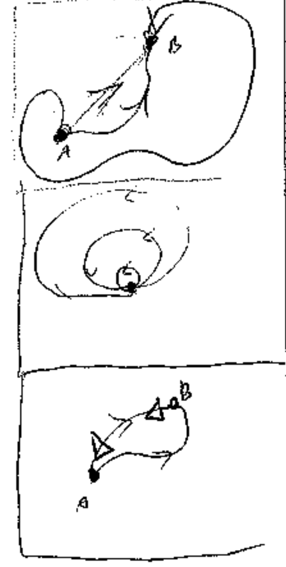
(che coincide con tre integrali tripli ...)

Un po' di teoria. Si consideri una regione di spazio sede di un campo elettrico E; allora la forza agente su una certa carica $+q$ è esattamente (cioè) $F = q \cdot E$. Ora, il "lavoro elementare" che F compie quando q fa uno spostamento infinitesimo $ds = i\,dx + j\,dy + k\,dz$ è $d\mathcal{L} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ (se $F := (F_1, F_2, F_3)$), cioè $d\mathcal{L} = F \cdot ds$; per cui, se q si sposta da un punto A ad un punto B su una curva γ, allora il lavoro che compie su q la forza del campo è $\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = \int_\gamma F \cdot ds$ (anche indicato con "$\int_{A\gamma B} F \cdot ds$"); nel caso che $A = B$, quando cioè γ è chiusa, tale integrale è LA CIRCUITAZIONE DI F LUNGO γ ed è indicato più frequentemente con "$\oint_\gamma F \cdot ds$".





Sono equivalenti 1.) gli integrali di linea $\int_\gamma F\cdot ds$ dipendono solo dagli estremi di γ ; e 2.) la circuitazione di F lungo una qualsiasi γ chiusa è 0 (è chiaro) ; soprattutto tali equivalgono al fatto che il campo vettoriale F sia gradiente di un campo scalare, diciamo



$$\boxed{F = -\nabla U}$$

(con U ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO) (cioè $F_1=-U_x$, $F_2=-U_y$ e $F_3=-U_z$).

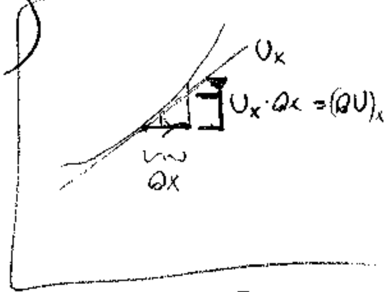
In effetti, se $F=-\nabla U$, allora $\int_\gamma F\cdot ds =$

$$= -\int_\gamma \nabla U\cdot ds = -\int_\gamma (i\,U_x + j\,U_y + k\,U_z)(i\,dx + j\,dy + k\,dz)$$

$$= -\int_\gamma \underbrace{(U_x\,dx + U_y\,dy + U_z\,dz)}_{dU} =$$

(γ è da A a B :)

$$= -\left[U(B) - U(A)\right] =$$



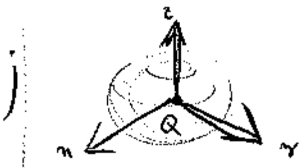
$= U(A) - U(B)$ dipende solo dagli estremi di γ (e $A=B \Rightarrow \oint_\gamma F\cdot ds = 0$!) ; il viceversa è più interessante ma più complicato ...

In tal caso F è CONSERVATIVO (e IRROTAZIONALE : in effetti, se $F=-\nabla U$, allora $\mathrm{rot}(F) = \nabla\times F = 0$; il viceversa è vero su un aperto semplicemente connesso, come $\mathbb{R}^3$)

Il fatto importante, ora, è che il campo elettrico generato da una qualsiasi distribuzione di cariche in quiete (nel vuoto) è un campo conservativo, cioè tale che il lavoro compiuto dalle forze del campo medesimo "per portare" una + -carica q da A a B non dipende dalla traiettoria scelta per andare da A a B, ma solo da A e B stessi.

$\boxed{\mathrm{I}}$ E generato da una carica puntiforme Q ferma.

Ponendo Q nell'origine del sistema di riferimento, è in ogni punto dello spazio $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q \frac{r}{|r|^3} q = q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{|r|^3}$, per cui $\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = \int_\gamma F \cdot d\gamma = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma \frac{r}{|r|^3} \cdot d\gamma$;



ma $d\gamma = dr \Rightarrow \mathcal{L}_\gamma(A \to B) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_\gamma \frac{r \cdot dr}{|r|^3}$ $\left(= A \right)$ $\left(\frac{1}{2} d(r \cdot r) = \frac{1}{2} d(|r|^2) = |r| \, d|r| \right)$

(Credo so che sono i moduli di A e B risp. da Q)

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{d|r|}{|r|^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{|r|} \right]_{|r|=r_A}^{|r|=r_B} =$$

$$= q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

, e allora $\exists$ campo scalare U tale che $F = -\nabla U$, per cui $\mathcal{L}_\gamma(A \to B) = U(A) - U(B)$, ed è chiaro facilmente che

$$\boxed{U(r) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|r|}} + \text{costante (reale)} \; ;$$

notiamo che giustamente l'energia potenziale U ha modulo di minimo

$$\frac{C^2}{C^2/(Nm^2)}\ \cancel{\frac{1}{m}} = Nm = J \text{ (Joule)}$$; in effetti, per

portare una carica (+) q posta in un punto A $(=\vec{r}_A)$ "all'infinito",

otteniamo "$\mathcal{L}_{"\gamma"}(A \to "\infty")$" $= U(A) - U("\infty") =$

$= U(A) - \text{costante} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_A}$: ponendo allora

la costante in U uguale a 0 cosicché $U(r) = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{|r|}$

rappresenta di per sé il lavoro per portare una + carica q posta in

r all'infinito ; ciò è come dire che la distanza tra q

e Q diviene infinita. In effetti, più precisamente,

$U(r)$ è < 0 (lavoro "contro natura") $\Leftrightarrow$ q e Q hanno segno opposto (cioè si

attraggono, piuttosto!) , per cui in realtà serve altra forza su

q e Q ; invece $U(r) > 0 \Leftrightarrow q$ e Q hanno lo stesso segno,

e in tal caso ovviamente , se q è associata ad una particella di (in r)

massa m (>0) (inizialmente in quiete) , allora q avrà velocità finale v_f ottenuta

conseguentemente da $\dfrac{1}{2}m v_f^2 = \mathcal{L} = U \left(= \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{|r|}\right)$

cioè $v_f = \sqrt{qQ/(2\pi m \varepsilon_0 |r|)}$

Comunque allora possiamo affermare che $\oint_\gamma F\cdot dr = 0$; ma

allora ciò vale per $E = F/q$, ed è ovvio che onde $V(A) := \frac{U(A)}{q} = \frac{1}{q}\int_A^\infty F\cdot dr = \int_A^\infty E\cdot dr =$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$: chiamiamo $\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r|}}$ il

POTENZIALE ELETTROSTATICO prodotto da Q e distanza r.

Dunque vale anche $\frac{\mathcal{L}_{r\to\infty}}{q}$; MA ALLORA

la differenza di potenziale, o d.d.p., o TENSIONE, tra due punti A e B è

$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^\infty E\cdot dr \underbrace{- \int_B^\infty E\cdot dr}_{+\int_\infty^B E\cdot dr} =$

$= \int_A^B E\cdot dr = \frac{\mathcal{L}(A\to B)}{q}$, dunque in generale

$\boxed{\Delta V = V(A) - V(B) = \frac{\mathcal{L}(A\to B)}{q}}$; di nuovo, se q è

positiva : ~~[illegible]~~

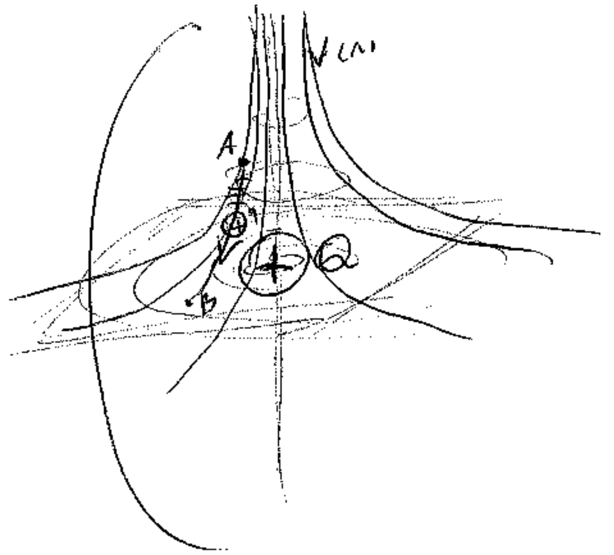
$V(A) > V(B) \Leftrightarrow \mathcal{L}(A\to B) > 0 \Leftrightarrow$ le

forze del campo favoriscono il passaggio di q da A a B; invece

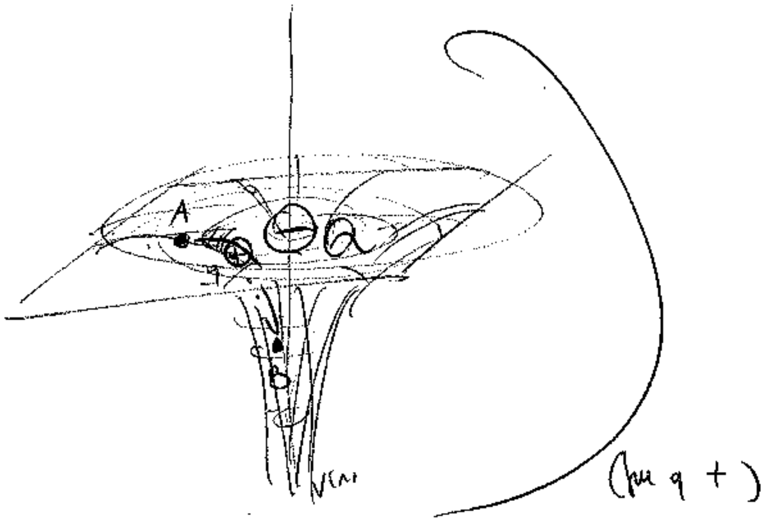
$V(A) < V(B) \Leftrightarrow \mathcal{L}(A\to B) < 0 \Leftrightarrow$ per far passare q da A a B

bisogna ricorrere a lavoro dall'esterno per contrastare le forze

del campo; è falso che per ~~[illegible]~~ q negative le carica è opposta; in conclusione: in un campo elettrico, le cariche del campo tendono a muovere una carica + verso punti con potenziale elettrostatico MINORE, e viceversa cariche − verso punti con potenziale elettrostatico MAGGIORE.



o



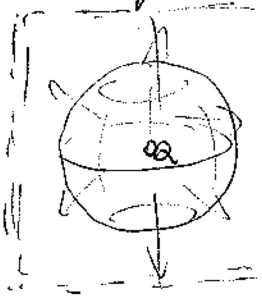
Notiamo poi che potenziale elettrostatico e d.d.p. hanno unità di misura $\frac{J}{C}$: definiamo IL VOLT (V) come $\Delta V := \frac{1J}{1C}$;

in particolare $[E] = \frac{N}{C} \left(= \frac{N \cdot m}{C \cdot m} \right) = \frac{V}{m}$.

Notiamo che potremo "partire da E" e troviamo che

$E = -\nabla V$.

Notiamo poi che le superfici equipotenziali del campo elettrico generato da Q sono le sfere di centro Q (cioè gli insiemi di livello di U (o V)), quindi



(1.) anche se γ non è chiusa ma va da un punto di una sfera in un punto diverso della stessa sfera, allora il lavoro è 0;

(2.) è ovvio quindi che F (o E) debba essere $\perp$ rispetto a essa, in accordo col fatto già noto che ∇U è $\perp$ alle super "carino" di bello!

$\boxed{\text{II}}$ Campo E generato da un insieme finito di cariche.

Essendo tale E la somma (vettoriale) dei singoli campi E_1, $E_2, \ldots, E_n$, ed essendo per quanto visto che $E_i = -\nabla V_i$ $\forall\, 1 \le i \le n$, si avrà allora che $E = E_1 + \ldots + E_n = (-\nabla V_1) + \ldots + (-\nabla V_n) = -\nabla(V_1 + \ldots + V_n)$, onde anche $\boxed{E = -\nabla V}$, con $V := V_1 + \ldots + V_n$; unica attenzione: scelto il sistema di riferimento, ogni punto P dista dalle cariche Q_i per un raggio r_i, per cui $V_i(P) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|r_i|}$, e allora $V(P) = V_1(P) + \ldots + V_n(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|r_1|} + \ldots + \frac{Q_n}{|r_n|}\right)$. ✓

$\boxed{\text{III}}$ E generato da una distribuzione continua di cariche.

(CASO GENERALE)

Se tale distribuzione è specificata dalla densità volumetrica di carica $\rho(x', y', z')$, cioè tale che in un volume infinitesimo dV' (dx'dy'dz') che circonda $P' := (x', y', z')$ ci sia carica $dq = \rho(x', y', z')\, dV'$, allora il campo elettrico generato da dq in un punto $P = (x, y, z)$ è $dE(x, y, z) = -\nabla dV(x, y, z)$, con $dV(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{|\overline{P'P}|}$ ($\overline{P'P}$ è il vettore congiungente P' e P); quindi in generale

$$V(P) = \text{"}\int dV\text{"} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|P'P|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(x',y',z')\,dx'dy'dz'}{|P'P|}$$ (l'integrale è ovviamente su $\mathbb{R}^3$; mostreremo il vantaggio di calcolare V, per calcolare E, invece che calcolare E dalla definizione!). 6

Mostriamo che, se E è generato da $Q_1, \dots, Q_n$ allora

$$dL = F\cdot ds = qE\cdot ds = q(E_1+\dots+E_n)\cdot ds =$$

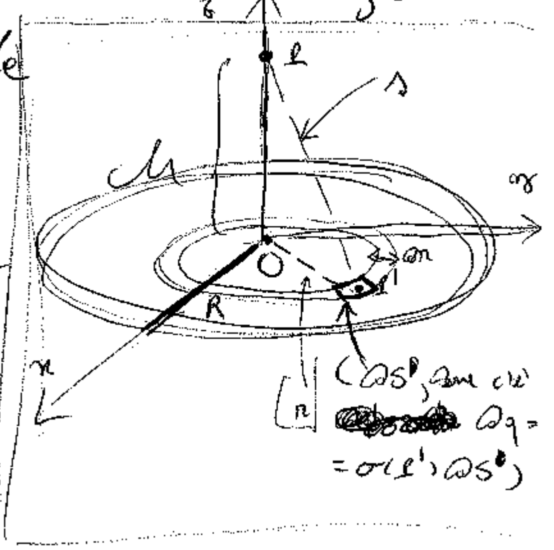
$$= q(\underbrace{E_1\cdot dr_1}_{-dV_1} + \dots + \underbrace{E_n\cdot dr_n}_{-dV_n})$$ (se dr_i è la variazione della distanza tra q e Q_i) (SOMMA DI LAVORI!)

$$= -q\,dV \quad \Rightarrow \quad L(A\to B) =$$

$$= q\int_A^B E\cdot ds = q(V(A)-V(B))$$ nuovamente, e così ciò si ha in generale. 6

(Ex) Su un cerchio di raggio $R>0$ è presente una distribuzione di carica elettrica con densità superficiale σ; si calcoli V, e quindi E, in un punto P dell'asse del cerchio a distanza h dal centro O.

[È ovviamente $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{s}$, integrale di superficie dove s è la distanza tra P e l'elemento (infinitesimo) dq contenuto nell'intorno infinitesimo di un generico punto del disco; l'idea ora è calcolare tale integrale usando la simmetria del problema, e che nelle circonferenze di raggio r ($\leq R$) c'è carica



$dq = (2\pi r\, dr)\cdot \sigma$, per cui

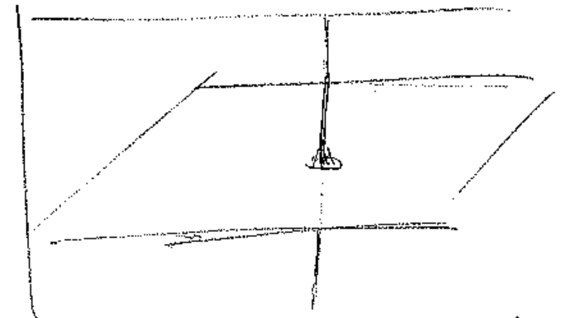
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma \cdot 2\pi r}{\sqrt{r^2+h^2}}\, dr =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot \underbrace{\int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}\, dr}_{\left(=\left[\sqrt{r^2+h^2}\right]_{r=0}^{r=R}\right)} = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+h^2}-h\right)}$$; ora,

$E = -\nabla V \Rightarrow E_1 = E_2 = 0$, essendo V costante in x e y,

mentre $$E_3 = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right) . \square$$

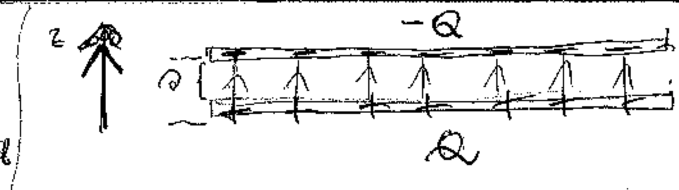
La cosa importante è che QUINDI, se h è molto piccolo rispetto a R, cioè R molto grande rispetto a h, allora "$E =$ $= E_3$" $= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$; CIOÈ vale che



{una distribuzione uniforme di carica su un piano, con densità superficiale σ, genera nello spazio un campo elettrico perpendicolare al piano di modulo $|E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.}

Consideriamo allora UN CONDENSATORE (PIANO), ossia

Un sistema costituito da due superfici metalliche uguali, piane e disposte parallelamente



(nel vuoto) ad una distanza d << dimensioni superfici, e tali che vi abbiano cariche Q e $-Q$ rispettivamente (tali superfici sono le FACCE o ARMATURE del condensatore). Si potrebbe scoprire (sperimentalmente) che

(1.) se S è l'area di ciascuna armatura, allora le cariche si distribuiscono uniformemente con densità superficiale $\sigma = \frac{\pm Q}{S}$;

(2.) il campo elettrico (visto $d \ll S$...) è praticamente nullo all'esterno del condensatore;

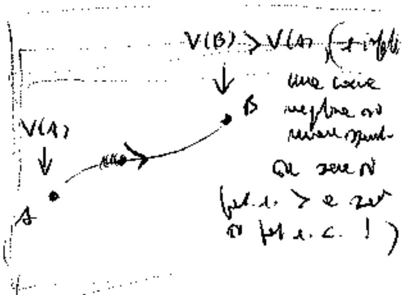
(3.) all'interno (non vicino ai bordi) il campo elettrico E è costante e perpendicolare alle armature con intensità $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\left(= \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)$. (poiché $E = -\nabla V$)

È ovvio allora che E ha potenziale elettrostatico $V(z) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot z + \underbrace{V_+}_{\text{pot. dell'arm. positiva}}$, per cui il potenziale dell'armatura negativa è $V_- = V(d) = -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} + V_+$, e allora la differenza di potenziale tra le due armature è

$$\boxed{\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d}$$

. (In effetti potevamo dedurlo perché, spostando una carica q dalla armatura + a quella −, le forze del campo compiono lavoro $\mathcal{L} = F \cdot d = q \cdot E \cdot d = q \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$; ma come sappiamo $\frac{\mathcal{L}}{q} = \Delta V$.)

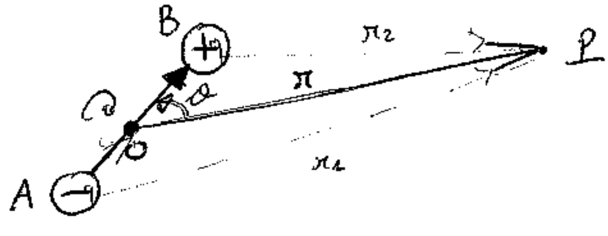
EX) Un elettrone, che ha massa $m = 9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg$ e carica $q = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, si sposta da un punto A ad un punto B di un campo elettrico, sotto l'azione delle sole forze del campo; se in A ha velocità nulla e se la d.d.p. tra A e B è $\Delta V = V(A) - V(B) = -10\ V$ $(V = J/C)$, che velocità possiede al passaggio per B?



Il lavoro L fatto dalle forze del campo è $L = q \cdot \Delta V = 1.6 \cdot 10^{-18}\ J$, e tale è $= \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2$, da cui $v_B = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-18}\ J}{9.11 \cdot 10^{-31}\ Kg}} \cong 1.87 \cdot 10^{6}\ m/s$

$\left(J = \frac{m^2}{s^2} Kg\right)$

EX. IMPORTANTE. Chiamiamo <u>DIPOLO ELETTRICO</u> un sistema costituito da due cariche opposte q e $-q$ poste a distanza $|d|$ <u>piccola</u> rispetto alle distanze tra le due cariche stesse e i punti dello spazio nei quali interessa considerare il campo elettrico da loro generato. Calcoliamo dunque tale campo in un punto <u>P</u> come in figura:



(d e r sono vettori!)

Innanzitutto $V(P)_{(\text{es})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} + \frac{(-q)}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$,

ed essendo $r_1 \approx r_2$ (stiamo supponendo $|r| >> |a|$!) tale $V(P)$ è (in valore assoluto) piccolo rispetto al potenziale elettrostatico che le cariche genererebbero da sole; comunque, riscrivendo $V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} =$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1^2 - r_2^2}{(r_1 r_2)(r_1 + r_2)}$, e osservando che $r_1^2 - r_2^2 =$

$= \left|r + \frac{a}{2}\right|^2 - \left|r - \frac{a}{2}\right|^2 = 2a \cdot r$ (è "la formula di polarizzazione" $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x ; y\rangle$ (in uno sp. vett. con $\langle ; \rangle$) !), è

esattamente $V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a \cdot r}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}$; ora però, potendo approssimare r_1 e r_2 con $|r|$, possiamo anche compiere l'approssimazione

$$\boxed{V(P) \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a \cdot r}{|r|^3}}$$

, tanto migliore quanto più $|r| >> |a|$;

Definiamo quindi il vettore MOMENTO ELETTRICO DI DIPOLO

$p := qa$ ( ; ha ~~dimensioni~~ unità di misura $C \cdot m$), e

(osservando che $\frac{r}{|r|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|r|}\right)$) riscriviamo allora

$$V(P) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p \cdot r}{|r|^3} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\, p \cdot \nabla\left(\frac{1}{|r|}\right).$$

Morale: per il calcolo di $E(P)$ in l'"abbastanza lontano" delle cariche del dipolo è sufficiente la conoscenza di $\vec{p} = q\vec{d}$!

È a proposito calcolare $E(r)$: essendo che $E = -\nabla V$ e che, per due campi scalari φ e ψ è $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$, con le scelte $\varphi := p\cdot r$ e $\psi := \frac{1}{|r|^3}$ (in r !) otteniamo $E(r) = -\nabla V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(p\cdot r\,\frac{1}{|r|^3}\right) =$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ p\cdot r\,\underbrace{\nabla\left(\frac{1}{|r|^3}\right)}_{\left(=-\frac{3r}{|r|^5}\right)} + \frac{1}{|r|^3}\underbrace{\nabla(p\cdot r)}_{(=p)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{3(p\cdot r)r}{|r|^5} - \frac{p}{|r|^3} \right\}$$

, e in particolare ("giustamente") $E(r)$ giace nel piano generato da $\underset{(\text{cioè } d)}{p}$ e da r ;

ora, in generale $a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c$ $\overset{(a=b)}{\Longrightarrow}$

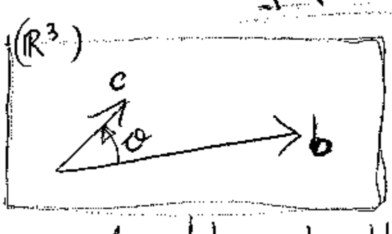
$b\times(b\times c) = (b\cdot c)b - |b|^2 c$, e in particolare

$r\times(r\times p) = \underbrace{(r\cdot p)}_{(=(p\cdot r))}r - |r|^2 p$, dunque possiamo anche scrivere

$$\boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ 2\,\frac{(p\cdot r)r}{|r|^5} + \frac{r\times(r\times p)}{|r|^5} \right\}}$$

; il vantaggio è aver ottenuto $E = E_r + E_\theta$ con "E_r" la componente radiale di E e "E_θ" la componente perpendicolare a r ;

ora, essendo in generale per



che

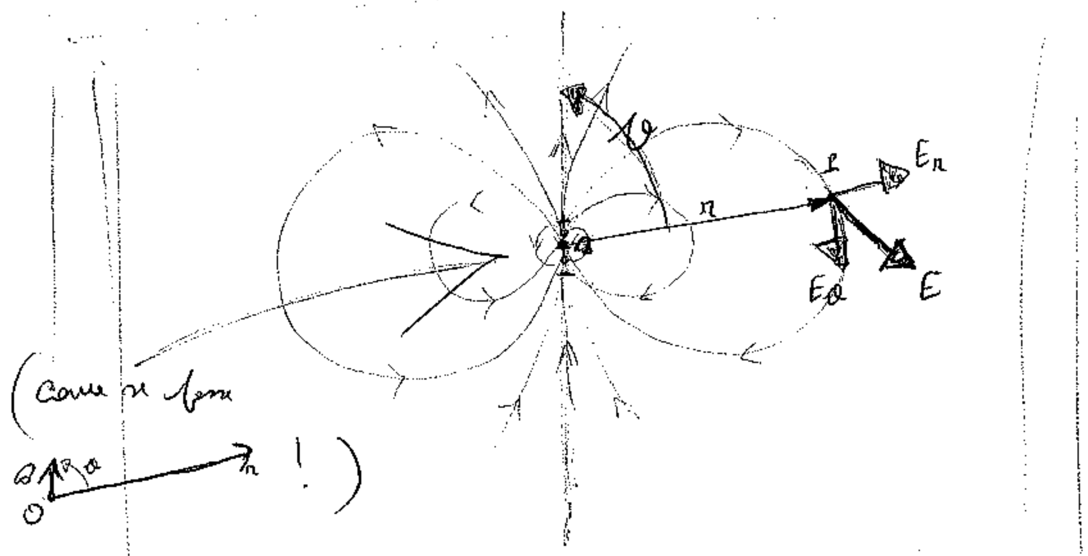
$b\cdot c = |b||c|\cos(\theta)$ e che $|b\times c| = |b||c|\sin(\theta)$, Nel caso $|r| >> |a|$, possiamo calcolare che (θ è l'angolo tra r e p)

$$\begin{cases} |E_r| = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{2\,|p|\cos(\theta)}{|r|^3} \\[2ex] |E_\theta| = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{|p|\sin(\theta)}{|r|^3} \end{cases}$$

(risultato che potremmo anche ottenere derivando direzionalmente $|V(r)| = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{|p|\cos(\theta)}{|r|^2}$ ...), da cui finalmente

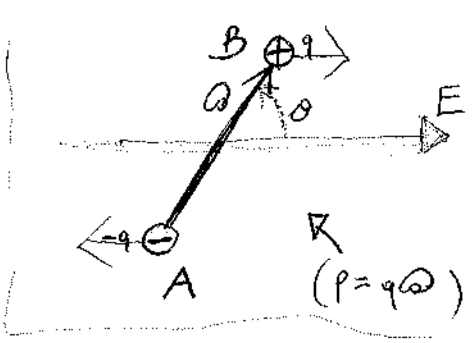
$$|E| = \sqrt{|E_r|^2 + |E_\theta|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{|p|}{|r|^3}\sqrt{1+3\cos^2(\theta)}\,.$$

<u>Dunque</u> l'intensità del campo elettrico E, generato da un dipolo, varia rispetto alla distanza (grande) $|r|$ "dal dipolo" stesso secondo la legge $\dfrac{1}{|r|^3}$, e NON $\dfrac{1}{|r|^2}$ come nel caso del campo elettrico generato da una singola carica puntiforme.



$\square$

(EX) Consideriamo un dipolo elettrico posto in un campo elettrostatico esterno E; se con "E_P" indichiamo tale campo in un punto P dello spazio, allora la risultante delle forze agenti sul dipolo (cioè sulle due cariche di esso) è $F = (-q)E_A + qE_B = q(E_B - E_A)$; nell'ipotesi che $|d|$ sia "abbastanza piccolo" (nel senso che E vari in modo trascurabile per distanze dell'ordine di $|d|$), possiamo approssimare al primo ordine ($E_B - E_A \simeq (\nabla E)\cdot|B-A|$)



$$E_B - E_A \approx \left(\frac{\partial E}{\partial x}d_1 + \frac{\partial E}{\partial y}d_2 + \frac{\partial E}{\partial z}d_3\right) = (d\cdot\nabla)E \; , \Rightarrow F = (p\cdot\nabla)E \overset{(E=-\nabla V)}{=} -(p\cdot\nabla)(\nabla V) =$$

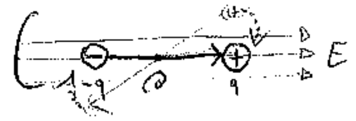
$$= -\nabla(p\cdot\nabla V) = +\nabla(p\cdot E)$$

(ad es., la prima componente di $(p\cdot\nabla)(\nabla V)$ è $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)p_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)p_2 + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)p_3 \overset{(\text{Schwartz!})}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}p_1 + \frac{\partial V}{\partial y}p_2 + \frac{\partial V}{\partial z}p_3\right) = \frac{\partial}{\partial x}(p\cdot\nabla V)$) :

Dunque il campo di forze in questione F è conservativo, ossia $F = -\nabla U$ (per opportuno campo scalare U), e l'energia potenziale di un dipolo p "lì posto" è (a meno di costante additiva) $\boxed{U = -p\cdot E = -|p||E|\cos(\theta)}$.

($\boxed{\text{ES.}}$: se il nostro dipolo p_1 fosse posto nel campo elettrico prodotto da un altro dipolo p_2 a distanza $|r|$ ("abbastanza maggiore" di $|p_2|$), allora effettivamente p_1 avrebbe energia potenziale $U =$

$$= -p_1\cdot E_2 \overset{(\text{visto prima!})}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{p_1\cdot p_2}{|r|^3} - \frac{3(p_2\cdot r)(p_1\cdot r)}{|r|^5}\right\} .$$)

Calcoliamo infine il momento risultante M delle forze agenti sul dipolo: queste formano in prima approssimazione una coppia di forze di braccio $|d||\sin(\theta)|$, per cui $|M| = \underbrace{|F|}_{(=q|E|)} \cdot \text{braccio} = |p||E||\sin(\theta)|$; inoltre (per definizione) $M \perp p, E$, ed essendo che le forze agenti tendono a disporre il dipolo parallelamente al campo elettrico diminuendo θ (

), è

$$\boxed{M = p \times E}.$$

(Notare che, giustamente, il lavoro svolto dal momento risultante M delle forze per ruotare il dipolo da un'orientazione parallela al campo elettrico fino ad un angolo $\underset{[0,\pi]}{\theta}$ con lo stesso è pari a $\int_0^\theta |M(\theta')| d\theta' = \int_0^\theta |p||E| \sin(\theta') d\theta' =$
$= |p||E| \left[-\cos(\theta')\right]_{\theta'=0}^{\theta'=\theta} = U(\theta) - U(0)$.) □

TEOREMA DELLA DIVERGENZA (o di Gauss):

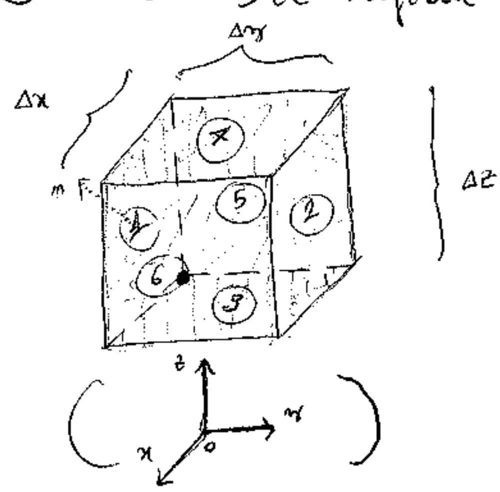
il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza del campo esteso alla regione di spazio racchiusa dalla superficie.

Siano F campo vettoriale (regolare) (per cui $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$), S superficie chiusa orientata verso l'esterno col versore normale n, e V il volume che S racchiude: allora è

$$\boxed{\left(\Phi_S(F) =\right) \int_S F \cdot n \, dS = \int_V \operatorname{div} F \, dV}$$

(potremmo anche scrivere "∂V" invece che "S")

Dividiamo la regione V in "tanti" cubetti infinitesimi come in figura:



- superficie (laterale) del cubetto $=: \Delta S$ (che racchiude un volume di $\Delta x \Delta y \Delta z =: \Delta V$);
- facce perpendicolari all'asse y = ① e ②, quelle $\perp$ a z = ③ e ④, quelle $\perp$ a x = ⑤ e ⑥;

allora

$$\Phi_{\Delta S}(F) = \int_{\Delta S} F \cdot \overset{\text{(versore normale rivolto verso l'esterno!)}}{n} \, dS = \sum_{i=1}^{6} \int_{(i)} F \cdot n \, dS$$

; ma, in prima approssimazione,

$$\int_{①} F \cdot \underset{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}}{n} \, dS = -\int_{①} F_2 \, dx \, dz \approx -\overset{\text{(un punto di ①!)}}{F_2(1)} \Delta x \Delta z$$

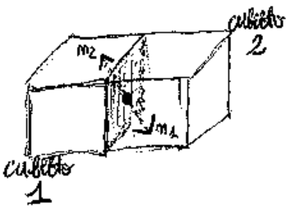
e contemporaneamente

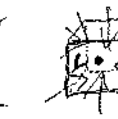
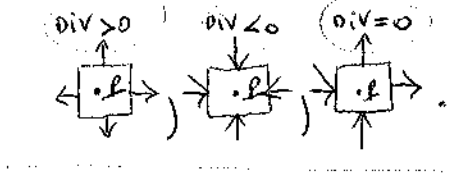
$$\int_{②} F \cdot n \, dS = \int_{②} F_2 \, dx \, dz \approx F_2(2) \Delta x \Delta z \overset{\left(F_2(2) \approx F_2(1) + \frac{\partial F_2}{\partial y} \Delta y\right)}{\approx}$$

$\approx$ (2) $\left(F_2(1) + \frac{\partial F_2}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \Delta z$, $\Rightarrow$ $\int_{(1)} F\cdot n\, dS + \int_{(2)} F \cdot n\, dS =$

$= \frac{\partial F_2}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z$; per simmetria è evidente che, in modo del tutto analogo, otteniamo da (3) e (4) il termine col $\frac{\partial F_3}{\partial z}$, mentre da (5) e (6) il termine col $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, e dunque in conclusione $\Phi_{\Delta S}(F) = \int_{\Delta S} F\cdot n\, dS \approx \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z =$

$= (\mathrm{div}\, F)\,\Delta V$; ma $\int_V \mathrm{div}\, F\, dV$ è proprio la somma di TUTTI i termini $(\mathrm{div}\, F)\Delta V$, cioè di tutti i flussi infinitesimi $\Phi_{\Delta S}(F)$, e tale somma coincide con $\int_S F\cdot n\, dS$ in quanto il flusso di F attraverso facce di cubetti interne alla superficie è nullo, essendo che tali facce compaiono esattamente due volte come facce di due cubetti adiacenti (quindi con normali opposte) :

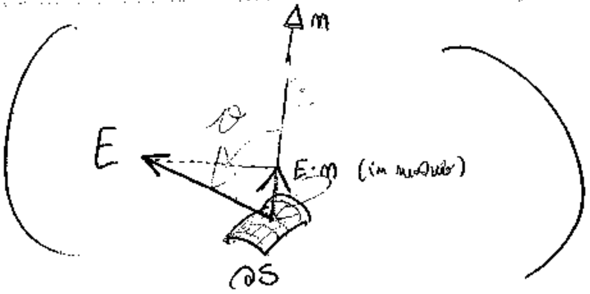


NOTA : potremmo equivalentemente (ma meno correttamente) definire la divergenza di F in un punto P proprio come il flusso specifico (cioè per unità di volume) di F uscente da P, ossia $\frac{\Phi_{\Delta S}(F)}{\Delta V}$ se P è nel cubetto di superficie laterale ΔS e volume ΔV (), essendo così 

.

Consideriamo una superficie infinitesima dS munita di versore normale n alla superficie stessa; il flusso infinitesimo $d\Phi(E)$ del campo E attraverso dS è il prodotto di dS con (il modulo della) la componente di E nella direzione normale alla superficie, ossia (essendo $|n| = 1$, $\underset{\text{(campo scalare!)}}{E \cdot n} = |E| \cdot \cos(\theta)$, se)

$$\boxed{d\Phi(E) := E \cdot n \, dS}$$



(il flusso di E attraverso dS corrisponde a quanti "vettori" di E escono da S (con $\Phi > 0$) o entrano in S (con $\Phi < 0$)!)

(Dunque $d\Phi(E) = 0 \Leftrightarrow E$ è parallelo a dS, è $> 0 \Leftrightarrow$ "esce" da dS (come insomma fa n) e in tal caso è massimo $\Leftrightarrow E$ è perpendicolare a dS, cioè $E \cdot n = |E|$.)

Consideriamo allora una superficie (orientabile) arbitraria S, il flusso di E attraverso S è

$$\boxed{\Phi_S(E) := \int_S E \cdot n \, dS}$$

(unità di misura $= \frac{Nm^2}{C}$)

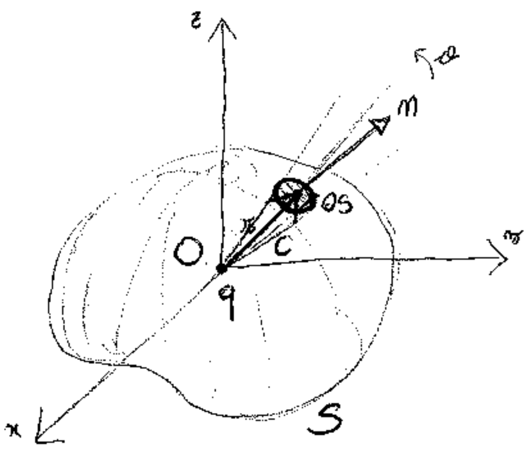
(NOTARE la linearità di entrambi $d\Phi$ e Φ_S!)

CASO I: sia q carica puntiforme, che poniamo nell'origine O del nostro sistema di riferimento; allora, in un qualsiasi punto P, ossia a distanza $r = \overrightarrow{OP}$ da q, è

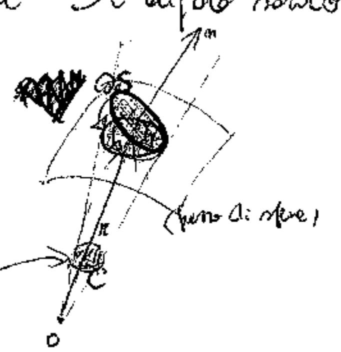
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|r|^3} r$$

; Consideriamo quindi una qualsiasi

superficie chiusa (orientabile) S che circonda q, che orientiamo (usando i versori normali n che puntano verso l'esterno di S), accade che $\Phi_S(E) = \int_S E\cdot n \, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{r\cdot n}{|r|^3}\, dS$, dove precisamente dS è un disco infinitesimo che coincide con l'elemento infinitesimo di superficie staccato su S da un cono infinitesimo C con vertice in O, come in figura:



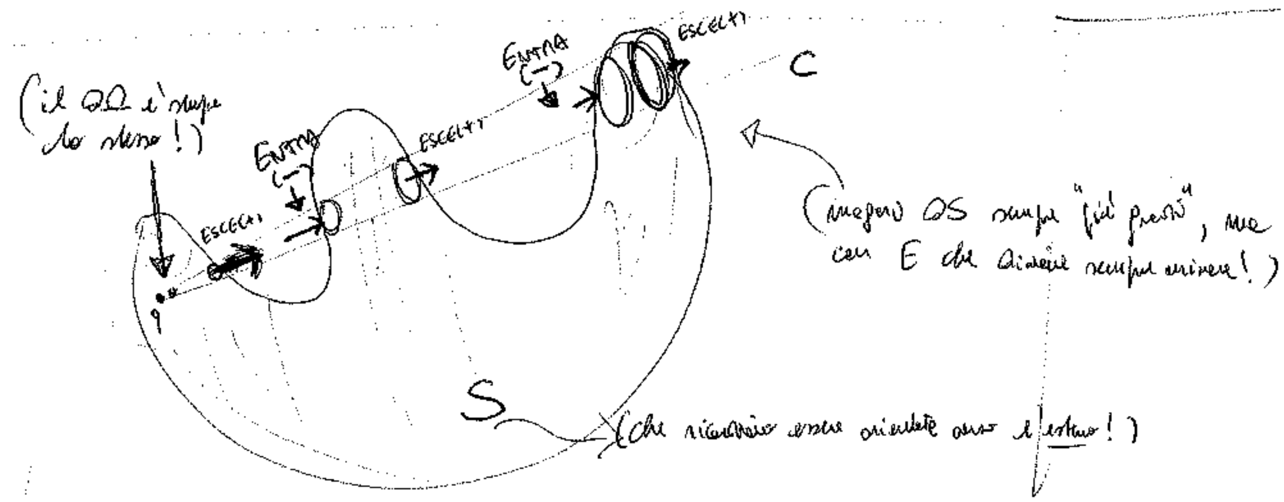
Ora, $\frac{r\cdot n}{|r|}\, dS = \cos(\theta)\, dS$ = la proiezione di dS sul piano perpendicolare a r = l'elemento infinitesimo di superficie staccato dal conetto C sulla sfera di centro O e raggio r $\overset{\text{(in area)}}{=}$ $= |r|^2\, d\Omega$, dove ovviamente $d\Omega$ è l'angolo solido di dS sotteso al vertice del cono:



Quindi, ottenuto dS, è $d\Phi(E) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\frac{r\cdot n}{|r|^3}}_{\left(=\frac{1}{|r|^2}\cos(\theta)\, dS\right)} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega$, dove appunto $d\Omega$ ora è un angolo solido infinitesimo
(potendo essere $d\Omega > 0$ o < 0 a seconda del segno di $r\cdot n$)

di vettori di coni infinitesimi che staccano gli elementi dS di S.

È dunque ovvio che il flusso infinitesimo attraverso superfici anche diverse, ma tagliate da un cono infinitesimo con vertice in q, ha modulo costante.



Essendo poi $\int_{(4\pi)} d\Omega = 4\pi$ (contiene il flusso "uscente"!), deduciamo infine che il flusso di E attraverso una superficie chiusa S che circonda q è

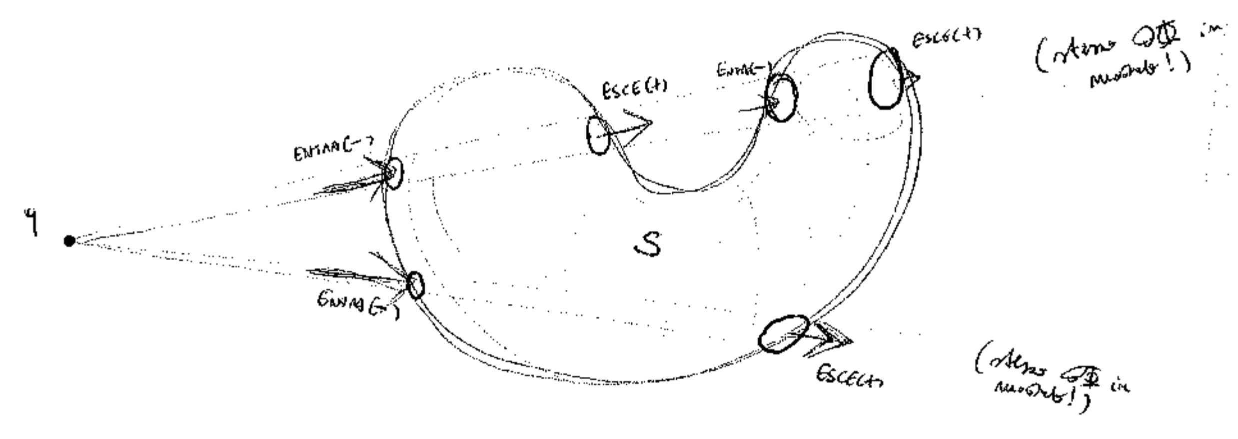
$$\boxed{\Phi_S(E) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(4\pi)} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

(in effetti "uscente" $\Leftarrow q>0$!).

Deduciamo quindi subito che, se S circonda più cariche (puntiformi $q_1, \dots, q_m$), allora per linearità del flusso

$$\Phi_S(E) = \Phi_S(E_1) + \dots + \Phi_S(E_m) = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_1 + \dots + q_m).$$

Non solo: le cariche (eventuali) q esterne a S non contribuiscono affatto a $\Phi_S(E)$, in quanto chiaramente tutti i coni infinitesimi di vertice in q incontrano S un numero pari di volte, e "tanto entra quanto esce" perché, come capito, tutto dipende dai $d\Omega$.



Possiamo dunque scrivere che, più in generale, $\Phi_S(E) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum$(cariche puntiformi interne a S").

In realtà è evidente che, ancor più in generale, se S racchiude una distribuzione continua di cariche con densità (volumetrica) ρ e se la regione di spazio dentro S ha volume V, allora

$$\boxed{\Phi_S(E)} = \int_S E \cdot n \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dq = \boxed{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dx\,dy\,dz}$$

Tale è la traduzione in formule del <u>TEOREMA DI GAUSS</u>: il flusso totale del campo elettrico E attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale interna alla superficie, divisa per ε_0.

Ma, per il teorema della divergenza, $\Phi_S(E) = \int_S E \cdot n \, dS = \int_V \operatorname{div} E \, dx\,dy\,dz$, e l'arbitrarietà della S chiusa equivale all'arbitrarietà di volumi, per cui deve essere (punto per punto)

$$\boxed{\underset{(\nabla \cdot E)}{\operatorname{div} E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

, formula che

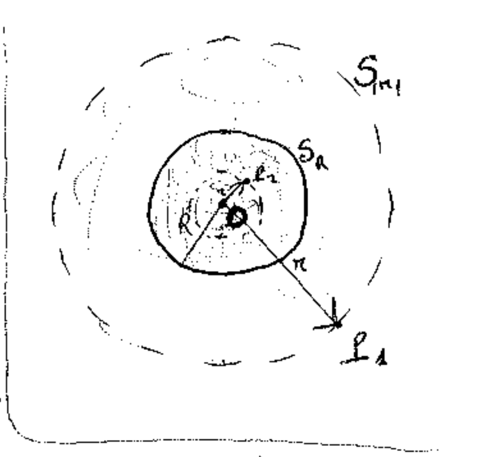
cioè equivale a quella precedente, usando precisamente la forma differenziale della formula (integrale) precedente; dunque la divergenza di E in un punto è uguale alla densità volumetrica di carica in quel punto, divisa per ε_0.

Deduciamo quindi immediatamente l'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico, ossia $\boxed{\underset{(o\ \nabla^2 V)}{\Delta V} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (che, tra l'altro, permette di calcolare facilmente ρ conoscendo V (il viceversa è già stato visto!)) : infatti $\Delta V = \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot (-E) = -\nabla \cdot E = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. In particolare, in una regione di spazio completamente vuota (di cariche) V soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta V = 0$.

Il teorema di Gauss può essere utilizzato per calcolare il campo elettrico prodotto da distribuzioni di carica con elevate simmetrie (cosicché il calcolo di (opportuni) flussi sia immediato!)

EX) Una carica totale Q $(\neq 0)$ sia distribuita all'interno di una sfera S_R di centro O e raggio R (>0), e la distribuzione abbia simmetria sferica (cioè la densità di carica abbia lo stesso valore in punti ugualmente distanti da O):
(1.) calcolare l'intensità del campo elettrico all'esterno della sfera;
(2.) calcolarlo all'interno supponendo precisamente che la distribuzione

di carica sia uniforme.



(1.) Innanzitutto, data la particolare distribuzione di carica, per simmetria il vettore campo elettrico E è diretto radialmente e verso l'esterno $\Leftrightarrow Q > 0$ in un qualsiasi punto P_1 esterno alla sfera, diciamo distante $|r|$ $(\geq R)$ da O; inoltre $|E|$ è lo stesso in tutti i punti equidistanti da O, e allora abbiamo notato che

$$\Phi_{S_{|r|}}(E) = \int_{S_{|r|}} E \cdot n \, dS \underset{\text{(dir. radiale)}}{=} \int_{S_{|r|}} |E| \, dS \underset{\text{(cost.)}}{=} |E| \, 4\pi |r|^2 \; ;$$

ma la carica totale interna a $S_{|r|}$ è per ipotesi Q, dunque per Gauss $\Phi_{S_{|r|}}(E) = |E| \, 4\pi |r|^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, cioè in conclusione

$$\boxed{|E(r)| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot |r|^2} \quad \forall |r| \geq R} \; .$$

(Deduciamo inoltre che il campo elettrico all'esterno di una distribuzione di carica con simmetria sferica è lo stesso di quello prodotto da un'unica carica puntiforme, posta al centro della sfera, di carica uguale alla carica totale della distribuzione!)

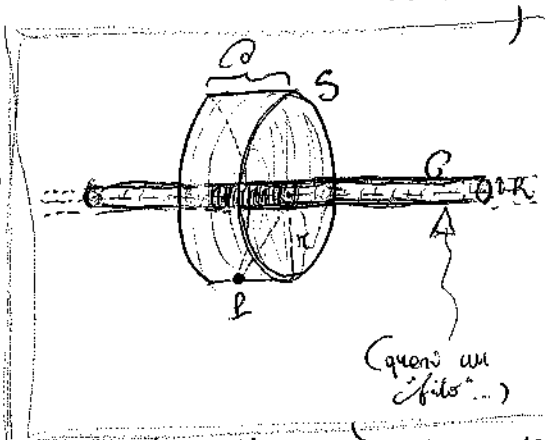
(2.) Sia ora P_2 interno alla sfera, diciamo a distanza $\underset{(>0)}{|r|} \leq R$ da O; come prima ovviamente $\Phi_{S_{|r|}}(E) = |E| \, 4\pi |r|^2$, ma è $\overset{\text{(Gauss)}}{=} \dfrac{Q'}{\varepsilon_0}$ con $Q' \leq Q$ in $S_{|r|}$; ma nell'ipotesi (restrittiva) che la distribuzione di carica sia uniforme, cioè quindi è $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, otteniamo che $Q' = \left(\frac{4}{3}\pi|r|^3\right)\rho = \frac{Q|r|^3}{R^3}$, quindi che infine

$$\boxed{|E(r)| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|r|}{R^3} \quad \forall\, |r| \le R}$$

∎

EX) All'interno di un cilindro C di lunghezza infinite e raggio $R\ (>0)$, vi sia una distribuzione di carica con simmetria cilindrica, diciamo uniforme; calcolare il campo elettrico all'esterno di tale cilindro.

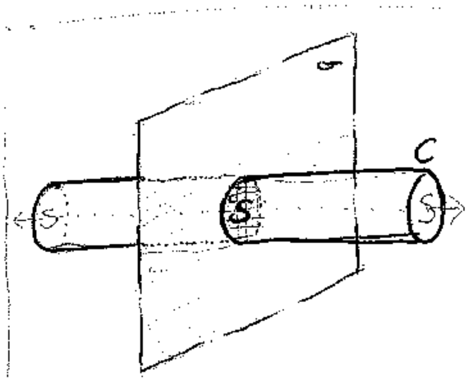
Per ragioni di simmetria, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente rispetto all'asse di simmetria del cilindro (e verso l'esterno $\Leftrightarrow$ la carica totale interna al cilindro è positiva) e ha intensità uguale in un punto come nel suo riflesso rispetto all'asse di simmetria stesso; sia ora P punto esterno al cilindro, diciamo a distanza $|r| \ge R$ dall'asse del cilindro: l'idea è considerare come "superficie di Gauss" un altro cilindro (chiuso) S, di raggio $|r|$ e coassiale al precedente, con altezza $d > 0$; infatti così chiaramente



$\Phi_S(E) = |E|(2\pi|r|d) = 2\pi|E||r|d \overset{(Gauss)}{=} \frac{q}{\varepsilon_0}$ se q è la carica totale contenuta all'interno di S, cioè all'interno del cilindretto $C \cap S$; se quindi λ è la carica contenuta per unità di lunghezza nel cilindro C, allora in conclusione $|E(r)| =$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 |x|\, a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 |x|} \quad \forall\, |x| \geq R \,. \quad \square$$

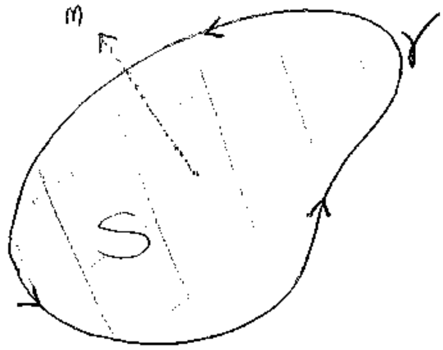
EX Ritrovare con Gauss che una distribuzione uniforme di carica su un piano infinito, con densità superficiale σ, genera nello spazio un campo elettrico ($\perp$ al piano) di modulo $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



[Consideriamo un cilindro, con asse perpendicolare al piano, che interseca il piano stesso in modo che le sue due basi, di ugual area S, siano parallele al piano e equidistanti dal piano; è ovvio allora che $\Phi_C(E) = 2|E|S$, $\overset{(Gauss)}{=} \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$. $\square$

TEOREMA DI STOKES: la circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa γ è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie avente per contorno γ stesso.

Sia S una superficie avente γ come contorno, e siano n (il versore normale a S) e il verso di percorrenza "positivo" di γ legati dalla solita "regola della vite":



(potremmo anche scrivere "∂S" invece che "γ")

Sia F campo vettoriale (regolare), per cui $\text{rot} F =$

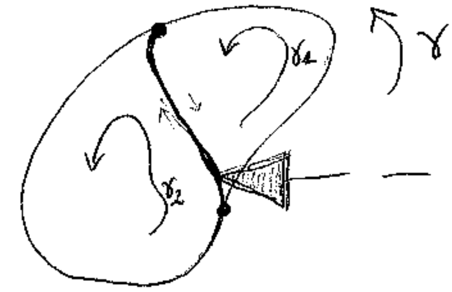
$$= \nabla \times F \overset{\text{Laplace}}{=} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) j +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k$$, e la tesi è la formula

$$\boxed{\oint_\gamma F \cdot ds = \int_S \text{rot} F \cdot n \, dS} \quad (= \Phi_S(\text{rot} F)).$$

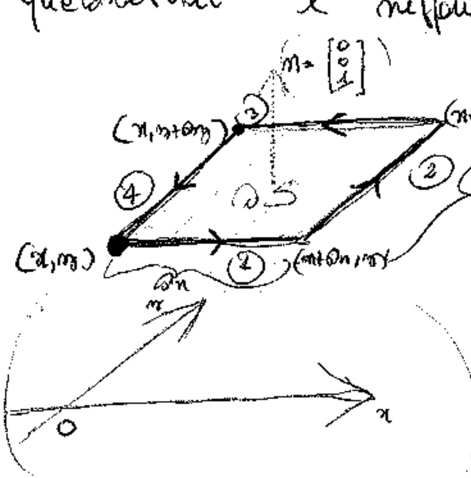
Cominciamo con l'osservare che la circuitazione di F lungo γ è uguale alla somma delle circuitazioni di F su due curve γ_1

e γ_2 ottenute congiungendo due punti di γ:



(la circuitazione totale nel tratto di congiunzione è nulla!)

Più in generale, $\oint_\gamma F \cdot ds$ = la somma delle circuitazioni di F lungo "quadratini" infinitesimi che partizionano (con le loro aree interne (dS)) la superficie S interna a γ; consideriamo quindi uno di tali quadratini e supponiamo abbia i lati paralleli agli assi x e y:

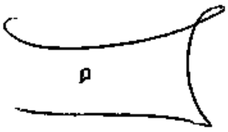


; la circuitazione di F lungo tale quadrato è allora, in prima approssimazione,

$$F_1(1)dx + F_2(2)dy - F_1(3)dx - F_2(4)dy \approx \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = (\mathrm{rot}\,F)_3 \underbrace{dx\,dy}_{(dS)} = \mathrm{rot}\,F \cdot n\, dS$$

(Non è $F_1(3)-F_1(1)$!)

; dovremo poi osservare che il risultato è analogo nel caso che il quadratino abbia lati paralleli ad un'altra coppia di assi, e che tali risultati fossero combinati "linearmente" per un quadratino disposto in modo arbitrario: infatti valutazioni tipo "$F_1(1)$" sono sostituite da una combinazione lineare di valutazioni con tutte F_1, F_2 e F_3 (e coefficienti $\pm$), quindi derivate parziali sostituite da derivate direzionali, che però sono combinazioni lineari di derivate parziali. Dunque il risultato ottenuto coi quadratini infinitesimi è valido in generale, e sempre sui quadratini è sempre nelle aree racchiuse.



NOTA: potremmo definire il rotore di F in un punto P (sopra) come "rot F" tale che $\text{rot}\, F \cdot n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_\gamma F \cdot ds$ (se γ delimita la superficie ΔS, la quale ha versore normale n rispetto al verso positivo di γ con le solite regole della vite), ossia è un vettore avente modulo il valore assoluto massimo della circuitazione specifica (cioè per unità di superficie) di F attorno a P, e direzione coincidente con quella del versore normale alla superficie infinitesima corrispondente a tale valore massimo.

Abbiamo visto che il campo elettrico E generato da una qualsiasi distribuzione di cariche ferme è un campo conservativo, cioè tale che esiste campo scalare V (il potenziale elettrostatico di E) con $E = -\nabla V$, cioè tale che la circuitazione di E lungo una qualsiasi curva chiusa sia 0: $\oint_\gamma E \cdot ds = 0$.

Allora per Stokes $\oint_{\gamma\,(=\partial S)} E \cdot ds = \int_S \text{rot}\, E \cdot n \, dS$, e dunque per l'arbitrarietà di γ, ossia di S, è $\boxed{\text{rot}\, E = \nabla \times E = 0}$,
(siamo su tutto $\mathbb{R}^3$...)

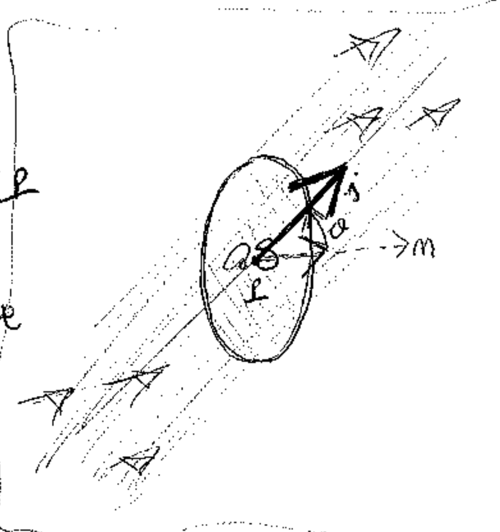
cioè E è irrotazionale, e ciò anzi equivale alle seguente "formule integrale" nella circuitazione di E.

(Dunque contemporaneamente $\begin{cases} E = -\nabla V & (\nabla \times E = 0) \\ \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \left(\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \end{cases}$)

In presenza di un campo elettrostatico, cioè equiv. di un potenziale elettrostatico, si genera naturalmente movimento di cariche sottoposte all'effetto del campo stesso: definiamo l' INTENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA i ATTRAVERSO UNA DATA SUPERFICIE

come la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo, ossia $i := \frac{dq}{dt}$ (l'unità di misura è l'AMPÈRE $A := \frac{C}{s}$); definiamo anche la "direzione della corrente elettrica" come quella di moto delle cariche, e quindi il "verso della corrente" come quello di moto delle cariche positive (ossia l'opposto di quello delle cariche negative); la corrente è "continua" se tutto ciò resta costante nel tempo.

Definiamo quindi il vettore "DENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA $\vec{j}$" in un certo punto P

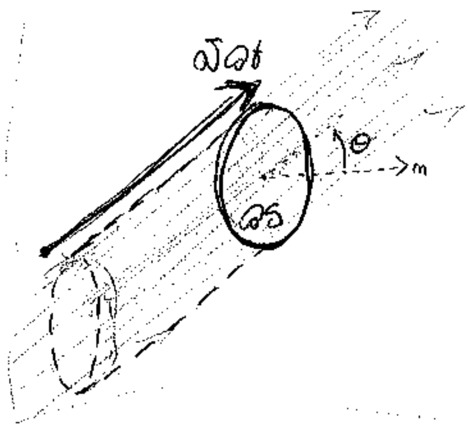


come segue: consideriamo una superficie infinitesima dS "passante" per P e fissiamo anzitutto direzione e verso di $\vec{j}$ identici a quelli della corrente elettrica che attraversa dS; naturale infine definire $|\vec{j}|$ in modo che il flusso (infinitesimo) di $\vec{j}$ attraverso dS coincida con i, ossia poniamo $|\vec{j}|$ tale che

$$i = \frac{dq}{dt} = |\vec{j}|\, dS \cos(\alpha) \left(= \vec{j} \cdot \vec{m}\, dS = \Phi_{dS}(\vec{j})\right)$$, per

cui inoltre l'unità di misura di j è A/m^2. Dunque otteniamo che per qualsiasi superficie è $\boxed{i = \Phi_S(j) = \int_S j \cdot n \, dS}$.

Ora, supponiamo che le correnti sia prodotte dal movimento di particelle dotate ciascuna di carica q, in numero n per unità di volume e con velocità media v (vettore): allora, nell'intervallo di tempo dt, una carica si sposta in media di $v \cdot dt$ e quindi attraversano dS proprio tutte "e sole" le particelle contenute nel cilindretto di base dS e spigolo $|v|dt$,



che sono ovviamente in numero $n \cdot ((|v|dt) dS \cos(\theta)) =$
$= n|v|dt \, dS \cos(\theta)$; se $q > 0$, allora v e j sono paralleli, e in quanto effettuato le cariche che attraversano dS nell'unità di tempo è $|j| \, dS \cos(\theta)$, deduciamo che

$$|j| \, dS \cos(\theta) = \frac{nq|v| dt \, dS \cos(\theta)}{dt}, \text{ cioè}$$

$|j| = nq|v|$; se invece $q < 0$, allora v e j hanno stessa direzione ma versi opposti, però il modulo resta quello calcolato $|j| = n|q| \, |v|$, quindi in ogni caso

$\boxed{j = nqv}$. Chiaramente allora se le corrente è dovuta al movimento di particelle di "tipo diverso", diciamo che l'i-esimo tipo di particelle ha carica q_i, densità di volume n_i e velocità media v_i (vettore), vale

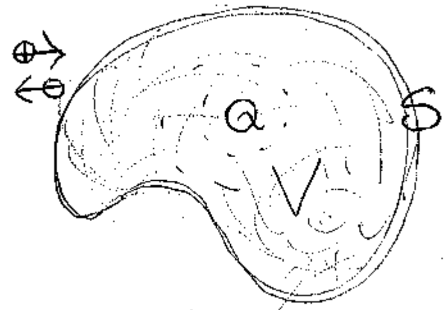
$$\boxed{j = \sum_i n_i q_i v_i}$$, per cui dunque $j = 0$

$\Longleftrightarrow$ tutte le cariche elettriche sono in quiete (nel senso che NON si muovono in una direzione ben precisa; quindi possono benissimo agitarsi termicamente!).

(ammesso le presenze di cariche!)

Principio di conservazione della carica elettrica: per ogni carica uscente da una regione di spazio V racchiusa da una superficie chiusa S si ha una corrispondente variazione nella carica totale Q contenuta nella stessa regione V.

Dunque, se all'istante t la carica totale in V è Q, allora all'istante $t+dt$ la carica totale in V è $Q+dQ$ $\Longleftrightarrow$ la carica uscita da V nell'intervallo di tempo dt è $-dQ$,



cioè $$\boxed{\int_S j \cdot n \, dS = -\frac{dQ}{dt}}$$; ma, se ρ è la densità volumetrica di carica in V, allora $Q = \int_V \rho \, dV$, per cui (ipotesi di regolarità per ρ!) $\int_S j \cdot n \, dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$;

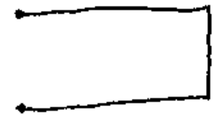
d'altra parte, per il teorema della divergenza, è

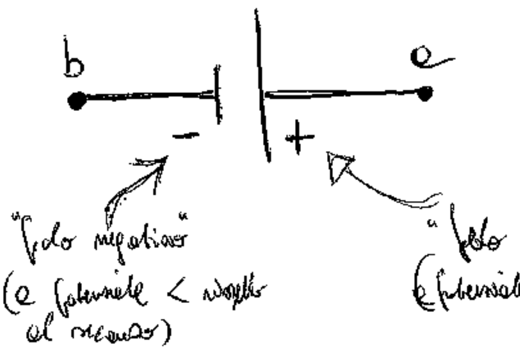
$\int_S \vec{j}\cdot \vec{n}\, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV$: per l'arbitrarietà di V deve essere (equiv.) $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, cioè vale

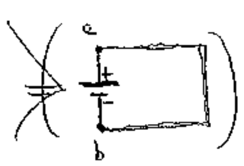
l'equazione di continuità (della carica elettrica) $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

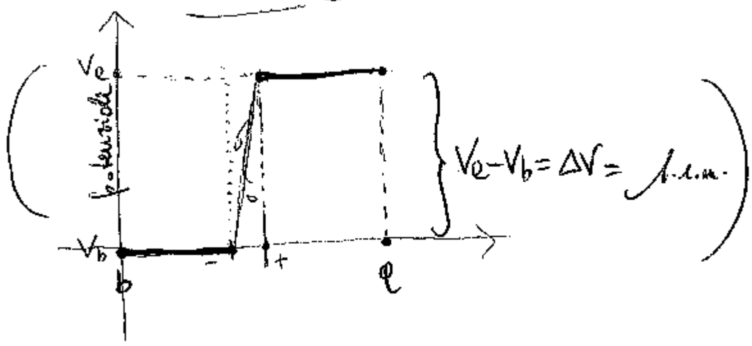
(e quindi, in ogni intorno infinitesimo di ogni punto, una variazione nel tempo della densità volumetrica di carica equivale ad una divergenza non nulla del vettore densità di corrente).

In condizioni stazionarie, ρ resta costante in ogni punto e quindi (equiv.) $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, $\not\Rightarrow \vec{j} = 0$ (cioè assenza di corrente): infatti può esserci una corrente continua in un filo conduttore, ma è chiaro che considerata una superficie chiusa vi entrano tante cariche quante se ne escono.

Consideriamo pertanto ad esempio un filo conduttore  ; per avere un flusso continuo di cariche attraverso esso è necessario (e sufficiente) che lungo questo esista costantemente un campo elettrico, ossia un potenziale elettrostatico, causato ad esempio da una d.d.p. ΔV costante mantenuta tra gli estremi del filo grazie ad un qualche dispositivo che inoltre, naturalmente, sappia trasformare in energia elettrica energia d'altre specie. Chiamiamo tali dispositivi "generatori di forza elettromotrice", intendendo per forza elettromotrice o "f.e.m." la differenza di potenziale che esiste ~~quando~~ fra i suoi "poli" (morsetti) a circuito aperto; indichiamo un generatore di f.e.m. continua così:





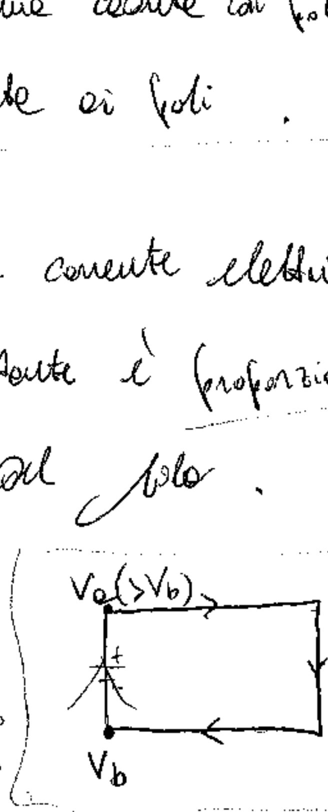


Si verifica sperimentalmente che, quando un generatore eroga corrente (cioè si chiude il circuito), al suo interno si produce una caduta di potenziale uguale alla diminuzione di tensione che si è verificata ai poli.

LEGGE DI OHM: l'intensità i della corrente elettrica che percorre un filo metallico a temperatura costante è proporzionale alla d.d.p. esistente fra gli estremi del filo.

In formule: $i = \frac{1}{R}(V_a - V_b)$,

cioè $\boxed{V_a - V_b = R \cdot i}$.

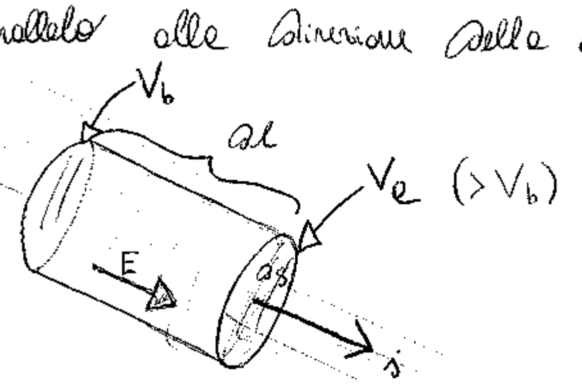


Il fattore di proporzionalità R è LA RESISTENZA ELETTRICA DEL FILO e la sua unità di misura è l'OHM $\Omega := \frac{V}{A}$. I limiti "precisi" della legge di Ohm sono tali per cui R

NON dipende da $V_a - V_b$; però dipende dal materiale, dalla pressione, dalla forma e dalla temperatura del conduttore. Per un filo omogeneo, con sezione costante di area S, R risulta proporzionale alla lunghezza l del filo e inversamente proporzionale a S (ma indip. dalla sua forma!): $\boxed{R = \rho_c \frac{l}{S}}$, dove precisamente ρ_c dipende solo dalla temperatura e dalla sostanza del filo, ed è "la resistenza specifica" o "resistività" del conduttore (con unità di misura $\Omega\, m$); $\gamma := \frac{1}{\rho_c}$ è "la conduttività".

(È detto RESISTORE un conduttore che soddisfa la legge di Ohm.)

$\boxed{\text{ES.}}$: Consideriamo un cilindro retto, di lunghezza dl e sezione dS, di un conduttore isotropo percorso da corrente, e l'asse del cilindro sia parallelo alla direzione della corrente.



Sia poi E il campo elettrico interno al cilindro; l'intensità della corrente che attraversa il cilindro è $|j|\,dS = i$, mentre la d.d.p. tra le due basi è $V_a - V_b = -dV = |E|\,dl$; ma è anche $V_a - V_b \overset{(OHM)}{=} R \cdot i = \left(\rho_c \frac{dl}{dS}\right)(|j|\,dS) = \rho_c\, dl\, |j|$, da cui $|j| = \frac{1}{\rho_c}|E| = \gamma |E|$; sapendo che in un conduttore isotropo la corrente fluisce parallelamente al campo elettrico, Possiamo scrivere $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$, o anche $\vec{E} = \rho_c \vec{j} =$

$= \rho_c n q \vec{v}_D$ (se il conduttore fosse metallico, allora $q = -e$!)

che include le proporzionalità del campo elettrico rispetto alle velocità medie dei portatori di carica.

Un tratto di filo sia percorso da una corrente elettrica d'intensità costante i e fra i suoi estremi esiste una d.d.p. costante $\Delta V = V_a - V_b$; se in un intervallo di tempo dt una quantità di carica $dq = i\,dt$ esce dal filo attraverso un suo estremo, allora (equiv.) una quantità uguale entra nel filo dall'estremo opposto: è ovvio che, da un punto di vista energetico, è come se una carica dq fosse passata dal potenziale V_a al potenziale V_b, quindi nell'intervallo di tempo dt il lavoro compiuto dal campo elettrico vale $d\mathcal{L} = dq\,(V_a - V_b) = i\,(V_a - V_b)\,dt$

$\left(\overset{(\text{OHM})}{=} \frac{(V_a - V_b)^2}{R}\,dt \overset{(\text{o anche})}{=} i^2 R\,dt\right)$, cioè sviluppa potenza pari a

$$W = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = (V_a - V_b)\,i = \frac{(V_a - V_b)^2}{R} = i^2 R.$$

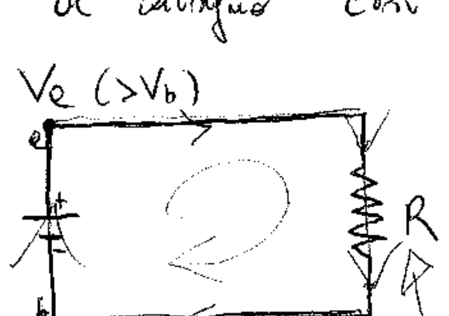
In condizioni stazionarie la potenza è costante, dunque il lavoro compiuto in un intervallo di tempo Δt è

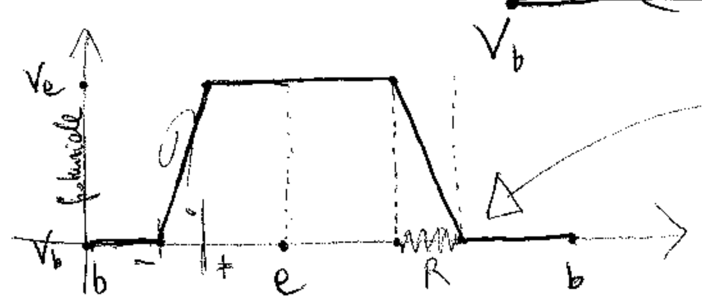
$$\mathcal{L} = (V_a - V_b)\,q = i^2 R\,\Delta t$$

(se naturalmente $q = i \cdot \Delta t$ è la carica passata nell'intervallo di tempo Δt)

Ora, nel caso di corrente continua NON si verifica alcun aumento delle velocità di moto d'insieme dei portatori di corrente, quindi il lavoro $\mathcal{L}$ ($\neq 0$!) compiuto non può che produrre in modo irreversibile un aumento dell'energia di agitazione termica degli elettroni di conduzione e dell'energia vibrazionale del reticolo cristallino; detto altrimenti: se non ci sono dispersioni di calore verso l'esterno, allora la temperatura del filo aumenta; altrimenti il filo cede all'esterno una quantità di calore Q equivalente all'energia $\mathcal{L}$ (cioè $Q = \mathcal{L} = i^2 R \Delta t$, se misuriamo Q in joule). Questo fenomeno è noto col nome di "EFFETTO JOULE"

Teniamo presente la resistenza elettrica R di un filo metallico, o di un circuito, ~~[illegible]~~ raffigurandola nel disegno così:

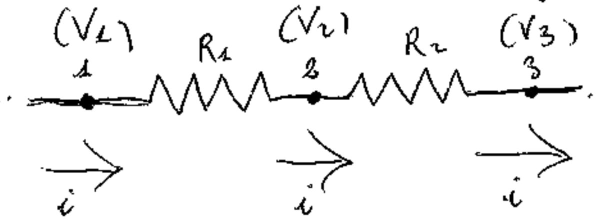




(si verifica una caduta di potenziale (necessariamente!) pari a $iR = V_e - V_b$, quindi $V_e - (V_e - V_b) = V_b$!)

Possiamo collegare tra loro più circuiti elettrici (o conduttori) ottenendo altro circuito.

Due o più conduttori sono collegati in serie quando vengono percorsi dalla stessa corrente, e parleremo (rispettivamente) di resistenze in serie (o resistori):



$(V_1>V_2>V_3)$

La resistenza complessiva (o "equivalente") di più conduttori disposti in serie è la somma delle resistenze dei singoli conduttori:

$$\boxed{R = R_1 + R_2}$$

(o R_{eq}) .

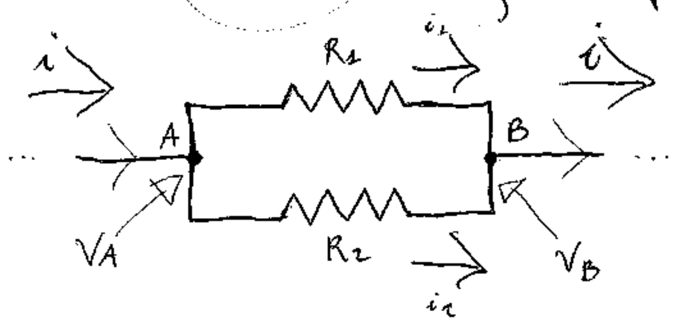
(È per questo che possiamo supporre i fili di connessione disposti nei circuiti come fili privi di resistenza:

!)

Infatti per Ohm abbiamo $V_1 - V_2 = iR_1$ e $V_2 - V_3 = iR_2$,

$$\Rightarrow V_1 - V_3 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) = i(R_1 + R_2) \quad .$$

Due o più conduttori sono collegati in parallelo quando tra gli estremi di ciascuno di essi c'è la stessa d.d.p., e parleremo di resistenze in parallelo (o resistori):



$(V_A>V_B)$

Il reciproco della resistenza equivalente di più conduttori disposti in parallelo è uguale alla somma dei reciproci delle resistenze dei singoli conduttori:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

(o $1/R_{eq}$) .

Infatti per Ohm $i_1 = \dfrac{V_A - V_B}{R_1}$ e $i_2 = \dfrac{V_A - V_B}{R_2}$ $\Rightarrow$

$$i = i_1 + i_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(V_A - V_B)$$

($\frac{1}{R}$ è detta "conduttanza" (unità resistenza); dunque, per ~~resistenze~~ conduttori in serie, sommiamo le resistenze, mentre per conduttori in parallelo sommiamo le conduttanze!)

Due casi particolari:

(Due) resistenze \ (Due) conduttori	in serie	in parallelo
$R_1 = R_2$	$R_{eq} = 2R_1$	$R_{eq} = \dfrac{R_1}{2}$
$R_1 << R_2$	$R_{eq} \approx R_2$	$R_{eq} \approx R_1$

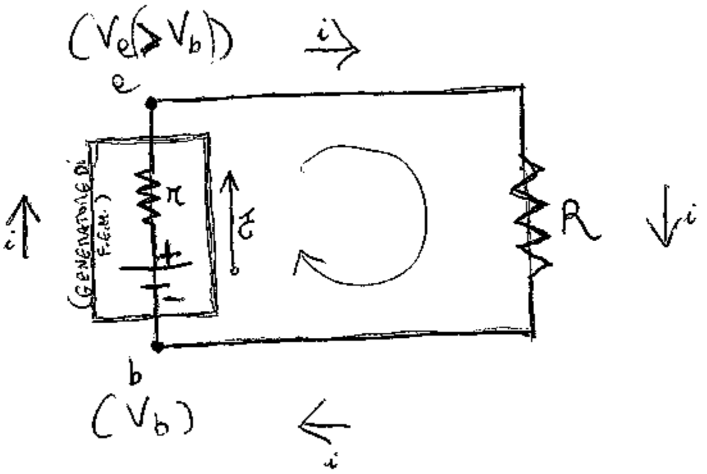
Abbiamo visto che la d.d.p. ai poli di un generatore che non eroga corrente è la f.e.m. "$\mathcal{E}$"; si verifica invece che la d.d.p. ΔV ai poli di tale generatore chiuso su una resistenza R, che eroga corrente d'intensità i, è esattamente

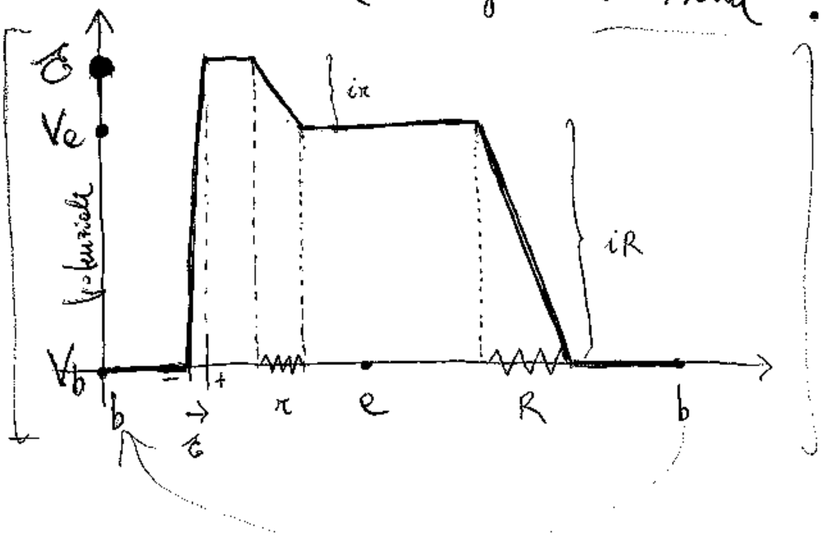
$$\boxed{\Delta V = \mathcal{E} - i r}$$

($\cancel{\Rightarrow}$ $\dfrac{\Delta V}{R} < \dfrac{\mathcal{E}}{R}$), dove r è una costante (in ohm) caratteristica del generatore chiamata "resistenza interna"; quindi ir è la caduta interna di tensione.

Essendo per Ohm $\Delta V = iR$, deduciamo dunque che

$$\boxed{\mathcal{E} = i\,(r + R)}$$: è come se il generatore di f.e.m. fosse "ideale", cioè $\Delta V = \mathcal{E}$ ($r = 0$) indipendente dalle intensità i di corrente erogata, con però una resistenza di $R + r$ ($> R$) nel circuito, che risulterebbe ovviamente la resistenza equivalente alle due resistenze r e R disposte in serie.



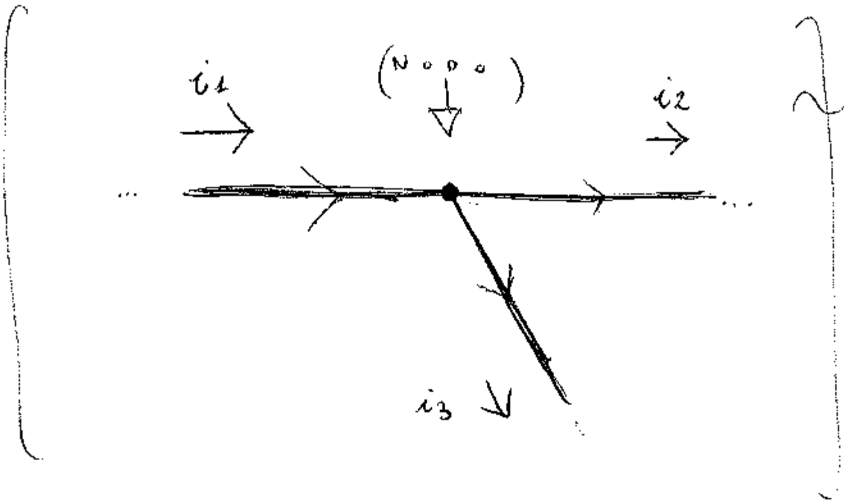


La resistenza offerta da una generale rete di più conduttori interconnessi ("rete elettrica") non può esser calcolata sempre tramite ripetute applicazioni delle due formule dette nella "resistenza equivalente" di resistenze in serie o in parallelo.

Chiamiamo "nodo" un punto di una rete nel quale concorrono N (> 2) conduttori, che in tale circostanza possiamo chiamare "rami", e se $i_1, i_2, \dots, i_N$ sono le intensità delle correnti negli N rami allora le consideriamo con segno: segno + se la corrente corrispondente fluisce nel nodo, segno − se tale corrente esce dal nodo. Ha dunque senso considerare l'intensità di corrente totale per un nodo.

PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF: la somma algebrica delle intensità di corrente nei rami facenti capo ad uno stesso nodo è nulla; in formula $\boxed{\sum_{k=1}^{N} i_k = 0}$.

È evidente l'equivalenza di tale legge con la conservazione della carica ai nodi di una rete ($i_k \cdot dt = dq_k$!).



Per Kirchhoff è

$i_1 + (-i_2) + (-i_3) = 0$,

cioè

$i_1 = i_2 + i_3$!

Chiamiamo "maglia" un insieme di (due o) più rami della rete formanti un unico circuito chiuso non ulteriormente divisibile in parti chiuse più piccole, che dotiamo di un verso positivo di percorrenza; allora, se nel k-esimo ramo della maglia c'è f.e.m. $\mathcal{E}_k$ "ideale", resistenza R_k (comprendente quelle interne del generatore) e corrente d'intensità i_k, conveniamo di considerare i_k e $\mathcal{E}_k$ con segno:

(1) $i_k > 0$ se la corrente fluisce nel verso fissato del

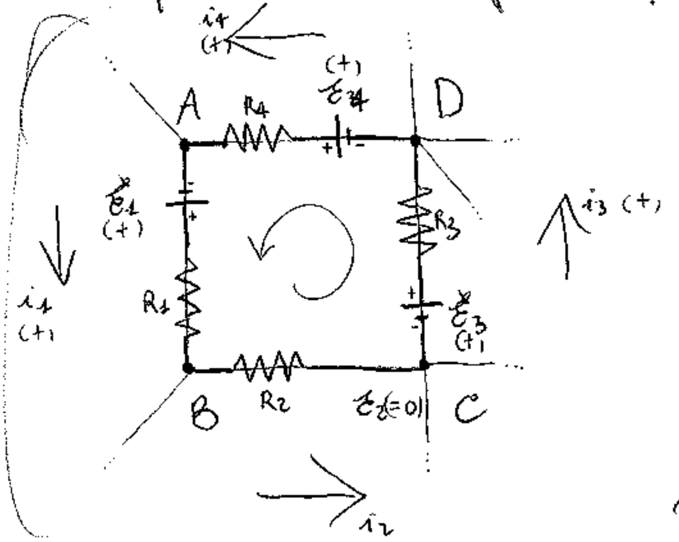
ramo considerato, altrimenti $i_k < 0$;

(2) $\mathcal{E}_k > 0$ se il verso positivo fissato nel ramo va dal polo − al polo + del generatore, altrimenti $\mathcal{E}_k < 0$;

va dunque fatta la somma algebrica di tali numeri di una maglia.

SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF: la somma algebrica delle f.e.m. agenti lungo i rami di una maglia è uguale alla somma algebrica dei prodotti delle intensità di corrente per le rispettive resistenze di ogni ramo; in formula $\boxed{\sum_{k=1}^{N} \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^{N} R_k i_k}$.

Tale legge non solo estende (chiaramente) quella di Ohm, ma ne è davvero una conseguenza diretta essendo in generale il risultato della legge di Ohm applicata ai rami della maglia. In effetti possiamo interpretare tale legge come segue: descrivendo un percorso chiuso lungo una rete, ritorniamo allo stesso potenziale dal quale eravamo partiti.



Otteniamo $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3+\mathcal{E}_4 \overset{\text{(Kirchhoff)}}{=} R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4$ applicando Ohm a ciascuno dei quattro rami:

$$\begin{cases} V_A + \mathcal{E}_1 - R_1 i_1 = V_B \\ V_B - R_2 i_2 + \mathcal{E}_2 = V_C \\ V_C + \mathcal{E}_3 - R_3 i_3 = V_D \\ V_D + \mathcal{E}_4 - R_4 i_4 = V_A \end{cases}$$

(e sommando membro a membro!)

L'idea ora è quella di essere in grado di calcolare l'intensità di corrente di tutti i rami di una arbitraria rete elettrica
(con segno, cioè con verso!)
una volta noti i valori delle f.e.m. e delle resistenze di ogni ramo (cioè di saper descrivere la dinamica dello spostamento di cariche elettriche). Infatti, per una qualsiasi rete elettrica di N nodi e R $(\geq N)$ rami, ci sono esattamente $M = R - (N-1) = R+1-N$ maglie indipendenti;
(con dentro un ramo proprio!)
se abbiamo $i_1, \dots, i_R$ sono le R incognite intensità di corrente (con segno) dei vari rami, allora otteniamo R equazioni lineari in
(indipendenti)
tali incognite grazie a Kirchhoff: ne otteniamo $N-1$ applicando la sua prima legge dei nodi, e otteniamo le rimanenti $R-(N-1) = M$ applicando la sua seconda legge delle maglie. Visto che tale studio si traduce in un sistema di equazioni lineari (dato che lavoriamo con conduttori ohmici e generatori di f.e.m.), parliamo più precisamente di "reti elettriche lineari". Il metodo appena enunciato per compiere questa trattazione è "il metodo dei rami", il quale però è di meno diretta applicazione rispetto ai due metodi spiegati di seguito.

(a) Metodo delle maglie: introducendo le M correnti (incognite) $I_1, \dots, I_M$ di maglia, che soddisfano automaticamente e in modo banale le prime leggi di Kirchhoff, riduciamo appunto a M il grado del sistema d'equazioni da risolvere (applicando solamente le seconde leggi di Kirchhoff e ciascuna maglia) ; determinate così $I_1, \dots, I_m$ di maglia, in funzione di queste si ricavano immediatamente $i_1, \dots, i_R$ di ramo.

(b) Metodo dei nodi : introducendo le $N-1$ d.d.p. (incognite) tra ciascun nodo fissato e il restante N-esimo nodo (al quale in realtà possiamo assegnare tensione 0), che soddisfano automaticamente e in modo banale le seconde leggi di K., riduciamo a $N-1$ il grado del sistema risolvente (applicando solo le prime leggi di K.) ; determinate tali d.d.p. ricaviamo le desiderate $i_1, \dots, i_R$ mediante semplice applicazione di Ohm.

Chiaramente sceglieremo (b) invece che (a) se $N-1 < M$, (a) invece che (b) se viceversa $M < N-1$.

Fatto generale su questi due metodi : la matrice dei coefficienti del sistema risolvente è in ogni caso simmetrica.

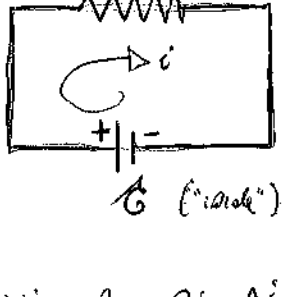
Essendo quindi lineare la descrizione della "dinamica" in una qualsiasi rete elettrica (lineare), possiamo enunciare il TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE : in una rete contenente almeno due generatori, la "risposta" in uno dei suoi "elementi" è uguale alla somma delle risposte che i singoli generatori vi produrrebbero agendo separatamente.

Osserviamo che uno scelto generatore agisce "da solo" $\Leftrightarrow$ tutti gli altri generatori contano unicamente per le loro resistenze interne ; cioè è come sostituire ogni altro generatore con una resistenza pari alla rispettiva resistenza interna (semplicemente perché consideriamo ogni generatore come "ideale" e fatto però da aggiungere alla rete le rispettive resistenze interne ; dunque possiamo "togliere" il generatore ma NON le rispettive resistenze interne !) ; tale procedura può essere sintetizzata dicendo che un generatore è stato reso "passivo". Risulta poi evidente (per Ohm) il seguente

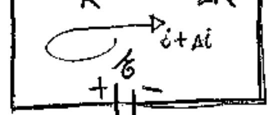
TEOREMA DI COMPENSAZIONE : in una rete possiamo sostituire una resistenza R, percorsa da una corrente d'intensità i, o con un generatore di corrente che eroghi una corrente "di compensazione" ("contraria") della stessa intensità i, o con un generatore di f.e.m. che fornisca una d.d.p. "di compensazione" $V_c = iR$.

A parità di d.d.p., avere una resistenza equivale ad avere una corrente meno intensa ; e parità d'intensità di corrente, avere una resistenza equivale ad avere più d.d.p. (tutto ciò in un certo senso)

Consideriamo ora il circuito (ramo generico di una rete!!)

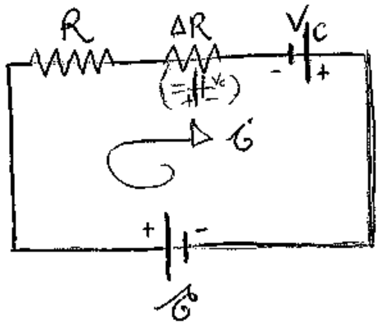


, e aumentiamone di ΔR la resistenza complessiva (diminuendo di Δi l'intensità di corrente : Δi è considerata come negativa) :

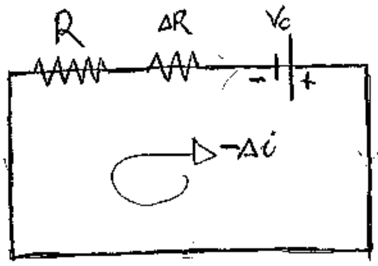


;

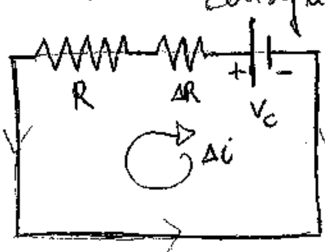
Chiaramente, per compensazione, annulliamo l'effetto di ΔR aggiungendo contemporaneamente un generatore di f.e.m. opposta alla f.e.m. di compensazione di ΔR, $V_C = i\,\Delta R$, come in figura



; ma pertanto l'intensità i di corrente nel ramo (che è il circuito stesso), per il teorema di sovrapposizione, è uguale a $i = \underbrace{(i + \Delta i)}_{(V_c \text{ presente})} + \underbrace{i'}_{(\mathcal{E} \text{ presente})}$, da cui deduciamo $i' = -\Delta i$ (positiva!) : disegnando è cioè



, o equiv.



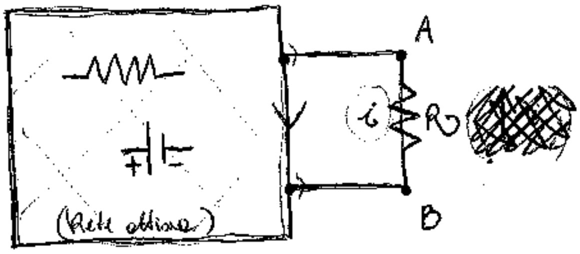
.

In conclusione, com'era chiaro, possiamo rienunciare il teorema di compensazione come segue: ad una variazione ΔR della resistenza in un ramo di una rete, ramo dove scorre una corrente d'intensità i, corrisponde una variazione Δi dell'intensità di corrente in un generico punto della rete di valore uguale a quello risultante in quel punto quando, resi passivi i generatori originali, nel ramo modificato agisce un generatore di compensazione di f.e.m. $V_c = i\,\Delta R$.

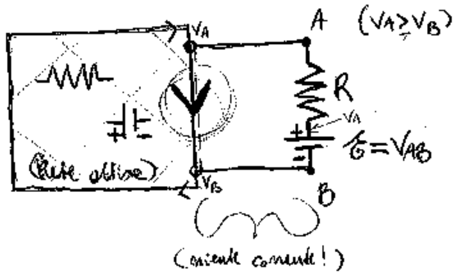
TEOREMA DI THÉVENIN: una rete elettrica attiva (cioè contenente, oltre a resistenze, almeno un generatore di f.e.m.) collegata a due terminali in uscita equivale ad un singolo generatore di f.e.m. connesso in serie ad una resistenza; la f.e.m.

equivalente coincide con la d.d.p. tra i due terminali a circuito aperto (cioè quando non sono collegati ad altri conduttori), mentre la resistenza equivalente è uguale alla resistenza misurata tra i terminali della rete quando questa viene resa passiva.

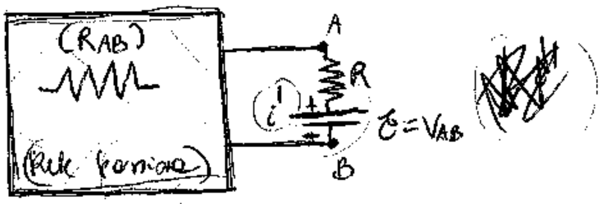
La generica rete elettrica attiva collegata a due terminali in uscita è della forma



; inserendo dentro un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = V_{AB} :=$ (d.d.p. tra A e B a circuito aperto (cioè senza R)) nel senso come in figura

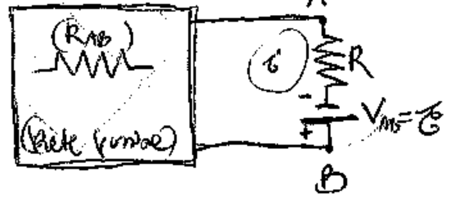


), otteniamo che nel ramo $\overline{AB}$ non passa alcuna corrente (notare $V_B \leq V_A$ perché gli effetti di R ed $\mathcal{E}$ si elidono! (o meglio: scorrono contemp. $i = \frac{V_{AB}}{R}$ e $-i$!)); essendo ora una rete con almeno due generatori, effettuiamo il teorema di sovrapposizione all'intensità di corrente nel ramo $\overline{AB}$ ottenendo che $0 = i + i'$ dove



, cioè $\underset{(=-i)}{i'} = \frac{V_{AB}}{R + R_{AB}}$)

cioè

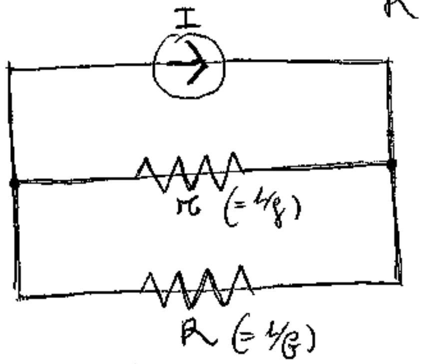


(e, in effetti, le "correnti" di tale circuito col secondo disegnato è uguale al primo circuito disegnato).

(Piccola parentesi: consideriamo un generatore di corrente I (continua) (che disegnamo come "$\overset{I}{-(\rightarrow)-}$") chiuso su una resistenza R (>0), e sia ΔV la d.d.p. ai suoi capi: si osserva sperimentalmente che la corrente erogata è in realtà $\boxed{i = I - g\,\Delta V}$, dove g è una costante (in $\frac{1}{\Omega}$) caratteristica del generatore chiamata "conduttanza interna"; quindi $g\,\Delta V$ è la "caduta" interna di corrente. Essendo per Ohm $i = \frac{\Delta V}{R} =: G\,\Delta V$, se $G := \frac{1}{R}$, abbiamo equiv. che

$$\boxed{I = \Delta V\,(g + G)}$$

: è come se il generatore di corrente fosse "ideale", cioè $i = I$ ("$g=0$") indipendentemente dalla d.d.p. ΔV ai suoi capi, con però una conduttanza $G + g = \frac{1}{R} + g \overset{(g =: \frac{1}{r})}{=:} \frac{1}{R} + \frac{1}{r}$ del circuito, che risulterebbe esattamente la conduttanza equivalente alle due $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{r}$ disposte in parallelo:



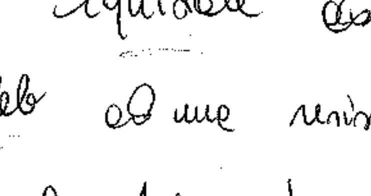
Osserviamo che precisamente $i = I - \frac{g}{g+G} I$, quindi (giustamente) se $g \ll G$ allora praticamente $i \cong I$; ossia ciò se R è trascurabile: diciamo che il generatore di corrente è

"Cortocircuitato" quando effetto è chiuso su una resistenza R "trascurabile".

Quindi: quando un generatore reale è connesso ad una resistenza di carico, il suo comportamento può essere indifferentemente rappresentato o come un generatore di f.e.m. in serie ad una resistenza (interna) r o come un generatore di corrente in parallelo con una conduttanza (interna) g; in effetti si potrebbe anche dimostrare che $r = 1/g$ ( )

TEOREMA DI NORTON: una rete elettrica attiva collegata a due terminali in uscita equivale ad un singolo generatore di corrente connesso in parallelo ad una resistenza; l'intensità di corrente erogata da tale generatore è uguale a quella che passa tra i terminali in uscita quando questi sono cortocircuitati, mentre la resistenza equivalente è uguale alla resistenza in uscita della rete quando questa viene resa passiva.

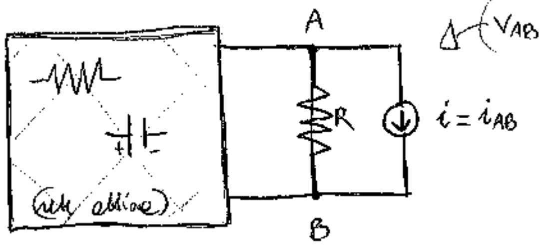
La generica rete elettrica attiva collegata a due terminali in uscita è della forma



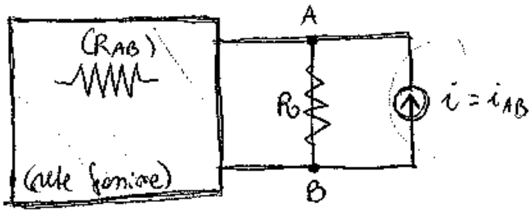
; annullando come prima l'effetto di R rendendo la d.d.p. dei terminali nulla (cioè "cortocircuitandola") mediante " $\varepsilon = V_{AB}$ " equivale a inserire

Come in figura un generatore di corrente $i = i_{AB} :=$ la corrente erogata dalla rete che pone dei terminali messi in cortocircuito (generato precisamente nel collegamento di cortocircuito ((parallelo a R))

$\Delta\,(V_{AB}=0\,!)$



; consideriamo quindi



, per sovrapposizione la d.d.p. V ai capi di $\overline{AB}$ è $V = \dfrac{i_{AB}}{G + G_{AB}}$, dove naturalmente $G := \frac{1}{R}$ e $G_{AB} := \frac{1}{R_{AB}}$. (Notiamo che a circuito aperto (senza R) è $V = V_{AB}$), e quindi $i_{AB} = G_{AB} V_{AB} = \dfrac{V_{AB}}{R_{AB}}$! $\square$

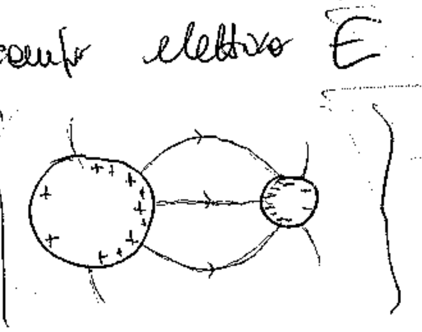
TEOREMA DI RECIPROCITÀ: in una rete lineare contenente un solo generatore, il rapporto fra l'intensità di corrente in un punto della rete e la tensione fornita dal generatore è costante quando si scambiano le loro posizioni nella rete.

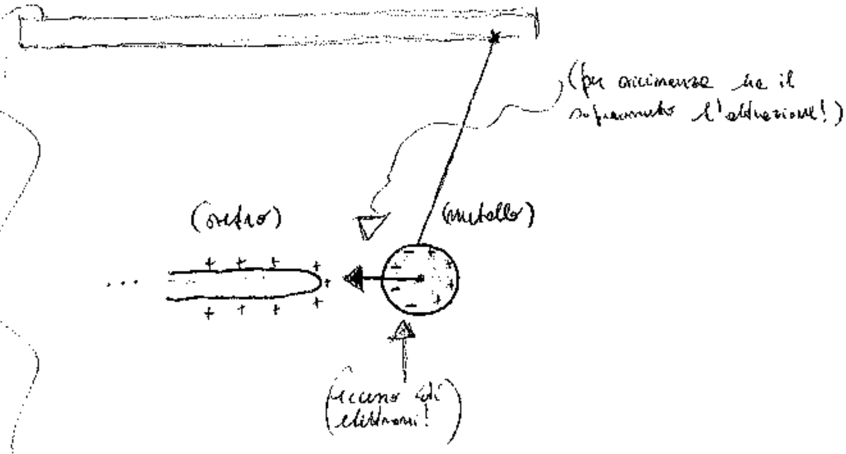
[Descrivendo la rete col metodo delle maglie, cioè con un sistema lineare di questo tipo $\underbrace{[R]}_{\text{(resistenze di maglie)}}\underbrace{[i]}_{\text{(intensità di corrente di maglie)}} = \underbrace{[E]}_{\text{(f.e.m. di maglie)}}$ simmetrica, ~~e infatti [E] con componenti tutte uguali~~, per cui otteniamo la tesi per simmetria delle resistenze (o, col metodo dei nodi $\underbrace{[G]}_{\text{(autoconduttanze e mutue conduttanze)}}\underbrace{[V]}_{\text{(tensioni degli altri nodi scelti)}} = \underbrace{[I]}_{\text{(correnti di eccitazione)}}$, per simmetria

delle conduttanze !) $\square$

Consideriamo un conduttore all'interno di un campo elettrostatico ($\neq 0$); gli elettroni di conduzione si spostano quindi, sotto l'azione delle forze esercitate dal campo elettrico, in "senso" opposto al campo stesso, cioè verso regioni a potenziale elettrico più elevato, in modo da produrre una riduzione del campo E complessivo dentro al conduttore (perché all'interno il campo elettrico compie lavoro (−) sugli elettroni di conduzione); in effetti viene così prodursi un campo elettrico addizionale, quello generato proprio in seguito allo spostamento degli elettroni di conduzione, che finisce col bilanciare esattamente il campo E. Il risultato finale è che quindi, in condizioni statiche, il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo, cioè tutti i punti del conduttore hanno lo stesso potenziale elettrostatico. Alla allora, per un conduttore che è un volume chiuso, attraverso la sua superficie non c'è flusso di campo elettrico perché esso vale è nullo, ossia (per Gauss) NON ha cariche al suo interno: dunque, sempre in condizioni statiche, tutte le cariche elettriche possedute da un conduttore si trovano nella sua superficie esterna (diciamo con densità superficiale di carica σ).

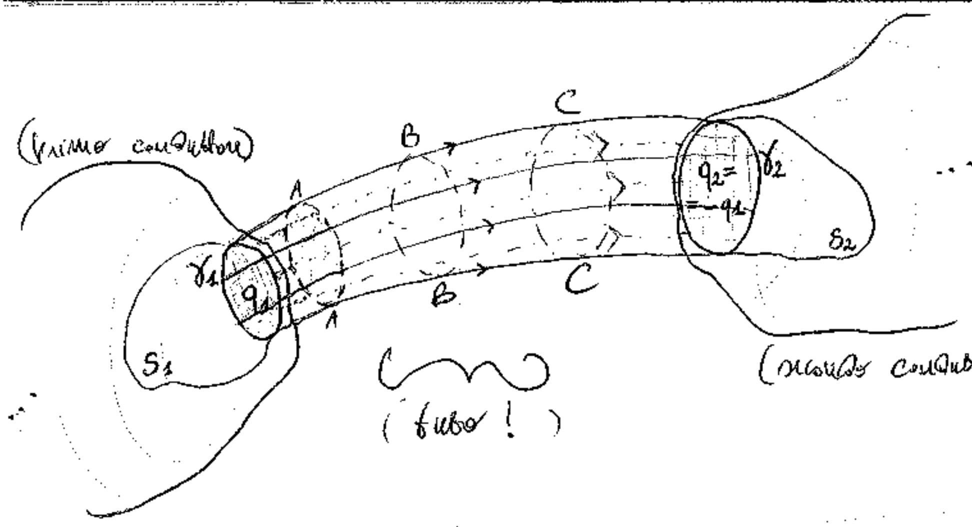
Adesso, tale superficie è comunque una superficie equipotenziale, quindi nelle sue "immediate vicinanze" il campo elettrico $\vec{E}$ è perpendicolare alla superficie stessa.

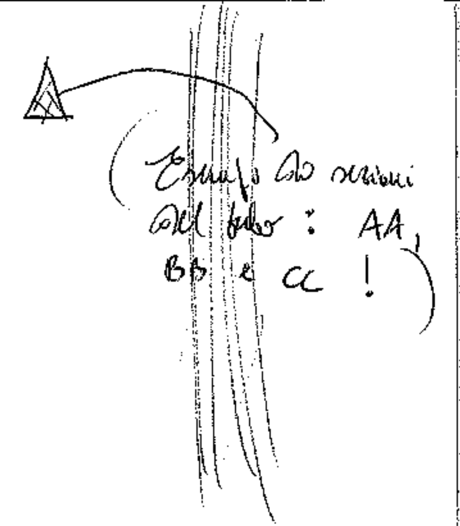




NOTA: se le palle arrivano e toccano la bacchetta, allora la attrazione si muta bruscamente in repulsione e le palline si allontanano! (Ovvio: per contatto le palline acquistano "del +"!)

Consideriamo una superficie chiusa S_1 interna ad un conduttore e avente per contorno la linea chiusa γ_1 posta sopra la superficie esterna del conduttore stesso, cosicché si possa poi considerare l'insieme delle linee di forza passanti per i punti di γ_1, ossia "un tubo di linee di forze"; supponiamo ora che tale tubo individui una linea chiusa γ_2 sopra un secondo conduttore, e sia quindi S_2 una superficie chiusa interna a questo conduttore e avente contorno γ_2. Allora il flusso (di E) attraverso la superficie chiusa costituita da S_1, dal tubo e da S_2 è ovviamente nullo (su S_1 e S_2, $E = 0$; poi, rispetto al tubo, E è parallelo!), cioè per Gauss tale superficie contiene carica totale nulla: se quindi q_1 e q_2 sono rispettivamente le cariche sulle superfici del primo e del secondo conduttore delimitate dal tubo, allora (equiv.) $\boxed{q_1 = -q_2}$. Riassumendo: le cariche contenute nelle superfici delimitate su due conduttori da un tubo di linee di forze sono opposte fra loro.





Altra osservazione elementare: il flusso attraverso una qualunque sezione di un dato tubo di linee di forza è costante in valore assoluto. (Infatti, per mancanza di carica nel tubo, il flusso attraverso la superficie chiusa fra BB e CC è nullo!)

Adesso supponiamo che il tubo abbia sezione infinitesima e che determini in particolare una superficie dS sul primo conduttore, e immaginiamo la superficie AA a distanza infinitesima dal medesimo conduttore; consideriamo allora la superficie chiusa fra $\underset{(\text{conduttore})}{dS}$ e AA; vista la vicinanza di AA e dS, possiamo immaginare AA normale all'asse del tubo infinitesimo considerato e con area circa $\text{area}(AA) \approx dS$, per cui $\Phi_{AA}(E) = |E|\, dS \overset{(\text{già capito})}{=}$ flusso di E attraverso l'intera superficie chiusa fra il conduttore e AA; ma la carica da questa racchiusa è $\sigma \cdot dS$ (σ è la ~~distribuzione~~ densità superficiale di carica sul conduttore) quindi (per Gauss) $\underset{(\sigma \text{ intera sup.})}{\Phi_{AA}(E)} = |E|\, dS = \dfrac{\sigma\, dS}{\varepsilon_0}$, cioè

$\boxed{|E| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$; dunque vale il <u>TEOREMA DI COULOMB</u> :

nelle "immediate vicinanze" della superficie esterna di un conduttore (immerso in un campo elettrostatico E) l'intensità di E è $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, la direzione di E è $\perp$ alla superficie stessa e il verso di E è uscente $\Leftrightarrow \sigma > 0$.
(le cariche del conduttore si dispongono sulla sua superficie con distribuzione σ)

(<u>NOTA</u>: ciò NON è in contrasto col fatto (provato) che una distribuzione σ piana e uniforme di carica genera un campo elettrico costante d'intensità $|E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ (infinita) ; in<u>fatti</u> dS è come fosse (rispetto a punti infinitamente vicini) un tale piano, MA tutto il campo da "lui" generato è non nullo <u>solo</u> all'esterno!)

Se <u>ora</u> prendiamo due punti P_1 e P_2 sulla stessa linea di forza e "spostiamo" una carica q da P_1 a P_2 (di potenziale risp. V_1 e V_2) allora il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto su q (da E) è tale che $V_1 - V_2 = \frac{\mathcal{L}}{q} =$

$$= \frac{1}{q} \int_{P_1}^{P_2} (q \cdot E) \cdot ds \overset{(P.)}{=} \int_{P_1}^{P_2} |E||ds|$$; deduciamo che

le linee di forza (di E) NON possono essere linee chiuse (con $P_1 = P_2$, $V_1 - V_2 = 0$ ma $\mathcal{L}_{P_1 \to P_2} \neq 0$ in quanto lungo una linea di forza $|E||ds|$ ha sempre lo stesso segno ~~***~~);

ovvie) le linee di forza (di E) o escono da cariche + e finiscono in cariche −, o vengono dall'infinito, o terminano all'infinito. Infine, in modo analogo capiamo subito che una linea di forza NON può uscire e terminare sulla (dalla) superficie di uno stesso conduttore (essendo allo stesso potenziale i punti di tale superficie!)

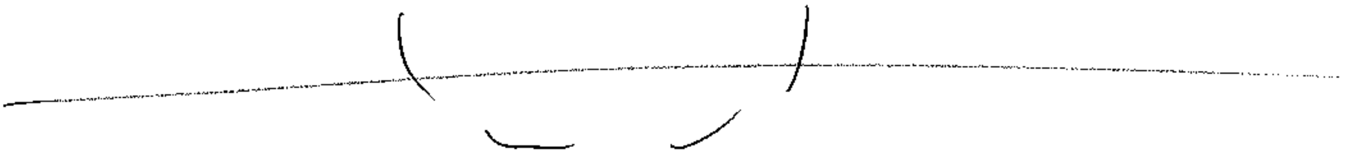
(Ricordiamo che, fissato nello spazio un sistema di riferimento, se $V(r) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|r|}\right) + c$ e se q è una carica, allora

$\underbrace{V(r)}_{\text{(potenziale elettrostatico)}} = \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{|r|}\right)}_{(=: V_r \text{ noto})} + \underbrace{c}_{\text{(costante nota)}}$

il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto da E su q per spostare q da r all'infinito è tale che $\frac{1}{q}\mathcal{L}(r \to \text{"}\infty\text{"}) = V(r) - V(\infty) = V(r) - c =$
$= V_r$: ponendo quindi $\underset{(\text{cioè } V(r) := V_r)}{c = 0}$, $V(r)$ è comunque potenziale elettrostatico di E che contemporaneamente rappresenta ciò per cui è il lavoro compiuto da E per spostare una carica q all'infinito diviso per q. Detto altrimenti: il potenziale elettrostatico nel punto r (cioè V_r) è la differenza di potenziale tra quel punto ed un punto a "distanza infinita" da lui; detto altrimenti: il potenziale elettrostatico a distanza infinita è 0.)

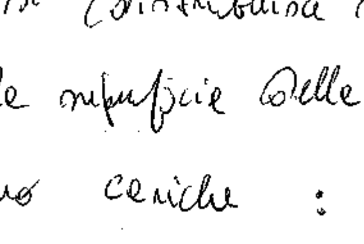
Sebbene il caso di cariche immerse in uno spazio vuoto indefinito sia teoricamente semplice (e per questo interessante), in pratica

è molto più importante il caso di cariche elettriche poste in vicinanza (o addirittura sopra) a conduttori collegati al suolo;
ora, la nostra Terra è un buon conduttore di elettricità e quindi tutti i suoi punti sono allo stesso potenziale elettrostatico.
nel caso di cariche in sua vicinanza, possiamo allora porre tale potenziale della Terra uguale a zero ().



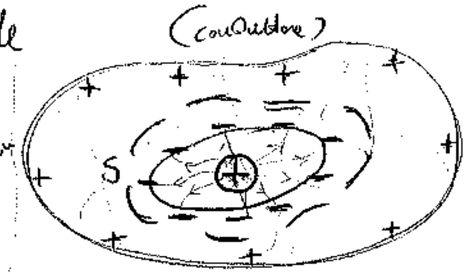
Un conduttore generale avente una cavità, e supponiamo che sia immerso in un campo elettrico E esterno; allora, come capito, le cariche elettriche prodotte del conduttore si distribuiscono sulla sua superficie esterna; in realtà sulla superficie della cavità, diciamo "~~superficie~~ parete interna", non si accumulano cariche: infatti in ogni caso $E=0$ all'interno del conduttore, quindi il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie S totalmente contenuta nel conduttore è nullo, ossia (Gauss) S non contiene cariche elettriche;
prendiamo allora S come in figura:

(che la cavità sia visibile o meno dall'esterno!)



Più "in generale", inoltre, "E" non può a sua volta produrre un campo elettrico entro la cavità del conduttore (sempre per Gauss, ma con una superficie aperta  !), ossia la cavità risulta "schermate" dall'esterno : diciamo che il conduttore carico è uno "schermo elettrostatico" per le cavità contenute.

Ora, mettiamoci nel caso più generale che entro la cavità vi sia un corpo carico, tenuto isolato dalla parte interna del conduttore: sempre per la S di Gauss precedente, su tale parte interna confluisce una carica elettrica totale opposta a quella del corpo, per cui nella superficie esterna del conduttore ovviamente troveremo una carica esattamente uguale a quella del corpo (e il conduttore è comunque con campo elettrico interno 0)



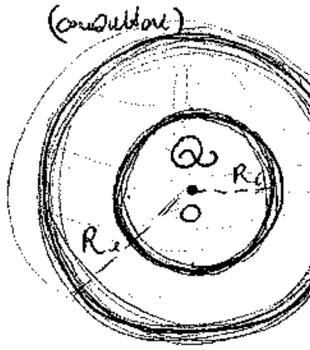
(1) Se "mettiamo a terra" il conduttore, allora le cariche sulla sua superficie esterna si spostano nella terra MA la situazione della parte interna e della cavità è inalterata; inoltre il conduttore che è equipotenziale, ha ora precisamente potenziale 0 (ancora!).

(2) "Viceversa", se spostiamo il corpicino interno fino a metterlo a contatto con la parete interna, allora immediatamente restano solo le cariche sulla superficie esterna (distribuite in modo che il conduttore sia equipotenziale!). Vediamo quindi che le distribuzioni di carica presenti inizialmente sulle facce interna ed esterna del conduttore coincidono rispettivamente con quelle che si hanno nei casi (1) e (2) (che rendono E nullo nel conduttore, separatamente e quindi insieme; tali distribuzioni sono le uniche possibili per avere tale effetto $E_{interno}=0$ ... ecc.).

Pertanto: eventuali spostamenti delle cariche interne alla cavità NON modificano le distribuzioni delle cariche sulla superficie esterna del conduttore; è anche vero che, viceversa, una qualsiasi distribuzione statica di cariche all'esterno del conduttore NON modifica il campo elettrico nella cavità (schermata!)

(Vedi le divertenti esperienze con l'elettroscopio a foglie e il "pozzo di Faraday" !! ☺)

$\boxed{\text{ES.}}$: una carica puntiforme Q si trova nel centro O di un conduttore cavo a forma di corona sferica di raggio interno R_i e raggio esterno R_e; calcoliamo le densità di carica sulla sua parete interna e sulla sua superficie esterna, ma anche l'intensità del campo elettrico e il potenziale elettrostatico in un qualunque punto dello spazio.



! Per induzione elettrostatica, le cariche del conduttore si distribuiscono in modo che sulla parete interna vi sia una carica di $-Q$ e sulla superficie esterna una carica Q; per simmetria, è chiaro che precisamente le densità superficiali di carica sono rispettivamente $\sigma_i = \frac{-Q}{4\pi R_i^2}$ e $\sigma_e = \frac{Q}{4\pi R_e^2}$. Ora, il campo elettrico E generato da Q è in ogni caso nullo all'interno del conduttore, mentre altrove è diretto radialmente (e verso l'esterno $\Leftrightarrow Q > 0$!); data la simmetria del sistema, usiamo Gauss per il calcolo di $|E|$ in un qualsiasi punto P distante r (>0) da O : infatti, chiaramente, la sfera S di centro O e raggio r racchiude comunque una carica totale di Q (se NON è contenuta all'interno del conduttore), quindi

$$\Phi_S(E) \overset{(E \text{ radiale!})}{=} |E| \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \text{cioè} \quad |E| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \checkmark$$

Ma allora tutti e soli i potenziali elettrostatici (di $\vec{E}$) in "r" sono della forma $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{costante}$; ora, il conduttore è equipotenziale, mentre fuori da lui poniamo $0 = V(+\infty) = \text{costante}$, per cui per $r \geq R_e$ è $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (e, in particolare, l'intero conduttore è a potenziale $Q/(4\pi\varepsilon_0 R_e)$); sembra allora da dire che, per $r \leq R_i$, sia

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_e}\right) \quad \text{cosicché} \quad V(R_i) \underset{(\text{che è vero!})}{=} V(R_e);$$

ma infatti, immaginando di spostare una carica da r e R_i in modo radiale, è

$$V(r) - \underbrace{V(R_i)}_{\left(= V(R_e) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_e}\right)} = \int_r^{R_i} |E| \, ds = \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 s}\right]_{s=R_i}^{s=r} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_i},$$

da cui effettivamente l'espressione per $V(r)$. $\circ$

Consideriamo un conduttore isolato nello spazio in "condizioni di equilibrio", nel senso che la carica totale Q posseduta dal corpo sia distribuita sulla sua superficie (esterna) in modo che tutti i suoi punti siano equipotenziali; tale distribuzione superficiale σ di carica dipende (anche) dalla forma geometrica del corpo. Ponendo $V(\infty) = 0$, scelto un qualsiasi punto $\underline{P}_0 := (x_0, y_0, z_0)$ del conduttore, $V(P_0)$ è costante e vale ovviamente

$$V(P_0) = \int_S \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(x,y,z)\, dS}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \; ;$$

osserviamo che raddoppiando $V(P_0)$ raddoppia σ, e quindi Q, mentre viceversa raddoppiando Q raddoppia σ: più in generale, chiaramente, il rapporto

$$\boxed{C := \frac{\overset{\text{(CARICA POSSEDUTA)}}{Q}}{\underset{\text{(POTENZIALE ELETTROSTATICO)}}{V} - V(\infty)}}$$

è una costante caratteristica del conduttore (dipende solo dalla sua forma), detta "capacità" del conduttore.

(Unità di misura: $1F := \frac{1C}{1V}$ ("farad").)

$\boxed{\text{ES.}}$: calcoliamo la capacità di un conduttore sferico (isolato) di raggio R e di carica totale posseduta Q:

Come visto, a distanza $r \geq R$ dal centro della sfera è

$$V("r") = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

, in particolare la sfera è equipotenziale con

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (V(\infty)=0)$$

e quindi $\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$.

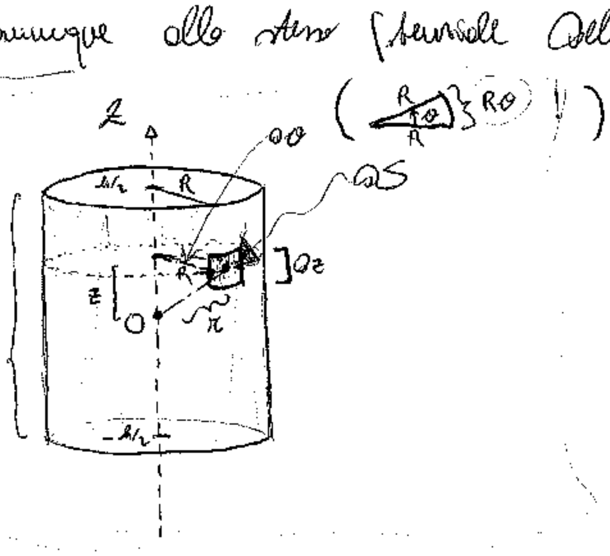
Notiamo che $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2} = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

senza bisogno di conti (ma, in effetti, $\frac{N}{C} = \frac{V}{m} \Leftrightarrow \frac{C}{N} = \frac{m}{V} \Rightarrow$
$\frac{CC}{Nmm} = \frac{C}{Vm} = \frac{F}{m}$!) . ✓)

$\boxed{EX}$: Calcoliamo la capacità di un conduttore cilindrico (cavo o no) avente raggio di base R e altezza $h \gg R$.

Grazie all'ipotesi $h \gg R$, possiamo ammettere (con "buona" approssimazione) che la carica totale Q posseduta dal cilindro si distribuisca uniformemente sulla superficie laterale, e quindi con densità $\sigma := \frac{Q}{2\pi R h}$; se P_0 è un punto del cilindro, allora $V(P_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S\text{ (laterale)}} \frac{\sigma\, dS}{r}$ (distanza da P_0!) $=$ (σ costante su S!)

$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{dS}{r}$; per tale calcolo introduciamo un sistema di coordinate cilindriche con origine $O :=$ il centro del cilindro e l'asse $z :=$ l'asse del cilindro, e prendiamo $P_0 := O$ (è comunque allo stesso potenziale dell'intero cilindro!!) :



$$\begin{cases} dS = (R\,d\theta)\,dz \\ r = \sqrt{R^2 + z^2} \end{cases}$$

e allora

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} \frac{R\, d\theta\, dz}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{\sigma R}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{h/2}\Big[\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}\Big]\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\,dz =$$

(!)

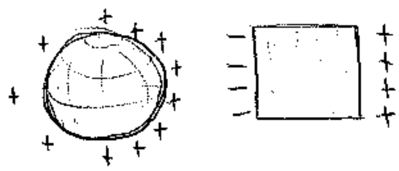
$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}}}_{\left(=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\right)} \Big[\log\big(z+\sqrt{R^2+z^2}\big)\Big]_{z=0}^{z=\frac{h}{2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\log\Big[\frac{1}{R}\Big(\frac{h}{2}+\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4}}\Big)\Big],$$

e in conclusione quindi $C = 2\pi\varepsilon_0 h \Big/ \log\Big[\frac{1}{R}\Big(\frac{h}{2}+\sqrt{R^2+\frac{h^2}{4}}\Big)\Big] =$

$= 2\pi\varepsilon_0 h \Big/ \log\Big(\frac{h}{2R}+\sqrt{1+\frac{h^2}{4R^2}}\Big)$; anzi, presine e

$h \gg R$, è $C \simeq 2\pi\varepsilon_0 h / \log\left(\frac{h}{R}\right)$.

Elementare come aumentare la capacità di un conduttore: metterne vicino un altro! Precisamente consideriamo un sistema costituito da due conduttori, il primo di forma sferica e carica positiva Q, e il secondo completamente neutro. Per induzione elettrostatica, accade questo:



;

è inoltre pressoché immediato capire che il potenziale del conduttore sferico risulta MINORE di quello che esso avrebbe se isolato, CIOÈ risulta maggiore $C = \frac{Q}{V}$ (V è il potenziale rispetto all'infinito della sfera!) ; questo a maggior ragione se il secondo conduttore è caricato negativamente, e in tal caso le linee di forza uscenti dalla sfera terminano su lui, e il loro numero dipende dalla quantità di carica in gioco.

Un dispositivo costituito da due conduttori di cariche di segno opposto è chiamato "condensatore", e tali conduttori sono le sue "armature"; indichiamo la presenza di un condensatore in un circuito col simbolo seguente: "—||—".

Supponiamo che le due armature posseggano cariche uguali in modulo, ~~opposte~~ +Q e −Q, e siano V_+ e V_- i rispettivi potenziali elettrostatici; allora esiste fra esse una d.d.p.

$\Delta V := V_+ - V_-$, e definiamo la "capacità del condensatore" in questione come $$\boxed{C := \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{Q}{\Delta V}},$$

che chiaramente è ancora una costante caratteristica del sistema.

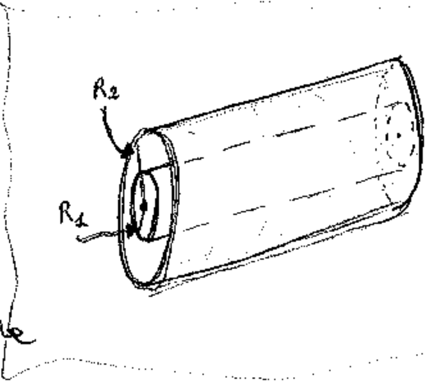
$\boxed{\text{ES.}}$: in un "condensatore piano" le armature sono delle superfici (conduttrici) piane e parallele fra loro, a distanza d (>0), di uguale area S tale che dimensione armature $\gg d$; allora, come già visto, le cariche si distribuiscono uniformemente con densità superficiale $\pm\sigma := \pm\frac{Q}{S}$ a creare un campo elettrico (praticamente nullo all'esterno e) costante e "⊥ armature" all'interno (con verso da + a −!) con intensità $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, per cui $V(z) = V_+ - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \Rightarrow V_- = V_+ - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$, Da cui $\Delta V = V_+ - V_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ (in effetti

$\mathcal{L}_{\underset{\text{"perpendicolare"}}{+\xrightarrow{q}-}} = F \cdot d = (qE)d = q\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d\right)$; ma $\frac{\mathcal{L}}{q} = \Delta V$!) ;

essendo all'inizio $Q = \sigma S$, ricaviamo $\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$.

$\boxed{\text{ES.}}$: in un "condensatore cilindrico" le armature sono due superfici cilindriche coassiali di raggi $R_1 < R_2$ e densità lineari di carica $-\lambda$ e $+\lambda$ rispettivamente ;

ricordando che l'intensità del campo elettrico generato da una distribuzione uniforme di carica di densità lineare λ su una superficie cilindrica di raggio R è $|E|(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ con $r \geq R$ (Gauss),



il potenziale è $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log(r)$ $(V(\infty)=0)$ e in particolare $V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log(R)$; dunque la d.d.p. tra le armature è $\Delta V = V_+ - V_- = V(R_2) - V(R_1) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$\left(= \int_{R_1}^{R_2} dr \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)$ in approssimazione di cilindri "illimitati" ;

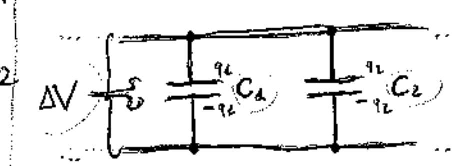
se precisamente il condensatore ha lunghezza $l \gg R_2 - R_1$,

allora ricaviamo $C = \frac{\overset{(=\lambda \cdot l)}{Q}}{\Delta V} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\log(R_2/R_1)}}$.

Per aumentare ulteriormente C possiamo far di meglio.

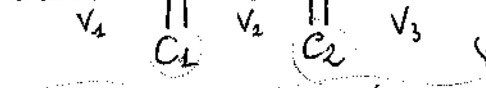
Due condensatori sono "in parallelo" se si trovano alla stessa differenza di potenziale; allora la capacità di un insieme di condensatori (o "batteria") disposti in parallelo è la somma delle capacità di tutti i condensatori componenti: $\boxed{C = C_1 + C_2}$.

Infatti i due condensatori posseggono le cariche $q_1 = \Delta V \cdot C_1$ e $q_2 = \Delta V \cdot C_2$, per cui la carica complessiva posseduta dalle armature positive è



$Q := q_1 + q_2 = \Delta V \, (C_1 + C_2)$.

Due condensatori sono "in serie" se hanno "ordinatamente" la stessa quantità di carica posseduta:



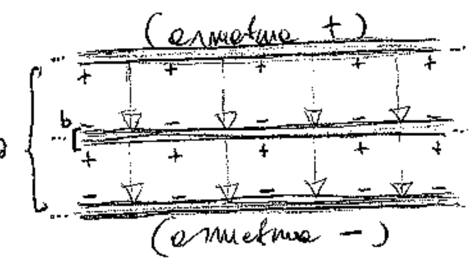
allora il reciproco della capacità del sistema risultante è la somma dei reciproci delle capacità di tutti i condensatori componenti, cioè $\boxed{\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}}$.

Infatti $C_1 = \dfrac{q}{V_1 - V_2}$ e $C_2 = \dfrac{q}{V_2 - V_3}$ $\Rightarrow$ $V_1 - V_3 =$

$= (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) = q\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$. ✓

Osserviamo che, per due condensatori in serie, $C_1 = C_2 \Rightarrow C = \frac{1}{2} C_1$, ma d'altra parte è come quindi aver dimezzato la tensione alle armature!

ES.: tra le armature di un condensatore piano introduciamo centralmente una lastra metallica di spessore $b < d :=$ distanza armature ($\ll$ dimensioni armature (di area S)); calcoliamo la capacità del sistema risultante: anzitutto la situazione è come quella in figura (per induzione elettrostatica (e Gauss));



ora basta osservare che abbiamo due condensatori uguali di capacità $\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{1}{2}(d-b)}$ disposti in serie, per cui la capacità del sistema è $\frac{1}{2}$ di queste, e cioè $\frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$; in realtà ciò resta vero comunque venga inserita la lastra:

$$\left[\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{1}{n}(d-b)}\right]^{-1} + \left[\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{n-1}{n}(d-b)}\right]^{-1} = \Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}}_{1}\Big)\frac{d-b}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-b}{\varepsilon_0 S};$$

in alternativa possiamo osservare che ora $\Delta V \underset{(SE:\partial_+)}{=} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-b) \left(= \underbrace{\boxed{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}}}_{\text{(quella senza la lastra!)}}\left(1 - \frac{b}{d}\right)\right)$ indipendentemente dalla posizione della lastra.

L'<u>energia</u> di un condensatore carico è uguale al lavoro che si può trarre da esso scaricandolo completamente, collegando ad esempio le sue due armature con un filo metallico.

Se la d.d.p. tra le armature è ~~[illegible]~~ $V_+ - V_-$, cambiare ~~[illegible]~~ la carica nell'armatura positiva da q a $q+dq$ <u>equivale</u> a cambiare la carica in quella negativa da $-q$ a $-q-dq$, e ciò è come se avessimo spostato una carica dq dall'armatura negativa e quella positiva, compiendo quindi un lavoro di $dL = -(V_+ - V_-)dq$; ove, in un processo di carica è $dq>0$ e cioè dL è contro le forze del campo fra le armature, per cui ovviamente l'energia acquistata dal condensatore è $dU = |dL| = (V_+ - V_-)dq \overset{(C=\frac{q}{V_+-V_-})}{=} \frac{q}{C}dq$; se quindi infine le armature arrivano a formare cariche di $\pm Q$, allora l'energia immagazzinata complessivamente dal condensatore risulta

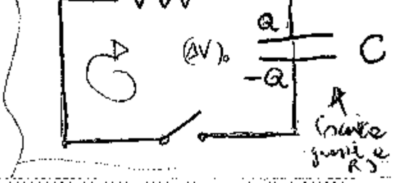
$$U = \int_{(\text{carica})} dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \left[\frac{q^2}{2C}\right]_{q=0}^{q=Q} = \boxed{\frac{1}{2}\,Q^2/C} \overset{(\propto V\text{ è legame lineare!})}{=} \boxed{\frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2}$$

(ed è ormai chiaro che ciò vale per un qualsiasi conduttore isolato, portando le cariche dq dall'"infinito"!).

Possiamo immaginare di aver caricato il condensatore in seguito all'esser collegato ai capi di un generatore di f.e.m. "$=V$", e così vediamo che del lavoro QV svolto dal generatore solo la metà si ritrova in energia immagazzinata del condensatore: la restante metà è dispersa per effetto Joule.

$\boxed{\text{ES.}}$: analizziamo la situazione per un condensatore di capacità $C = 1\ \mu F$ che all'istante $t=0$ viene chiuso su una resistenza $R = 1\ k\Omega$, sapendo che in tale istante $(\Delta V)_0 = 100\ V$.

Fissiamo un verso positivo del circuito; a $t=0$, per Ohm, $i_0 = \frac{(\Delta V)_0}{R} = 0.1\ A$. Ora,



se $q := q(t)$:= la carica all'istante t sulla prima armatura del condensatore che incontriamo percorrendo il circuito nel suo verso positivo (cosicché $q(0) = Q = C(\Delta V)_0$), allora $q(t) = Q + \int_0^t i\, dt$,

(se $Q>0$ allora in effetti $i \leq 0$!)

ossia $i = \frac{dq}{dt}$; inoltre abbiamo il condensatore sì che le cadute di tensione $\Delta V = \frac{q}{C}$, mentre abbiamo la resistenza $\Delta V = R i$, e quindi necessariamente (legge maglie!) $R i + \frac{q}{C} = 0$,

cioè $R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$ (e $q(0) = Q$), cioè

$$q(t) = Q\, e^{-\frac{t}{RC}} = Q\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

con $\tau := RC$ "costante di tempo del circuito" (in effetti ha unità di misura $\Omega F = \frac{V}{A}\frac{C}{V} = s$); ma allora $\underset{(\text{condensatore})}{\Delta V(t)} = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C} e^{-t/\tau} = (\Delta V)_0\, e^{-t/\tau}$ e $\underset{\substack{\text{resistenza}\\(\text{senza il meno})}}{i(t)} = \frac{\Delta V(t)}{R} = \boxed{\frac{(\Delta V)_0}{R} e^{-t/\tau}}$

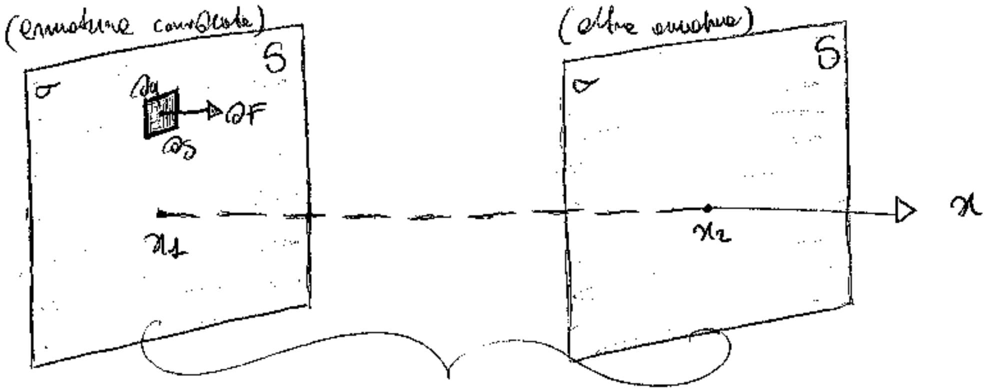
e quindi l'energia dissipata complessivamente dalla resistenza (per effetto Joule) è

$$\int_0^\infty \underbrace{\Delta V\, i}_{(\text{potenza!})}\, dt = \frac{(\Delta V)_0^2}{R} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt}_{\left(\left[\frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau}\right]_{t=\infty}^{t=0} = \frac{\tau}{2}\right)} =$$

$= \frac{1}{2} C (\Delta V)_0^2$ = energia inizialmente immagazzinata dal condensatore. ✓

(Ovviamente potremmo fare conti analoghi per il processo di carica di un condensatore!)

Calcoliamo ora la forza F agente su ciascuna delle armature di un condensatore piano, prima come risultante delle forze coulombiane, e poi con considerazioni energetiche, avendolo in mente così:



$$x_2 - x_1 =: d$$

Intanto chiaramente F è perpendicolare all'armatura considerata ed è diretta verso l'altra armatura; inoltre, se E_1 = il campo elettrico generato dalle sole cariche dell'altra armatura, allora ovviamente dq risente della forza $dF = E_1 dq = E_1 \sigma dS$; ma precisamente $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, quindi $dF = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon_0} dS$ $\Rightarrow$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} S} \qquad \left(\text{cioè } \frac{F}{S} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\right).$$

Altro modo: fingiamo di spostare di un tratto dx l'armatura considerata (mantenendo isolato il condensatore!), cosicché il lavoro compiuto dalle forze interne F agente su tale armatura sia $dL = F dx$; allora ovviamente l'energia del condensatore subirà una variazione $dU = -dL = -F dx$, cioè

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \underset{(Q\ \text{costante!})}{=} -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right)$$

; se il condensatore è

piano, allora $C = \frac{\varepsilon_0 S}{x_2 - x_1}$ e quindi in effetti $F = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{Q^2}_{(=\sigma^2 S^2)} \cdot$

$\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_2 - x_1}{\varepsilon_0 S}\right)}_{\left(=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\cdot(-1)\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 S}{\varepsilon_0}$. ✓

(Notiamo che $-\frac{1}{2} Q^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right)}_{=\left(-\frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}\right)} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$.)

Caso più generale: condensatore qualsiasi e armature collegate ad una batteria; dunque è la d.d.p. tra le armature a restare costante, mentre variano le cariche. Ora, se dU_b è l'energia ceduta dalla batteria, allora essendo $dU = dU_b - d\mathcal{L} =$
$= dU_b - F\,dx$; usando che la batteria sposta la carica dQ per mantenere costante la tensione V, è $dU_b = V\,dQ =$
$= V\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx \overset{(Q=CV \text{ e } V \text{ è cost.!})}{=} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} dx$. Ma analogamente
$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx \overset{(U=\frac{1}{2}CV^2)}{=} \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x}dx$, cioè $dU_b = 2dU$ e
allora $F = \left(\frac{\partial U_b}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial x} \overset{(V=\frac{Q}{C})}{=}$
$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\frac{\partial C}{\partial x}}$, che è la stessa di prima! 6

Se conosciamo la distribuzione di tutte le cariche elettriche in una certa regione di spazio, allora potremmo calcolare il potenziale elettrostatico V in ogni punto della regione (mediante un integrale triplo) e quindi il campo elettrico E in ogni punto ($E = -\nabla V$); è però evidente che tale distribuzione ρ di cariche non sarà in generale nota a priori, specie se nella regione di spazio sono presenti pure dei corpi conduttori. Il problema generale dell'elettrostatica consiste nel determinare il campo elettrico in tutto lo spazio quando per alcuni conduttori presenti sono fissati i rispettivi potenziali, per gli altri conduttori sono assegnate le cariche totali possedute, mentre nel resto dello spazio è nota la distribuzione delle cariche. Si potrebbe dimostrare che tale problema ha una e una sola soluzione (e ciò resta vero anche nel caso che il sistema considerato sia contenuto in una superficie chiusa con potenziale all'interno assegnato); per l'unicità del potenziale V va aggiunta (in generale) la condizione che, per $r \to +\infty$, $V(r) \to 0$ almeno come r^{-1} (cioè $V(r) = O_{r\to+\infty}(\frac{1}{r})$), anche perché in ogni caso è necessario imporre una condizione all'infinito.

Discutiamo più in dettaglio tre situazioni particolari.

$\boxed{\text{I}}$ ("Problema di Dirichlet") Le cariche sono distribuite solo su dei conduttori, di geometria nota, dei quali sono conosciuti solo i rispettivi potenziali. Se tali conduttori sono N (≥ 1) e di superficie S_i e potenziali V_i ordinatamente ($i \in \{1, \dots, N\}$), allora appunto S_i e V_i sono noti; essendo qui le cariche solo sulle S_i, nello spazio vuoto esterno ai conduttori il potenziale risultante V soddisfa l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$, alla quale appunto aggiungiamo le "<u>condizioni al contorno</u>" di V

sulle S_i e all'infinito, cosicché $\exists!\ V$; e questo punto abbiamo E fino e punti arbitrariamente vicini alle S_i e così usiamo infine il teorema di Coulomb per ottenere le densità superficiali di carica $\sigma_i(P_i) = \varepsilon_0 |E(P_i)|$ (P_i punto arbitrario di S_i) e dunque le cariche complessive Q_i

$\boxed{II}$ Le cariche sono distribuite solo su dei conduttori, di geometria nota, dei quali sono conosciute le cariche complessive Q_i ; si potrebbe dimostrare (facilmente) che i potenziali V_i dei conduttori dipendono linearmente da tali cariche, cioè che $V_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$, dove i p_{ij} dipendono dalla forma e dalla disposizione relativa dei conduttori ("coefficienti di potenziale") ; essendo questo noto, allora abbiamo anche i V_i e ci riduciamo al caso precedente.

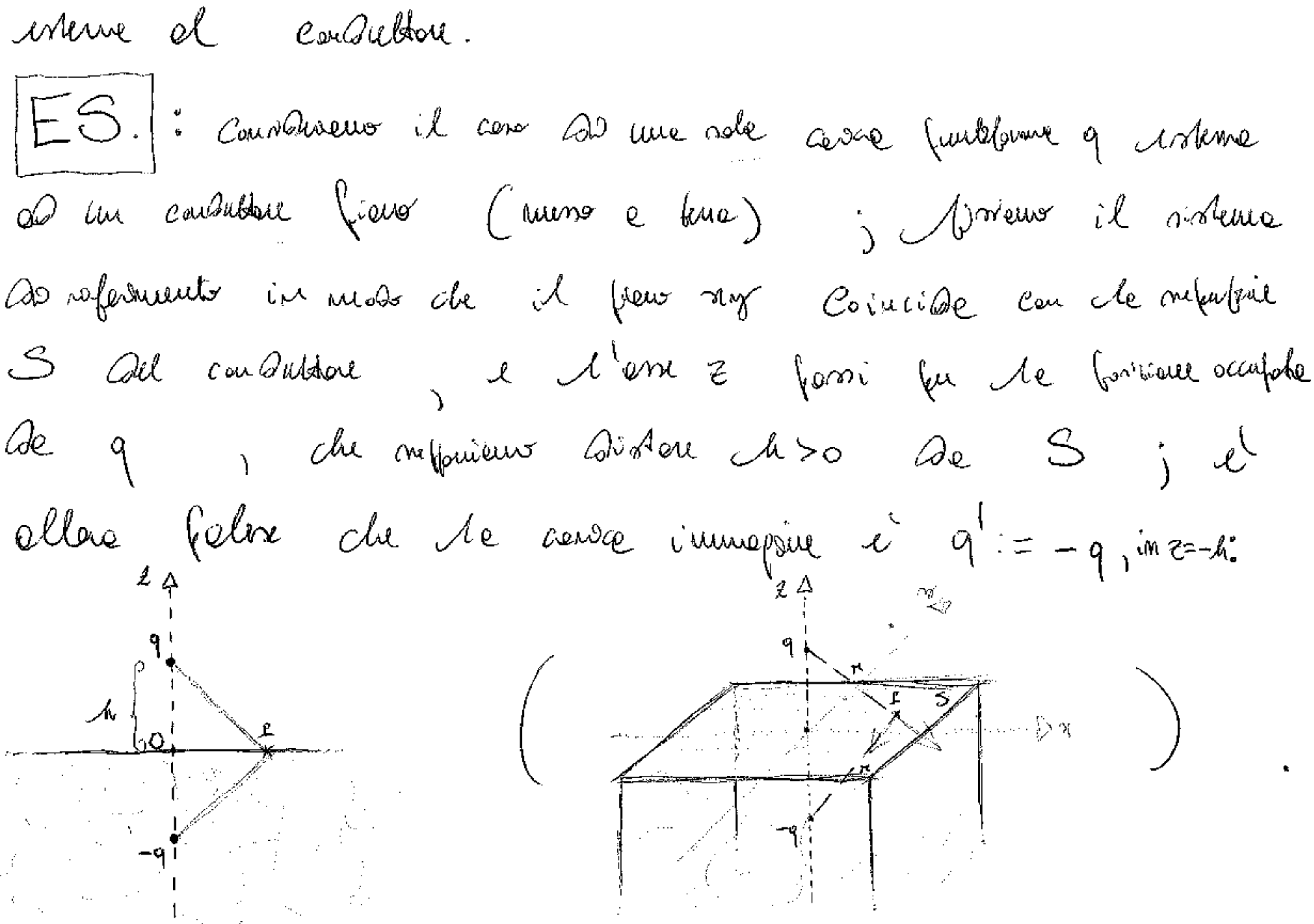
$\boxed{III}$ Si hanno cariche distribuite in regioni qualsiasi dello spazio e anche su dei conduttori, di geometria nota, dei quali sono conosciute le cariche complessive Q_i ; è dunque V tale che $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ di Poisson, ma i V_i al contorno non sono noti; tuttavia, per sovrapposizione, tali potenziali sono della forma $V_i = \varphi_i(\rho') + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} Q_j$, dove i p_{ij} sono quelli del caso precedente, ρ' è la densità di carica fuori dai conduttori e i potenziali addizionali $\varphi_i(\rho')$ avremo determinati ; ma ciò è facile perché, scelti per loro dei "valori di prova", otteniamo: V_i e quindi, come nel caso (I), le cariche complessive sui conduttori che dovranno coincidere con le Q_i assegnate.

Esistono diverse tecniche specifiche per determinare la soluzione del problema generale dell'elettrostatica (ristretto ad un certo sistema fisico).

Metodo delle cariche immagini (per conduttori di forma geometrica "semplice", essenzialmente o piano o sfera). Supponiamo che il sistema da studiare sia costituito da un solo conduttore messo a terra (cosicché abbia potenziale V nullo) e da una sola carica puntiforme q esterna ad esso; tale carica fornisce un contributo $\neq 0$ a V nei vari punti del conduttore, quindi sulla sua superficie S viene a crearsi una distribuzione di carica σ tale da renderla equipotenziale: il problema è il calcolo di tale distribuzione σ. Ecco ora l'idea: individuiamo una o più "cariche fittizie" q', interne allo spazio occupato dal conduttore, con posizioni tali che, in assenza del conduttore, il contributo da esse portato al potenziale su S sia opposto a quello della carica esterna q. Infatti così le cariche q e q' generano nello spazio esterno al conduttore la stessa configurazione di potenziale V prodotta da q e da σ (ovvio: fuori dal conduttore c'è comunque solo q, dunque V risolve Poisson; inoltre le condizioni al bordo per V, cioè su S, coincidono e $V|_S=0$ in entrambi i casi; basta ora ricordare che eq. Poisson + cond. al bordo ammette una e

una sola soluzione!) , e come visto avere V è avere tutto.
Più in generale, per un insieme finito di cariche esterne q_i al conduttore, introduciamo per ciascuna le cariche immagine q_i' corrispondenti e prendiamo quindi il potenziale generato dalle q_i e dalle q_i'. È immediata l'estensione al caso di una distribuzione continua di cariche esterne al conduttore.

$\boxed{\text{ES.}}$: Consideriamo il caso di una sola carica puntiforme q esterna ad un conduttore piano (pieno e piano) ; fissiamo il sistema di riferimento in modo che il piano xy coincida con la superficie S del conduttore, e l'asse z passi per la posizione occupata da q, che supponiamo distare $h>0$ da S ; è allora facile che la carica immagine è $q' := -q$, in $z=-h$:



Ora, trattandosi di un dipolo elettrico, è chiaro di avere direttamente che su S c'è campo elettrico $E_{(x,y,0)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qh}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}\hat{k}$

($(x,y,0)-(0,0,h) = (x,y,-h)$, mentre $(0,0,-h)-(x,y,0) = (-x,-y,-h)$!)

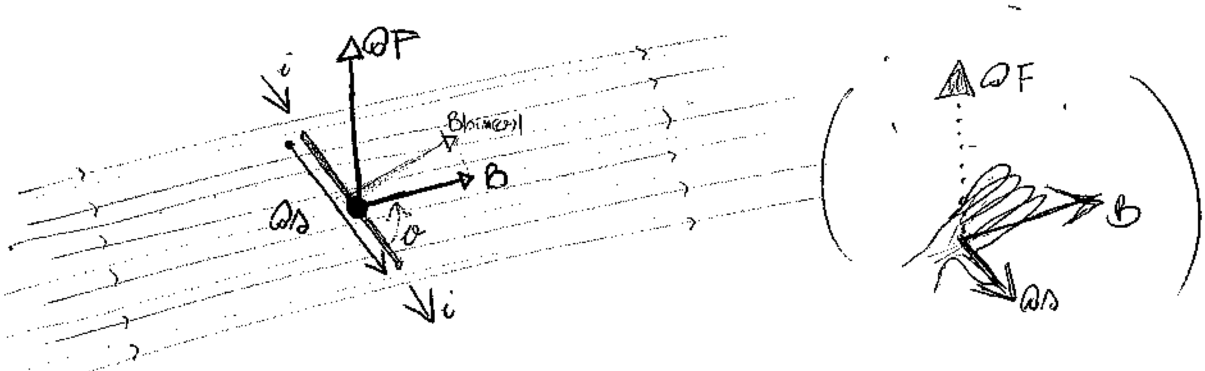
dunque per Coulomb $\sigma = \varepsilon_0|E| = \frac{1}{2\pi}\frac{qh}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}$ (che infatti ha $\int_S \sigma = -q$ ...) ; notiamo poi che $F_{(0,-q)\text{ su } q} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2h)^2}\hat{k} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{k}$.

Consideriamo una regione di spazio sede di un campo magnetico e un tratto di filo metallico di lunghezza infinitesima $d|s|$, dove passa una corrente elettrica d'intensità i (orientando s nel verso concorde alla corrente); ponendo tale tratto di filo in un punto dello spazio tale che tra s e le linee di forza del campo in quel punto ci sia un angolo di θ, si osserva sperimentalmente che la forza dF agente sul tratto di filo ha modulo proporzionale a $d|s|$, a i e a $\sin(\theta)$:

$d|F| = |B||\sin(\theta)|\, i\, d|s|$; il fattore di proporzionalità $|B|$ è caratteristico del campo magnetico nel punto considerato. Chiamiamo "INDUZIONE MAGNETICA" (o "campo magnetico") in un punto il vettore B avente direzione e verso coincidenti con quelli delle linee di forza per quel punto, e avente modulo uguale a $|B|$ precedente.

Si verifica sperimentalmente che più precisamente è dunque

$$\boxed{dF = i\, ds \times B}$$ ("seconda legge elementare di Laplace")



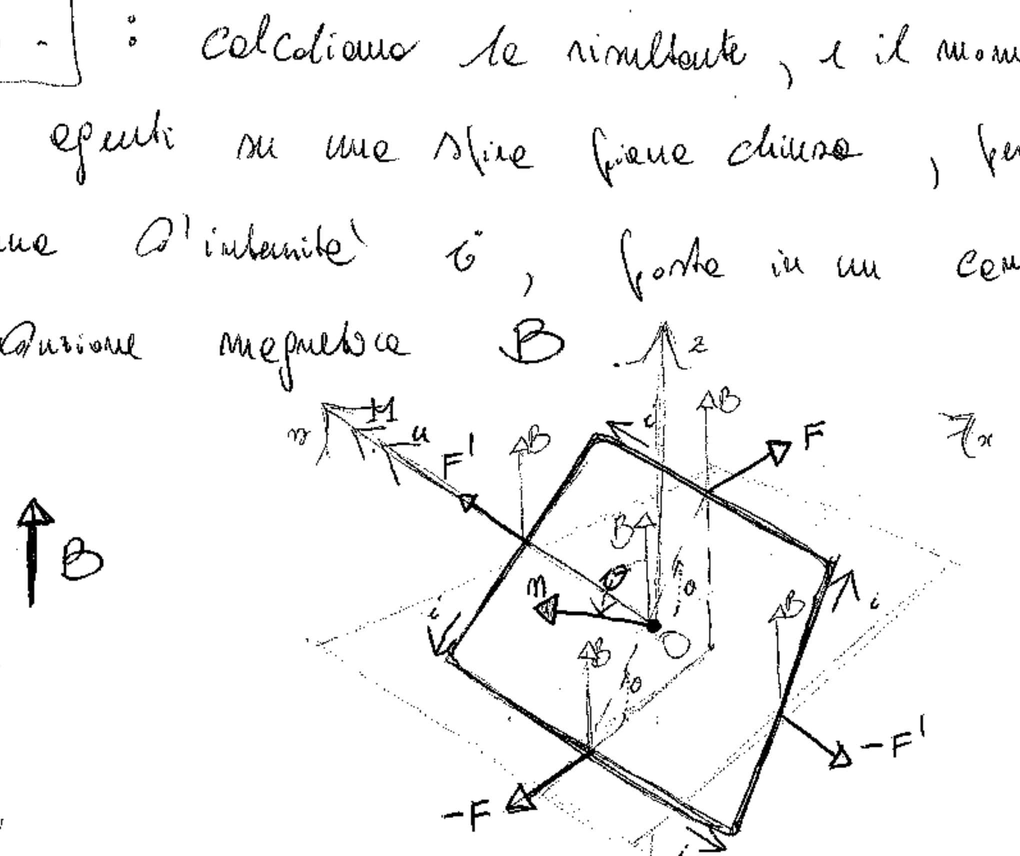
(In particolare le forze del campo sono nulle su un tratto di filo parallelo alle linee di forza del campo stesso.)

Nel caso generale di un filo di lunghezza finita $|s|$, B varierà da punto a punto del filo, ma comunque la forza risultante agente sul filo è la somma delle forze agenti sulle varie parti infinitesime in cui esso può pensarsi suddiviso, cioè

$$\boxed{F = i \int_{\text{"filo"}} ds \times B}\ .$$

L'unità di misura di B è il "TESLA" $T := \frac{N}{A\,m}$ (o il "GAUSS" $1\,G := 10^{-4}\,T$), mentre l'unità di misura per il flusso di B attraverso una superficie S, $\Phi_S(B) = \int_S B \cdot n\, dS$, è il "WEBER" $Wb := T\,m^2$, $\left(= \frac{N m}{A} = \frac{J}{A} \overset{(J=VC)}{=} \right.$
$= \frac{VC}{A} \overset{(A=C/s)}{=} V s$. (quindi $T = \frac{Wb}{m^2}$)

$\boxed{ES.}$: Calcoliamo la risultante, e il momento risultante, delle forze agenti su una spira piana chiusa, percorsa da corrente continua d'intensità i, posta in un campo magnetico uniforme d'induzione magnetica B.



(n è il versore normale alla spira!) (di area S)

Il sistema di forze ha risultante F nulla : infatti, se γ è la spira chiusa, $F = i\left(\oint_\gamma ds \times B\right) \overset{\substack{(B \text{ è costante e "}\times\text{"} \\ \text{è distributivo)}}}{=}$

$= i\,\underbrace{\left(\oint_\gamma ds\right)}_{(=0 \text{ pilotamente})} \times B = 0$. Quindi il momento risultante

del sistema è indipendente dal punto ("polo") rispetto al quale eseguiamo il calcolo ; poniamo allora il polo nell'origine O, e sia r il vettore distanza da O al generico elemento infinitesimo ds della spira : quindi il momento delle forze agente su esso è $dM := r \times dF \overset{(\text{Laplace})}{=} i\, r \times (ds \times B) \overset{(a\times(b\times c) = (a\cdot c)b - (a\cdot b)c)}{=} i\,(r\cdot B)\,ds -$
$- i\,(r\cdot ds)\,B$, e il momento risultante è per ciò

$$M = i\oint_\gamma (r\cdot B)\,ds - i\,B\oint_\gamma r\cdot ds \quad , = i\oint_\gamma (r\cdot B)\,ds$$

perché l'altro integrale è nullo (infatti $ds \overset{(\dots)}{=} dr \Rightarrow$
$\oint_\gamma r\cdot ds = \oint_\gamma r\cdot dr = 0$ perché $r\cdot dr = \frac{1}{2}d(|r|^2)$!) ;

consideriamo ad esempio $M_1 = i\oint_\gamma (r\cdot B)\,I\cdot ds \quad \left(I = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$

$\overset{(\text{Stokes})}{=} i\int_S \mathrm{rot}\left[(r\cdot B)I\right]\cdot n\, dS$; ma, in generale, per φ scalare e F vettoriale è $\mathrm{rot}(\varphi F) = \varphi\,\mathrm{rot}(F) + (\nabla\varphi)\times F$,

ed essendo d'altra parte $\mathrm{rot}(I) = 0$ e $\nabla(r\cdot B) \overset{(B \text{ costante})}{=} B$, si ha

$(a\cdot(b\times c) = c\cdot(a\times b) = b\cdot(c\times a))$

$$M_1 = i \int_S (B\times I)\cdot n \, dS = i \int_S (n\times B)\cdot I \, dS =$$ (tutto costante)

$= i S (n\times B)\cdot I$; chiaramente, per simmetria, è

quindi $\boxed{M = i S\, n\times B =: \mu \times B}$, dove

il vettore $\mu := i S n$ è chiamato "momento magnetico della spira" ($|\mu| = iS$, è perpendicolare alla spira e che verso dato dalla regola della vite rispetto al verso "di i"). Scrivendo

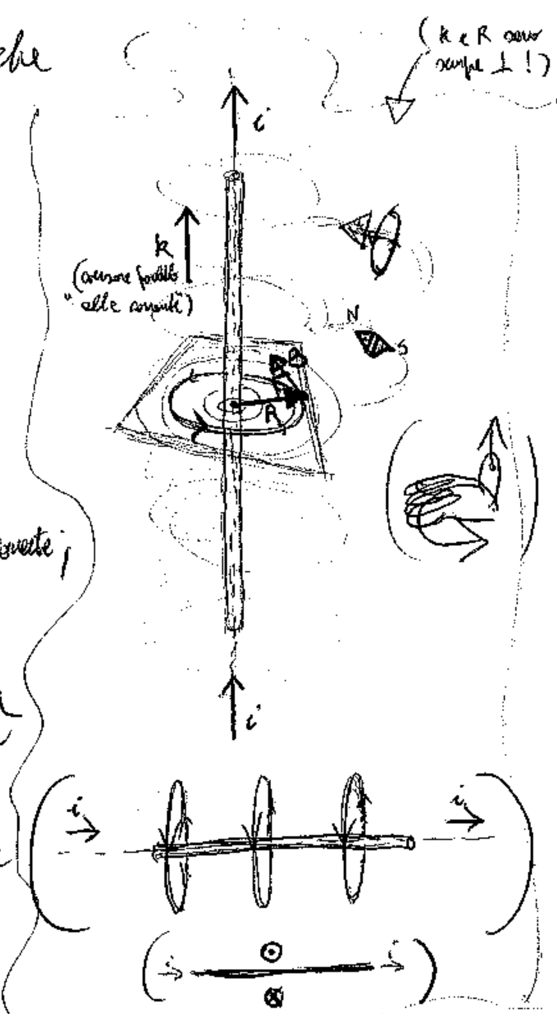
$M = |\mu||B|\sin(\alpha)\cdot u$ (versore in figura), se la spira ruota attorno a u di un angolo $d\alpha$ sotto l'azione della forze magnetiche, queste allora compiono lavoro $dL = M\cdot u\, d\alpha = |\mu||B|\sin(\alpha)d\alpha =$

$= -d(|\mu||B|\cos(\alpha))$; CIOÈ la quantità (in α)

$\boxed{U := -|\mu||B|\cos(\alpha) = -\mu\cdot B}$ rappresenta l'energia potenziale della spira piana ferma nel campo d'induzione B costante. Possiamo concludere dicendo che una spira μ in un campo magnetico "si comporta come" un dipolo elettrico p in un campo elettrico. □

Dunque le forze di un campo magnetico agiscono certamente su cariche elettriche in movimento; l'esperienza mostra che d'altra parte una corrente elettrica genera un campo magnetico, e ciò secondo "il principio di sovrapposizione dei campi magnetici": l'induzione magnetica risultante da più correnti è la somma delle induzioni magnetiche che le singole correnti genererebbero separatamente.

Consideriamo un filo rettilineo posto nel vuoto percorso da una corrente costante d'intensità i e di lunghezza "infinita" (cioè >> della distanza del filo dal punto in cui misuriamo il campo magnetico): si verifica che



(a) le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze giacenti in piani perpendicolari al filo con centro coincidente "col filo";

(b) il verso positivo di tali linee è dato dalla regola della vite rispetto al verso della corrente;

(c) l'induzione magnetica B, in un punto distante $|R|$ (>0) dal filo, ha intensità proporzionale a $\frac{i}{|R|}$. Quindi vale la

LEGGE DI BIOT E SAVART:

$$\boxed{|B| = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi}}_{\text{(le costante di proporzionalità!)}} \frac{i}{|R|}}$$

, dove $\frac{\mu_0}{2\pi} := 2 \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{Am}$;

$\left(\frac{Wb}{m} = \frac{N}{A}\right) \longrightarrow \left(= N/A^2\right)$

μ_0 è "LA PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO". Riuniamo il tutto nell'unica formula vettoriale

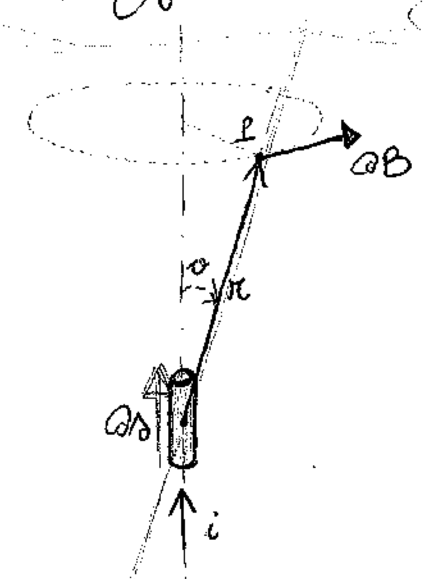
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{k \times R}{|R|^2}}.$$

Il principio generale che permette di calcolare B per un'arbitraria distribuzione di corrente è conseguenza della

"prima legge elementare di Laplace": il contributo dB portato all'induzione magnetica in un punto P dello spazio da un tratto infinitesimo ds di filo, percorso da corrente d'intensità i, ha direzione perpendicolare sia a ds sia alla retta congiungente il tratto di filo col punto P, verso fissato dalle regole delle dita e modulo proporzionale (mediante $\mu_0/4\pi$) a $i \sin(\theta) d|s|$, dove θ è l'angolo tra ds e la retta sopra citata, ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza $|r|$ del punto P dal tratto di filo.

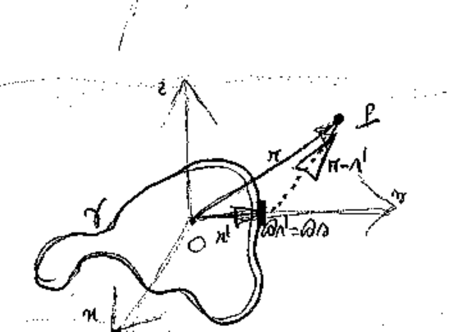
Brevemente:

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds \times r}{|r|^3}}.$$



Nel caso generale di un arbitrario circuito γ percorso da corrente d'intensità i è, per il principio di sovrapposizione dei campi magnetici,

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_\gamma \frac{dr' \times (r - r')}{|r - r'|^3}}.$$



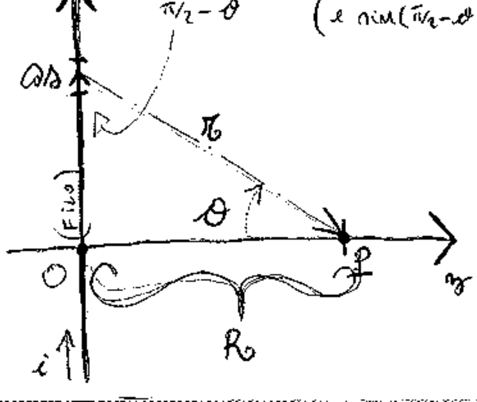
Nel caso ancor più generale di conduttori con sezioni trasversali NON trascurabili, ovvero di un movimento di cariche che è rappresentato dal vettore densità di corrente j (indipendente dal tempo), la prima legge di Laplace diventa

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\substack{\mathbb{R}^3 \\ (j \neq 0)}} \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} \, d^3 r'} \, .$$

In effetti, se il conduttore considerato ha sezioni trasversali di dimensioni piccole rispetto ai valori $|r|$ considerati, allora tale formula si riduce a quella precedente: infatti j sarebbe approssimativamente costante (parallelo) nel (al) filo, e $\neq 0$ solo in questo, e allora se S è la sezione normale del filo e $d|s|$ la lunghezza di un suo tratto infinitesimo abbiamo $dV = S\,d|s| \Rightarrow |j|dV = |j|S\,d|s| = i\,d|s|$, e così $j\,dV = i\,ds$ (perché j è pure parallelo a ds); l'ultima osservazione è che appunto $j \neq 0$ solo nel filo, dunque l'integrale è nel filo γ. □

$\boxed{\mathrm{I}}$ Otteniamo "Biot e Savart" previa a Laplace: considerando il filo rettilineo infinito nel sistema di riferimento in figura

(sia al solito k il versore dell'asse z, che entra pure nel foglio)



(l'asse z "entra nel foglio"! ⊙)

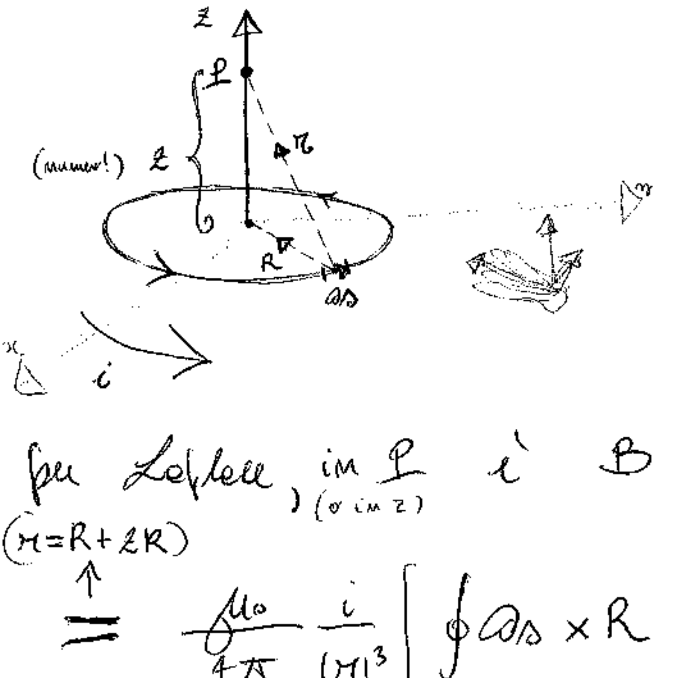
in P dove $B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{ds \times r}{|r|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \, k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\theta)}{|r|^2} dx$;

ma $x = R\tan(\theta) \Rightarrow dx = R\frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta$ $\left(= R\sec^2(\theta)\, d\theta,\right.$ usando $\left.\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}\right)$, e d'altra parte $R = |r|\cos(\theta)$ (cioè $|r| = R\sec(\theta)$), per cui $dx\frac{\cos(\theta)}{|r|^2} = R\,\underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos^2(\theta)}\,\frac{\cos(\theta)}{|r|^2}}}_{(=R^2)} d\theta =$

$= \frac{\cos(\theta)}{R} d\theta$, e in conclusione in P otteniamo

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} i k \int_{\underset{(\text{ovvio})}{-\pi/2}}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{R} d\theta \overset{\left([\sin(\theta)]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = 2\right)}{=} \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{k}{R} .$$ ✓

$\boxed{\text{II}}$ Consideriamo una spira circolare (piana) di raggio $|R|$ (>0), percorsa da una corrente d'intensità i, come in figura



(e sia $k = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\uparrow$ k) ;

per Laplace, in P (o in z) è $B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{ds \times r}{|r|^3} \overset{(|r| \text{ è cost.!})}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{|r|^3} \oint ds \times r$

$(r = R + zk)$
$$\overset{\uparrow}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|r|^3}\left[\oint ds \times R + z \underbrace{\oint ds \times \underset{(\text{cost.!})}{k}}_{\left(= \underset{(=0!)}{\left(\oint ds\right)} \times k = 0\right)}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|r|^3}\oint ds \times R ;$$

ma $ds \times R = |R||ds|\, k$, e inoltre $|r| = (|R|^2 + z^2)^{1/2}$, quindi

in P è $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|r|^3}|R|\, k \underbrace{\int |ds|}_{(2\pi|R|)} = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{|R|^2}{|r|^3} k =$

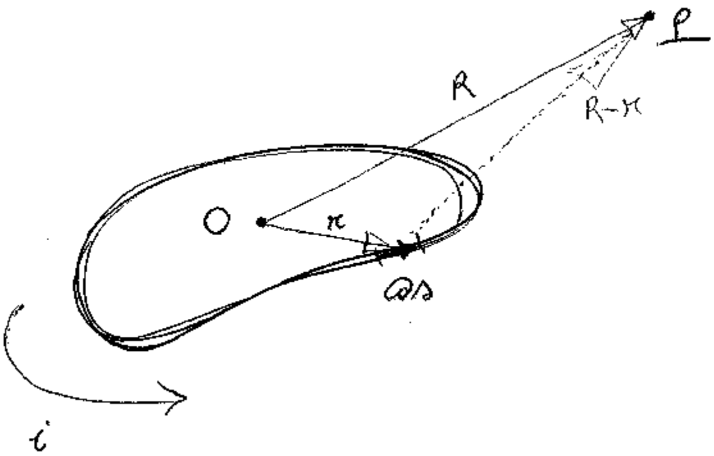
$$= \frac{\mu_0 i}{2} \frac{|R|^2}{(|R|^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$; quindi, finalmente, nel caso

$z >> R$ (cioè spira "piccola") abbiamo $B \approx \frac{\mu_0 i}{2} \frac{|R|^2}{z^3} \mathbf{k} =$

$= \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}}$, dove ovviamente $\mu := i S \mathbf{k} = i(\pi |R|^2)\mathbf{k}$ è il momento magnetico della spira

---

$\boxed{\text{III}}$ Consideriamo una spira piana arbitraria, percorsa da una corrente d'intensità i, i cui dettagli sono come in figura



; supponiamo $|R| >>$ delle dimensioni della spira, cioè $|R| >> |r|$ per ogni r distanza da O al generico elemento ds della spira stessa (cioè tale cosa con $\frac{|r|}{|R|} << 1$) ; per Laplace, in P è $B = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{ds \times (R - r)}{|R-r|^3}$;

essendo $|R - r|^{-3} = \underbrace{(|R|^2 + |r|^2 - 2R\cdot r)}_{= |R|^2 \left(1 - \frac{2R\cdot r}{|R|^2} + \frac{|r|^2}{|R|^2}\right)}^{-3/2} = \left(1 - \frac{2R\cdot r - |r|^2}{|R|^2}\right)^{-3/2} |R|^{-3}$,

ed essendo $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ che $(1+x)^\alpha \overset{(|x|<1)}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \underbrace{o(x^2)}_{(x\to 0)}$

$\Rightarrow (1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3x}{2} + \underbrace{\frac{15x^2}{8} + o(x^2)}_{o(x^2)}$, abbiamo che

$$\left(1 - \frac{2R\cdot r - |r|^2}{|R|^2}\right)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}\left(\frac{2R\cdot r - |r|^2}{|R|^2}\right) + o\left(\left(\frac{|r|}{|R|}\right)^2\right) =$$

$= 1 + \frac{3R\cdot r}{|R|^2} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{|r|}{|R|}\right)^2\right)$; quindi a meno di un errore dell'ordine di $\left(\frac{|r|}{|R|}\right)^2$ abbiamo che in P è

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\oint \underbrace{ds\times(R-r)}_{(=(ds\times R)-(ds\times r))}\Big(1-\underbrace{\frac{2R\cdot r-|r|^2}{|R|^2}}_{\left(\approx\left(1+\frac{3R\cdot r}{|R|^2}\right)\right)}\Big)^{-3/2} \overset{\sim}{=}$$

$$\overset{\sim}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\Big(\underbrace{\oint ds\times R}_{=(\underbrace{\oint ds}_{(=0)})\times R=0} + \oint ds\times R\,\frac{3R\cdot r}{|R|^2} - \oint ds\times r - \underbrace{\oint ds\times r\,\frac{3R\cdot r}{|R|^2}}_{\text{"}|r|^2\text{"}}\Big)$$

trascurabile rispetto agli integrali restanti!)

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\oint ds\times\left(R\,\frac{3R\cdot r}{|R|^2} - r\right)$$; se $I := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, allora

in particolare $B_1 \overset{(\text{limite.})}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\oint I\cdot\left(ds\times\left(R\frac{3R\cdot r}{|R|^2}-r\right)\right) \overset{(\text{"circolarità"})}{=}$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\oint ds\cdot\left(\frac{3R\cdot r}{|R|^2}\,R\times I - r\times I\right) \overset{(\text{STOKES})}{=}$$

(campo vettoriale! Ma $\mathrm{rot}(\varphi F) = \varphi\,\mathrm{rot}\,F + \nabla\varphi\times F$, e $\mathrm{rot}(R\times I) \overset{(\text{cost.})}{=} 0$)

$r\times I = \begin{vmatrix} i & j & k\\ r_1 & r_2 & r_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ r_3\\ -r_2\end{bmatrix} \Rightarrow$ $\mathrm{rot}(r\times I) = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3\\ 0 & r_3 & -r_2\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix} = -2I$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\int_{\substack{S\\(\text{sulla spira})}} dS\, n\cdot\Big(\frac{3}{|R|^2}\underbrace{\nabla(R\cdot r)}_{(=R\,!)}\times(R\times I) - \underbrace{\mathrm{rot}(r\times I)}_{(=-2I\,!!)}\Big) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{|R|^3}\int_S dS\, n\cdot\left(\frac{3R\times(R\times I)}{|R|^2} + 2I\right)$$; ma, al solito,

$R\times(R\times I) = (R\cdot I)R - |R|^2 I$, $\Rightarrow n\cdot\left(3\frac{R\times(R\times I)}{|R|^2} + 2I\right) =$

$= 3\,\frac{(n\cdot R)(R\cdot I) - |R|^2(n\cdot I)}{|R|^2} + 2\,n\cdot I = \left(\frac{3(n\cdot R)R}{|R|^2} - n\right)\cdot I$, che inoltre è costante rispetto alla variabile d'integrazione, per cui $B_1 \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iS}{|R|^3}\left[\frac{3(n\cdot R)R}{|R|^2} - n\right]\cdot I$, e per simmetria

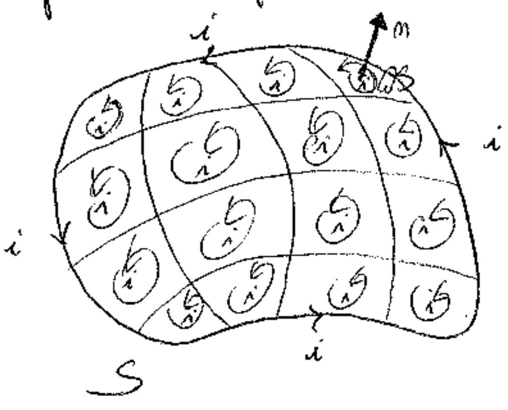
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iS}{|R|^3}\left[\frac{3(n\cdot R)R}{|R|^2} - n\right]} \overset{(\mu := iSn)}{=}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\mu\cdot R)R}{|R|^5} - \frac{\mu}{|R|^3}\right]$$

, che chiamiamo "campo magnetico in approssimazione di dipolo" $(|M| \ll |R|\,!)$ per la somiglianza delle sue espressioni rispetto a quella del campo elettrico E generato da un dipolo (elettrico) p a grande distanza |R| da esso

$$\left(E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(p\cdot R)R}{|R|^5} - \frac{p}{|R|^3}\right] \right).$$ ✓

Vogliamo risolvere il caso di una spira qualsiasi (non necess. piana): consideriamo infatti una superficie S con bordo tale spira, dividiamo S in "tanti" elementi infinitesimi di superficie piana dS (di normale n); è chiaro che possiamo immaginare i contorni di tali elementi dS come attraversati da correnti tutte d'intensità i uguale a quella della spira iniziale, quindi come spire piane:



; osserviamo che ora qualunque punto P dello spazio può considerarsi in ogni caso "molto" distante da un elemento dS (nel senso specificato prima!), è in P $\quad B = \int_S dB \overset{(d\mu = i\,dS\,n)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left[\frac{3(d\mu \cdot r)r}{|r|^5} - \frac{d\mu}{|r|^3}\right] =$

$$\boxed{= \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_S dS \left[\frac{3(n \cdot r)r}{|r|^5} - \frac{n}{|r|^3}\right]} .$$

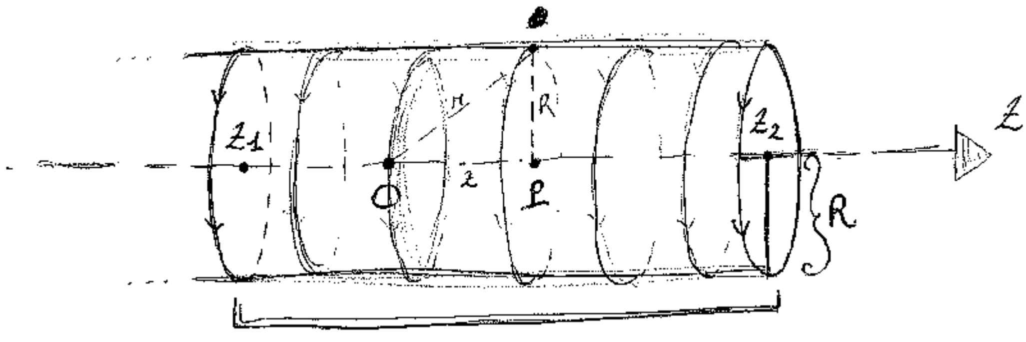
✓

(Notiamo che riotteniamo [II] : $B \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overset{(iSk)}{\mu}\cdot r)r}{\underset{(\cong z^5)}{|r|^5}} - \frac{\mu}{\underset{(\cong z^3)}{|r|^3}}\right] \overset{(r \simeq kz)}{\cong}$

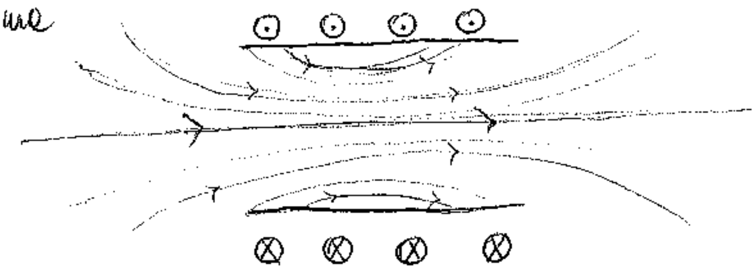
$\cong \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overset{\mu}{iS}z)z R}{z^5} - \frac{\mu}{z^3}\right] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3}$. ✓)

$\boxed{IV}$ "Solenoide cilindrico", cioè filo avvolto uniformemente

su una superficie cilindrica (non necessariamente circolare) in cui scorre una corrente d'intensità i ; le spire del solenoide siano talmente vicine tra loro che si possa considerare ciascuna di esse come piana, cioè immaginiamo l'avvolgimento come in realtà un insieme di spire piane, indipendenti l'una dall'altra ma vicinissime e tutte percorse da una corrente d'intensità i .



Se l è la lunghezza del solenoide e N è il numero totale delle spire, allora $n := \frac{N}{l}$ è il numero di spire per unità di lunghezza; supponiamo inoltre che l'asse del solenoide sia perpendicolare a tutte le spire, ciascuna di raggio R. Si può verificare che le linee di forza del campo magnetico generato dal solenoide hanno andamento come quello in figura



;

calcoliamo ora l'induzione magnetica B nei punti dell'asse del solenoide cilindrico: un tratto di solenoide di lunghezza dz contiene $n\,dz$ spire che insieme equivalgono ad una sola ma percorsa da una corrente d'intensità $i\,n\,dz$, la quale dunque contribuisce all'induzione magnetica con $d|B| \overset{(\text{visto!})}{=} \frac{\mu_0 i n\,dz}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$; allora $|B| = \frac{1}{2}\mu_0 i n R^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$; ma $\int \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz =$

$= \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$, quindi $|B| = \frac{1}{2}\mu_0 i n \left[\frac{z_2}{(R^2+z_2^2)^{1/2}} - \frac{z_1}{(R^2+z_1^2)^{1/2}}\right]$

(notiamo che O interno $\Leftrightarrow$ z_1 e z_2 di segni opposti!); la cosa interessante è che, se $l \gg R$, il campo magnetico è praticamente uniforme all'interno e praticamente nullo all'esterno, ad eccezione di una piccola regione in vicinanza dei suoi estremi; in tal caso inoltre, essendo $|z_1|$ e $|z_2| \gg R$, con buona approssimazione è

$$\boxed{B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{l} i}$$ sui punti dell'asse del solenoide (interno), e anzi all'interno in generale fuori che vicino agli estremi. ✓

Tutti i fatti sperimentali noti sono in accordo con l'affermazione che le linee di forza del campo magnetico B sono o linee chiuse di lunghezza finita o linee a spirale di lunghezza infinita, CIOÈ il campo magnetico NON possiede sorgenti né pozzi (cioè sorgenti né positive né negative); ma allora, per ogni superficie chiusa S, tante linee ad essa vi entrano quante se ne escono (altrimenti in S ci sarebbe una sorgente!), cioè

$$\Phi_S(B) = \int_S B \cdot n \, dS = 0$$; ma allora per Gauss, se V è il volume in S, $\int_V \operatorname{div} B \, dV = \Phi_S(B) = 0$, e per l'arbitrarietà di V è quindi $\boxed{\operatorname{div} B = \nabla \cdot B = 0}$

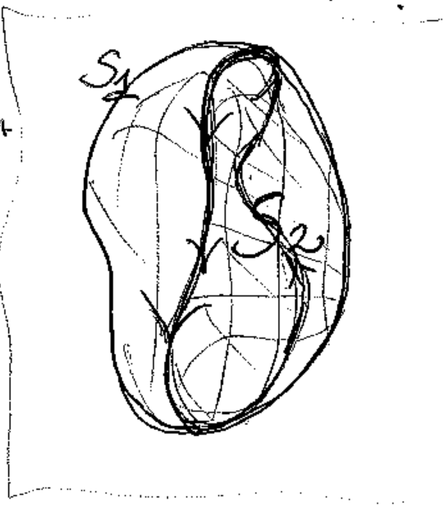
(anzi equivalente a quanto detto), cioè B è un "campo solenoidale", e chiaramente come tale NON può ammettere l'esistenza di cariche magnetiche ("poli") analoghe alle cariche elettriche.

Così come un campo irrotazionale è conservativo, cioè gli integrali di linea da un punto A a un punto B NON dipendono delle linee scelte per il "tramite" di A e B, cui campo solenoidale che "le proprietà del flusso concatenato", cioè per ogni linea γ chiusa il flusso del campo "attraverso γ" NON dipende dalla superficie, avente γ per contorno, scelta per il calcolo di tale flusso: nel caso di B,

$$\Phi_{S_1}(B) = \Phi_{S_2}(B)$$ per ogni superficie S_1, S_2 con bordo γ.

[Infatti il flusso di B attraverso la superficie chiusa formata da S_1 e S_2 è nullo. γ]

Parleremo quindi di flusso (magnetico) concatenato alla linea chiusa γ.



(NOTA: se $B = \text{rot}\,A$ (campo solenoidale!), allora in effetti $\text{div}\,B = \text{div}\,\text{rot}\,A = 0$; il "bello" è che vale il viceversa, cioè $\text{div}\,B = 0 \Rightarrow \exists$ campo vett. A tale che $\boxed{B = \text{rot}\,A}$, detto "POTENZIALE VETTORE", che resta determinato a meno del gradiente di un arbitrario campo scalare χ (perché

$$B = \text{rot}\,A \Rightarrow \text{rot}(A + \nabla\chi) \overset{(\text{rot}\nabla\chi = 0!)}{=} \text{rot}\,A = B \;!).$$

Ricordando che il campo magnetico B generato nel vuoto da una qualsiasi distribuzione di correnti ha espressione

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\{i \neq 0\}} \frac{i(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} \, d^3|r'| \qquad (\text{Laplace!}),$$

è pressoché evidente che un potenziale vettore di B sia

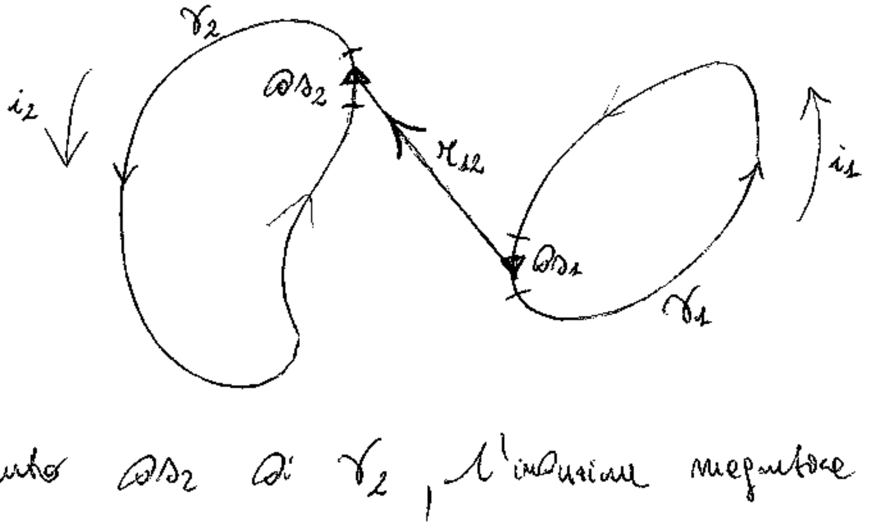
$$\boxed{A(r) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\{i \neq 0\}} \frac{i(r')}{|r - r'|} \, d^3|r'|} \qquad (\text{infatti, ad esempio,}$$

$$\left(\nabla_r \left(\frac{1}{|r - r'|} \right) = \frac{-(r - r')}{|r - r'|^3} \right)$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{i(r')}{|r - r'|} \right) \cdot I = \partial_{r_2} \frac{i_3(r')}{|r - r'|} - \partial_{r_3} \frac{i_2(r')}{|r - r'|} =$$

$$= -\frac{(r_2 - r_2')}{|r - r'|^3} i_3(r') + \frac{(r_3 - r_3')}{|r - r'|^3} i_2(r') = \left(\frac{i(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} \right) \cdot I \;) ;$$

Si può osservare sperimentalmente che due circuiti percorsi da correnti risentono tra loro delle forze proporzionali alle intensità di corrente. Consideriamo per questo due circuiti come in figura:



;

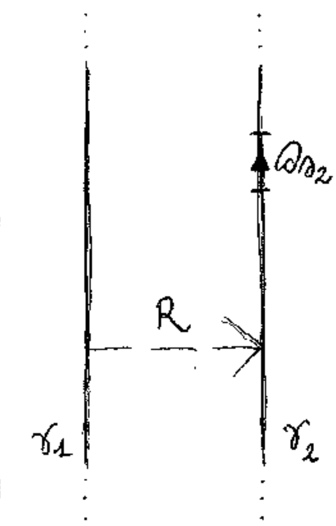
su ciascun elemento ds_2 di γ_2, l'induzione magnetica B_1 generata dalle correnti del circuito γ_1 è, per Laplace (1ª legge), $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \oint_{\gamma_1} \frac{ds_1 \times r_{12}}{|r_{12}|^3}$,

quindi (sempre per Laplace, ma considerando la sua 2ª legge) su ds_2 agisce una forza $dF_2 = i_2 \, ds_2 \times B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\gamma_1} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times r_{12})}{|r_{12}|^3}$, Dunque la forza risultante sul circuito γ_2 è esattamente

$$F_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times r_{12})}{|r_{12}|^3}$$

; per il principio di azione e reazione, sarà simmetricamente $F_1 = -F_2$.

Ora, nel caso semplice di due fili rettilinei e paralleli, invece che svolgere gli integrali trovati ragioniamo come segue: sia R il vettore distanza dal primo filo γ_1 al secondo filo γ_2, e consideriamo γ_1 come praticamente infinito; per Biot e Savart, l'induzione magnetica B_1 dovuta alla corrente i_1 è costante su γ_2 avendo $B_1 = \frac{\mu_0 i_1 k_1 \times R}{2\pi |R|^2}$, se



k_1 è un versore con direzione e verso coincidenti con quelli di i_1; per la 2ª legge di Laplace, su γ_2 agisce una forza $F_2 =$

$$= i_2 \oint_{\gamma_2} ds_2 \times B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \int_{\gamma_2} \frac{ds_2 \times (k_1 \times R)}{|R|^2} \overset{\text{(per costanza)}}{=}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \left(\int_{\gamma_2} ds_2\right) \times \frac{k_1 \times R}{|R|^2}$$

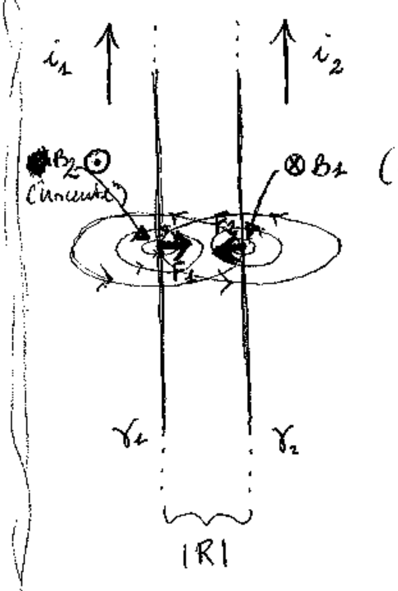
; se il tratto considerato di filo γ_2 ha lunghezza l_2 (e se k_2 è un versore con direzione e verso coincidenti con quello di i_2), allora ovviamente $F_2 \overset{(\int_{\gamma_2} ds_2 = l_2 k_2)}{=}$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 l_2 \frac{1}{|R|^2} \underbrace{k_2 \times (k_1 \times R)}_{(k_2 \cdot R) k_1 - (k_1 \cdot k_2) R,\ (k_2 \cdot R) = 0!} = -\frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 l_2 \frac{R}{|R|^2} \underbrace{(k_1 \cdot k_2)}_{\pm 1};$$

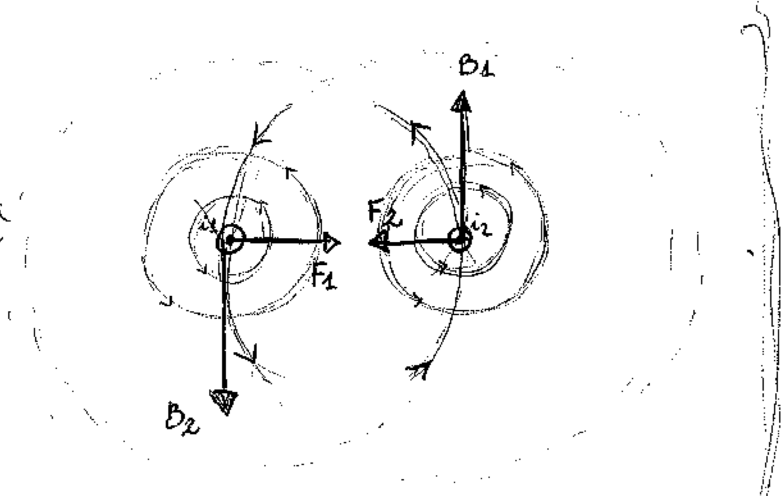
(per il $-R$)

quando F_2 è orientato verso γ_1 $\Leftrightarrow$ $k_1 \cdot k_2 = +1$ $\Leftrightarrow$ u_1 e u_2 hanno lo stesso verso : cioè la forza d'interazione tra i due fili è attrattiva $\Leftrightarrow$ le correnti nei due fili hanno lo stesso verso (repulsiva in caso contrario), e comunque tale forza ha modulo $\boxed{|F| = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{l_2}{|R|}}$.

Se $i_1 = i_2 =: i$, allora il modulo della forza agente per unità di lunghezza è $\boxed{\frac{|F|}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i^2}{|R|}}$, se entrambi i fili sono praticamente infiniti, e affinché tale forza è attrattiva se e solo se le correnti hanno lo stesso verso.



, cioè



("forze elettromagnetiche" fra circuiti)

(Possiamo in tale circostanza definire l'ampère come unità di misura fondamentale dell'intensità di corrente (quella che percorre ciascuno di due fili rettilinei paralleli e indefiniti, distanti 1m, quando la forza agente nell'unità di lunghezza di ciascun filo ha intensità $2 \cdot 10^{-7}$ N/m), considerando quindi l'unità di carica elettrica come unità derivata (1C è la quantità di carica che in 1 s viene attraversa una qualsiasi sezione di un filo percorso da una corrente costante d'intensità 1A).

Consideriamo un filo metallico percorso da una corrente d'intensità i e posto in un campo magnetico d'induzione magnetica B: per la 2ª legge di Laplace, la forza agente su un elemento ds di filo è $dF = i\,ds \times B$; ora, se n è il numero di elettroni di conduzione $(q=-e)$ per unità di volume, v è la velocità del loro moto d'insieme (NON tiene conto della velocità del moto di agitazione termica!) e S è l'area della sezione del filo, allora il vettore densità di corrente è $j = -ne v$ e quindi $i = j \cdot \vec{n} S =$

$= -ne \underbrace{v \cdot \vec{n}}_{\text{(componente di } v \text{ lungo } \vec{n} \text{ in modulo)}} S$ ($\vec{n}$ versore normale a S (nel senso della corrente)); ora,

$ds = \vec{n}\, d|s| \Rightarrow i\,ds = -neS\,v \cdot \vec{n}\, \underbrace{ds}_{(\vec{n}\,d|s|)} = \boxed{-neS\,d|s|\,v}$,

$\Rightarrow dF = i\,ds \times B = nS\,d|s|\left(-ev \times B\right)$; ma chiaramente $nS\,d|s| =$ numero elettroni di conduzione nel tratto di filo lungo $d|s|$ considerato,

dunque siamo portati a pensare che su un singolo elettrone in moto con velocità v in un campo magnetico B agisce una forza data da

$f = -e v \times B$ (⚠: naturalmente ora v comprende la velocità di moto di agitazione termica!);

Allora, già in generale risulta dimostrato sperimentalmente che la forza agente su una particella di carica q in moto con velocità v in un campo magnetico B è $\boxed{F = qv \times B}$ $(\perp v)$

$\Rightarrow$ in un campo magnetico indipendente dal tempo, la forza agente su una particella carica in movimento non compie lavoro sulla particella stessa, e quindi non ne modifica il modulo della velocità (mentre può alterarne la direzione, e ciò a meno che $v \parallel B$!).

Ora, se è presente pure un campo elettrico E, allora q risente pure la forza elettrica qE e in conclusione la forza agente su una carica q in moto con velocità v in un campo elettromagnetico, con E elettrico e B magnetico, è data da

$$\boxed{F = q(E + v \times B)}$$ ("FORZA DI LORENTZ").

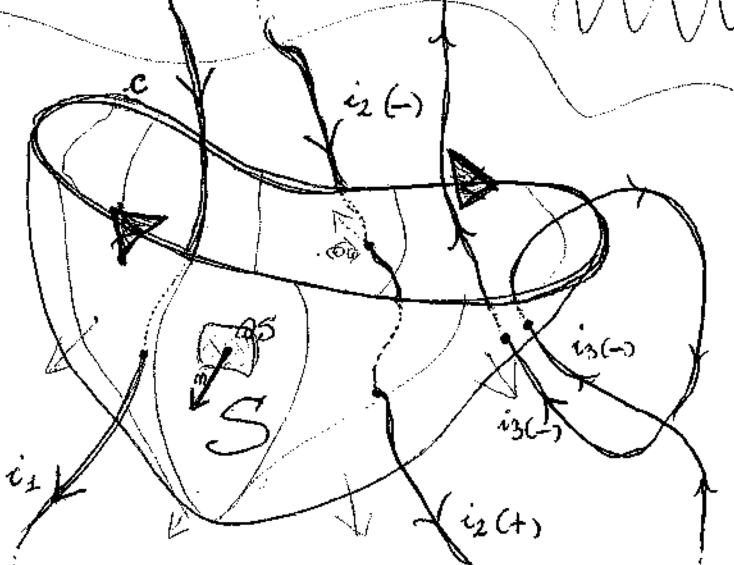
(Notiamo che qv dà in ogni caso il verso della corrente!)

Quindi $dF = \overset{(\cancel{ds}\ qv)}{i\,ds} \times B \Rightarrow F = qv \times B$, e ci aspettiamo analogamente che una particella q con velocità v induca

$$\left(dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{ds \times r}{|r|^3} \Rightarrow\right) \quad \boxed{B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times r}{|r|^3}}$$: ma

infatti abbiamo già visto che $i\,ds = n\Sigma|ds|\,qv$! ✓

Siano C una curva chiusa e S una superficie (orientabile) avente $\partial S = C$ tali che il verso positivo di C e i versori normali alla superficie siano legati dalla solita regola della vite; diciamo allora che una corrente d'intensità i è "una corrente concatenata a C" semplicemente se tale corrente attraversa S, e in questo caso consideriamo i con segno + o − a seconda che le correnti attraversino S in verso o concorde o discorde all'orientazione di S (rispettivamente); nel caso una corrente i "buchi" S più di una volta, sarà come avere tante correnti quante sono le volte che i attraversa S, tutte d'intensità i (che attraversano S esattamente una volta). Ha dunque senso parlare di intensità di corrente totale concatenata alla curva chiusa C.



$\boxed{\text{ES.}}$: in questo caso, l'intensità di corrente totale concatenata alla curva chiusa C è

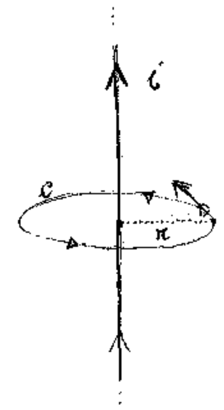
$$i_1 + (-i_2+i_2) + (-i_3-i_3) = i_1 - 2i_3 .$$

[NOTA: fissato il verso positivo di C, "per continuità" le correnti concatenate a C sono invarianti per le scelte di S! (intese come intensità con segno)]

TEOREMA DI AMPÈRE: la circuitazione attorno ad un'arbitraria linea chiusa C (dotata di un verso positivo) dell'induzione magnetica $\vec{B}$ generata da correnti costanti è uguale a μ_0 volte l'intensità di corrente totale concatenata a C.

In formula $\boxed{\oint_c B \cdot ds = \mu_0 \sum_r i_r}$, dove effettivo $\sum_r i_r$ è l'intensità di corrente totale concatenata a c; è dunque evidente che B NON sia conservativo (cioè che non ammette un "potenziale magnetico").

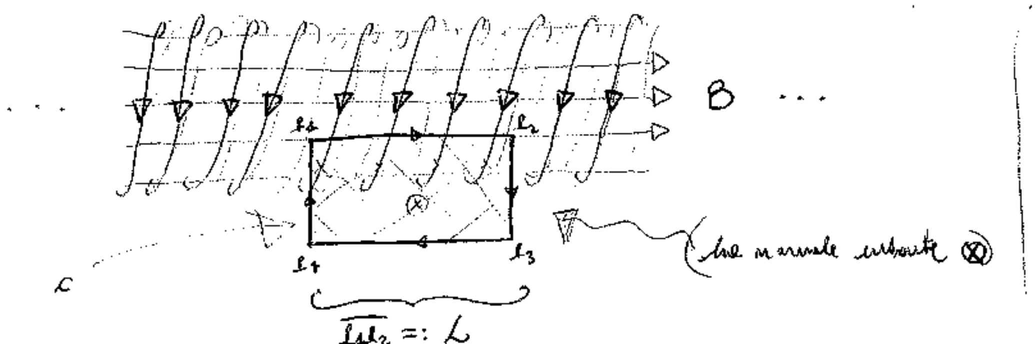
$\boxed{\mathrm{I}}$ Ritroviamo Biot e Savart grazie ad Ampère: a distanza r (>0) da un filo rettilineo "infinito" percorso da corrente d'intensità i (costante!) siamo in realtà su una linea di forza del campo magnetico B generato da i che è una circonferenza c di raggio effettivo r, dove per simmetria B è in modulo costante (ed è tangente ("parallelo") a c per def.), per cui



$$\oint_c B \cdot ds \overset{(\text{parall.})}{=} \oint_c |B|\,|ds| \overset{(\text{cost.})}{=} |B| \cdot 2\pi r \overset{(\text{AMPÈRE})}{=} \mu_0 i,$$

cioè $|B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$.

$\boxed{\mathrm{II}}$ Consideriamo un solenoide cilindrico percorso da corrente i di lunghezza praticamente infinita, cosicché all'esterno di esso il campo magnetico è 0 mentre al suo interno, qualunque sia la forma della sua sezione, le linee di forza sono parallele alle generatrici del "cilindro"; consideriamo quindi il disegno



è palese che $\oint_c B \cdot ds = |B| \cdot L$; se poi N è il numero di spire del solenoide in un tratto di lunghezza L, e se n è il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza (quindi $N = n \cdot L$), è pure evidente che l'intensità di corrente totale concatenata a c sia $N \cdot i$, pertanto grazie ad Ampère

$$|B| L = \mu_0 N i \overset{(n = N/L)}{\Longleftrightarrow} |B| = \mu_0 n i$$

, in ogni punto interno per un solenoide di sezione NON necessariamente circolare!

Su Ampère, osserviamo che chiaramente $\sum_r i_r \overset{(i \text{ vettore densità di corrente!})}{=} \Phi_S(i) = \int_S i \cdot n \, dS$, mentre (per Stokes) $\oint_c B \cdot ds = \int_S \mathrm{rot}(B) \cdot n \, dS$, quindi (equiv.)

$$\int_S \mathrm{rot}(B) \cdot n \, dS = \mu_0 \int_S i \cdot n \, dS$$, cioè

$$\int_S (\mathrm{rot}(B) - \mu_0 i) \cdot n \, dS = 0$$, cioè (arbitrarietà di S)

$$\boxed{\mathrm{rot}\, B = \mu_0 i}$$, e questo in condizioni stazionarie in modo che $\int_S i \cdot n \, dS \left(\overset{(S \text{ chiusa...})}{=} - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right)$ NON dipende da S ; in effetti in generale è pertanto (...)

$$\boxed{\mathrm{rot}\, B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)}$$.

Osserviamo a proposito che, se S è chiusa, allora $\int_S j \cdot n \, dS =$

$$= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \overset{(\mathrm{div}\, E = \frac{\rho}{\varepsilon_0})}{=} -\varepsilon_0 \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\mathrm{div}\, E) \, dV = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathrm{div}\, E \, dV$$

$$\overset{(\text{TEO. DIV.})}{=} -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S E \cdot n \, dS = \int_S \left(-\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E\right) \cdot n \, dS$$

, da cui

risulta $\int_S \left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E\right) \cdot n \, dS = 0$, cioè $\Phi_S\left(j + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E\right)$ nel caso di una superficie aperta S, con contorno C, NON dipende da S; viene quindi naturale l'estensione di Ampère.

In ogni caso, conseguenza immediata è che ad ogni campo elettrico variabile nel tempo è sempre associato un campo magnetico.

Abbiamo visto che la corrente elettrica in un conduttore e le cariche elettriche in movimento producono attorno a sé un campo magnetico; potremmo verificare sperimentalmente che esiste anche il fenomeno inverso, noto col nome di "<u>induzione elettromagnetica</u>": se una carica elettrica o un circuito chiuso privo di generatori di f.e.m. si trovano immersi in un <u>campo magnetico</u> B variabile col tempo, allora le cariche si mettono in movimento mentre il circuito risulta percorso da una "corrente indotta", i_I; contemporaneamente potremmo verificare che, a circuito "quasi chiuso", c'è una d.d.p. tra gli estremi del circuito stesso, che chiamiamo "<u>f.e.m. indotta</u>", $\mathcal{E}_I$; in effetti la i_I (a circuito chiuso) viene attribuita a $\mathcal{E}_I$. Questa $\mathcal{E}_I$ è legata a B per mezzo della <u>LEGGE DI FARADAY</u> (dell'induzione elettromagnetica): quando il flusso magnetico concatenato ad un circuito (chiuso, o aperto "parzialmente in un punto") varia col tempo, si genera nel circuito una f.e.m. indotta uguale, istante per istante, alla derivata del flusso (rispetto al tempo) cambiata di segno; in formule

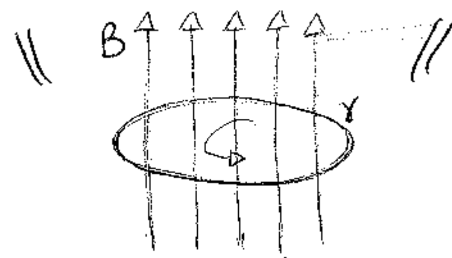
$$\boxed{\mathcal{E}_I = -\frac{d\Phi_\gamma(B)}{dt}}$$

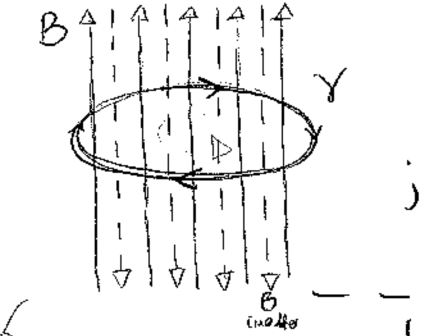
$\left(\Phi_\gamma(B) := \int_S B\cdot n\, dS \ (=\Phi_S(B)) \right.$ dove S è una qualunque superficie ($\operatorname{div} B = 0$!!) avente il circuito γ come bordo $\left.\right)$. A questo punto, se il circuito considerato è chiuso e se possiede generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$ e resistenza totale R, allora per Ohm scorre una corrente d'intensità $\boxed{i = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_I}{R} = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E} - \frac{d\Phi(B)}{dt}\right)}$

(dove $-\frac{1}{R}\frac{d\Phi_\gamma(B)}{dt} = i_I$!). (Quindi, se $\mathcal{E}=0$, la carica q che in un certo intervallo di tempo Δt percorre il circuito è $q = \int_{\Delta t} i_I dt = -\frac{1}{R}\int_{\Delta t}\frac{d\Phi_\gamma(B)}{dt}dt = -\frac{\Delta\Phi_\gamma(B)}{R}$

dove ovviamente $\Delta\Phi_\gamma(B)$ è la variazione del flusso nel tempo Δt; tale relazione è nota come "Legge di Felici").

I vari segni "$-$" incontrati traducono la <u>LEGGE DI LENZ</u>: il verso della f.e.m. indotta è tale che la corrispondente corrente indotta genera un flusso d'induzione magnetica concatenato al circuito indotto che tende a compensare la variazione di flusso che la ha prodotta; più brevemente: la corrente indotta ha verso tale da opporsi alle cause che l'hanno prodotta (per ciò la f.e.m. indotta è anche detta "forza controelettromotrice", "f.c.e.m.").

$\boxed{\text{ES.}}$:  è un circuito immerso in un campo magnetico B con $\Phi_\gamma(B) > 0$ (per la scelta del verso positivo su γ), e se B è crescente col tempo allora (equiv.) $\frac{d\Phi_\gamma(B)}{dt} > 0$, cioè per Lenz i_I circola in verso negativo cosicché l'induzione magnetica generata da essa è opposta a quella del campo esterno B in modo da diminuire il valore totale dell'induzione magnetica :



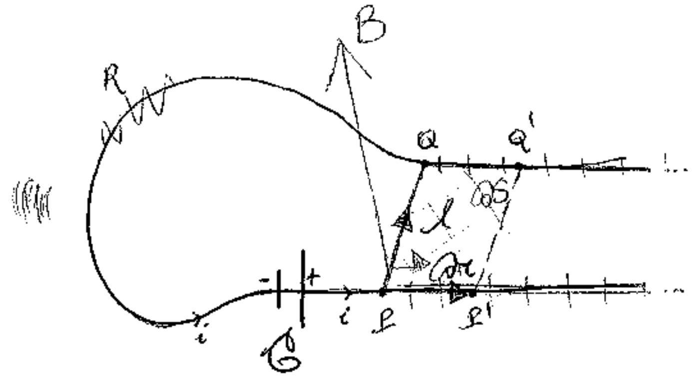
situazione opposta se B diminuisce col tempo.

Osserviamo che Lenz è in accordo col principio di conservazione dell'energia : ad esempio, se si avvicina una calamita ad un circuito chiuso, allora questo viene percorso da una corrente indotta i_I e quindi si dissipa una potenza di $\mathcal{E}_I i_I$; d'altra parte i_I genera un campo magnetico che si oppone all'avvicinamento della calamita, dunque per avvicinare questa al circuito va vinta una forza repulsiva e compiere del lavoro che corrisponde all'energia dissipata nel circuito ; analogamente se allontaniamo la calamita (perché si hanno forze attrattive).

(Vedi disegni su Amaldo e su Rosati !!)

Nel caso particolare del moto di un circuito, o di una sua parte, in un campo magnetico indipendente dal tempo, le leggi dell'induzione elettromagnetica possono essere ricavate sfruttando la seconda legge di Laplace (cioè Lorentz) e il principio di conservazione dell'energia. Supponiamo per semplicità che il circuito sia immerso in un campo magnetico B uniforme e costante nel tempo e che abbia un tratto "mobile"

PQ rettilineo di lunghezza l, come in figura:



; su PQ agisce allora una forza $F^{(\text{Laplace})} = i\,l \times B$, e se lo spostamento risultante è dr allora F compie lavoro

$$dL = F \cdot dr = i\,l \times B \cdot dr = \cancel{dr \cdot l \times iB} =$$

$$= iB \cdot \underbrace{dr \times l}_{n \cdot dS} = i\,d\Phi_{dS}(B) = i\,d\Phi(B) = i \times$$

× la variazione (infinitesima) del flusso concatenato all'intero circuito; dato che tutto ciò "parte da $\mathcal{E}$", per conservazione dell'energia è

$$\boxed{\underbrace{\mathcal{E}\,i\,dt}_{\text{(lavoro generatore)}} = \underbrace{i^2 R\,dt}_{\text{(effetto Joule)}} + \underbrace{i\,d\Phi(B)}_{\text{(lavoro F)}}}$$

, cioè effettivamente $i = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E} - \frac{d\Phi(B)}{dt}\right)$: dunque, a causa del "flusso tagliato" dalle parti mobili del circuito, abbiamo in questo una f.e.m. $-\frac{d\Phi(B)}{dt}$, come volevamo.

(Dato che però è fatto sperimentale che i fenomeni d'induzione elettromagnetica dipendono solo dal moto relativo fra inducente ed indotto, possiamo dedurre le leggi dell'induzione elettrom. da quelle già note solo nel caso di flusso tagliato e NON in generale!)

Consideriamo un circuito chiuso γ privo di generatori di f.e.m. ma immerso in un campo magnetico B variabile col tempo, cioè col flusso concatenato $\Phi_\gamma(B) =: \Phi(B)$ variabile col tempo; allora nel circuito c'è una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_I = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$ e di conseguenza le cariche si muovono sotto l'azione di un corrispondente campo elettrico E_I. Se una carica dq compie un giro del circuito, allora il lavoro compiuto "da E_I" è $\mathcal{E}_I \, dq$ o anche $\oint F_I \cdot dl = dq \oint_\gamma E_I \cdot dl$, quindi $\oint_\gamma E_I \cdot dl = \mathcal{E}_I^\gamma = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t}$; se, più in generale, nel circuito è presente pure un generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$, allora in una corrispondenza esiste un campo elettrico stazionario E_s tale che come sappiamo $\oint_\gamma E_s \cdot dl = \underset{(\dots)}{0}$; in totale quindi è presente un campo elettrico $E := E_s + E_I$ tale che $\oint_\gamma E \cdot dl =$

$$= -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S \text{ (concatenata (a } \gamma) \text{ qualsiasi)}} B \cdot n \, dS \overset{\substack{(B \text{ "regolare"} \dots) \\ (\text{cioè il suo } \partial_t!)}}{=} -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n \, dS \ :$$

deduciamo che in generale E non è conservativo (cioè che non esiste un potenziale elettrostatico), "cioè" (campo) non è irrotazionale. Allora in effetti, per Stokes, è $\int_S \operatorname{rot} E_s \cdot n \, dS$

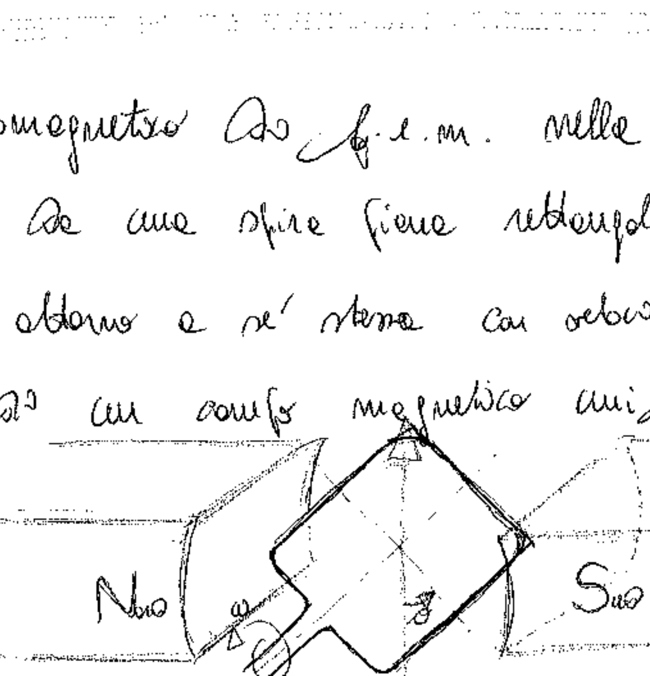
$= -\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot n\, dS$, e per l'arbitrarietà di S deve essere (equiv.) $\boxed{\mathrm{rot}\, E = \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$, che è appunto la forma differenziale della legge di Faraday ; quindi nelle regioni di spazio dove esiste un campo magnetico variabile al tempo esiste necessariamente pure un campo elettrico non conservativo.

(Ultimo commento sull'"eventuale" potenziale elettrostatico V di E : se $B = \mathrm{rot}\, A$, allora $\oint_\gamma E \cdot dl = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{rot}\, A \cdot n\, dS =$

(STOKES)
$= -\frac{\partial}{\partial t}\oint_\gamma A \cdot dl$, e per l'arbitrarietà di γ ciò

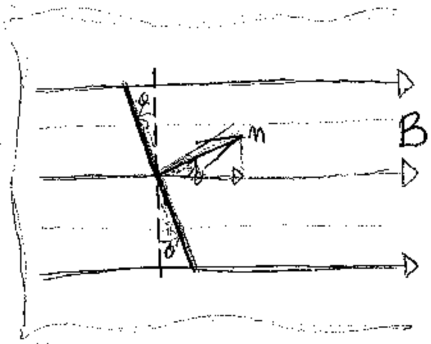
equivale al fatto che $E + \frac{\partial}{\partial t} A$ sia conservativo, cioè appunto $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V$! / In effetti, da sopra, $\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t} = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial A}{\partial t}\right) \; \dots !$)

Un generatore elettromagnetico di f.e.m. nella sua forma più semplice è costituito da una spira piana rettangolare di area S, mantenuta in rotazione attorno a sé stessa con velocità angolare costante ω, all'interno di un campo magnetico uniforme B generato da un magnete :



;

all'istante $t=0$ la spira sia disposta perpendicolarmente alle linee di forza del campo, e sia $\theta(t)$ l'angolo che all'istante t la spira forma col piano perpendicolare a tali linee, cioè $\theta(t) = \omega t$; allora, istante per istante, $\Phi_S(B) =$
$= B \cdot n S = |B| S \cos(\theta) = |B| S \cos(\omega t)$,



da cui la f.e.m. indotta nella spira risulta

$$\mathcal{E}_I = -\frac{\partial \Phi_S(B)}{\partial t} = |B| S \omega \sin(\omega t)$$

, che è sinusoidale nel tempo: la chiamiamo "<u>f.e.m. alternata</u>", mentre infine il generatore "<u>alternatore</u>". (Osserviamo come naturalmente si possa aumentare tale $\mathcal{E}_I$, o come la si possa sfruttare considerando gli estremi <u>dell'avvolgimento dell'alternatore</u>.)

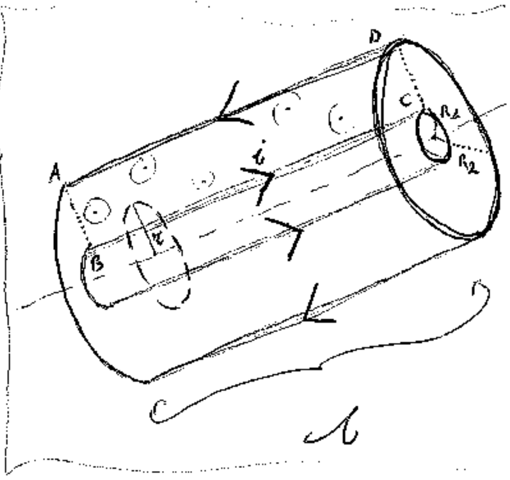
Quando un circuito è percorso da corrente, nello spazio circostante viene generato un campo magnetico, che ha un flusso concatenato al circuito stesso; facendo variare l'intensità della corrente che percorre il circuito, così si genera in effetti una f.e.m. indotta: tale fenomeno è detto di "<u>autoinduzione</u>".
Consideriamo precisamente un circuito isolato ed indeformabile posto nel vuoto (o nell'aria) e percorso da una corrente d'intensità i: per la 1ª legge di Laplace, in ogni punto dello spazio B_0 è proporzionale a i e quindi ciò vale pure per $\Phi(B_0)$

concatenato, cioè $\boxed{\Phi(B_0) = L_0 i}$ dove il coefficiente di proporzionalità L_0 dipende solo dalle forme geometriche del circuito; "in generale" sarà $\boxed{\Phi(B) = L i}$, con $B = \mu_r B_0$ e $L = \mu_r L_0$: L è detto "coefficiente di autoinduzione", o "autoinduttanza" o "induttanza" del circuito.

Avendo $\Phi(B)$ lo stesso segno di i, è sempre $L > 0$ e con unità di misura "1 henry" $\doteq 1\,H := 1\,\frac{Wb}{A} = 1\,\frac{Vs}{A} = 1\,\Omega s$; terremo presente l'induttanza di un circuito disegnandola così: "  ".

$\boxed{\text{ES.}}$: calcoliamo L di un solenoide di lunghezza $l \gg$ suo diametro, di sezione S e con n spire per unità di lunghezza; come visto, B generato è $\neq 0$ praticamente solo all'interno del solenoide, dove è parallelo al suo asse e ha modulo $|B| = \mu_0 n i$ (se nel solenoide passa una corrente d'intensità i); il flusso di B attraverso ciascuna spira è semplicemente $|B| S$, quindi attraverso l'intero solenoide è $\Phi(B) = n l |B| S = \mu_0 n^2 i S l$: in conclusione $L = \mu_0 n^2 S l$.

$\boxed{\text{ES.}}$: due superfici metalliche cilindriche coassiali, di raggi R_1 e $R_2 > R_1$ e lunghezza $l \gg$ raggi, sono percorse da corrente di uno opposto ma di uguale intensità i; su ciascuna delle due superfici la densità di corrente è costante; calcoliamo L di questo sistema, supponendo che tra le due superfici vi sia l'aria:

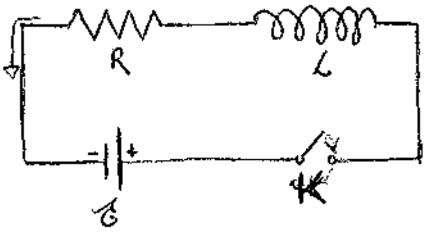


Cominciamo immaginando su un piano perpendicolare all'asse dei cilindri una circonferenza con centro sull'asse stesso e raggio r; in ogni punto della circonferenza, B ha la direzione della tangente e ha per simmetria sempre lo stesso modulo; per $r < R_1$ o $r \geq R_2$, l'intensità totale della corrente che attraversa il cerchio è nulla, mentre per $R_1 \leq$ $\leq r < R_2$ è esattamente i: deduciamo per Ampère che $|B| \neq 0$ solo per $R_1 \leq r < R_2$, cioè solo tra i due cilindri, dove lo ricaviamo da $(2\pi r)|B| \stackrel{(8.)}{=} \mu_0 i$, da cui $|B| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$. Il flusso magnetico attraverso la sezione ABCD è quindi $\Phi(B) = \int_{R_1}^{R_2} |B| l \, dr = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$, e deduciamo che necessariamente $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. ✓

Quando varia l'intensità di corrente che circola in un circuito, varia così anche il flusso magnetico ad esso concatenato e si genera di conseguenza nel circuito una f.e.m. indotta che possiamo esplicitare:

$$\boxed{\mathcal{E}_I = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L\frac{di}{dt}}.$$

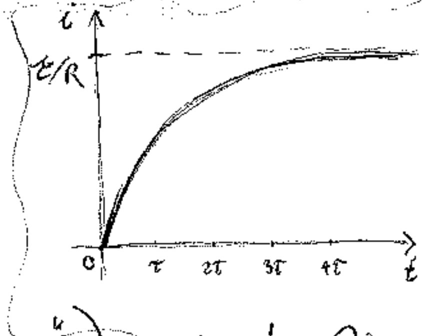
Consideriamo il semplice circuito



: se all'istante $t=0$ chiudiamo l'interruttore K, allora comincia a scorrere una corrente d'intensità i che può aversi formandosi "gradualmente" in quanto anche se si ammettesse "bruscamente" (e prima) si genererebbe di conseguenza una "grande" f.e.m. indotta $\mathcal{E}_I$ tale da opporsi a questo aumento; in effetti, istante per istante, NON è $Ri = \mathcal{E}$ ma piuttosto $Ri = \mathcal{E} + \mathcal{E}_I = \mathcal{E} - L\frac{di}{dt}$, per Ohm (o, in alternativa, visto che R "produce" una caduta di potenziale di Ri mentre L la fa di $L\frac{di}{dt}$, deve essere $Ri + L\frac{di}{dt} = \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{sempre costante}}$), e cioè

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L} i \\ i(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)},$$

con $\tau := \frac{L}{R}$ "la costante di tempo del circuito".



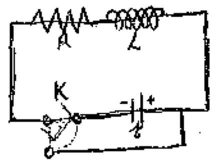
Quindi nei primi istanti dopo la chiusura del circuito si ha un "regime variabile" (o "fase transitoria"), mentre dopo un tempo $t \gg \tau$ si raggiunge una situazione di "regime costante" e $i \simeq \frac{\mathcal{E}}{R}$ (tanto prima quanto più piccola è L!); in effetti è presente, istante per istante, un'intensità di corrente "autoindotta" ("extracorrente di chiusura") data da $i_L := -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ opposta alla corrente ohmica d'intensità $\mathcal{E}/R$.

Ora, la potenza W fornita dal generatore è quindi $W =$

$= \mathcal{E} i = R i^2 + L i \frac{di}{dt}$, dove il primo termine rappresenta la potenza dissipata per effetto Joule mentre il secondo termine si collega ad un "immagazzinamento" di energia da parte dell'induttanza, com'è giusto sia; allora precisamente questa energia immagazzinata quando l'intensità I di corrente passa da $\underset{(t=0)}{I=0}$ ad un certo $\underset{(t=t_1)}{I=i}$ è

$$U = \int_{t=0}^{t=t_1} \left(L I \frac{dI}{dt}\right) dt = \int_{I=0}^{I=i} L I \, dI = \frac{1}{2} L i^2 \overset{(\Phi = Li)}{=} \frac{1}{2} i \Phi .$$

(pari al valore massimo $\frac{1}{2} L \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2$)

Naturalmente tale energia sarà restituita quando facciamo cessare il passaggio di corrente, ad esempio nel modo descritto di seguito: quando nel circuito si è raggiunta l'intensità di corrente di regime $i_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$, escludiamo $\underset{(a\ t=0)}{}$ il generatore per mezzo di un commutatore che contemporaneamente cortocircuiti $\underset{(\Delta V=0)}{}$ la parte restante di circuito (

), per cui i è tale che

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \iff i(t) = i_0 e^{-t/\tau} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

(

)

$(\tau = L/R)$, dunque ancora i tende a zero con legge esponenziale; tale i è "l'extracorrente di apertura". Ritroviamo in effetti che nel circuito si dissipa energia (per effetto Joule) pari a $\int_0^\infty R i^2 dt \overset{(i=-\frac{L}{R}\frac{di}{dt})}{=}$

$$= -L \int_0^\infty i \frac{di}{dt} dt = -L \int_{i_0}^{0} i \, di = \frac{1}{2} L i_0^2 .$$

Potremmo riassumere dicendo che l'autoinduzione del circuito può essere attribuita ad una specie d'inerzia dell'elettricità: è impossibile tanto "lanciare di colpo" una corrente in un circuito quando annullare bruscamente la corrente in un circuito (l'extracorr. di chiusura si oppone all'aumento di B, mentre quella di apertura si oppone alla sua riduzione).

Siano γ_1 e γ_2 due circuiti elettrici indeformabili in quiete uno rispetto all'altro; se il primo circuito γ_1 è percorso da una corrente di intensità i_1 mentre nel secondo non vi è passaggio di corrente), allora si genera solo il campo magnetico B_1 dovuto a i_1 che ha flussi $\Phi_1(B_1)$ concatenato a γ_1 e $\Phi_2(B_1)$ concatenato a γ_2. Allora, per la prima legge di Laplace (nell'ipotesi svolta), $|B_1|$ è comunque proporzionale a i_1, dunque ciò vale anche per i flussi di B_1: allora

$$\begin{cases} \Phi_1(B_1) = L_1 i_1 \\ \Phi_2(B_1) = M_{21} i_1 \end{cases}$$

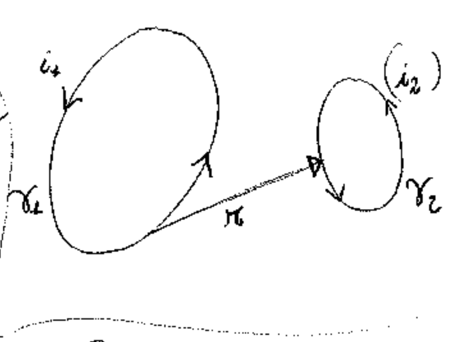
dove L_1 è l'induttanza di γ_1 e M_{21} è una costante dipendente dalla forma geometrica dei due circuiti e dalle loro posizioni relative.

Se <u>invece</u> nel primo circuito non passasse corrente, mentre nel secondo fosse percorso da una corrente d'intensità i_2, otteniamo allora analogamente

$$\begin{cases} \Phi_1(B_2) = M_{12}\, i_2 \\ \Phi_2(B_2) = L_2\, i_2 \end{cases}$$

; giustamente è $M := M_{12} = M_{21}$, e chiamiamo tale valore (che è comunque in henry) "<u>coefficiente di mutua induzione</u>" o "<u>mutua induttanza</u>"; il suo segno dipende dai versi positivi fissati sui circuiti γ_1 e γ_2.

$\boxed{\Phi_2(B_1) = \int_{S_2} B_1 \cdot n_2 \, dS}$, e per B_1 possiamo



usare la relazione $B_1 = \mathrm{rot}\, A_1$ con $A_1 =$

$= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{j_1}{|r|} \, dV = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \frac{i_1}{|r|} \, ds_1$, per cui $\Phi_2(B_1) =$

$= \int_{S_2} \mathrm{rot}\, A_1 \cdot n_2 \, dS \overset{(\text{STOKES})}{=} \oint_{\gamma_2} A_1 \cdot ds_2 = \frac{\mu}{4\pi} i_1 \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{ds_1 \cdot ds_2}{|r|}$:

allora $M_{21} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \oint_{\gamma_1} \frac{ds_1 \cdot ds_2}{|r|}$, espressione simmetrica negli indici 1 e 2.

$\boxed{\text{ES.}}$: Consideriamo un solenoide di sezione S, e lunghezza $l \gg$ diametro, con $n_1 = N_1/l$ spire per unità di lunghezza e tale che vi sia avvolto, ma comunque vi sia isolato, un secondo avvolgimento di N_2 spire; per calcolare M tra i due circuiti, facciamo circolare nel primo solenoide una corrente d'intensità i_1 generando al suo interno, parallelamente al suo asse, un campo magnetico B_1 di modulo $|B_1| = \mu n_1 i_1$: allora chiaramente $\Phi_2(B_1) = N_2 S |B_1| =$

$= \mu n_1 N_2 S i_1$, da cui $M = M_{21} = \mu n_1 \underbrace{N_2}_{(n_2 \cdot l)} S$.

Se dunque, più in generale, i due circuiti γ_1 e γ_2 sono percorsi da correnti d'intensità i_1 e i_2 rispettivamente, allora in totale si ha un campo magnetico $B := B_1 + B_2$ che quindi ha

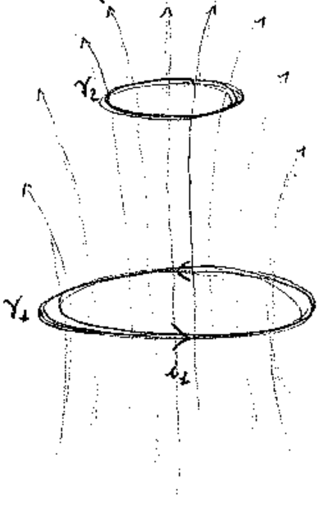
$$\begin{cases} \Phi_1(B) = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2(B) = M i_1 + L_2 i_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

; osserviamo

che, se ad esempio $i_2 = 0$, tutte le linee di forza del campo sono ovviamente concatenate a γ_1 MA solo una loro parte è concatenata a γ_2: se γ_1 e γ_2 hanno lo stesso numero di spire, allora certamente $|M| i_1 = |\Phi_2(B_1)| \le \Phi_1(B_1) = L_1 i_1$, cioè

$|M| \le L_1$; analogamente $|M| \le L_2$, cioè più brevemente

$|M| \le L_1 \wedge L_2$ (stesso numero di spire!).



(Come deduciamo subito dai conti fatti, per due solenoidi uguali e perfettamente sovrapposti risulta

$M = L_1 = L_2 \quad (= \mu n^2 S l)$.)

Deduciamo quindi che $M^2 \le L_1 L_2$, cioè che $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ per un opportuno $-1 \le k \le 1$ detto "coefficiente di accoppiamento".

(Per due solenoidi sovrapposti ma con $N_1 \ne N_2$, quando $i_2 = 0$ è

$$\frac{\Phi_1(B_1)}{\Phi_2(B_1)} = \frac{L_1 \cancel{i_1}}{M \cancel{i_1}} = \frac{\cancel{\mu} n_1^2 S l}{\cancel{\mu} n_1 N_2 S} = \frac{N_1}{N_2}$$, mentre per

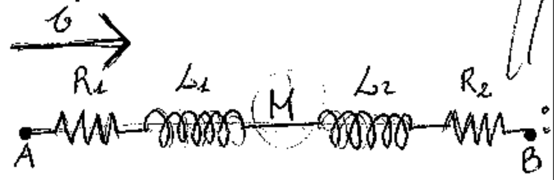
$i_1 = 0$ è $\frac{L_2}{M} = \frac{N_2}{N_1}$ in modo analogo, da cui comunque

$$M^2 = \left(L_1 \frac{N_2}{N_1}\right)\left(\frac{L_2 N_1}{N_2}\right) = L_1 L_2 .)$$

Comunque, se una o entrambe le intensità di corrente i_1 e i_2 vengono fatte variare, allora otteniamo (per la legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica) le seguenti f.e.m. indotte nei

Due circuiti:
$$\begin{cases} \mathcal{E}_{I,1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_{I,2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

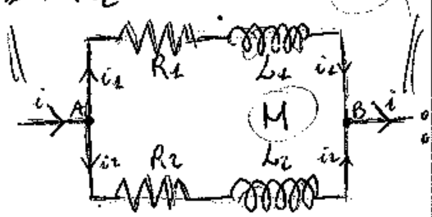
Facciamo un collegamento in serie "generale"



$$\underset{(V_A - V_B)}{\Delta V} = (R_1+R_2)i - \mathcal{E}_{I,1} - \mathcal{E}_{I,2} = (R_1+R_2)i + \left(L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}\right) + \left(L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}\right) = (R_1+R_2) + (L_1+2M+L_2)\frac{di}{dt},$$

cioè tale equivale totalmente ad un solo elemento induttivo con induttanza L_1+2M+L_2 e resistenza ohmica R_1+R_2

Facciamo quindi un collegamento in parallelo "generale"



è
$$\begin{cases} \Delta V = i_1 R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \\ \Delta V = i_2 R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$
, e volendo ricavare $\frac{di_1}{dt}$ (contando che allora avremo $\frac{di_2}{dt}$ per simmetria) moltiplichiamo la prima equazione per L_2 e la seconda per $-M$, quindi sommando

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{di_1}{dt} = L_2(\Delta V - i_1R_1) - M(\Delta V - i_2R_2) =$$
$$= (L_2 - M)\Delta V - (L_2R_1i_1 - MR_2i_2)$$

; analogamente è

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{di_2}{dt} = (L_1 - M)\Delta V - (L_1R_2i_2 - MR_1i_1)$$

, e sommando $(L_1 - 2M + L_2)\Delta V = (L_1L_2 - M^2)\frac{di}{dt} + \left[(L_2-M)R_1i_1 + (L_1-M)R_2i_2\right]$: dunque in generale due induttanze in parallelo NON possono considerarsi equivalenti ad un solo elemento induttivo!

Cuttavia, nel caso molto particolare che $\frac{L_1-M}{L_2-M}=\frac{R_1}{R_2}$, le due induttanze equivalgono ad una sola d'induttanza $\frac{L_1L_2-M^2}{L_1-2M+L_2}$ e di resistenza ohmica $R:=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$: infatti avremmo $(L_2-M)R_1 i_1+\underbrace{(L_1-M)R_2}_{(=(L_2-M)R_1)} i_2=(L_2-M)R_1 i$, e essendo simultaneamente $(L_2-M)R_1=(L_1-2M+L_2)R$ $\left(=(L_1-2M+L_2)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right.$

$\Leftrightarrow (L_2-M)(R_1+R_2)=(L_1-M+L_2-M)R_2$, $\Leftrightarrow (L_2-M)R_1=$
$=(L_1-M)R_2$, che infatti è l'ipotesi! $\left.\right)$.