

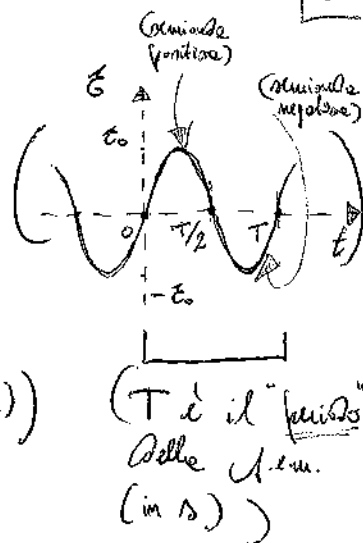
Come p.e. esiste, un alternatore e' un dispositivo capace di produrre delle f.e.m. alternate variabili sinusoidalmente nel tempo, cioè secondo la legge

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) = \mathcal{E}_0 \sin(2\pi \nu t)$$

(f.e.m. massima fornita)

(“pulsazione” delle f.e.m. (in s^{-1})
 $1 \text{ hertz} \doteq 1 \text{ Hz} \doteq 1 \text{ s}^{-1}$)

(“frequenza” delle f.e.m. (in Hz))



Assumo per Def. $\omega = 2\pi \nu$ ($\nu = \frac{1}{T}$) $\left(\mathcal{E}_0, T > 0 \text{ fornite} \right)$

Chiederemmo il valore medio di $\mathcal{E}$ su un intero periodo, o su un intervallo di tempo $t_2 - t_1$ multiplo intero del periodo, e' nullo e comunque e' prossimo a zero anche se $t_2 - t_1 \gg T$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E})_m &:= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(t) dt = \frac{\mathcal{E}_0}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sin(\omega t) dt = \frac{\mathcal{E}_0}{t_2 - t_1} \left[\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{(t_2 - t_1)\omega} [\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)] \Rightarrow |(\mathcal{E})_m| \leq \frac{2\mathcal{E}_0}{\omega} \frac{1}{t_2 - t_1} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right) \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{\pi} \frac{T}{t_2 - t_1} \approx 0 \quad (t_2 - t_1 \gg T) \end{aligned}$$

(e' evidente che cio' succede per ogni funzione sinusoidale nel tempo !)

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}^2)_m &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}^2(t) dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [1 - \cos(2\omega t)] dt \\ &= \frac{\mathcal{E}_0^2}{2(t_2 - t_1)} \left[t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} \approx \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad (t_2 - t_1 \gg T) \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x), \text{ e' } \\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \end{aligned}$

(la media quadratica di $\mathcal{E}$ nell'intervallo di tempo (t_1, t_2))

e quindi fare "il valore efficace di $\mathcal{E}$ ", o "b.m. efficace",

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} := \sqrt{(\mathcal{E}^2)_m} \simeq \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

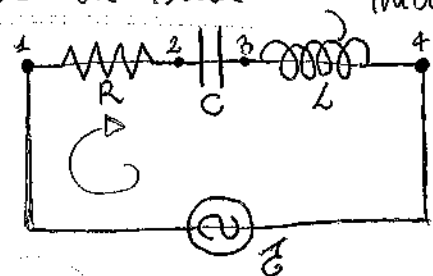
Come abbiamo già visto, quando un alternatore viene chiuso su un circuito elettrico si si che formerà la corrente alternata, "c.e.", in modo che, dopo una fase transitoria iniziale, si raggiunge una situazione di regime tale per cui la c.e. scema con la medesima frequenza ν della b.m. alternata; indichiamo la presenza di un alternatore in un circuito con "—(A)—".

Nello studio dei circuiti in c.e., il problema consiste naturalmente nel determinare l'intensità delle correnti che attraversano ogni parte del circuito, e le d.d.f. agli estremi di queste, in funzione del tempo t cominciando da $t=0$, le forme del circuito, e le resistenze R , le capacità C e l'induttanza L presenti su ogni ramo del circuito. Come casi limite particolari, potremo avere una resistenza pura, una capacità pura o un'induttanza pura, che comunque in pratica saranno sempre distinguibili in un dato ramo. Osserviamo che le zone del circuito dove non può essere accumulato o anche sono quelle costituite da capacità, e solo quelle: per ciò, ad un qualunque istante, lungo un ramo del circuito si che la stessa intensità di corrente e rimane costante la forza legge di Kirchhoff ("intensità"); in realtà, come abbiamo già esposti, per avere questo caso

non scritto un'ultima condizione: le dimensioni del circuito devono essere sufficientemente piccole per poter considerare le f.e.m. e le correnti "uniformemente variabili": sia precisamente il tempo impiegato dalla luce a percorrere una distanza pari alla lunghezza del circuito deve essere "piccolo" rispetto al periodo delle c.e. : in formule "massima dimensione lineare L del sistema" $\ll \lambda = \frac{c}{\nu}$ = la lunghezza d'onda nel vuoto di un'onda elettromagnetica di frequenza ν ; consideriamo pertanto $\left| \nu \lesssim 10^6 \text{ Hz} \right|$, onde $L \ll 300 \text{ m}$. In tal caso possiamo inoltre ritenere valide con ottima approssimazione le due leggi elementari di Laplace (ma "istantanee").

Inoltre le zone del circuito dove sorgono le f.e.m. indotte sono sostanzialmente le indutture più estese, così ad ogni istante vale pure la seconda legge di Kirchhoff ("istantanea"); per quanto riguarda la funzione resistenza R , si scrive in ogni caso l'effetto locale "istantaneo": la quantità di calore dQ sviluppata nel tempo dt in R è $dQ = i^2 R dt$ (i istantanea).

Consideriamo in particolare un "circuito RCL in serie" munito come al solito di un arco forato:



istante per istante, E è anche $E = V_+ - V_-$, mentre la d.d.f.

ei capi di R è $V_1 - V_2 = Ri$ e le a.d.f. ei capi di C è $V_2 - V_3 = \frac{q}{C}$ (dove naturalmente q è la carica delle forme armature che si incarta successivamente "intorno" al circuito);

infine le a.d.f. ei capi di L è $V_3 - V_4 = L \frac{di}{dt}$:
 infatti è $\mathcal{E}_I = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow V_4 - V_3$ in quanto ai capi del circuito compare la R e C (in serie) dove avere

$V_1 - V_3 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_I = (V_1 - V_4) + \mathcal{E}_I$; ovvero,
 avendo $q(t) = \int_{t_0}^t i(t') dt'$ con $q(t_0) = 0$ (cioè $i = \frac{dq}{dt}$),

abbiamo che il sistema si riduce al solo calcolo di $i(t)$; in
 effetti $V_1 - V_4 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4)$ equivalde a

$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$, per cui $i(t)$ soddisfa

l'equazione differenziale lineare del secondo ordine, non omogenea e a
 coefficienti costanti

$$\left\| L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\| =$$

$= \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t)$, la cui soluzione generale è notoriamente
 data dalla somma delle soluzioni generali dell'equazione omogenea
 omogenea (che descrive le oscillazioni "smorzate" del sistema, come
 quelle che si verificano col tempo del ferro) con una soluzione
 particolare dell'equazione completa stessa (che coincide con una
 situazione di oscillazioni "forzate" del sistema) . Ebbene,

una soluzione ~~non~~ particolare dell'equazione completa dell'ordine delle
 forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$, che ha $\frac{di}{dt} = \omega i_0 \cos(\omega t - \varphi)$
 e $\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega^2 i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ e che quindi deve verificare

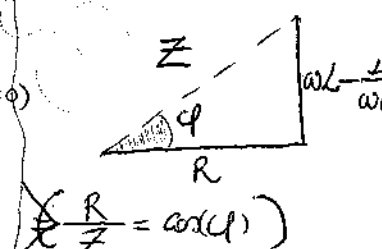
$$\omega i_0 \left[R \cos(\omega t - \varphi) - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin(\omega t - \varphi) \right] = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

notando immediatamente che $\begin{cases} i_0 R = \mathcal{E}_0 \cos(\varphi) & \text{per } \omega t = \varphi \\ i_0 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \mathcal{E}_0 \sin(\varphi) & \text{per } \omega t = \varphi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Addiviamo $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, e abbiamo forte
 $i_0^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] = \mathcal{E}_0^2$, cioè $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$: in

conclusioni $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ dove $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ è
 dato da $\tan(\varphi) = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$ mentre $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$

con $Z := \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ (in ohm) ; φ è lo "sfasamento" fra
 i ed $\mathcal{E}$, i_0 è l'intensità massima della corrente e
 Z è "la resistenza efficace" o "l'impedenza" del circuito.

Osserviamo che la c.c. è in fase con $\mathcal{E}$ (cioè $\varphi = 0$)
 se, e solo se, $\omega = \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$,  $\frac{R}{Z} = \cos(\varphi)$

che equivale a avere impedenza minima $Z = R$, ovvero $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$ massima possibile : in tale circostanza si dice che

il circuito è in " Condizioni di risonanza ". Dunque ora, vediamo allora che i(t) coincide d'intensità e di fase in accordo alla legge $i = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$, per cui può che aver media in un intervallo di tempo $t_2 - t_1 \gg T$ facendo allo zero:

$(i)_m \approx 0$; invece, esattamente come per $\mathcal{E}$, che (cioè in un semiposto tutte cose otteniamo in un semo con certe sensazioni di cosa quante in senso opposto nel semiposto successivo) media qualche cosa $(i^2)_m \approx \frac{i_0^2}{2}$, e quindi ne segue allora $i_{eff} = \sqrt{(i^2)_m} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$; la relazione $i_0 =$

$= \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$ equivale chiaramente a $\boxed{i_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{eff}}{Z}}$, che è

una generalizzazione delle leggi di Ohm.

Diemo un nuovo modo invece di calcol i_{eff} e $\mathcal{E}_{eff}$ calcolando la potenza media dissipata da una c.c.

[I] Una resistenza (un R) dissipando in media la stessa potenza sia quando è percorso da una c.c. i sia quando è percorso da una c.c. i_{eff} : infatti la d.d.f. di cap da R è

$V_R = Ri = R i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ per cui la potenza dissipata in R all'istante t è $W_R = i V_R = i^2 R = i_0^2 R \sin^2(\omega t - \varphi)$ (in fase con i)

che ha su un intero periodo $(W_R)_m = (i^2)_m R = \frac{i_{eff}^2}{2} R$ (il $\frac{1}{2}$ è $i_0^2/2$)
 notiamo che $(V_R)_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} R i_0 \Rightarrow (W_R)_m =$
 $= \frac{i_{eff}^2}{2} R = i_{eff} (V_R)_{eff} = \frac{(V_R)_{eff}^2}{R}$

II La tensione media emessa da una capacit  (che C rappresenta) da una c.s.m. alternata   nulla : infatti la carica (potenziale) da un'armatura all'istante t risulta $q(t) = -\frac{i_0}{\omega} \cos(\omega t - \varphi) + C = \frac{i_0}{\omega} \sin(\omega t - \varphi - \pi/2) + C$, e $C = 0$ calcolando il valore medio su un intero periodo da $\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$; ma allora la d.d.f. tra la emettrice   $V_C := \frac{q}{C} = \frac{i_0}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi - \pi/2)$, per cui   in ritardo da un quarto di ciclo rispetto alla corrente in emitt. , onde lo sfasamento relativo   $-\pi/2$ rad. Vediamo subito che $(V_C)_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} i_{eff} =: X_C i_{eff}$, dove $X_C := \frac{1}{\omega C}$   la "reattanza capacitativa" (in ohm), e che la tensione emessa da C all'istante t   $W_C = iV_C = -\frac{i_0^2}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi) = -\frac{1}{2} \frac{i_0^2}{\omega C} \sin(2\omega t - 2\varphi)$, da cui effettivamente $(W_C)_m \cong 0$.

III Anche la tensione media emessa da un'induttanza (che L  )   nulla : la d.d.f. di cui da L   infatti $V_L := L \frac{di}{dt} = L \omega i_0 \cos(\omega t - \varphi) = L \omega i_0 \sin(\omega t - \varphi + \pi/2)$, per cui   in anticipo da un quarto di ciclo rispetto alla corrente che la attraversa, onde lo sfasamento relativo   $\pi/2$ rad ; inoltre $(V_L)_{eff} = \frac{L \omega i_0}{\sqrt{2}} = L \omega i_{eff} =: X_L i_{eff}$, dove $X_L := \omega L$   la "reattanza induttiva" (in ohm), e in

media energia e (come $W_L = i V_L = \omega L i_0^2 \sin(\omega t - \phi) \cos(\omega t - \phi) =$
 $= \frac{1}{2} \omega L i_0^2 \sin(2\omega t - 2\phi)$ che $(W_L)_m = 0$.

Osserviamo ora che V_C e V_L sono sfasate di $\pi/2$, con
 precisamente V_C in ritardo, e la loro somma che rappresenta
 $|X_L - X_C|$: $X := X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ è
"la reattanza del circuito" .

Possiamo quindi affermare che, in un circuito RCL in serie, in media si
 dissipa energia solo per effetto Joule nella resistenza R , e la
 potenza media dissipata è precisamente $(W)_m = i_{\text{eff}}^2 R$, =
 $= i_{\text{eff}}^2 R \cos^2(\phi) = \left\| i_{\text{eff}} R \cos(\phi) \right\|^2$, che dipende dal
 prodotto $i_{\text{eff}} R \cos(\phi)$ e causa del fattore $\cos(\phi)$, detto
"fattore di potenza" ($-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \Leftrightarrow 0 \leq \cos(\phi) \leq 1$) ;

notiamo che $\cos(\phi) = 0, \Leftrightarrow (W)_m = 0, \Leftrightarrow \phi = \pm \pi/2$ nel caso
 $R = 0$: una condizione per la quale valgono queste condizioni
 e' detta "svalloata" .

Per quanto riguarda invece la soluzione generale dell'equazione
 omogenea associata $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$ ($= \frac{d^2 i}{dt^2}$,
 cioè C costante!) , che naturalmente riscriviamo come

$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$ con $\alpha := \frac{R}{2L}$ (e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) ,

scriviamo allora l'equazione matematica che $i(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}$,
 dove c_1 e c_2 sono costanti da determinare in base alle condizioni
 iniziali, mentre γ_1 e γ_2 sono le radici dell'equazione caratteristica
 associata all'eq. diff. omog. $\gamma^2 + 2L\gamma + \omega_0^2 = 0$, cioè

$$\begin{cases} \gamma_1 = -L + \sqrt{L^2 - \omega_0^2} \\ \gamma_2 = -L - \sqrt{L^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad \left(\text{e, essendo queste, fornisce in generale} \right)$$

trovare c_1 e c_2 è semplice, avendo che la D.D. tra le armature
 del condensatore è $V_C = \frac{Q}{C} - Ri - L \frac{di}{dt} = \frac{Q}{C} - R(c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t}) - L(c_1 \gamma_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 \gamma_2 e^{\gamma_2 t})$,
 conosciuta ad un
 certo istante, come $t=0$, $i(0) =: I$ e $V_C(0) =: V$. Osservando che
 contemporaneamente $c_1 + c_2 = I$ e $\frac{Q}{C} - c_1(R + L\gamma_1) - c_2(R + L\gamma_2) = V$,
 da cui c_1 e c_2 !

Distinguiamo i due casi possibili per γ_1 e γ_2 :

1) $L^2 - \omega_0^2 \geq 0$: γ_1 e γ_2 sono reali, e negativi
 ($\sqrt{L^2 - \omega_0^2} \leq L$), per cui le componenti sono entrambe decrescenti
 col tempo, cosicché $i(t)$ tende "rapidamente" a zero;
 in effetti $L^2 - \omega_0^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} \geq 0 \Leftrightarrow \left[R^2 \geq \frac{4L}{C} \right]$,
 cioè R è abbastanza grande per impedire ogni oscillazione del circuito.
 Nel caso particolare $L^2 - \omega_0^2 = 0$, cioè $R^2 = \frac{4L}{C}$, e $\gamma_1 = \gamma_2 = -L = -\omega_0$ e quindi per la formula le soluzioni

generale dell'omogenea e' $i(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_0 t}$

(2) $\| L^2 - \omega_0^2 =: -\Omega^2 < 0 \|$ (cioe' $0 < R^2 < \frac{4L}{C}$) : γ_1 e

γ_2 sono complessi coniugati $\gamma_1 = -\alpha - i\Omega$, $\gamma_2 = -\alpha + i\Omega$

(se $i := \sqrt{-1}$) , quindi $i(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t} =$
 $= e^{-\alpha t} [c_1 e^{-i\Omega t} + c_2 e^{i\Omega t}]$; e' allora immediato vedere

che $c_2 = \overline{c_1}$ e che $i(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi)$ con

$A := 2\sqrt{c_1 c_2}$ e $\tan(\varphi) = i \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}$ (e infatti $c_1 := a +$

$+ib$ e $c_2 = a - ib$, allora $A = 2\sqrt{a^2 + b^2} =$

$= 2\rho$ mentre $\tan(\varphi) = i \frac{2a}{2ib} = \frac{a}{b} \Rightarrow$

$\varphi = \pi/2 - \theta$, quindi $\sin(\Omega t + \varphi) =$

$= \frac{1}{2i} [e^{i(\Omega t + \varphi)} - e^{-i(\Omega t + \varphi)}] = \frac{1}{2i} [e^{i\Omega t} \underbrace{e^{i(\pi/2 - \theta)}}_{= i \cos \theta} - e^{-i\Omega t} \underbrace{e^{-i(\pi/2 - \theta)}}_{= -i \cos \theta}]$

$= \frac{1}{2} [e^{i\Omega t} \frac{c_2}{\rho} + e^{-i\Omega t} \frac{c_1}{\rho}] = \frac{1}{2\rho} [c_1 e^{-i\Omega t} + c_2 e^{i\Omega t}]$.

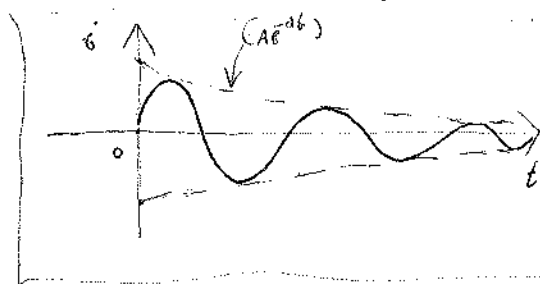
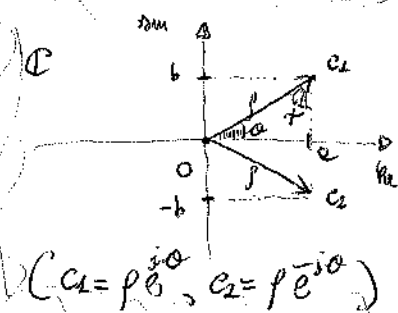
Le c.e. $i(t)$ cambia dunque oscillazioni smorzate e come del fattore $e^{-\alpha t}$, senza il quale avremmo (invece) una c.d. con frequenza

Ω , onde con frequenza $\nu := \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

("frequenze proprie del circuito")

In questo caso non fa' interesse (di

$R^2 < \frac{4L}{C}$) esplicitare infine la soluzione generale dell'equazione



Del circuito, cioè $i(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L + \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \varphi)$ (Dove i parametri sono unici

(perfettamente conosciuti), nottando che la corrente di regime stazionaria $\approx i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ si raggiunge tanto prima quanto più $\alpha = \frac{R}{2L}$ è "grande" rispetto a Ω .

Consideriamo il caso speciale in cui la c.e. $\mathcal{E}(t)$ è in fase con la f.e.m. alternata $\mathcal{E}(t)$, cioè il caso delle "risonanze":

$$U = 0 \Leftrightarrow X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

$$\Leftrightarrow Z = R \text{ (minimo possibile)} \Leftrightarrow i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \text{ (massimo possibile)}$$

osservato ora che $\omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega \sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{LC}}{C} =$

$$= \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right) \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right), \text{ formiamo}$$

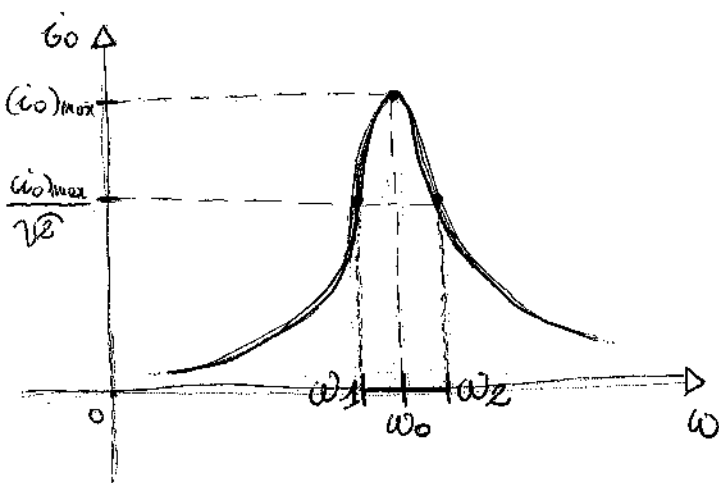
riscrivere i_0 come $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} =$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{1 + \frac{L}{CR^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \text{ usando chiaramente } \omega_0^2 L^2 = \frac{L}{C},$$

Definiamo $Q_0 := \frac{\omega_0 L}{R}$ ("fattore di qualità" o "fattore di merito") e

quindi scriviamo $i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R \sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}; \text{ formiamo}$

Si esprime che io è massimo x , e solo x , $\omega = \omega_0$; se invece $\omega \neq \omega_0$, "io alle risonanze" è più grande di io, e più tanto più quanto più Q_0 è grande (ad esempio quando L e C me diminuiscono R) ; Le curve di risonanza per un circuito RCL in serie si del tipo



) la cui $(I_0)_{\max} = \frac{E_0}{R}$

osserviamo subito che otteniamo $\frac{(I_0)_{\max}}{\sqrt{2}}$ a, e solo a, ω è tale che

$$Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

, cioè $\omega = \omega_1$ o $\omega = \omega_2$ con

$$\left\{ Q_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1 \quad \text{e} \quad Q_0 \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1 \right\}, \text{ ovvio}$$

tale che

$$\begin{cases} \omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \\ \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} \end{cases} \quad \left(\text{infatti sommando si ottiene che} \right)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} = 0, \quad \text{cioè} \quad \omega_1^2 \omega_2 - \omega_0^2 \omega_2 + \omega_2^2 \omega_1 - \omega_0^2 \omega_1 =$$

$$= 0, \quad \text{cioè} \quad \omega_1^2 \omega_2 + \omega_2^2 \omega_1 = \omega_0^2 (\omega_1 + \omega_2), \quad \text{e siccome}$$

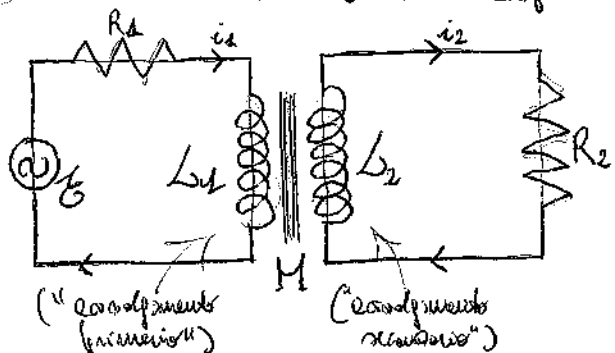
sufficientemente $\frac{\omega_1^2 \omega_2 + \omega_2^2 \omega_1}{\omega_1 + \omega_2} = \omega_1 \omega_2$; allora, sostituito,

abbiamo $\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = \frac{2}{Q_0}$, cioè

$$\omega_2 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2} - \omega_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_1} = 2 \frac{\omega_0^2}{Q_0} ; \quad \text{ma il primo membro è}$$

$(V)_{eff}$ e $(I)_{eff}$ formano così una coppia valida, e dunque possiamo scendere da molti quanto da sempre tra le cose e l'insabbiare.

Per i continui, dalle formule $W = Vi = i^2 R$ è chiaro finché, nelle circuiti elettrici, l'energia elettrica prodotta e bene funzione serve trasformata in energia di alta tensione per una quindi trasferita lungo una linea elettrica al luogo di utilizzazione dove l'energia viene nuovamente trasformata e bene funzione: infatti, volendo trasmettere una certa potenza P , più V equivale a meno i , cioè a meno potenza dissipata per effetto Joule; dopo di che meno V equivale a più i , che è in generale sconsigliato. Questo vale e meglio ripete per le c.e., ma solo hanno il proprio inconveniente delle perdite (ma con $(V)_{eff}$, i_{eff} e R_{eff}) con le quali sono possibile una modello trasformazionale di tensioni; precisamente, per mezzo di un "trasformatore", possiamo ottenere facilmente una c.e. di intensità me o bene funzione da una c.e. di piccola intensità me di alta tensione, e viceversa, con facilità di sempre così ridotte. Un trasformatore nelle sue forme più comuni è così:



Le due bobine, avvolte attorno ad un nucleo di ferro laminato, sono avvolte obliquamente le loro mutue

induttore e in pratica si cerca di ridurre quanto più possibile le dimensioni
 del flusso magnetico; $\mathcal{E}$ è alternato, R_1 è fortemente le
 "piccole" resistenze dell'avvolgimento primario, mentre R_2 comprende soltanto
 le resistenze di contatto e filo elettrico inserito nel circuito secondario;
 l'idea è che L_1 e L_2 siano così facilmente saturati (per
 il numero di spire del ciascun avvolgimento e per il nucleo di ferro) e
 che, per indurre elettromagnetico, si produca nell'avvolgimento secondario
 una f.e.m. indotta che abbia l'intensità desiderata sapendosi
 opportunamente i numeri di spire dei due avvolgimenti. Per questo riguarda
 le intensità i_1 e i_2 di corrente (alternata), da $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$
 e

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{I,1} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_{I,2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$
 otteniamo subito le equazioni di

due circuiti: il primario che equazione $\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_{I,1} = R_1 i_1$,
 cioè $\mathcal{E}_0 \sin(\omega t) - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1$, mentre il secondario
 $\mathcal{E}_{I,2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2$; come sappiamo, le
 soluzioni di tale sistema di eq. diff. corrispondenti alle condizioni
 di regime si ottiene facendo $\begin{cases} i_1(t) = I_1 \sin(\omega t - \alpha_1) \\ i_2(t) = I_2 \sin(\omega t - \alpha_2) \end{cases}$ e

quindi determinando le costanti $I_1, \alpha_1, I_2, \alpha_2$ in modo che le
 eq. diff. in questione sono soddisfatte da ogni istante. Consideriamo
 i due seguenti casi limite particolari.

(a) Circuito secondario "aperto": " $R_2 = \infty$ ", $i_2 = 0$ e le

equazione del circuito primario $\mathcal{E} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1$ è identica (praticamente) a quella di un circuito RCL in risonanza con $R=R_1$, $L=L_1$ e $1/C=0$ ("C = ∞ ") , pertanto sappiamo

che $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$ con $-\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ dato da $\tan(\varphi_1) = \frac{\omega L_1}{R_1}$ e con $I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}$. (Diremo

che che nelle seguenti, per un buon trasformatore, è $R_1 \ll \omega L_1$ cosicché i_1 sia spostata, cioè tale che $\varphi_1 \approx \pi/2$ e cioè tale che la potenza media $(W)_m$ erogata sia ≈ 0 .) D'altra

parte la tensione (indotta) ai morsetti del circuito secondario è $\mathcal{E}_2(t)$:

$$\mathcal{E}_{1,2}(t) = -M \frac{di_1}{dt}(t) = -\omega M I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) = -\frac{\omega M \mathcal{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \cos(\omega t - \varphi_1)$$

effettiva tra la b.t.m. efficace del secondario e del primario risulta

$$\frac{(\mathcal{E}_2)_{\text{eff}}}{(\mathcal{E})_{\text{eff}}} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \stackrel{(R_1 \ll \omega L_1)}{\approx} \frac{M}{L_1} ; \text{ e, il flusso}$$

magnetico concatenato al primario è $\Phi_1 = L_1 i_1$ ($i_2=0!$) , quindi osservando ciascuna delle N_1 spire il flusso è $\frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{L_1 i_1}{N_1}$;

Al non c'è dispersione di flusso fuori dal nucleo di ferro (come qui invece di ferro di B abbiamo tutte le spire del primario e tutte quelle del secondario) , allora il flusso concatenato alle

N_2 spire del secondario è $N_2 \frac{\Phi_1}{N_1} = \frac{N_2 L_1 i_1}{N_1}$, che per definizione deve anche essere uguale a $M i_1$: ricaviamo così

$$M = \frac{N_2 L_1}{N_1} \quad (\text{come già trovato per solenoidi sovrapposti!})$$

Da cui in condizione $\boxed{\frac{(C_2)_{\text{eff}}}{(C_1)_{\text{eff}}} \approx \frac{N_2}{N_1}}$ $\Rightarrow$ "il rapporto di trasformazione"

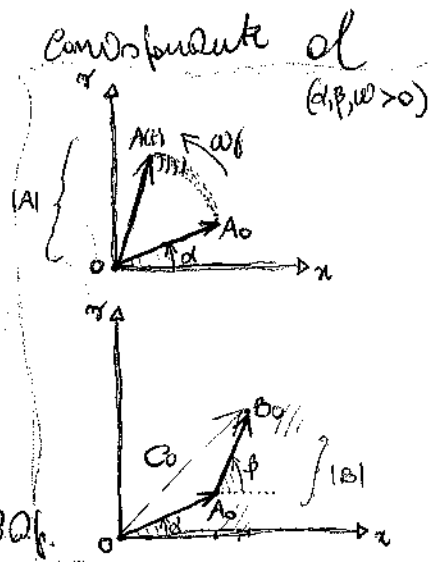
; Dunque, come infatti è logico, per avere il valore di $(C_1)_{\text{eff}}$ occorre che il numero abbia un valore $>$ di ordine rispetto al numero (enumerato così le superficie che "interagisce" il flusso magnetico).

(b) Circuito secondario "chiuso" (con R_2) : Le corrente i_2 ha effetto sul numero rappresentato dal termine $-M \frac{di_2}{dt}$ nelle prime eq., e ciò che quindi accade è che lo sfasamento ϕ_2 tra i_1 ed E diminuisce (rispetto al valore $\pi/2$) e che la potenza ^(compensazione energia) erogata dal primario è "circa uguale" alla potenza ^(compensazione energia) erogata dal secondario (e forte effetto Joule in R_2 e forte caduta alle correnti fronte ad R_{cavo} , che comunque sono "quasi trascurabili" nei buoni trasformatori); inoltre, come osservazioni corrette, è $\boxed{\frac{(C_2)_{\text{eff}}}{(C_1)_{\text{eff}}} \approx \frac{N_1}{N_2}}$: infatti

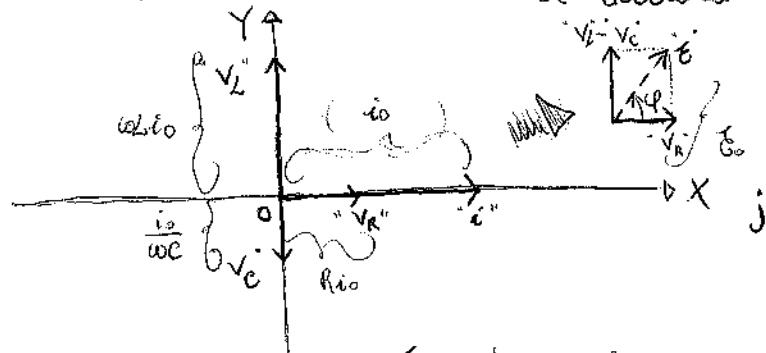
L'uguaglianza della potenza trasmessa equivale a $(i_1)_{\text{eff}} (C_1)_{\text{eff}} = (i_2)_{\text{eff}} (C_2)_{\text{eff}}$, dove ricordiamo che per sfasare meno energia quando la si trasporta e distribuire, cioè per ridurre l'interazione di corrente, occorre usare un trasformatore che inverta il valore di $(C_1)_{\text{eff}}$, per poi richiederlo per più utenti.

Per lo studio di circuiti in c.c., specie in regime stazionario, è
 ormai utile un metodo basato sull'impiego di vettori & di numeri
 complessi. Cominciamo mostrando che una funzione sinusoidale
 della forma $v(t) = |A| \cos(\omega t + \alpha)$ può essere considerata come la
 componente reale di una ω -rotante nel piano complesso $A := |A| e^{i\alpha}$, dove
 $\omega t := \omega t + \alpha$, che è un "vettore rotante" nel piano di
 Argand-Goursat con velocità angolare ω e portatore delle sue proiezioni
 iniziale $A_0 := A(0) = |A| e^{i\alpha} =: \hat{A}$ (vettore complesso), settore quest'ultimo chiamato
 "vettore di Goursat" (immagine di A); è chiaro che A resta
 determinato da A_0 : e qui intanto t è implicito $A = A_0 e^{i\omega t}$.
 Non solo: è sufficiente riferirsi solo ai vettori di Goursat (anzi
 questo si dimostra comunque più generale) alternati ad uguali frequenze
 sia in p.d. $b(t) = |B| \cos(\omega t + \beta)$, proiezione nell'axe x del
 settore rotante $B(t) := |B| e^{i(\omega t + \beta)}$ alla stessa velocità angolare ω di A :
 allora chiaramente l'angolo tra i vettori A e B è costantemente di
 $|\beta - \alpha|$, che è anche quello tra A_0 e B_0 di Goursat; ma
 allora $c(t) := v(t) + b(t)$ è una funzione sinusoidale che (è) la
 proiezione nell'axe x del settore ω -rotante $C(t)$
 settore di Goursat $C_0 := A_0 + B_0$.

In particolare, ad esempio, consideriamo il caso
 di un circuito RCL in serie come quello p.e.
 studiato: otteniamo subito che si come una c.c.
 d'intensità $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$ e che la s.d.f.



ei così gli altri elementi sono rispettivamente $V_R = R i_o \sin(\omega t - \varphi)$,
 $V_C = \frac{i_o}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi - \pi/2)$ e $V_L = \omega L i_o \sin(\omega t - \varphi + \pi/2)$;
 e' ovvio quindi che i vettori di i e V_R
 sono paralleli (e concordi), mentre quelli corrispondenti a V_C e V_L
 sono perpendicolari ai precedenti ed antiparalleli fra loro : scegliamo
 un sistema di riferimento XOY con l'asse X come nuovo il vettore di
 i e V_R , e cioè tipo



come detto, ora il vettore corrispondente alla f.e.m. $\mathcal{E}$ e' esattamente
 la somma dei vettori corrispondenti a V_R , V_C e V_L , che ha
 stessa di i e V_R la stessa del vettore di i e V_R , per cui
 la lunghezza $\mathcal{E}_o = \sqrt{(R i_o)^2 + (\omega L i_o - \frac{i_o}{\omega C})^2} = i_o \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} =$
 $= Z i_o$ e' dato quindi rispettivamente per φ tale che $\tan \varphi =$
 $= \frac{(\omega L i_o - \frac{i_o}{\omega C})}{R i_o} = \frac{1}{R} (\omega L - \frac{1}{\omega C})$: otteniamo così risolti in
 un altro modo il problema del circuito, visto che abbiamo l'equazione
 i_o (ovvero risolvendo Z) e φ ! (Notiamo poi che in
 effetti $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_o \sin(\omega t - \varphi + \varphi) = \mathcal{E}_o \sin(\omega t)$)

Vediamo invece per uno dei numeri complessi, scriviamo sufficientemente
 dell'equazione del circuito $L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ (ovvero
 che effluo le equazioni di questo circuito, come sopra) ; allora e'

quelle di immaginare $\mathcal{E}$ e di come "Completo" : se cioè $\mathcal{E}$ è
 i sono i numeri complessi corrispondenti rispettivamente ai vettori di sinus
 e coseno ai vettori " $\cos \omega t$ " e " $\sin \omega t$ ", allora $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}} e^{j\omega t} =$
 $= \hat{\mathcal{E}} \cos(\omega t) + j \hat{\mathcal{E}} \sin(\omega t) =: \mathcal{E}_1 + j \mathcal{E}_2$ e analogamente $i =$
 $= \hat{i} e^{j\omega t} = \hat{i} \cos(\omega t) + j \hat{i} \sin(\omega t) = i_1 + j i_2$ per cui l'eq. diff. è
 (per linearità) $\left(L \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{1}{C} i_1 \right) + j \left(L \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{C} i_2 \right) =$
 $= \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} + j \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t}$, cioè $\int \left\{ \begin{aligned} L \frac{\partial^2 i_1}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_1}{\partial t} + \frac{1}{C} i_1 &= \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} \\ L \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{C} i_2 &= \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} \end{aligned} \right.$;

ora il punto è questo : nel caso $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$, e' allora $\mathcal{E} =$
 $= \mathcal{E}_0$ reale ed $\mathcal{E}$ è la parte immaginaria della f.e.m. complessa sotto
 forma i ed $\mathcal{E}_2$; ma allora ovviamente ci interessa i_2 , e
 appunto l'altra è quella da risolvere l'equazione complessa per trovare
 i , e quindi $i_2 = \text{Im}(i)$, piuttosto che risolvere l'equazione "reale"

$L \frac{\partial^2 i_2}{\partial t^2} + R \frac{\partial i_2}{\partial t} + \frac{1}{C} i_2 = \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t}$. Questo è anche, naturalmente, risolvibile
 bene via immaginaria : scriviamo infatti $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}} e^{j\omega t}$ complesso e
 cerchiamo di trovare $i = \hat{i} e^{j\omega t}$, cioè $\hat{i}$; osservando che

$\frac{\partial i}{\partial t} = j\omega i$ e che $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = (j\omega)(j\omega)i = -\omega^2 i$, le nostre
 equazione complessa è semplicemente $\left(-L\omega^2 + jR\omega + \frac{1}{C} \right) \hat{i} e^{j\omega t} =$
 $= j\omega \hat{\mathcal{E}} e^{j\omega t}$, cioè $\hat{i} = \frac{j\omega \hat{\mathcal{E}}}{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)}$; poniamo
 quindi definire un'impedenza complessa $\hat{Z} := R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} =$

$= R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + iX$, dove vediamo che l'impedenza complessa
 R , $i\omega L$ e $\frac{1}{i\omega C} = -i/\omega C$ sommano separatamente a R , L e C ,
 e troviamo così osservando che $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = Z$;

Comunque $\underline{Z}$ che in generale ha parte immaginaria $X \neq 0$ e cioè
 è diverso dal fatto che se c.e. non ne in fase con la tensione
 applicata: infatti, se $\underline{i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ ricavato, scrivendo

$\underline{Z} = Z e^{i\phi}$ con il coseno $\cos(\phi) = \frac{R}{Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{Z}$,

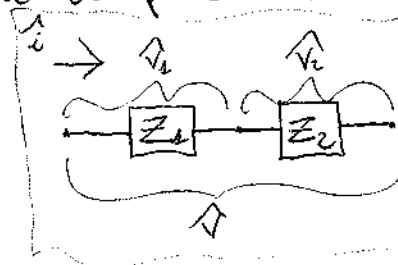
osserviamo che effettivamente $\underline{i} = \frac{1}{Z} e^{-i\phi}$, per cui $i = \frac{1}{Z} e^{i(\phi - \pi)}$.

Abbiamo finito perché adesso ci otteniamo $\underline{i}$!

Consideriamo il circuito ad adf. si vede un certo elemento, possiamo
 $\underline{V} := \underline{Z} \underline{i}$ = la d.d.f. complessa tra pro^{te}stazioni dell'impedenza
 complessa $\underline{Z}$ per una delle correnti $\underline{i}$: che la corrente sia costante
 o alternata, comunque con e vedere le leggi di Kirchhoff e
 i teoremi sulle reti lineari; inoltre, se due elementi sono in
 serie e cioè attraversati dalle medesime correnti $\underline{i}$, allora l'impedenza
 complessa totale è la somma delle singole impedenze complesse:

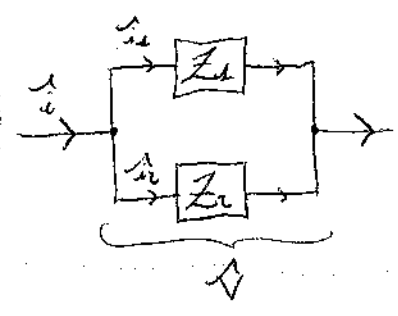
infatti $\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 \xRightarrow{(i)} \underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$;

se invece due elementi sono in parallelo e cioè alla
 medesima d.d.f. complessa $\underline{V}$, allora il reciproco dell'impedenza totale



Caratteristica è la somma dei reciproci delle singole impedenze caratteristiche:

in parallelo: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

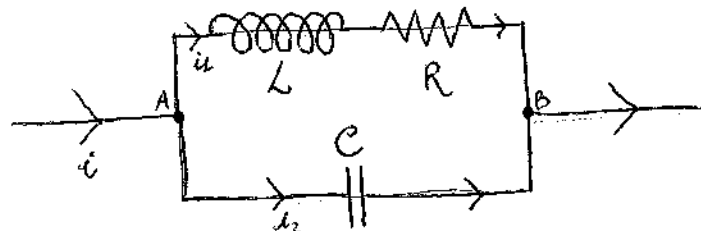


Proviamo a usare tutte queste formule "Caratteristiche" e circuiti equivalenti per ottenere infine i risultati "reali"!

Prima di due esempi, però, terminiamo accennando all' "effetto pelle" : si tratta del fenomeno tale per cui, all'aumentare della frequenza, le correnti tendono a scorrere in strati più sottili dell'ora del filo, cioè le correnti sono di preferenza negli strati superficiali del filo; ciò è tanto più accentratissimo quanto più è grande la frequenza della tensione, ma funziona un notevole ostacolo alla penetrazione del filo in modo che le resistenze aumentano sensibilmente (e ciò spiega anche come mai i fili (cavi) per l'alta tensione nel caso di c.a. ad alta frequenza). Al motivo qualitativo è semplice: se l'intensità di corrente nel filo cresce col tempo, il campo magnetico "all'interno" cresce con una ω e si produce una f.e.m. (induzione del tempo) tale che le correnti sono effettive di preferenza all'esterno piuttosto che all'interno: in questo modo il campo magnetico all'interno diminuisce, e con esso pure la f.e.m. indotta.

ES. 1. : Consideriamo "il circuito equivalente" (o "circuiti

risorci in parallelo)



i rami hanno impedenze complesse $\hat{Z}_1 = R + i\omega L$ e $\hat{Z}_2 = \frac{1}{i\omega C}$, per

cui l'impedenza complessa totale tra A e B è data dalla relazione

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C \quad (=) \quad \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

(perché semplicemente $R^2 + \omega^2 L^2 = (R + i\omega L)(R - i\omega L)$), dalle quali ricaviamo $\hat{Z}$ e quindi l'impedenza "modulare" $Z = |\hat{Z}|$; fornendo

o considerando $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$, nel caso particolare in

cui $C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = 0$, cioè $C(R^2 + \omega^2 L^2) = L$, cioè $\omega^2 = \omega_p^2 =$

$$= \frac{1}{L^2} \left(\frac{L}{C} - R^2 \right) = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q_0^2} \right) \quad (\leq \omega_0^2), \text{ e'}$$

effettivo $\hat{Z} (= \frac{R^2 + \omega_p^2 L^2}{R})$ reale e cioè la stessa alternata che

A e B e la c.a. i sono in fase, e per definizione impatti

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\hat{Z}} = \frac{R \mathcal{E}}{R^2 + \omega_p^2 L^2} = \frac{CR \mathcal{E}}{L} = \frac{R \mathcal{E}}{\omega_0^2 L^2} \quad ; \text{ i e'}$$

tanto minore quanto più R delle bobine è piccolo, per cui Q_0 è tanto maggiore e allora $\omega_p^2 \approx \omega_0^2$, per cui il valore di Z è quello minimo possibile; per $R \geq 0$, il valore di $\omega = \omega_0$ è tale che il circuito subivamente impedisce totalmente il passaggio di corrente.

Mostriamo comunque che, per R "grande" e $\omega \neq \omega_0$, è pur sempre

$$\hat{i}_2 = i\omega C \mathcal{E}, \text{ ed è infatti } \left| \frac{\hat{i}_2}{i} \right| \approx \left| \frac{i\omega C \mathcal{E} L}{CR \mathcal{E}} \right| \approx Q_0 \quad \checkmark$$

ES. 2. : calcoliamo finalmente le intensità delle correnti i_1 e i_2 nei circuiti primario e secondario rispettivamente del trasformatore visto in presenza ; con l'introduzione di $\mathcal{E} = \mathcal{E} e^{i\omega t}$, $i_1 = \hat{i}_1 e^{i\omega t}$ e $i_2 = \hat{i}_2 e^{i\omega t}$, le equazioni
$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = \mathcal{E} \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 = 0 \end{cases}$$
 diventano

$$\begin{cases} i\omega L_1 \hat{i}_1 + i\omega M \hat{i}_2 + R_1 \hat{i}_1 = \mathcal{E} \\ i\omega L_2 \hat{i}_2 + i\omega M \hat{i}_1 + R_2 \hat{i}_2 = 0 \end{cases}, \text{ da cui deduciamo subito che}$$

$$\hat{i}_2 = \frac{-i\omega M \hat{i}_1}{i\omega L_2 + R_2} \quad \text{e} \quad \mathcal{E} = \hat{i}_1 \left[R_1 + i\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2 + R_2} \right] =$$

$$= \left[R_1 + \frac{i\omega L_1 R_2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)}{i\omega L_2 + R_2} \right] \hat{i}_1 \quad \left(\text{e, considerando i moduli,} \right)$$

in i_1 e i_2 (anche) . Nel caso particolare di "buon" trasformatore abbiamo $M^2 \approx L_1 L_2$ e $R_2 \ll \omega L_2$, e quindi $\hat{i}_2 \approx -\frac{M}{L_2} \hat{i}_1 \approx$
 $\approx -\frac{L_1}{M} \hat{i}_1$ e $\mathcal{E} \approx \left[R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2 \right] \hat{i}_1$, da cui è evidente che
 l'effetto che i_1 e i_2 sono sfasati di π rad ; inoltre, osservando
 nell'ipotesi che il flusso magnetico sia nullo, da $M = \frac{N_2}{N_1} L_1$ deduciamo

$$\text{che } i_2 = \frac{N_1}{N_2} i_1 \quad \text{Ora, tenendo presente } \hat{i} = \frac{\mathcal{E}}{Z},$$

$$\text{da } \mathcal{E} \approx \left[R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2 \right] \hat{i}_1 \quad (=) \quad \left(R_1 + R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2} \right) \hat{i}_1 \quad (L_1 L_2 = M^2 =$$

$$= \frac{N_2^2}{N_1^2} L_1^2 !)$$

osserviamo che è come se fosse che la resistenza R_2 fosse nel primario una resistenza $R_2 \frac{N_1^2}{N_2^2}$; analogamente

$$\hat{i}_1 \approx -\frac{M}{L_1} \hat{i}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \hat{i}_2 \Rightarrow \mathcal{E} = \left(R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 \right) \hat{i}_1 =$$

$$= - \left[\frac{N_2}{N_1} R_1 + \frac{N_1}{N_2} R_2 \right] \hat{i}_2, \text{ cioè } - \frac{N_2}{N_1} \hat{\mathcal{E}} = \left[R_2 + \frac{N_2^2}{N_1^2} R_1 \right] \hat{i}_2 \text{ ed}$$

o' come se la f.e.m. $\hat{\mathcal{E}}$ e la resistenza R_1 del generatore "compensato" nel secondario con una f.e.m. $-\frac{N_2}{N_1} \hat{\mathcal{E}}$ e una resistenza $R_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$.

Infine la potenza (media) W_1 erogata dal generatore nel primario è
 $W_1 = (\hat{\mathcal{E}}_1)_{\text{eff}} (\hat{i}_1)_{\text{eff}} \cos(\varphi) = (\hat{i}_1)_{\text{eff}}^2 Z_1 \cos(\varphi) = (\hat{i}_1)_{\text{eff}}^2 \text{Re}(Z_1) =$
 $= (\hat{i}_1)_{\text{eff}}^2 \left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \right)$, mentre quella dissipata nel secondario è

$$W_2 = R_2 (\hat{i}_2)_{\text{eff}}^2 = \frac{\omega^2 M^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \hat{i}_1^2 \quad \left(\text{in quanto } \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + R_2} = \right.$$

$$\left. = \frac{-1}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} [\omega^2 M L_2 + j\omega M R_2] \text{ che modulo al quadrato } \frac{1}{(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)^2} [\omega^2 (M^2 L_2^2 + M^2 R_2^2)] \right)$$

$$= \frac{\omega^2 M^2 (R_2^2 + \omega^2 L_2^2)}{(R_2^2 + \omega^2 L_2^2)^2} \quad \text{): osservo così che } W_1 =$$

$= (\hat{i}_1)_{\text{eff}}^2 R_1 + W_2$, cioè che la potenza erogata dal generatore viene assorbita nel secondario e fatta la somma dà la potenza dissipata per effetto Joule in R_1 .

Si osserva sperimentalmente che le forze di Coulomb fra due cariche elettriche q_1 e q_2 poste a distanza $b > 0$ non nel vuoto ma in un mezzo materiale isolante ("dielettrico") , sia F_m , che intensità minore rispetto alla stessa forza ma nel vuoto, F_0 :

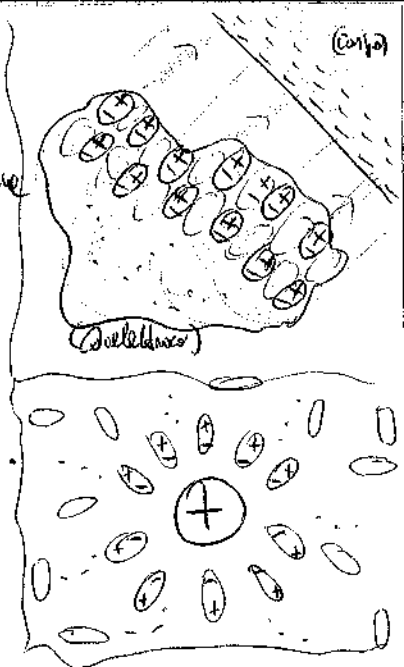
$$|F_m| \leq |F_0| \quad ; \text{ come abbiamo visto sopra, il mezzo}$$

è che alle forze (F_0) tra le cariche si sommano le interazioni con le altre cariche presenti nel mezzo. Potremmo comunque verificare che il rapporto $\left\| \epsilon_n := \frac{|F_0|}{|F_m|} \right\|$ (≥ 1) è indipendente da q_1, q_2 e da l , ossia che caratterizza il mezzo materiale: ϵ_n è detta "costante dielettrica relativa" del mezzo considerato (ed è $\neq 1 \Rightarrow$ il mezzo è il vuoto); è quindi chiaro che dovremo avere
 equiv. $|F_m| = \frac{|F_0|}{\epsilon_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_n} \frac{q_1 q_2}{l^2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{l^2} \right)$ in
 forma generale si considerano $\left| \epsilon := \epsilon_0 \epsilon_n \right|$ ($\geq \epsilon_0$), "costante dielettrica assoluta" del mezzo considerato.

Giudichiamo adesso ad alcune cose eccelle in un dielettrico: sottofornendo ad un corpo dielettrico, molti elettroni di ogni molecola spariscono fuori ed entrano sotto il corpo mentre mille cariche positive fanno da loro sostituti, per cui si ha una deformazione delle molecole che consiste in uno spostamento degli elettroni rispetto ai relativi nuclei; per natura dei dielettrici, tale deformazione microscopica è in generale "minimale", nel senso che lo spostamento si riduce ad una piccola frazione del diametro molecolare.

Questo è il fenomeno della "polarizzazione molecolare", in conseguenza del quale il dielettrico si è "polarizzato". Così, ad esempio, un corpo dielettrico necessariamente risale ad ottenere anche un dielettrico neutro: infatti, infatti, gli elettroni si comportano in modo da essere, nel loro complesso, leggermente fuori bilanciati dal corpo di quanto sono i nuclei fissi; il risultato è che le forze attrattive tra cariche dello stesso segno hanno il sopravvento su quelle repulsive

tra cariche di egual segno. Analogamente valdiamo
 anche! $|F_m| \leq |F_0|$ tra due cariche: c'è una
 so queste altre cariche sono in x' le cariche di segno
 opposto degli atomi vicini, effetto di schermatura, e
 così viene parzialmente "schermato" dal loro effetto.



In ordine del momento di dipolo, il campo elettrico generato da
 una molecola può considerarsi come somma del campo dovuto a coppia di
 elettroni e protoni, coppia che contribuisce a dipoli elettrici;

ricordando che, nell'espressione di dipolo elettrico, il potenziale elettrico

$$\text{da un dipolo è } V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cdot r}{|r|^3} \stackrel{(q=-q)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{|r|^3} =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \cdot \nabla \left(\frac{1}{|r|} \right), \text{ il potenziale elettrico generato da una}$$

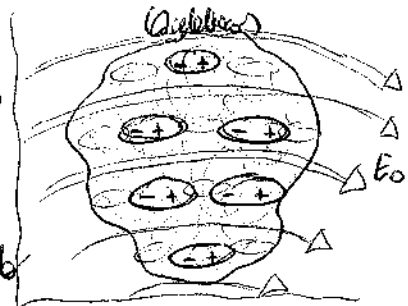
molecola in punti r dello spazio, con $|r| \gg$ dimensioni molecolari, è

$$(\text{per linearità}) \quad V(r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_i p_i \right) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|r|} \right) =: \frac{P \cdot r}{4\pi\epsilon_0 |r|^3},$$

ovvero posto $\boxed{P := \sum_i p_i}$ il momento di dipolo elettrico della molecola

è quindi evidente che, nell'espressione di dipolo elettrico, una molecola
 neutra genera un campo uguale a quello di un dipolo elettrico con
 momento di dipolo uguale alla somma dei momenti di tutte le
 coppie elettrone-protoni che formano la molecola. Mettendole P
 che in generale modulo "piccolo" (anche dell'ordine di 10^{-30} cm).

Ora, sotto l'azione di un campo elettrico esterno E_0 , ogni molecola di un dielettrico tende a disporsi parallelamente al campo; inscrivendo con ΔV un elemento



di volume interno ad un punto fisso del dielettrico, poniamo supposto sufficientemente piccolo per poter trascurare le sue dimensioni da un punto di vista macroscopico (nel senso che, "spostandosi" all'interno di ΔV , le variazioni relative delle grandezze fisiche macroscopiche sono del tutto trascurabili).

Un sufficientemente grande per contenere un numero elevato di molecole (possiamo benissimo aver inteso le costazioni finché in ΔV ^(per poter esprimere i valori delle molecole) in fac. spesso ci sono comunque tante molecole): finalmente, si vede che in una sfera di raggio $10^{-8} m$ son contenute circa 10^6 molecole, e che allora, forte, di solito, le grandezze fisiche macroscopiche non variano sensibilmente in distanza dell'ordine di $10^{-8} m$), e quindi possiamo ragionare con:

se n è il numero di molecole per unità di volume, allora il valore medio P_0 del momento di dipolo delle molecole contenute in un elemento di volume ΔV è dato dalla relazione:

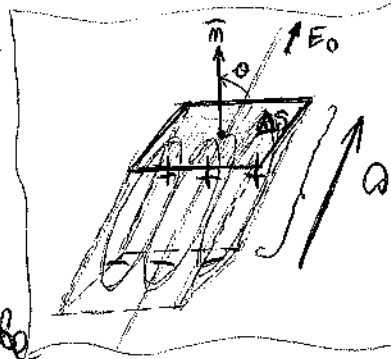
$$n P_0 \Delta V = \sum_{i \in \Delta V} p_i \quad \text{e} \quad \text{come la somma dei momenti dei dipoli contenuti in } \Delta V$$

se $E_0 \neq 0$, allora anche $P_0 \neq 0$ e per le costanze isotrope risulta persino parallelo al campo stesso.

Definiamo $\boxed{P := \frac{\sum p_i}{\Delta V} = n P_0} \quad \left(\text{in } \frac{C}{m^2} \right)$,

"potenziale dielettrico", come il momento di dipolo per "unità" di volume del dielettrico (che in generale varierà da punto a punto del dielettrico, e pure col tempo); le sue informazioni

Considera nel fatto che tutte le proprietà macroscopiche legate alla polarizzazione di un dielettrico possono essere espresse in termini del campo $\mathbf{E}$, o in alternativa essere collegate direttamente alle distribuzioni di carica associate a $\mathbf{E}$. Vedremo: per definizione di $\mathbf{D}$, le cariche positive di fatto i dipoli producono una distribuzione schematica di cariche positive con densità $\rho_+ := nq$, mentre quelle negative una densità opposta $\rho_- := -nq$; se il dielettrico è polarizzato uniformemente, allora tali distribuzioni si comportano e il dielettrico offre complessivamente neutro; in generale, invece, la situazione è diversa alle superfici esterne del dielettrico: poiché i dipoli tendono a allinearsi parallelamente al campo, le cariche su un elemento ΔS delle superficie esterne vengono portate dai dipoli contenuti nel parallelepipedo di base ΔS e altezza d , il cui volume è $|\mathbf{d}| \cos(\theta) \Delta S = d \cdot \bar{m} \Delta S$; ma allora dentro tale parallelepipedo vi sono $n d \cdot \bar{m} \Delta S$ dipoli, per cui le cariche sono $q n d \cos(\theta) \Delta S$, cioè la densità superficiale di cariche di polarizzazione risulta



$\sigma_{\text{pol}}(\Delta S) = q n d \cos(\theta) \Delta S = (q n d) \cos(\theta) \Delta S = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{n}}$, essendo $n q d = n p_0 =: P$; in conclusione $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{n}}$, ossia è la componente di $\mathbf{P}$ secondo la normale $\bar{\mathbf{n}}$ alle superficie nel punto considerato; osserviamo che tale relazione include giustamente il caso di σ_{pol} , che è 0 se $\theta = \pm \pi/2$, e per

$\sigma_f > 0 \Leftrightarrow -\pi/2 < \theta < \pi/2$. Or, nel caso di polarizzazione non uniforme (in perpendicolare), si ha anche una densità di volume di cariche di polarizzazione date dalla formula $\boxed{P_f = -\cos\theta P}$ [considerando]

infatti un parallelepipedo di volume ΔV interno al dielettrico, e consideriamo una sua faccia di area ΔS ; stabilendo E_0 , in seguito alla polarizzazione molecolare no che del foggiato di cariche abbiamo ΔS : sufficiente che lato cariche siano negative e che $-q$ ad un altro subisce lo spostamento di $-d$, è chiaro che la carica che forse abbiamo ΔS è $q \cos\theta \cdot \Delta S$, $= P \cdot \bar{n} \Delta S$; per l'orientamento di ΔS , il flusso di P attraverso le superficie del parallelepipedo è uguale alla carica uscente da esso, che è ovviamente $-P_f \Delta V$ (ovvero che $P_f \Delta V$ è la carica che il parallelepipedo riceve o fornisce): la conclusione è per Gauss, in quanto il flusso di P attraverso S è $(\cos\theta P) \Delta V$. $\square$

Osserviamo quindi che le cariche di polarizzazione (all'interno e sulle superficie di un dielettrico) si compensano tra loro dando una carica totale nulla: infatti $q_f = \int_{S_{ext}} \sigma_f dS + \int_V P_f dV =$
 $= \int_{S_{ext}} P \cdot \bar{n} dS + \int_V (-\cos\theta P) dV = 0$ per Gauss. Comunque le distribuzioni di questa carica di polarizzazione fanno un contributo al campo elettrico complessivo, che calcoleremo dopo.

Adesso fissato immaginiamo che E_0 vari col tempo; si aveva

di conseguenza delle cariche elettriche; se σ_+ e σ_- sono rispettivamente le cariche medie delle cariche positive e negative del dielettrico, allora otteniamo che la densità $\dot{\sigma}_f$ di cariche di polarizzazione è (come vedremo!):

$$\dot{\sigma}_f = nq\sigma_+ - nq\sigma_- = \frac{\partial}{\partial t} [nq(\sigma_+ - \sigma_-)] = \frac{\partial}{\partial t} (nq\phi_0), \text{ cioè}$$

$$\boxed{\dot{\sigma}_f = \frac{\partial P}{\partial t}} \quad ; \text{ allora anche per le cariche di polarizzazione}$$

vale un'equazione di continuità: $\text{div } \dot{\sigma}_f \stackrel{(\text{proprietà})}{=} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } P) = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}$,
cioè effluo $\text{div } \dot{\sigma}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$. Chiusamente $\dot{\sigma}_f$ contribuisce
al campo magnetico totale, come vedremo fra poco.

Il contributo V_f al potenziale elettrostatico V_0 di E_0 , dovuto alle cariche di polarizzazione del dielettrico, è $V_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{ext}} \frac{\sigma_f dS}{|r|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_f dV}{|r|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{S_{ext}} \frac{P \cdot \vec{n}}{|r|} dS + \int_V \frac{(-\text{div } P)}{|r|} dV \right]$,

e quindi il campo elettrico corrispondente è $E_f = -\nabla V_f$: il campo elettrico complessivo è per cui $E = E_0 + E_f = -\nabla(V_0 + V_f)$, "ovvio" è irrotazionale, cioè con rot $E = 0$, e per cui vale ovviamente il teorema di Gauss e fatto di calcolare anche le cariche di polarizzazione. Se allora S è una superficie chiusa e interna al dielettrico che contiene cariche complessive q_f di

potenziale ϕ e q non ad potenziale, il campo $\Phi_0(E) (=$
 $= \frac{q}{\epsilon_0} (q + q_f) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho + \rho_f) dV$, da cui si evince
 che (per il teorema delle divergenze ^(in $\mathbb{R}^3$) di Gauss) $\text{div } E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_f)$

equivalentemente; l'idea ora è quella di introdurre un nuovo
 campo vettoriale che permetta (ovviamente) di esprimere il campo di
 Gauss nelle sue forme integrale e differenziale senza dover fare appello
 riferimento alle cariche di polarizzazione: ovvero impo che

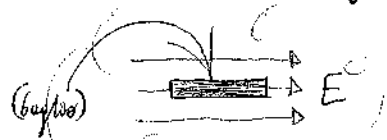
$$q_f = \int_V \rho_f dV = - \int_V \text{div } P dV \stackrel{(\text{tes. Gauss})}{=} -\Phi_S(P), \text{ dunque}$$

$$\Phi_S(E) = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q_f) \Leftrightarrow \epsilon_0 \Phi_S(E) + \underbrace{\Phi_S(P)}_{(-q_f)} = q \Leftrightarrow$$

$\Phi_S(\epsilon_0 E + P) = q$; introduciamo dunque il vettore induzione
 elettrica " $\boxed{D := \epsilon_0 E + P}$ " (in $\frac{C}{m^2}$) per avere semplicemente

$$\boxed{\Phi_S(D) = q}, \text{ cioè } (\text{div } D = \rho) \text{ (che forniamo in effetti}$$

$$\text{ottenere da } \text{div } E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \text{div } P) !)$$



Parlando di E , concludiamo con le seguenti semplici osservazioni:

avendo in mente $E = \frac{F}{q_{\text{probe}}}$, per conoscere E all'interno del

dielettrico basta porvi un "foglio" parallelo alle linee di campo di E
 stesso e misurare entro il foglio; infatti E non sarà modificato poiché
 le cariche si "fanno" ~~nel senso che solo una~~

"beni" sono piccole, mentre i miei opposti hanno ∞ molte.

La polarizzazione di un dielettrico dipende sia dalla (frequenza) della sua molecola sia dal campo elettrico totale E agente su esso (al quale contribuisce il dielettrico stesso); si osserva sperimentalmente che solo per dielettrici isotropi si ha proporzionalità tra P ed E ("quasi perfetta", si sa: in effetti dovremmo considerare E_0 , non E); ma, come dicimus, una molecola del dielettrico sotto l'azione di E_0 si polarizza e come delle dipoletti mutuo subito delle cariche negative rispetto a quelle positive, dunque formano coppie conformemente con l'osservazione sperimentale che (per un dielettrico isotropo) sia P_0 proporzionale ad E : $P_0 = \alpha E_0 E$, dove α è una costante caratteristica delle molecole chiamata "polarizzabilità molecolare" (in m^3), da cui $\|P = n P_0 = n \alpha E_0 E =: \chi E_0 E\|$ essendo posto $\boxed{\chi := n \alpha}$, numero chiamato "susceptibilità elettrica" del dielettrico. Entro limiti abbastanza estesi, χ non dipende da E (per semplicità, in generale, della temperatura del dielettrico e magari del punto considerato del dielettrico stesso); inoltre sperimentalmente risulta sempre $\chi \geq 0$. Dunque, dalle proporzionalità $P = \chi E_0 E$ segue immediatamente che $\|D := E_0 E + P = E_0 (1 + \chi) E =: \epsilon E\|$, essendo posto $\epsilon := E_0 (1 + \chi)$: in effetti si osserva che

$$\epsilon_1 = 1 + \chi \quad , \quad \text{per cui} \quad \left\| \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_1 \epsilon_0 \right\| .$$

Nel caso di ϵ_0 variabile nel tempo (e quindi di P variabile nel tempo), la corrente di polarizzazione $i_f = \frac{\partial P}{\partial t}$ porta un contributo al campo magnetico complementare uguale a (1° di Laplace) $B_f = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{i_f \times r}{r^3} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \times r dV$, da cui è anche evidente che sia $\nabla \cdot B_f = 0$: (per B_f è solenoidale). Vale poi naturalmente (per $B = B_0 + B_f$ complementare) il termine di "Ampère" generale, e sotto di considerare anche i_f oltre che i max di polarizzazione: come noi $B = \mu_0 (i + i_f + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$, = $\mu_0 (i + \frac{\partial P}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) \stackrel{\text{da D}}{=} \left\| \mu_0 (i + \frac{\partial D}{\partial t}) \right\|$; il termine $\frac{\partial D}{\partial t}$ viene chiamato "Corrente di spostamento" e nel suo significato fisico basteremo far esenti.

(Stiamo così sempre più affermando come l'introduzione di D semplifichi notevolmente le cose nelle (specie nei dielettri!))

(Sotto l'azione di ϵ_0 un dielettrico si polarizza, ma se le sue interazioni sono un certo valore limite (chiamato "ripetto dielettrico") un elettrone di una molecola può rompere il legame e allontanarsi da lei (come le molecole viene ionizzate da ϵ_0); gli elettroni così strappati da un certo numero di molecole saranno poi

naturalmente accelerati da E_0 , ed infatti altre molecole fanno librare
 altri elettroni: nel conseguente "frangimento e cessione" si creano
 onde di conduttione per gli elettroni e, in effetti, una onda ha
 gli ioni e "come mezzo" gli elettroni; ora, a causa della resistenza
 (elettrica) del dielettrico, questo si risolve localmente e fanno
 formazione delle scintille che contribuiscono in grande e mostruosi
 permanentemente al perfetto isolamento del dielettrico. Quando tutto
 questo si dissolvono, e così per ottenere un E_0 con grande intensità
 si può sfruttare "l'effetto delle punte", cioè il fatto (dimostrato)
 che, per un conduttore a un dato potenziale, l'intensità del campo
 elettrico è maggiore in vicinanza del punto della superficie del conduttore
 in cui il raggio di curvatura è minore.

Vediamo infine che, per un qualunque sistema di cariche distribuite
 su conduttori in presenza di dielettrici, nelle regioni di spazio dove
 il campo elettrico E e la sua densità si ha una densità
 (volumetrica) di energia potenziale associata al campo E stesso data da

$$\boxed{U = \frac{1}{2} D \cdot E} \quad \left(\text{effettivamente in } \frac{J}{m^3} = \frac{N}{m^2} \right) \quad \left[\text{infatti l'energia} \right]$$

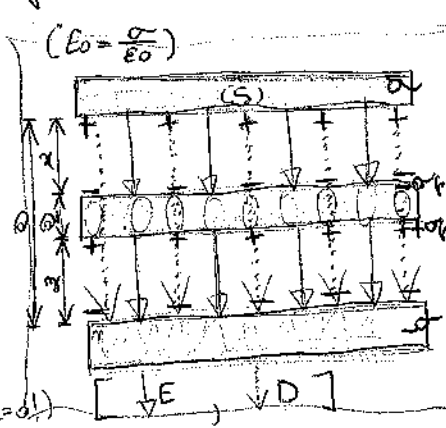
potenziale del sistema di cariche in questione, con densità p nelle regioni
 di spazio V tale che ogni suo elemento di volume dV sia ad un
 potenziale elettrico V , vale $\left\{ U = \frac{1}{2} \int_V p dV \right\}$ (vedi
 dopo!), $\stackrel{(p=D \cdot E)}{=} \frac{1}{2} \int_V (D \cdot E) dV = \frac{1}{2} \int_V (D \cdot \nabla V) dV$
 $\stackrel{(+E \cdot \nabla V)}{=} \frac{1}{2} \int_V E \cdot \nabla V dV$

(pochi' $\text{div}(\mathcal{E}F) = \mathcal{E} \text{div} F + \nabla \cdot F$) ; ora questo integrale rende
 lo stesso computando $V := \mathbb{R}^3$, ed è somma di $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} D \cdot E dV$
 con $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \text{div}(\nabla D) dV$, $\stackrel{(\text{Gauss!})}{=} \frac{1}{2} \cdot \text{limite "all'infinito" di } \underbrace{\nabla D}_{\substack{(\approx 1/r^2) \\ (\approx 1/r^2)}} = 0$ in
 quanto $\mathcal{E} \propto 1/r^3$: in conclusione $U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} D \cdot E dV$, che
 ovviamente c'è la fine. □ (Verifichiamo infine (A) :

notiamo anzitutto che, per quanto sia costante, se in ogni punto della
 sfera osserviamo la densità di carica per una stessa fetta allora la
 nostra situazione è ancora di equilibrio e con il potenziale elettrostatico
 variato per un uguale fattore ; inoltre, per osservare la carica ρdV
 in dV (che è a potenziale φ) fino al valore $(\rho + \partial \rho) dV$, il
 nuovo lavoro è chiaramente $(-\nabla \varphi) \rho dV$ (è come far variare la carica
 ρdV dall'"infinito" a dV !) e quindi si che un conseguente incremento
 d'energia potenziale uguale a $\nabla \varphi \rho dV$. Dello ciò, è ovvio che
 ovviamente $U = -$ nuovo computo per far variare in V la carica ρV (questo
 intuitivamente tale carica era nulla), per ogni $0 \leq \gamma \leq 1$ osservando in
 ogni punto della sfera la densità di carica dal valore $\gamma \rho$ al
 valore $(\gamma + \partial \gamma) \rho$, dove il potenziale è γV , computando $|d\mathcal{E}| =$
 $= dU = \int_V (\gamma dV) (\partial \gamma \rho) dV$: in conclusione otteniamo chiaramente
 che $U = \int_0^1 \underbrace{\left[\int_V \gamma \rho dV \right]}_{(\text{Cost. in } \gamma)} \partial \gamma = \underbrace{\left(\int_V \rho dV \right)}_{(=\frac{1}{2})} \cdot \underbrace{\int_0^1 \partial \gamma}_{(=\frac{1}{2})}$

(o per simmetria...)

ES. 1 : calcoliamo le risposte di un condensatore piano con un dielettrico isotropo. Il campo elettrico E (compensato) è perpendicolare alle armature (anche perché P e quindi D sono a lui paralleli) e che intensità $|E| = \frac{\sigma - \sigma_P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - |P|}{\epsilon_0}$ (cioè $\sigma_P = |P|$)
 (in effetti: l'unità del dielettrico $P = \epsilon_0 E$)



cioè tale che $\epsilon_0 |E| + |P| = \sigma$: è equiv. $D = \sigma$. Anche tra le armature è $\Delta V = V_+ - V_- = \int E \cdot ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (n+m) +$

$+\frac{\sigma - |P|}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \omega - \frac{|P|}{\epsilon_0} \omega$, < di quello che avremmo in assenza del dielettrico (cioè effetto $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \omega$) : equivalentemente

le risposte del condensatore risulta più grande, precisamente se $C =$

$$= \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \sigma S}{\sigma \omega - |P| \omega} = \frac{\epsilon_0 S}{\omega - \omega |P|/\sigma} \quad (\text{mentre senza il dielettrico sarebbe } \frac{\epsilon_0 S}{\omega}) ; \text{ ma per ipotesi il dielettrico è isotropo,}$$

per cui $|P| = \chi \epsilon_0 |E| = \chi \epsilon_0 \frac{|D|}{\epsilon} = \left(\frac{\chi}{\epsilon_r} \right) \sigma$ e di conseguenza (fine)

C è una costante caratteristica del sistema, dipendente solo dalle sue geometrie e dalle nature del dielettrico, con valore $C = \frac{\epsilon_0 S}{\omega - \omega \frac{\chi}{\epsilon_r}} =$

$$= \frac{\epsilon S}{\epsilon_r \omega - \chi \omega} \stackrel{(\chi = \epsilon_r - 1)}{=} \frac{\epsilon S}{\epsilon_r (\omega - \omega') + \omega'} \quad (\text{che inoltre è indipendente da } n \text{ e}$$

da m , cioè da dove collochiamo il dielettrico) ; se in formato il dielettrico riempie tutto lo spazio ($\omega' = \omega$), allora semplicemente $C =$

$$= \epsilon \frac{S}{\omega} = \epsilon_r \left(\epsilon_0 \frac{S}{\omega} \right) . \quad (\text{Annotando con } V := \Delta V = V_+ - V_- ,$$

è ormai ovvio (oltre che ovvio!) che l'energia del condensatore vale

$$U = \int_0^q V dq' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} , = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{ancora ;}$$

è chiaro che questa sia migliore di quelle che conosci in corso del
 dielettrico, anche se solo per C ~~che solo si conserva per~~, dunque
 se questo riempie tutto lo spazio e se manteniamo $\varphi = V$: infatti
 $C = \epsilon_r (\epsilon_0 \frac{Q}{\phi})$, e comunque q deve aumentare. Notiamo
 comunque che solo effettivamente $q = \frac{1}{2} D \cdot E$: infatti

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{q^2 \phi}{2 \epsilon S} \quad , \quad \text{lo stesso } |E| = \frac{\sigma - |P|}{\epsilon_0} \stackrel{(\text{isol.})}{=} \frac{\sigma - \frac{\chi \sigma}{\epsilon_r}}{\epsilon_0} =$$

$$= \frac{(\epsilon_r - \chi) \sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ha la struttura} \\ \text{(perché fuori è perfettamente 0)} \end{array} \right) = \frac{q}{S \epsilon} \quad , \quad \text{mentre}$$

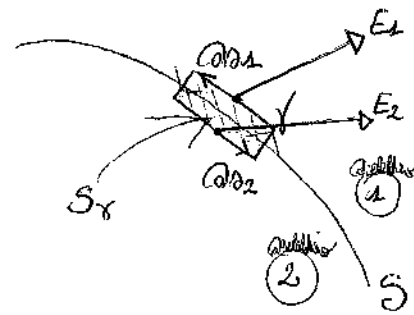
$$|D| = \sigma = \frac{q}{S} \quad , \quad \text{vale } U = \frac{1}{2} |D| |E| S \phi \quad , \quad \text{cioè appunto}$$

$$\frac{U}{S \phi} = u = \frac{1}{2} |D| |E| \stackrel{(\text{DIE})}{=} \frac{1}{2} D \cdot E \quad . \quad \checkmark \quad \checkmark$$

ES. 2: calcoliamo le forze elettrostatiche su un blocchetto di dielettrico
 (isolato) posto in un campo elettrico E , supponendo che l'oggetto sia sufficientemente
 piccolo affinché E non venga modificato apprezzabilmente dalle sue polarizzazioni
 (cioè E resta in modo ben definito rispetto allo spostamento medio di polarizzazione
 di un dipolo elettrico - protone: forniamo una così le formule
 sotto $F_i = (p_i \cdot \nabla) E$) ; otteniamo che il momento del dipolo
 elettrico nel blocchetto di volume V è (per def.) $\left(\sum_i p_i \right) = \chi \epsilon_0 V E$,
 da cui (per linearità) $F = \sum_i F_i = \chi \epsilon_0 V (E \cdot \nabla) E$. $\square$

ES. 3: Dimostrare che, nel passaggio fra due diversi dielettrici e
 contigui, le componenti del campo elettrico E tangente alle superficie di
 separazione si conservano. Infatti, in un piano ortogonale a S ,
 consideriamo una area chiusa "rettangolare" formata da due tratti infinitesimi

$\cos \alpha_1$ e $\cos \alpha_2$, con le stesse lunghezze $|\cos \alpha|$, paralleli tra loro e a S , posti nei rispettivi dielettrici e collegati da due tratti infinitesimi di ordine superiore ($\Rightarrow$ anche la superficie costante S_γ è di ordine superiore!)



: volendo infatti sfruttare la fondamentale uguaglianza

$$\oint_{S_\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \int_{S_\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{il secondo termine è 0 perché}$$

effettivamente S_γ è di ordine superiore e quindi l'area $\int_{S_\gamma}$, mentre il primo è semplicemente $E_1 \cos \alpha_1 + E_2 \cos \alpha_2 = (E_{1,t} - E_{2,t}) |\cos \alpha|$, avendo

considerato le componenti $E_{1,t}$ e $E_{2,t}$ di E_1 e E_2 risp., nel piano tangente a S (nel punto considerato); in conclusione si ottiene

$$\boxed{E_{1,t} = E_{2,t}}, \quad \text{come volevamo.} \quad \left\{ \text{Analogamente, nel caso}$$

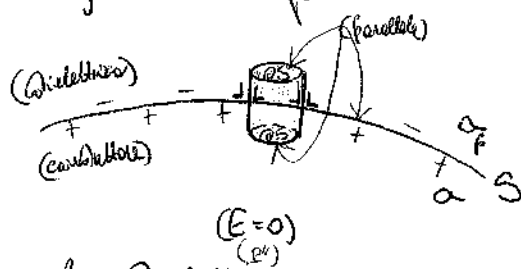
che su S magari vi sono cariche non di volume, che $\rho_{\text{vol}} D = 0$ ad indicare che le componenti di D normale a S è continua (nel passaggio da un dielettrico all'altro): considerando infatti, al posto di γ , un

"anello" cilindrico infinitesimo, otteniamo per Gauss che

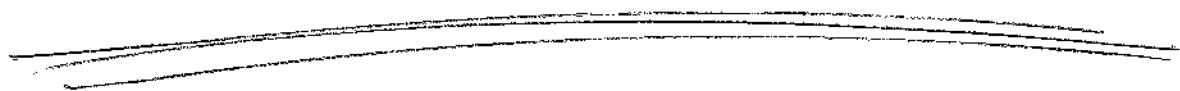
$$\underbrace{= \oint_{\text{cyl. cilindrico}}}_{\text{cyl. cilindrico}} (D) = \underbrace{D_1 \cdot n_1}_{(=: |D_{1,n}|)} \cos \alpha_1 + \underbrace{D_2 \cdot n_2}_{(=: |D_{2,n}|)} \cos \alpha_2 = (|D_{1,n}| - |D_{2,n}|) |\cos \alpha| \quad \square$$

ES. 4: Calcoliamo l'intensità del campo elettrostatico E nelle "immEDIATE vicinanze" di un conduttore carico cilindrico di un dielettrico isotropo ed omogeneo (ottenuto la generalizzazione del teorema di Coulomb!); in quanto il conduttore è equipotenziale, nelle sue immediate vicinanze E è

perpendicolare alle sue superficie S (come otteniamo immessevolmente anche grazie all'es. precedente, partendo in effetti da $E=0$ dentro il conduttore $\Rightarrow$ le componenti di E tangente a S è 0), per cui con E è anche per $D = \epsilon E$; immaginiamo ora un cilindro infinitesimo come in figura //



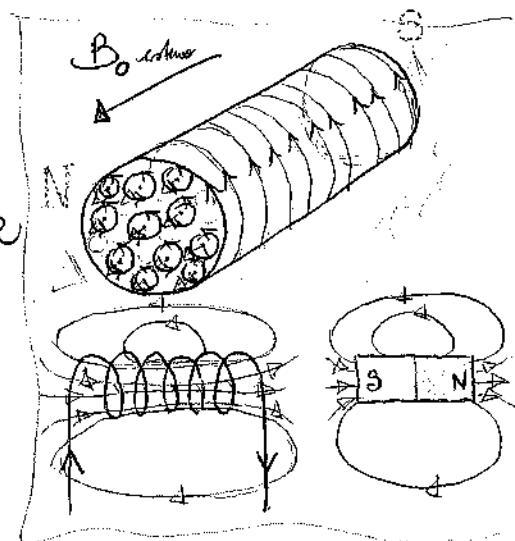
Non del resto nel dielettrico se un conduttore $\neq 0$ al flusso di D otteniamo la superficie del cilindro stesso, che quindi è $|D| \cdot \Delta S$; l'altra parte, come visto, tale flusso è uguale alle cariche non di polarizzazione contenute nel cilindro, cioè $\sigma \Delta S$; deduciamo che $D = \sigma$, quindi $E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_n} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)$ (invece affatto che σ/ϵ_0). In molte occasioni (per esempio) si vede anche $E = \frac{\sigma + \sigma_f}{\epsilon_0}$, $= \frac{\sigma}{\epsilon} \Leftrightarrow \sigma + \sigma_f = \frac{\sigma}{\epsilon_n} \Leftrightarrow \sigma_f = \sigma \left(\frac{1}{\epsilon_n} - 1 \right) = -\sigma \left(1 - \frac{1}{\epsilon_n} \right) = -\sigma \frac{\chi}{\epsilon_n}$. $\square$



L'interamente somiglianza tra oggetti estremamente diversi come i circuiti elettrici e i magneti viene spiegata appunto sperimentalmente (sperimentalmente) che le cariche elettriche in movimento hanno un comportamento del tutto simile a quello di un circuito percorso da corrente, e in particolare forniscono l'azione su atomi, grazie al moto dei loro elettroni, come un microscopico circuito di corrente che come tale genera nello spazio circostante un debolissimo campo magnetico. Considerando ora un pezzo di ferro, e consideriamo "normali" cioè non magnetizzati, i suoi atomi orientati in tutte le possibili direzioni generano piccolo campo magnetico e risultante nulla; ma quando invece lo si "magnetizza", cioè lo si immerge in un campo magnetico esterno, le magneti fatte dei suoi atomi si orientano in una ben determinata posizione: quella tale che i piccoli campi magnetici generati sono paralleli al campo esterno, per cui anche la loro risultante è $\neq 0$ e coincide col campo magnetico "macroscopico" della materia (in realtà è questo contributo soprattutto gli effetti dovuti allo "spin" degli elettroni, che è una proprietà analogo alla rotazione dell'elettrone su se stesso). La funzione dell'ordinamento atomico diventa il "polarizzazione magnetica" dell'oggetto, e gli atomi orientati si dicono "polarizzati" (polarizzati). Tutto questo spiega inoltre, in modo esatto, la totale somiglianza dei campi magnetici esterni generati da una calamita e da un solenoide (!). Comunque sia, è ormai chiaro che la osservazione fare per i magneti, fornisce infatti qualcosa che

un campo magnetico è sempre generato da cariche elettriche in movimento (e, e me volte, anche forze su qualsiasi carica in movimento : dunque (anche) le forze magnetiche sono forze che si esercitano fra cariche e cariche, mutabili in movimento rispetto all'osservatore!).

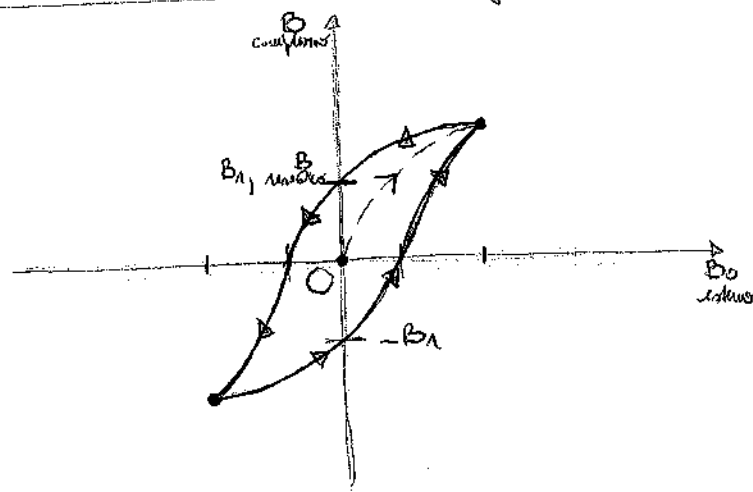
Comprendiamo quindi anche perché un pezzo di ferro non è attratto da una calamita; tuttavia non tutte le sostanze reagiscono come il ferro e immerse in un campo magnetico esterno B_0 , o perché hanno effetti molto meno intensi o perché mostrano "comportamenti" più complessi, oltre alle sostanze "ferromagnetiche" che in seguito alle sollecitazioni formano presso



sostanze "ferromagnetiche" : fin troppo, oltre alle sostanze "ferromagnetiche" che in seguito alle sollecitazioni formano presso un campo magnetico $B_m \gg B_0$ ma comunque parallelo a B_0 , esistono le sostanze "paramagnetiche" che presentano lo stesso comportamento ma in misura molto ridotta, ed esistono le sostanze "diamagnetiche" (ES opposta) che per cui B_m risulta antiparallelo a B_0 (e cioè sono repulse da B_0), anche se "di solito" B_m è "piccolo"; naturalmente interframmischiamo queste diverse proprietà magnetiche come una conseguenza delle diverse costituzioni microscopiche, in analogia a quanto fatto prima.

Riassumendo, il campo magnetico complessivo $B = B_0 + B_m$ sarà $B \gg B_0$ per le sostanze ferromagnetiche, $B \gtrsim B_0$ per le sostanze paramagnetiche e $B \lesssim B_0$ per quelle diamagnetiche: possiamo quindi porre $B = \mu_r B_0$, dove lo scalare μ_r è

"Le permeabilità magnetiche relative" delle sostanze in esame, che
 sono così in funzione che per $\mu > 1$ per le sostanze ferromagnetiche
 ma per $\mu < 1$ per quelle diamagnetiche; in effetti, proprio per tali
 sostanze μ è una costante (come B e B_0 sono direttamente
 proporzionali), mentre per i materiali ^{ferromagnetici} ~~(e alcuni paramagnetici)~~ la situazione è
 molto più complessa: pressoché μ , che può essere solo
 leggermente elevato, viene al variare di B_0 , e la
 seconda "Le curve di isteresi magnetiche"



Partendo da $B_0 = B = 0$, aumentando B_0 aumenta B molto rapidamente ma
 non linearmente, per poi tendere a restare costante; diminuendo da B_0
 fino a 0 non si riprende la stessa evoluzione ma "contraria":
 il flusso nel materiale ferromagnetico rimane un campo magnetico residuo B_1
 (come il materiale si è magnetizzato: ciò è possibile perché i suoi
 atomi ordinati risentono "opportunitamente" delle loro interazioni reciproche);
 in effetti, per eliminare queste magnetizzazioni residue, è necessario invertire
 B_0 , che quindi non è più 0; otteniamo il resto delle curve
 "in modo speculare". Osserviamo in conclusione che tale curva non
 parte più da 0, ma che basterebbe per riportare il materiale in
 questa condizione come il ferro) risolvendo al di sopra di una

certe temperature caratteristiche delle sostanze ("temperature di Curie"),
rendendole fisicamente ferromagnetiche (e non B.T.).

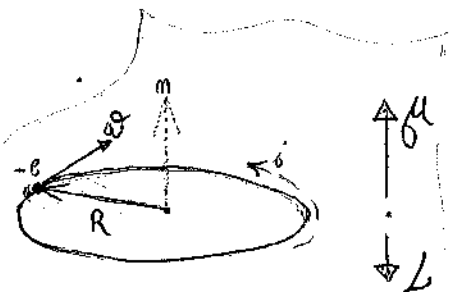
Per analizzare molto più in dettaglio le proprietà magnetiche delle
materie, cominceremo considerando un elettrone in moto (uniforme)
su un'orbita circolare di raggio $|R|$, con velocità di modulo
 $|v|$ e cioè con periodo del moto $T = \frac{2\pi|R|}{|v|}$; visto che
l'elettrone che carica $-e$ e che, ad intervallo di tempo T , ripete
per la stessa posizione, c'è come se ci fosse una corrente d'intensità
 $i = \frac{e}{T}$ (e verso opposto a quello del moto) ed allora

avremo subito per calcolo il campo magnetico prodotto; forniamo così
tutto ciò che ci serve per considerare il momento magnetico delle spine
 $\mu = i S m = \left(e \frac{S}{T} m \right) = e \frac{\pi R^2}{T} m = \frac{1}{2} e |v| R^2 m$. Ma

adesso il momento angolare dell'elettrone è $L = R \times m_e v =$
 $= -m_e |v| |R| m$; Concludiamo subito che $\boxed{\mu = -\frac{e}{2m_e} L}$; in
molte altre relazioni che abbiamo generale, cioè indipendentemente dalle
forme dell'orbita dell'elettrone: in tutti i casi comunque $T = \frac{2\pi m_e v}{|L|}$,

per cui $\mu = e \frac{S}{T} m = \frac{e}{2m_e} |L| m$. Al rapporto γ "tra" il
momento magnetico orbitale μ ed il momento angolare orbitale L e' il
"rapporto giromagnetico": $\boxed{\gamma = -\frac{e}{2m_e}}$

Da tutto un elettrone fornisce anche un momento
magnetico proprio, indipendente dal suo stato



Di moto orbitale : il modello delle orbite vuole che ogni elettrone possiede un movimento di rotazione, del tutto indipendente dal moto di traslazione del suo centro di massa, al quale corrisponde un momento angolare intrinseco ("spin" dell'elettrone) e quindi un momento magnetico intrinseco ("di spin").

Notiamo infine che, per "combinazione", il momento magnetico di un atomo è la somma (vettoriale) dei momenti magnetici orbitali (e di spin) dei suoi Z elettroni spaiati; quindi il momento magnetico di una molecola è la somma (vettoriale) dei momenti magnetici di tutti gli elettroni che la costituiscono.

Quando un atomo è soggetto all'azione di un campo magnetico B_0 , i suoi elettroni risentono delle forze che ne modificano le traiettorie; consideriamo per semplicità il caso di un elettrone in moto lungo un'orbita circolare, in un piano perpendicolare a B_0 , e velocità v : di conseguenza fra rotazione orbitale e rotazione spin, le forze magnetiche F agenti sull'elettrone che modulo costante $|F| = | -e\vec{v} \times \vec{B}_0 | = e|\vec{v}|B_0 \sin(\theta)$ e direzione del vettore, (ma) mentre nel primo caso esse è diretta verso il centro, nel secondo caso è diretta verso l'esterno. Nel primo caso le forze centrifughe aumentano, ma ciò che accade è che lo "sforzo" nel senso che in forma approssimativa il raggio r dell'orbita resta costante: per ogni dunque equilibrio dinamico, le velocità angolari ω subisce un aumento $\Delta\omega$ tale che svolge

$$m_B \hbar \Delta(\omega^2) \stackrel{!}{=} 2 m_B \hbar \omega \Delta\omega, = e |\omega| |B_0|, \quad \text{e cioè } \left(\frac{\hbar \omega}{\hbar} = \omega\right)$$

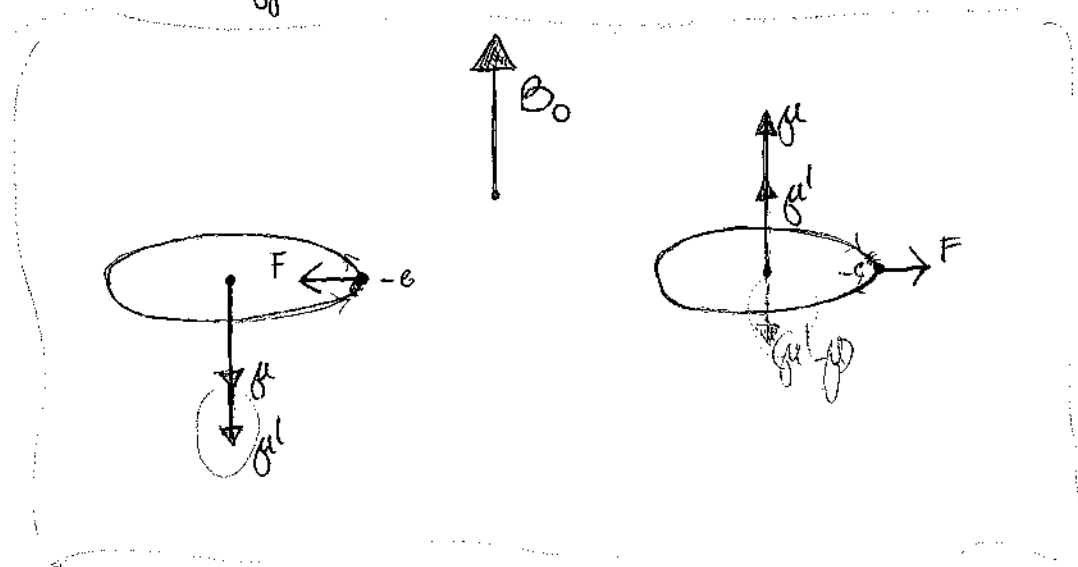
$$\Delta\omega = \omega_L := \frac{e}{2m_B} |B_0| \quad (\text{"velocità angolare di Larmor"}) ; \text{ ma}$$

contemporaneamente il modulo del momento angolare $|L|$ subisce un aumento di $m_B \hbar^2 \Delta\omega$, ovvero, conosce il momento magnetico μ^1

dell'elettrone che modulo magnetico rispetto al momento magnetico iniziale μ , e $\Delta\mu = -\mu^1 - \mu = -\frac{e}{2m_B} |L| = -\frac{e}{2m_B} \left(m_B \hbar^2 \frac{e}{2m_B} |B_0|\right) =$

$$= -\frac{e^2}{4m_B} \hbar^2 |B_0|. \text{ Contemporaneamente nel nostro caso la soluzione è}$$

offerta e il modulo del momento magnetico diminuisce; in ogni caso il momento magnetico (inoltre $\mu^1 - \mu$ e' antiparallelo al campo, in accordo con la legge di Lenz (e non dipende dalle impurezze).



Possiamo ora fare passi nella classificazione delle varie sostanze: abbiamo infatti visto che, sotto l'azione di un campo magnetico B_0 esterno, le molecole di una sostanza acquistano un piccolo momento magnetico inoltre antiparallelo al campo incidente; le sostanze paramagnetiche sono quindi quelle le cui molecole NON forniscono

un momento magnetico proprio (fatti, in generale, i casi dove solo che tutti elettroni restano in un caso quanti nel caso opposto),
così che l'effetto $B = \mu_B B_0 \leq B_0$, dove $\mu_B \leq 1$, onde
"la suscettività magnetica" $\chi_m = \mu_B - 1$ e $\chi_m \leq 0$; si sa che
che i dipoli magnetici indotti sono antiparalleli a B_0 indipendentemente
dall'agitazione termica molecolare e quindi dalla temperatura della sostanza,
ovvero con il per μ_B e (quindi) χ_m .

Invece le molecole della sostanza paramagnetiche possiedono un momento
magnetico proprio tale che, sotto l'azione di B_0 , tende a allinearsi
e lui parallelamente; tale orientazione molecolare viene però continuamente
disturbata dall'agitazione termica e, in conclusione, l'equilibrio finisce
e le molecole con dipoli magnetici si allineano con B_0 e le
loro tendenze si orientano in tutte le possibili direzioni: così il
paramagnetismo dipende dalla temperatura (e ciò ricorda le leggi di
Curie ...).

Le sostanze paramagnetiche sono sostanze solide e le loro molecole
possiedono momenti magnetici propri; queste sostanze offrono per le
altre per gli effetti magnetici cose più interessanti che ricordano. Comunque
le loro molecole tendono a disporre in modo che i loro momenti magnetici
rimangano paralleli a B_0 , e in ciò sono continuamente disturbate dall'
agitazione termica; questo comportamento, e anche l'acquisizione di
un momento indotto antiparallelo al campo (diamagnetismo), portano così
alla "polarizzazione magnetica delle molecole". Visto che ogni

momento magnetico molecolare corrisponde ad una microscopica sfera ferrosa
 di corrente elettrica, applicando allora i metodi della statica su
 calcoli le proprietà macroscopiche della materia delle somme delle correnti
 di magnetizzazione; viene per ciò, nell'intorno di un qualunque punto P
 del corpo in esame, $\Delta V :=$ "un elemento di volume sufficientemente
 piccolo per poter trattare le sue dimensioni come un punto di vista macroscopico,
 ma sufficientemente grande per contenere un numero elevato di molecole",
 $N :=$ "numero delle molecole contenute in ΔV " e $\mu_i :=$ "momento magnetico
 delle i -esime molecole contenute in ΔV " : allora il momento magnetico
 medio in ΔV vale $\mu_{\text{fm}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i$ (e in punti vicini di
 punto e punto), e, se $n :=$ "numero di molecole per mole di volume
 del corpo considerato", $M := n \mu_{\text{fm}}$ (in $\frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = \frac{\text{A}}{\text{m}}$) rappresenta la

magnetizzazione specifica e viene chiamato "intensità di magnetizzazione".
 (Per le sostanze diamagnetiche e per molte sostanze paramagnetiche M è
 proporzionale a B_0 esterno (e, rispettivamente, antiparallela e parallela); per
 quelle ferromagnetiche e altre paramagnetiche M e B_0 sono paralleli (ma
 in relazione più complessa).)

Vedremo ora che le conoscenze del vettore M in tutto il punto del
 corpo posto nel campo B_0 equivale alle conoscenze di tutte le sue
 proprietà magnetiche, degli effetti magnetici che esso risentirà e che esso
 produrrà; viene per questo $i_m :=$ "densità di corrente di magnetizzazione
 (volumetrica)" e $i_{ms} :=$ "densità superficiale delle correnti di magnetizzazione" (in
 ogni caso con modulo uguale all'intensità di corrente osservata).

una magnetizzazione unitaria / un segmento unitario (perpendicolare alle componenti
(media) di moto delle cariche) : allora, come vedremo, è

$$\vec{m}_{\text{mag}} = M \times \vec{m} \quad \text{e} \quad \vec{m}_{\text{m}} = \text{rot } M \quad . \quad (\text{Notiamo che stiamo}$$

parlando di momenti statici e non di correnti "de una fork all'altre"
del corpo!) (Prima però stabiliremo che il contributo B_m alla
induzione magnetica in un punto dello spazio è $\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{m}_{\text{mag}} \times \vec{r}}{r^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{m}_{\text{mag}} \times \vec{A}}{r^3} dS$ (1° Legge)

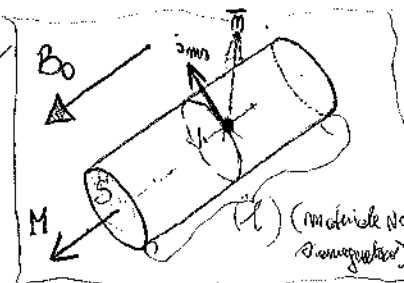
$$B_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{m}_{\text{mag}} \times \vec{r}}{r^3} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{m}_{\text{mag}} \times \vec{A}}{r^3} dS \quad , \quad \text{per cui (qui)}$$

per B_m vale $\text{div } B_m = 0$, cioè per l'induzione magnetica risulterà

$$B = B_0 + B_m \quad \text{e} \quad \boxed{\text{div } B = 0} : \quad \text{il campo magnetico } B \text{ è}$$

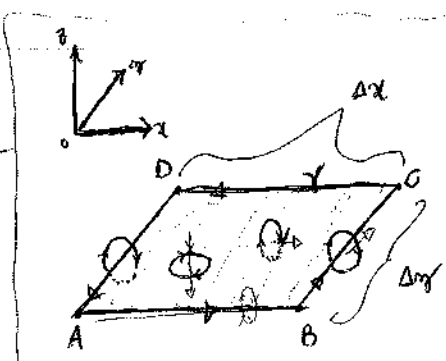
sempre solenoidale sia nel vuoto sia in presenza di materiali ; inoltre
chiaramente otterremo B grazie alla 1° Legge e fatto di constatare le
correnti di magnetizzazione eccetto a quelle di conduzione che generano B_0 .

Consideriamo il caso di un cilindro di materiale omogeneo ed isotropo posto in
un campo magnetico B_0 uniforme parallelo all'asse del cilindro stesso, per
cui anche M ha la direzione dell'asse ; ci faremo degli effetti
magnetici causati dalle magnetizzazioni (uniforme) del materiale, faremo
naturalmente di "sostituire" il cilindro con le due distribuzioni $\vec{m}_m$ e
 $\vec{m}_{ms}$ di correnti di magnetizzazione : mentre dalle ipotesi segue che
 $\vec{m}_m = 0$ "all'interno", per calcolare $\vec{m}_{ms}$ viene $S :=$ sezione del
cilindro e $L :=$ lunghezza del cilindro ; il momento
magnetico totale del materiale ha convenientemente modulo
 $|M|SL$, e (per quello che sappiamo sulle spine!)



tale momento equivale ad una corrente circolante $M \cdot l$, per cui
 è evidente che $|\mathbf{s}_{\text{mag}}| = |M|$; essendo poi in qui $\mathbf{s}_{\text{mag}} \perp \mathbf{M}$,
 deduciamo subito che $\boxed{\mathbf{s}_{\text{mag}} = M \times \vec{m}}$. È evidente l'entusiasmo
 del risultato ed esso è un'equazione non uniforme, e che lo si può
 utilizzare per questioni infinite infinitesime ΔS all'interno di un materiale.

Ora, per il calcolo di $\mathbf{s}_{\text{mag}}$ nel caso generale di $\mathbf{B}_0$ non uniforme, sia
 ABCD un rettangolo di area ΔS "finito" all'interno del mezzo materiale
 considerato, e fissiamo gli assi coordinati x e y paralleli ai rispettivi
 lati; allora è evidente che solo le "spine"
 concatenate al perimetro del rettangolo contribuiscono alla
 corrente che attraversa la nostra superficie ΔS . Se
 non finisce, M è la densità di corrente che ha come
 componenti $M_x i$, $M_y j$ e $M_z k$, ai quali formerò funzione come campi
 prodotti dalle correnti atomiche nei punti xyz , zx e xy rispettivamente;
 allora certamente le correnti atomiche considerate e M_z non contribuiscono
 alle correnti che attraversano ΔS . Comunque, se una spine ha area
 S e se n è il numero di spine atomiche per unità di volume, allora
 lungo BC c'è convenientemente corrente associata $i \cdot n(S \Delta y)$, $\stackrel{(\text{come da})}{=}$



$= M_z \Delta y$; analogamente $M_y i$ contribuisce alla corrente esistente e
 DA per un ammontare $-M_y \Delta x$, mentre $M_x i$ contribuisce rispetto
 ai lati AB e CD con $M_x \Delta x$ e $-M_x \Delta x$ rispettivamente: in
 conclusione otteniamo corrente $M \cdot \Delta l|_{A \rightarrow B} + M \cdot \Delta l|_{B \rightarrow C} + M \cdot \Delta l|_{C \rightarrow D}$
 $+ M \cdot \Delta l|_{D \rightarrow A} = \oint_C M \cdot d\mathbf{l} \stackrel{(\text{Stokes su } \Delta S \text{ "chiusa" (piccola?)})}{=} (\nabla \times M) \cdot \mathbf{n} \Delta S$

è ovvio quindi che $(\dot{m})_3$ soddisfa $\dot{m} \cdot R \Delta S = \text{rot} M \cdot R \Delta S$,
 e per l'isotomorfismo del sistema di riferimento osservatore $\boxed{\dot{m} = \text{rot} M}$,
 effondo.

L'idea quindi per calcolare B in termini di $\dot{m}$ (e $\dot{m}_0$) è quella
 di conoscere anzitutto M ; il problema è che, in generale, M
 è una certa funzione di B risultante: è chiaro quindi che
 conviene introdurre un nuovo campo che resti associato alle sole correnti
 ed è una cosa non richiede insomma un esplicito riferimento
 alle correnti di magnetizzazione (in analogia e quanto fatto e proposto
 delle polarizzazione elettrica P rispetto al campo elettrico E complessivo).

Ebbene, per definire "completo" è $\text{rot} B = \mu_0 (\dot{m} + \dot{m}_0)$ <sup>(costanti di magnetizzazione
costanti di corrente)</sup> $(=)$
 $= \mu_0 (\dot{m} + \text{rot} M)$, quindi introducendo il campo vettoriale
 H "intensità magnetica" otteniamo la relazione $\boxed{B = \mu_0 (H + M)}$

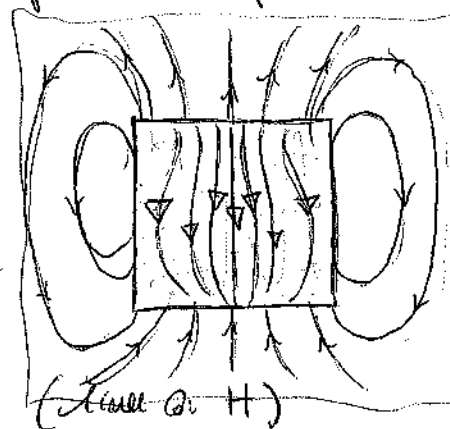
(e cioè $H = \frac{1}{\mu_0} B - M$ (in A/m)) otteniamo $\boxed{\text{rot} H = \dot{m}}$,
 per cui inoltre su una linea chiusa γ $\oint_{\gamma} H \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} H \cdot \mathbf{n} dS$ <sup>(S
(contenuta))</sup>
 $= \int_S \dot{m} \cdot \mathbf{n} dS = \dot{m}$ (conclusione su γ) ; fin' in generale

sarebbe $\text{rot} B = \mu_0 (\dot{m} + \frac{\partial D}{\partial t} + \dot{m}_0)$, che qui ridiventerebbe
 ~~$\text{rot} H = \dot{m} + \frac{\partial D}{\partial t}$~~ , che implica $\oint_{\gamma} H \cdot d\mathbf{s} = \dot{m} + \frac{\partial \Phi_S(D)}{\partial t}$.

In particolare nel vuoto $B = B_0 = \mu_0 H$, per cui B_0 e H si equivalgono
 per cui, anche in ogni caso $\text{div} B = 0$, dove vale

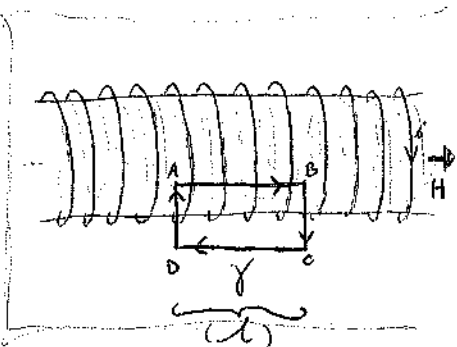
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$, che esprime la differenza tra $\vec{B}$ e $\vec{H}$: infatti, mentre le linee di forza di $\vec{B}$ sono chiuse, alcune linee delle linee di $\vec{H}$ hanno come sorgente il "falso nord" all'interno per poi terminare nel vero "falso nord".

Mostriamo infine che $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ è tale sia nel vuoto sia in presenza di mezzi materiali, ma questo non impone effetti che $\vec{H}$ sia lo stesso in entrambi i casi: $\text{rot } \vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ è l'intensità magnetica nel vuoto,



allora possiamo scrivere $\vec{H} = \vec{H}_0 - \nabla U$ con U campo (scalare) vettoriale $\neq \text{cost.}$ (per cui tra l'altro $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{H}_0 \cdot d\vec{s} - \nabla^2 U = -\nabla^2 U \neq 0$ in generale); si potrebbe dimostrare che $U = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{H} \cdot \vec{H}}{r^3} dV \dots$

ES. 1: calcoliamo l'intensità magnetica $\vec{H}$ all'interno di un solenoide cilindrico indefinito, riempito uniformemente di un materiale omogeneo ed isotropo, e percorso da una corrente di intensità i ; è evidente anzitutto che, per ragioni di simmetria, $\vec{H}$ è $\neq 0$ solo all'interno del solenoide dove è parallelo al suo asse: allora chiaramente $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = |\vec{H}| \overline{AB} = |\vec{H}| \cdot l$; ma per sempre esiste questa è uguale all'intensità di corrente totale concatenata e γ , cioè $n \cdot l$ o $n :=$ numero di spire per unità di lunghezza: in conclusione $|\vec{H}| = ni$, quindi è uniforme. Mostriamo che $|\vec{H}|$ non dipende dal materiale nel solenoide, e piuttosto cambiando questo materiale otteniamo $\vec{M}$ e $\vec{B}$.



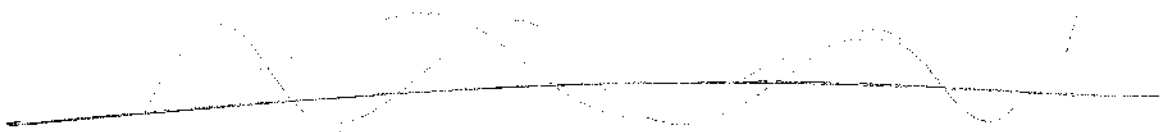
$$+ M) = \mu_0 (1 + \chi_m) H, \text{ dove } \boxed{B = \mu H} \text{ con } \mu = \mu_0 \mu_r$$

(in $\frac{Wb}{Am} = \frac{N}{A^2}$) "Le permeabilità magnetiche (condute)"

Colle sottoposte in esame. Tutto questo vale per molte sostanze ferromagnetiche ma con B_0 "non troppo intenso", e ricordando che $\mu_r > 1$ e cioè $\chi_m > 0$ (anche a di poco).

Comando dell'ES.1, forniamo quindi senza $|B| = \mu |H| = \mu \mu_i =$
(e la costante di diffusione)
 $= \mu_r (\mu_0 \mu_i) = \mu_r \times$ "intensità di B nel solenoide ci fare il calcolo".

Per tutte le altre sostanze, in particolare quelle ferromagnetiche, tale relazione è decisamente più complicata.



Vogliamo infine calcolare l'energia spesa per stabilire un campo magnetico in una qualche regione di spazio; cominciamo con un solenoide lungo l ($\gg$ suo diametro), di sezione S e con N spire (per cui con $n = \frac{N}{l}$) dove fanno una corrente d'intensità i : il campo B generato è $\neq 0$ (praticamente) solo all'interno del solenoide, dove è parallelo al suo asse, e quindi che flusso concatenato alle spire $\Phi = N(SB)$, al quale corrisponde la f.e.m. indotta $\mathcal{E}_I = -NS \frac{\partial B}{\partial t}$. Se il generatore collegato al solenoide ha f.e.m. $\mathcal{E}$, allora per Ohm è $\mathcal{E} = Ri - \mathcal{E}_I = Ri + NS \frac{\partial B}{\partial t}$ e quindi il medesimo generatore speso nel tempo ∂t lavora uguale a $\mathcal{E} i \partial t = Ri^2 \partial t + iNS \partial B$; mentre $i^2 R \partial t$ è la parte che si ritrova in energia termica.

oscillate per effetto Joule, le faremo sentire le riscaldiamo come
 $iNSAB = \overset{(H=mi=\frac{N\mu}{L})}{|H|} SAB =: V |H| AB$ (V volume dello spazio interno
 dell'elettromagnete) : l'energia totale immagazzinata dal circuito è pertanto

$$U = V \int_0^{|B|} |H| d|B| \stackrel{(\parallel)}{=} V \int_0^{|B|} H \cdot dB$$

Poiché il campo magnetico B
 all'interno del solenoide è (quasi) uniforme ed U è funzione di V,

possiamo pensare U come l'energia immagazzinata per creare il campo magnetico
 e distribuita nello stesso modo del campo magnetico stesso, con una densità

$$u := \frac{U}{V} = \int_0^{|B|} H \cdot dB$$

Quando il materiale contenuto all'interno del
 solenoide è omogeneo, isotropo e non ferromagnetico, è $B = \mu H$ (con μ
 indipendente da $|H|$) e per ciò $u = \frac{1}{\mu} \int_0^{|B|} |B| d|B| = \frac{1}{\mu} \frac{|B|^2}{2} = \frac{1}{2} \mu |H|^2 =$
 $= \frac{1}{2} B \cdot H$ (o anche $\int_0^{|H|} |H| d(\mu |H|) = \frac{1}{\mu} \int_0^{|H|} \mu |H| d(\mu |H|) = \frac{1}{\mu} \frac{\mu^2 |H|^2}{2} !$) ;

avendo infine $\Phi(B) = NS|B| = Li$ (per definizione) e $|H| = ni$ (e
 $|B| = \mu ni !$) , otteniamo $U = u \cdot S = \left[\frac{1}{2} (\mu ni) ni \right] L S \stackrel{(n \cdot L = N)}{=} \frac{1}{2} (B) (NS) i =$
 $= \frac{1}{2} Li^2$, come già sappiamo.

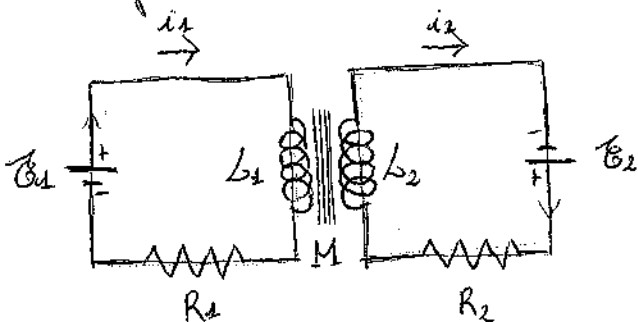
Se il materiale contenuto fosse omogeneo, isotropo ma ferromagnetico, allora
 dovremmo usare semplicemente $B = \mu_0 (H + M)$; nei casi in cui $M =$
 $= \chi_m H$ otteniamo affatto quanto ora avremo, mentre in generale è

$$u = \int_0^{|B|} H \cdot dB \stackrel{(\text{bott.})}{=} \mu_0 \int_0^{|H|} |H| d|H| + \mu_0 \int_0^{|H|} |H| d|M| = \frac{1}{2} \mu_0 |H|^2 + \mu_0 \int_0^{|H|} |H| d|M|$$

Nel caso di sostanze ferromagnetiche la situazione è complicata dai fenomeni
 di isteresi ...

Consideriamo adesso il caso di due circuiti induttivi e in qualche relazione

interagendo tra loro attraverso le mutue induttanze : (presumiamo



); scriviamo convenientemente le equazioni

$$\begin{cases} E_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ E_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

, dalle quali deduciamo che il lavoro complessivo svolto dai generatori nel tempo

$$\text{dal } 0 \text{ al } t \text{ vale } \mathcal{L} = E_1 i_1 dt + E_2 i_2 dt = (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt + L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 \\ = (i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2) dt + L_1 d(\frac{1}{2} i_1^2) + M d(i_1 i_2) + L_2 d(\frac{1}{2} i_2^2) : \text{ in esame si notano facilmente}$$

che, il lavoro complessivo svolto nell'intervallo di tempo $(0, t)$ è perciò $\mathcal{L} = \int_0^t (i_1^2 R_1 + i_2^2 R_2) dt + (\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2)$; mentre il primo

termine rappresenta l'energia termica dissipata per effetto Joule, il secondo termine $U := \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ rappresenta il lavoro compiuto dai generatori contro le f.e.m. indotte, ovvero appunto l'energia magnetica fornita complessivamente dai due circuiti (funzionanti a corrente continua).

$$\text{Mostriamo che } U = \frac{1}{2} i_1 (L_1 i_1 + M i_2) + \frac{1}{2} i_2 (L_2 i_2 + M i_1) = \frac{1}{2} [i_1 \Phi_1(B) + i_2 \Phi_2(B)] \quad \left(\text{è facile, chiaramente, } U = \frac{1}{2} L_1 (i_1 + \frac{M}{L_1} i_2)^2 + \frac{1}{2} (L_2 - \frac{M^2}{L_1}) i_2^2 \right) ; \text{ essendo tale } \geq 0 \text{ per}$$

ogni valore di i_1 e i_2 (in quanto i generatori costringono i loro per stabilità), dov'essere $L_1 L_2 \geq M^2$, come già sapremo ! ; avendo che

$$B \neq 0 \quad , \quad U = \frac{1}{2} \left[i_1 \int_{S_1} B \cdot n_1 dS + i_2 \int_{S_2} B \cdot n_2 dS \right] \stackrel{(\text{GAUSS})}{=} \frac{1}{2} \left[i_1 \oint_{\gamma_1} A \cdot ds + \right]$$

$i_2 \oint_{\gamma_2} A \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \left[\oint_{\gamma_1} A \cdot (i_1 d\mathbf{s}) + \oint_{\gamma_2} A \cdot (i_2 d\mathbf{s}) \right]$; dove, γ in un
 filo γ e la sezione normale e i il valore corrente di corrente, allora
 valgono chiaramente $(i) d\mathbf{s} = (i \mathbf{s} | \mathbf{s}) d\mathbf{s} = i dV$ e forniamo secondo
 $U = \frac{1}{2} \left[\int A \cdot i_1 dV + \int A \cdot i_2 dV \right] \stackrel{(i=i_1+i_2)}{=} \frac{1}{2} \int A \cdot i dV$ (integrare
 allora a tutto lo spazio, anche fuori dei fili $i=0$!) ; in corrente
 stazionaria elettrostatica e quindi $U = \frac{1}{2} \int A \cdot \text{rot} H dV = \frac{1}{2} \int H \cdot \text{rot} A dV -$
 $-\frac{1}{2} \int dV (A \times H) \cdot d\mathbf{s}$ ($\text{div}(F \times G) = G \cdot \text{rot}(F) - F \cdot \text{rot}(G)$) $\stackrel{(\text{Gauss})}{=}$
 $= \frac{1}{2} \int H \cdot B dV - \frac{1}{2} \int_{\text{"0"}} (A \times H) \cdot n dS$ ($A \sim 1/r$ e $H \sim 1/r^2$) $\stackrel{(\approx)}{=} \frac{1}{2} \int H \cdot B dV$,
 dove qui ovviamente $u = \frac{1}{2} H \cdot B$ ($= \frac{1}{2} |H| |B|$), come per il semplice
 circuito iniziale : per linearità, e' costante la relazione "generale" di
 questo risultato (insieme di circuiti indefiniti, in questi reattori e in corrente di
 magnetostatica). Visto tutto, possiamo concludere che la densità
 di energia emessa da un campo elettromagnetico e' data, (solo per
 tanto, dalla relazione $u = \frac{1}{2} (D \cdot E + H \cdot B)$.

Le leggi di Coulomb, di Laplace e di Biot-Savart, e le loro dirette conseguenze,
 descrivono in dettaglio il campo elettrostatico prodotto da un insieme di cariche
 elettriche fisse, il campo magnetico generato da una distribuzione di corrente
 costante e gli effetti associati e campi magnetici variabili ; l'aggiunta di
 altri fatti fondamentali importanti, quali le leggi di Ohm, le relazioni
 elettriche e magnetiche delle materie, ecc., permette inoltre di calcolare

il conferimento delle masse in presenza di campi elettrico e magnetico. Ebbene, per studiare le proprietà fondamentali del campo elettromagnetico nel caso di perturbazioni dipendenti dal tempo, riteniamo essere utili di risultati più importanti che ora ottenuti sotto forma delle equazioni (differenziali) che furono poste da J. C. Maxwell alla base di una teoria completa dell'elettromagnetismo, note appunto col nome di "equazioni di Maxwell".

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } B = \mu_0 i_{\text{tot}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{div } E = \frac{I_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \\ \text{div } B = 0 \end{array} \right.$$

; $|E|$ e $|B|$ hanno
 loro reciproci ottengono la minima delle forze di Lorentz (risultato
 di una carica uniforme q in moto con velocità v) $F = q(E + v \times B)$.
 All'interno di un mezzo materiale, per I_{tot} possiamo distinguere il
 contributo dovuto alle cariche di conduzione e quello dovuto alle cariche di
 polarizzazione, mentre la corrente i_{tot} (o i) comprendiamo come
 somma di una corrente di conduzione, una di polarizzazione o una
 di magnetizzazione; se j e i sono i rispettivi vettori di
 conduzione, allora corrispondono $D = \epsilon_0 E + P$ ($\stackrel{\text{cariche (indotte)}}{=} \epsilon E$) e H
 tale per cui $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ ($\stackrel{\text{Cariche Non}}{\stackrel{\text{permanenti}}{\stackrel{\text{dipole}}{=} \mu H}$) possiamo riscrivere le
 equazioni di Maxwell nelle forme $\text{rot } H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$,
 $\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$, $\text{div } D = \rho$ e $\text{div } B = 0$ (ricordando

per le forme che $i_f = \frac{\partial P}{\partial f}$ e che $i_m = 10^6 M$) , unendo
meglio la legge di Ohm in un mezzo conduttore di conduttività γ

$i = \gamma E$. (In generale , i valori P e M dipendono da E e
 B ma solo delle profondità finché delle portate considerate , profondità
considerate tanto per tanto dei valori delle portate E e f ; solo
sono costanti per portate isotrope e non anisotrope come , ad esempio
ad esempio f è funzione di H . Similmente in Ohm γ è
indefinito da E e f il conduttore non è generico .)

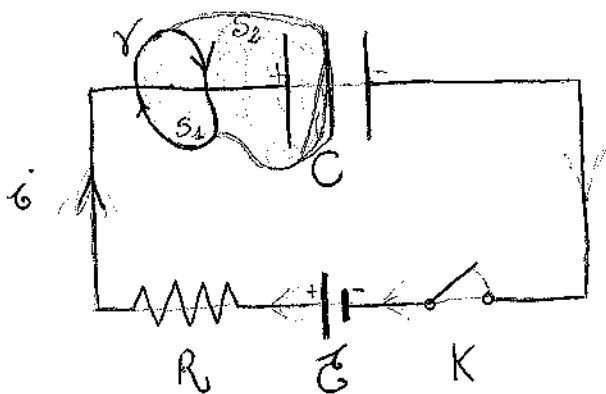
A questo punto possiamo così ottenere le equazioni di Maxwell nel
caso speciale di E e B costanti o "lentamente variabili" nel tempo , per
cui sorge il problema delle loro esattezza generale ; la risposta è questa
non può essere immediata : la cosa da fare è motivatamente "affrontare
Maxwell" in situazioni corrispondenti campi variabili nel tempo , per
poi confrontare le implicazioni dei risultati numerici così ottenuti con i dati
sperimentali . A tutt'oggi le previsioni teoriche e i risultati di un fenomeno
meno di esperimento risultano in ottimo accordo , e su questa base si
conclude che le equazioni di Maxwell hanno validità generale (per
lo studio di sistemi macroscopici ; in realtà su microscopico , e
sotto può d'intendere in senso operatorio) .

Tutte le equazioni elencate finiscono così , almeno in linea di principio (cioè
e fatta le difficoltà matematiche) , di calcolare i quattro vettori $E, D,$
 H e B in ogni punto dello spazio ed in qualsiasi istante di tempo , note
che siano E, f, γ, ρ e i : è facile quindi ricavare tutte
le proprietà del campo elettromagnetico , e ricavare per l'altro modo

i risultati precedentemente discussi.

Chiusura del circuito

Chiusamente, e come già visto, $\text{rot } H = i$ non fornisce come risultato generale, anche integrato in generale non è $\oint \text{rot } H = 0$ ma $\oint \text{rot } H + \frac{\partial D}{\partial t} = 0$ (equazione di continuità); il termine $\frac{\partial D}{\partial t}$ che completa l'equazione viene spesso chiamato "corrente di spostamento", come già detto, e fornisce ora come un'idea del suo significato fisico: consideriamo il circuito (chiuso per mezzo di K in un condensatore finora ipoteticamente vuoto)



il campo H è determinato in ogni punto della singola linea chiusa γ concatenata col circuito, quindi:

$\oint_{\gamma} H \cdot dS$ ha un valore ben definito; se per esempio avessimo $\text{rot } H = i$, allora avremmo continuamente (per Stokes) $\oint_{\gamma} H \cdot dS = \int_{S_1} \text{rot } H \cdot n dS = \int_{S_1} i \cdot n dS = i$ e $\oint_{\gamma} H \cdot dS = \int_{S_2} i \cdot n dS = 0$! Mostriamo ora che le circostanze fisiche dei risultati discordanti

usando la corretta equazione $\text{rot } H = i + \frac{\partial D}{\partial t}$: da una parte, usando il campo elettrico all'interno del condensatore nullo, nel calcolo di $\oint_{\gamma} H \cdot dS = \int_{S_1} \text{rot } H \cdot n dS$ non si ha alcun contributo da D , ottenendo per ciò ancora $\oint_{\gamma} H \cdot dS = i$; dall'altra parte, su S_2 è i e non contribuisce e dunque $\oint_{\gamma} H \cdot dS = \int_{S_2} \text{rot } H \cdot n dS (=$

$$= \int_{S_2} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot n \, dS = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{S_2}(D) \quad ; \text{ ma, all'interno di un condensatore pieno (trascurando gli effetti di bordo), sappiamo che } D \text{ è costante, perpendicolare alle armature e con modulo } |D| = \sigma = \frac{q}{A} \quad (\text{se } q \text{ è la carica dell'armatura positiva al tempo } t, \text{ e se } A \text{ è l'area di ogni armatura})$$

"intenzione": allora $\Phi_{S_2}(D) = |D| \cdot A = q$, da cui otteniamo

$$\oint_C H \cdot ds = \frac{\partial q}{\partial t} = i \quad \text{muovamente!}$$
 (Il valore di queste conclusioni sarebbe tuttavia piuttosto modesto se non esistessero dei fenomeni legati direttamente alle correnti di spostamento e che permettessero di studiare il significato fisico e le proprietà di tale corrente: in effetti tali fenomeni esistono, e permettono di vedere che le correnti di spostamento hanno le stesse stesse proprietà elettromagnetiche delle correnti di conduzione.)

Concludiamo osservando che, dopo tutto, $\text{rot } E$ e $\text{rot } B$ (e $\text{rot } H$) non sarebbero stati "simmetrici" senza il termine proporzionale alle variazioni con cui nasce il campo elettrico E , nell'espressione di $\text{rot } B$ (e D per $\text{rot } H$); l'eventuale asimmetria delle due espressioni non sarebbe stata facile da notare come quelle tra $\text{div } E$ (e $\text{div } D$) e $\text{div } B$, dovute al fatto che non sono stati scelti poli magnetici isolati. Invece, con l'apparato del termine "di corrente" comparso nelle correnti di spostamento, apprezziamo inoltre le fondamentali simmetrie tra corrente B e corrente E , e diciamo: un campo elettrico E che nasce induce un campo magnetico B tale da definire la corrente che l'ha generato, mentre un campo magnetico B che nasce induce un campo elettrico E tale da controbilanciare la corrente che l'ha generato (casi in cui entrambi non coesistono!) ; capiamo quindi perché l'aggiunta simultanea

Formule del "termine mancante" se in realtà una serie e infine scoperte :
 tale termine consente infatti di prendere l'esistenza di onde elettromagnetiche,
 perturbazioni che esistono in modo simmetrico delle sorgenti (elettromagnetiche) che
 l'ha generate.

(Mentre nel caso statico E e B forniscono l'uno dell'altro, nel caso
 generale è evidente che sono due aspetti diversi di un unico ente
 fisico : effetto del "campo elettromagnetico".)

Studiamo come alcune caratteristiche del campo elettromagnetico nel vuoto
 (sia e sia nulla) : $\text{rot } B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, $\text{rot } E = - \frac{\partial B}{\partial t}$
 cioè $E = 0$, $B = 0$; Derivando $\nabla(\text{div } E) - \nabla^2 E$ (general)
 $= \text{rot}(\text{rot } E) \stackrel{(2^a)}{=} \text{rot}(-\frac{\partial B}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } B) \stackrel{(1^a)}{=} -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$
 cioè $\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \nabla^2 E \right\|$ ($= \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$) ovvero

posto $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ (è una velocità : $\frac{c^2}{N m^2} \cdot \frac{N}{A^2} \stackrel{(A^2 = \frac{C^2}{N})}{=} \frac{m^2}{s^2}$) ;

analogamente $\nabla(\text{div } B) - \nabla^2 B = \text{rot}(\text{rot } B) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$,
 quindi ugualmente $\left\| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \nabla^2 B \right\|$: queste due equazioni, che

in realtà costituiscono un insieme di sei equazioni (differenziali) nelle incognite
 E_1, E_2, E_3 e B_1, B_2, B_3 , descrivono le propagazione nel vuoto
 delle onde elettromagnetiche. Non esiste, chiaramente, equivalenza alle
 equazioni di Maxwell nel vuoto, fra tutte le soluzioni possiamo scegliere
 quelle "effettive". Come particolare soluzione non banale (cioè non statica)

possiamo considerare una radiazione che, ed un osservatore istantaneo, assume lo stesso valore in tutti i punti ed in qualunque frame perpendicolare ad un dato assi, che possiamo assumere come assi del sistema di riferimento usato: ossia E e B non dipendono da x e z ma soltanto da x e dal tempo t , per cui l'equazione da risolvere sono in realtà

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \quad ; \text{ invece la componente}$$

$$\text{comparsa di } \text{rot} B \text{ uguale a } (\text{rot} B)_x = \partial_z B_3 - \partial_3 B_2 = 0, =$$

$$= (\text{rot} E)_x \text{ in modo analogo, dalle due equazioni di Maxwell}$$

$$\text{ricaviamo } \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \text{e cioè che } E_x \text{ e } B_x \text{ non dipendono}$$

$$\text{da } t, \text{ ma neppure da } x \text{ per la ultima due eq. di Mx. : in}$$

$$\text{conclusioni } E_x \text{ e } B_x \text{ sono costanti che consideriamo } 0. \text{ Consideriamo}$$

$$\text{quindi } E_z, \text{ che soddisfa } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \text{ e cioè l'eq.}$$

$$\text{della "onde vibrante" } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \text{ di soluzioni } F(x, t) =$$

$$= f(x-ct) + g(x+ct) \text{ con } f, g \text{ arbitrarie (degli argomenti specifici)}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{introducendo infatti } u = x-ct \text{ e } w = x+ct \text{ per considerare naturalmente} \\ (x, t) \xrightarrow{(R^2)} (u, w) \xrightarrow{(R^2)} F(u, w), \text{ la relazione } (\nabla F(x, t))^T = \end{array} \right.$$

$$= (\nabla F(u, w))^T \cdot J_{(u, w)}(x, t) \text{ equivale a } (\partial_x F, \partial_t F) = (\partial_u F, \partial_w F) \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial t \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial t \end{pmatrix}$$

$$\text{cioè } \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \\ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} = -c \frac{\partial F}{\partial u} + c \frac{\partial F}{\partial w} \end{cases} \quad \text{e analogamente}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial F}{\partial u} + c \frac{\partial F}{\partial w} \right) = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} + c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} \end{cases}$$

abbiamo così che l'equazione d'onda (quasi) $0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} =$
 $= -4 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w}$, cioè $\left| \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial}{\partial u} F \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial w} F \right) = 0 \right|$; in
 parole $\frac{\partial F}{\partial u} =: f(u)$ e' indipendente da w ed otteniamo $F(u, w) =$
 $= \int f(u) du + g(w) =: f(u) + g(w)$, cioè effettivamente $F(x, t) =$
 $= f(x-ct) + g(x+ct)$. $\underbrace{f}_{\text{(che in effetti non dipende)}}; \underbrace{g}_{\text{(che in effetti non dipende)}}$; Dunque possiamo
 scrivere $E_2(x, t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, onde come somma delle
 funzioni $f(x-ct)$ che rappresenta un'onda progressiva, che si propaga con
 velocità c nella direzione x nel caso positivo dell'asse x , con la
 funzione $g(x+ct)$ che rappresenta un'onda regressiva, che si propaga con
 velocità c lungo l'asse x ma in senso negativo. Alle stesse

da $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ deduciamo subito che

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \partial_x E_2 - \cancel{\partial_z E_1} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial g(x+ct)}{\partial x} \quad (\text{ovvio}) \quad \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{c} \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{c} \frac{\partial g(x+ct)}{\partial t} \quad , \quad \text{da cui } B_z(x, t) = \frac{1}{c} f(x-ct) - \frac{1}{c} g(x+ct)$$

$$(+ \cos t(x)) \text{, che però è } 0 \text{ (evidentemente impossibile) da } (\text{rot } B)_2 = \partial_z B_1 - \partial_x B_3 = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} =$$

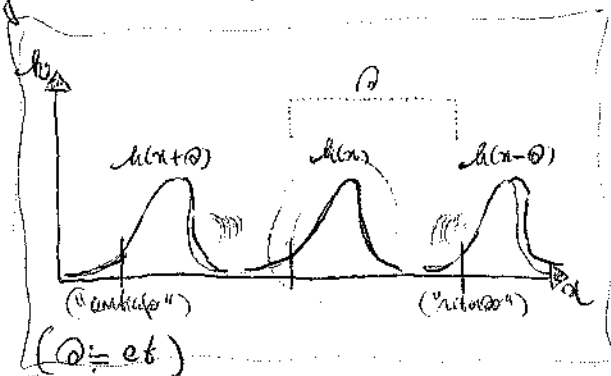
$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial g(x+ct)}{\partial t} !) \quad . \quad \text{Ovviamente } E_3(x, t),$$

soddisfanno la stessa equazione delle onde sferiche, e' delle forme

$$E_3(x, t) = F(x-ct) + G(x+ct) \quad , \quad \text{da cui } -\frac{\partial B_2}{\partial t} = (\text{rot } E)_3 =$$

$$= \partial_z E_1 - \partial_x E_3 = - \left[\frac{\partial F(x-ct)}{\partial x} + \frac{\partial G(x+ct)}{\partial x} \right] = - \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial F(x-ct)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \frac{\partial G(x+ct)}{\partial t} \right] \quad , \quad \text{cioè } B_2(x, t) = -\frac{1}{c} F(x-ct) + \frac{1}{c} G(x+ct) \quad .$$



Del fatto di esiste del sistema le equazioni di Max. nell'aria, le
 quattro funzioni A, ϕ e F, B sono del tutto arbitrarie; in
 generale invece resteranno determinate dalle condizioni poste per E e B al
 contorno della regione di spazio considerata e dalle distribuzioni di carica
 e di correnti che generano i campi.) Comunque, essendo E e B
 funzioni delle sole x e t , le soluzioni trovate rappresentano onde
elektromagnetiche piane (nel vuoto) (con fronte) perpendicolari all'asse x ,
 effetto perche' E e B presentano, e qualunque istante, gli stessi valori in
 tutti i punti di ogni piano perpendicolare all'asse x ; inoltre tale onda
 risulta "trasversale" perche' E e B , per avanzare col tempo, si mantengono
 sempre perpendicolari all'asse x ($E_1 = B_1 = 0$!) e cioè alla direzione
 di propagazione. A proposito, l'onda è costituita da due onde che si
 propagano in senso opposto lungo l'asse x con modulo delle velocità $c =$
 $= 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ che viene identificato con le velocità della luce nel
 vuoto, $299\,792\,458$ m/s.

Se I è il verso dell'asse x , allora effetto non solo $E \cdot I = B \cdot I =$
 $= 0$ ma anche chiaramente $E \cdot B = 0$: i campi E e B sono
 cioè trasversali e perpendicolari fra loro; in particolare tutti queste
 onde per un'onda (piana) che si propaga nel senso positivo dell'asse x , cioè
 per E e B con $E_1 = 0$, $E_2 = A(x-ct)$, $E_3 = F(x-ct)$ e
 $B_1 = 0$, $B_2 = -\frac{1}{c} F(x-ct)$, $B_3 = \frac{1}{c} A(x-ct)$ (in (x, t)), fin
 il fatto che (E, B, I) formano una triade (ortogonale) destinata (o
trasversale) : infatti $E \times B = \begin{bmatrix} E_2 B_3 - E_3 B_2 \\ E_3 B_1 - E_1 B_3 \\ E_1 B_2 - E_2 B_1 \end{bmatrix} = (E_2 B_3 - E_3 B_2) I$

$$= \frac{1}{c} (b^2(n-ct) + F^2(n-ct)) I, \quad \text{cioè} \quad E \times B = \frac{1}{c} |E|^2 I; \quad \text{in}$$

effetti è (ma ora che $B \times I = \begin{pmatrix} 0 \\ B_3 \\ -B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} E$ e che $I \times E =$

$$= -(E \times I) = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix} = c B \quad (\text{perché, in generale, } F \times I = \begin{pmatrix} F_2 I_3 - F_3 I_2 \\ F_3 I_1 - F_1 I_3 \\ F_1 I_2 - F_2 I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_3 \\ -F_2 \end{pmatrix}),$$

cioè $E = c B \times I$ e $B = \frac{1}{c} I \times E$ (in effetti da una derivata

l'altra: ad esempio, $E = c B \times I, \Leftrightarrow \frac{1}{c} E = B \times I, \Rightarrow I \times \frac{1}{c} E =$

$$= I \times (B \times I) \stackrel{(a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c)}{=} \underbrace{(I \cdot I)}_{(1)} B - \underbrace{(I \cdot B)}_{(=0)} I = B$$

, dalle quali deduciamo subito che $|E| = c |B|$ (per ogni x e t).

Un'onda piana è poi "polarizzata linearmente" quando E in ogni punto dello spazio, in orientato col tempo, si mantiene sempre parallelo ad una stessa direzione; ad esempio, dire che questa direzione è l'asse y è come dire $E_1 = E_3 = 0$, per cui nel caso di propagazione "longitudinale" avremmo che anche $B_2 = 0 = B_4$ (dalle def.): in questo caso pertanto E e B sono costantemente annulli ricambiando due direzioni fisse, perpendicolari tra loro e alle direzioni di propagazione dell'onda (con le quali inoltre formano una terna ortonormale).

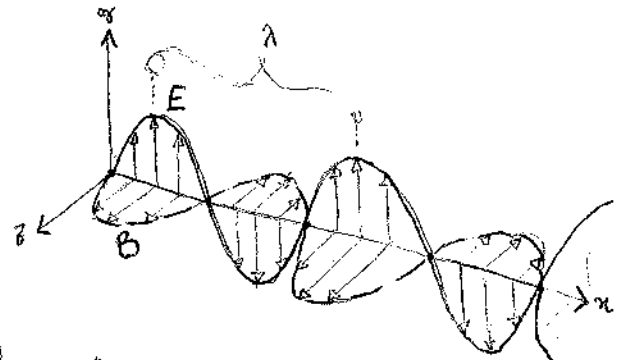
Siano dunque $E_1 = E_3 = B_1 = B_2 = 0$ e $E_2 = f(x-ct), B_3 = \frac{1}{c} f(x-ct)$; grazie al teorema di Fourier, se f è qualsiasi "onda" può essere rappresentata come somma di onde sinusoidali; per uno dei casi (il più importante in fisica) di onde piane polarizzate linearmente è quello in cui f stessa è sinusoidale: (precisamente quindi $\begin{cases} E = E_0 \sin(kx-ct) \\ B = B_0 \sin(kx-ct) \end{cases}$, dove E_0 e B_0 hanno tutte le proprietà comuni sopra (nel nostro caso formano insieme $E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $B_0 = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$); k è detto "numero d'onda",

mentre $\lambda := \frac{2\pi}{k}$ è "la lunghezza d'onda" (cioè, a t fissato, la distanza tra due massimi successivi dell'onda: me infetti chiaramente il fatto di $\sin(kx - \omega t)$ è $\frac{2\pi}{k}$ (in x)!) e che conosciamo il "periodo" dell'onda T , ossia il tempo per percorrere esattamente un'onda completa (de fatto della perturbazione): $T = \frac{1}{\nu} (= \frac{2\pi}{\omega})$; la "frequenza" dell'onda è allora $\nu = \frac{1}{T}$ e quindi la velocità (v)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda} (= kc), \text{ da cui (obteniamo nuovamente)}$$

$$\sin(kx - \omega t) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) = -\sin(\omega(t - \frac{x}{c}))$$

Questo fatto è anche interessante il caso di onde (come monocromatiche) "polarizzate circolarmente", cioè



$$\begin{cases} E = E_0 [\pm J \sin(kx - \omega t) + K \cos(kx - \omega t)] \\ B = \frac{1}{c} E_0 [-J \cos(kx - \omega t) \pm K \sin(kx - \omega t)] \end{cases}$$

("idententità": ciascun vettore ha modulo costante, e le componenti sono sinusoidali)

(i "±" sono "inseparabili") : si tratta di una combinazione lineare di due onde (come di uguale frequenza) polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari (J e K) e sfasate tra loro di $\pi/2$ rad; in questo modo E e B, che restano comunque sempre perpendicolari tra loro, ruotano con velocità angolare costante ω attorno alla direzione di propagazione: infatti

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\omega E_0 [\pm J \cos(kx - \omega t) - K \sin(kx - \omega t)]$$

ossia $\frac{\partial E}{\partial t} = \pm \omega \mathbf{I} \times \mathbf{E} \quad (= \pm \omega \begin{bmatrix} 0 \\ -E_z \\ E_z \end{bmatrix})$ e "similmente" (in un senso o nell'altro), così come $\frac{\partial B}{\partial t} = \pm \omega \mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

Nel caso di un dielettrico omogeneo ed isotropo, ma anche in assenza di carica e di corrente di conduzione, occorre cercare una soluzione del tipo che onde piane per le eq. di Maxwell. Si assume convenientemente l'espressione come sotto e condizione di ottenere ϵ_0 e μ_0 con $E = \epsilon_1 \epsilon_0$ e $\mu = \mu_1 \mu_0$, onde c con $v := \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$

($\leq c$) ; non solo: si trova sperimentalmente che la permittività di un dielettrico non è indipendente dalla frequenza dell'onda elettromagnetica che si propaga nel mezzo, per cui $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Considerando quindi un'onda monocromatica propagantesi lungo l'asse x , abbiamo ($\omega = kv$)

$E = E_\omega \sin(kx - \omega t)$ (ed un'espressione analoga per B), da cui facilmente $D_\omega = \epsilon(\omega) E_\omega$; ma allora un'onda monocromatica che si propaga lungo l'asse x , in quanto corrisponde "contorno" di onda come quelle appena dette, si può osservare (già alle TGF) come

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{ovvero} \quad E_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') e^{i\omega t'} dt'$$

A questo punto "D(t) = \epsilon E(t)" sarebbe $D(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(t-t') E(t') dt'$,

$$\text{ovvero } E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (= \hat{\epsilon}(\omega)(t)), \text{ dalle quali}$$

effettivamente si ritrova che l'effetto indotto dal dielettrico (elettrico e magnetico) che genera le polarizzazioni: meccanicamente queste onde subiscono il fenomeno delle "dispersioni", che per ciò sotto è un fenomeno accomunato da parte del mezzo (tanto maggiore quanto più le

frequenza dell'onda e' minore e quella molecole di eccitazione delle molecole del dielettrico).

Immaginiamo un'onda elettromagnetica propagantesi in un materiale conduttore (anche in uno delle componenti del conduttore "i"), che studieremo naturalmente partendo dalle eq. di Max. "complete": $\text{rot H} = j + \frac{\partial D}{\partial t}$ ($\frac{\partial}{\partial t} = \gamma E$) $\Rightarrow \gamma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$

e equiv. $\text{rot H} = \frac{\gamma}{\epsilon} D + \frac{\partial D}{\partial t}$; osservando che, e usando che $\text{div D} = \rho$, otteniamo $\frac{\gamma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e cioè che

$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau := \frac{\epsilon}{\gamma}$: la carica si scarica al conduttore decadendo esponenzialmente con un tempo di rilassamento τ ; in

valori, per buoni conduttori e per onde elettromagnetiche d'interesse generale, tale valore e' (notevolmente) nullo: un'onda elettromagnetica non trova una distribuzione di carica elettrica al conduttore quando si propaga in un (buono) conduttore, come $\rho = 0$. Osservando inoltre il rot delle

eq. di H ed E, otteniamo $\nabla(\text{div H}) - \nabla^2 H = \text{rot}(\text{rot H}) (=)$
 $= \gamma \text{rot E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot E})$ e quindi $(\text{rot E} = -\frac{\partial B}{\partial t})$

$\nabla^2 H = \gamma \frac{\partial B}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$ ($\mu = \frac{B}{H}$) $\Rightarrow \gamma \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$, cioè

$\nabla^2 H - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0$; analogamente $\nabla(\text{div E}) - \nabla^2 E =$

$= \text{rot}(\text{rot E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot H} (= -\gamma \mu \frac{\partial E}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2})$,
 cioè "almeno" $\nabla^2 E - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial E}{\partial t} = 0$: dunque le

due equazioni del campo elettromagnetico nel conduttore hanno come (alle

Quante (particelle) del secondo ordine, omogenee e a coefficienti costanti.

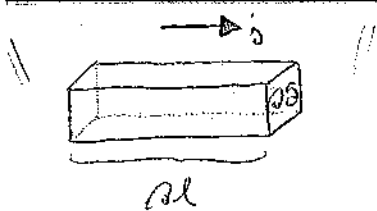
Già che si tratta di un'onda piana che si propaga lungo l'asse z e delle forme "a variabile separabili" $\vec{f}(z, t) = \vec{f}(z) e^{i\omega t}$, con $\vec{f}(z)$ complessa, per cui tale che $(0 =) \nabla^2 \vec{f} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} - \gamma \mu \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} =$
 $= \left[\nabla^2 \vec{f} + \frac{\omega^2}{\omega^2} \vec{f} - i\omega \gamma \mu \vec{f} = 0 \right]$: è evidente che $\vec{f}(z) = \vec{B} e^{ikz}$

con k complessa tale che $k^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2} - i\omega \gamma \mu$; notando $k_{(m)}$ come $k = -\alpha + i\beta$, è quindi $\vec{f}(z, t) = \vec{B} e^{ikz} e^{i\omega t} = \vec{B} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z)}$ (per cui l'onda si propaga "progressivamente" se, e solo se, $\alpha > 0$!) e inoltre α, β tali che $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{\omega^2} \\ 2\alpha\beta = \omega \gamma \mu \end{cases}$ sono facilmente $\begin{cases} \alpha = \frac{\omega}{\omega} \left[\frac{\sqrt{1 + (\frac{\gamma \mu}{\omega^2})^2} + 1}{2} \right]^{1/2} \\ \beta = \frac{\omega}{\omega} \left[\frac{\sqrt{1 + (\frac{\gamma \mu}{\omega^2})^2} - 1}{2} \right]^{1/2} \end{cases}$,

come notiamo $\beta > 0$: il fenomeno dell'onda nel conduttore lo si può considerare diminuisce esponenzialmente ; $\alpha := \frac{1}{\delta_{(m)}}$ rappresenta il "cammino di attenuazione". Defendo ora che per buoni conduttori e $\frac{\gamma}{\omega \epsilon} \gg 1$, $\alpha \approx \beta \approx \frac{\omega}{\omega} \sqrt{\frac{\gamma}{2\omega \epsilon}} = \sqrt{\frac{(\omega^2 \epsilon \mu) \gamma}{2\omega \epsilon}} = \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu}{2}}$ e cioè $\alpha \approx$

$\approx \sqrt{\frac{2}{\omega \gamma \mu}}$ è quanto nasce e penetra l'onda (almeno solo uno stato atomico, se fosse $\delta \approx 10^{-3} \text{ m}$) ; deducendo che (per frequenze molto elevate ω) per valori di γ molto elevati, cioè per conduttori ottimi, un'onda elettromagnetica incidente sul conduttore non penetra affatto, cioè viene totalmente riflessa ed è una onda di superficie. [Ci convinciamo di questo anche

ragionando così : considero all'interno del conduttore un parallelepipedo del tipo



, l'intensità di corrente che attraversa tale elemento di volume

è (per def.) $di = |i| dS$ e quindi la corrente completa in esso per effetto

$$\text{Dato che } i = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dS} \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dS}{dS} (|i| dS)^2 = \frac{|i|^2}{\gamma} dV \quad (|i| = \gamma |E|)$$

$$= \gamma |E|^2 dV \quad : \text{Considera in ogni caso } \frac{dW}{dV} \text{ potenza spinta, per}$$

$\gamma \rightarrow \infty$ dov'è dove $E \rightarrow 0$; Dunque ritroviamo questo effetto, e che comunque il campo elettrico all'interno di un conduttore "perfetto" è nullo anche in condizioni (di campi esterni) variabili nel tempo. Evidentemente nel caso si può dire nullo (per J, B, H e D).

Comunque, naturalmente, un'onda incidente su un conduttore perfetto ha come effetto la presenza di una distribuzione di cariche superficiali σ e corrente superficiale i_s ; essendo all'interno $E = B = 0$, le condizioni di continuità (viste!) nel passaggio tra due mezzi diversi per le componenti tangenziale E_t di E e quelle normale B_n di B impongono che $E_t = B_n = 0$ (fanno le superficie del conduttore, cioè che in punti esterni "arbitrari" al conduttore il campo elettrico è e lui normale mentre quello magnetico è e lui tangente).

Considerando (come visto) $|D| = \sigma$ e $H = i_s \times n$, determino effusamente σ e i_s nel caso si conoscano i campi nelle immediate vicinanze del conduttore.)

Concludiamo osservando che, invece, per mezzi (non metallici) di piccole conduttività γ è valido $\gamma / \omega \epsilon \ll 1$: usando che $(1+x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x$, risulta

$$\text{chiaramente che } \alpha \approx \frac{\omega}{\gamma} \text{ e che } \beta \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{\gamma} \frac{\gamma}{\omega \epsilon} = \frac{\gamma}{2 \epsilon \omega}, \text{ per}$$

cui $R \approx \frac{\omega}{\gamma} + i \frac{\gamma}{2 \epsilon \omega}$; in particolare l'assorbimento dell'onda nel mezzo risulta indipendente dalla frequenza, nell'approssimazione in cui funziona

Considerare costante γ e E del mezzo.

È possibile determinare altre soluzioni delle eq. di All. nel vuoto, aventi proprietà di simmetria sferica o di simmetria cilindrica, oppure di tipo meno semplice; soluzioni di questo tipo si ottengono più facilmente usando sistemi di coordinate non cartesiane, quali coordinate polari o cilindriche, risolvendo le equazioni del campo elettromagnetico in tali coordinate e risolvendo poi per determinare le componenti di E e B specificate dal sistema di riferimento scelto. È importante notare inoltre che, per soluzioni delle eq. di All. e per il teorema di Poynting, una generale soluzione di onde elettromagnetiche può esprimersi come sovrapposizione di onde elettromagnetiche propaganti in ogni direzione dello spazio.

Consideriamo quindi un caso particolarmente interessante di onde sferiche, cominciando col porre l'origine del sistema di riferimento (r, θ, ϕ) nel centro di simmetria e poi $B = \text{rot}(\gamma M) = \gamma \text{rot} M + \nabla \gamma \times M = \nabla \gamma \times M$ dove γ è campo scalare arbitrario e M vettore ∇ fisso (in quanto comunque $\text{div} B = 0$); sufficerebbe dire che $\gamma = \gamma(r, t)$, cioè che non dipende dagli angoli θ e ϕ . Affinché B soddisfi $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B = 0$, è solamente sufficiente che sia γ e soddisfi le medesime equazioni (per commutabilità degli operatori: $\text{rot}(\nabla \gamma) = 0$); la generale espressione di $\nabla^2 \gamma$ in coordinate polari sarebbe complicata, ma si riduce a $\nabla^2 \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \gamma)$ per ipotesi di γ radiale, per cui γ soddisfa $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \gamma) = 0$, ovvero

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\eta f) - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(\eta f) = 0 \quad \text{delle "onde arbitrarie": } \lambda^1 \text{ eiel}$$

$$f(x, t) = \frac{f(x-ct)}{1} + \frac{g(x+ct)}{1} ; \text{ say } f \text{ or } g \text{ are } 1^{\text{st}} \text{ or } 2^{\text{nd}}$$

referenciais paralelos a m fineto, obtendo então $B = \nabla \mu \times m =$
 $= \left\{ \frac{j(1-ct)}{1} + \frac{j(1+ct)}{1} - \frac{j(1-ct)}{1^2} - \frac{j(1+ct)}{1^2} \right\} \frac{\vec{r} \times m}{1} \quad (\text{depois com})$

visto che $(1, t) \xrightarrow{A-ct} A(1-ct) \xrightarrow{f} f(A(1-ct))$ ha $\frac{df(A(1-ct))}{dn} = f'(A(1-ct)) \cdot 1 = f'(A(1-ct))$,
 l'angolo per f e le $\frac{\partial}{\partial n}$ dei riflessi $\left(\begin{smallmatrix} \text{angolo} \\ = \end{smallmatrix} \right)$

$$= \left\{ -\frac{j(1-\cos\theta)}{\Lambda} - \frac{j(1+\cos\theta)}{\Lambda} + \frac{1(1-\cos\theta)}{\Lambda^2} + \frac{1(1+\cos\theta)}{\Lambda^2} \right\} \sin\theta \hat{e}_\theta$$

ricavando infine E da $\text{rot } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$:

Diagram illustrating the geometry for the calculation of the magnetic field at the center of a sphere. The sphere is centered at the origin of a coordinate system with axes x , y , and z . A magnetic field vector $\vec{m}$ points vertically upwards along the z -axis. A vector $\vec{q}$ points from the center towards the bottom-right, making an angle ϕ with the x -axis. A vector $\vec{p}$ points from the center towards the top-right, making an angle θ with $\vec{q}$ and an angle α with the z -axis.

$$(\vec{p} \times \vec{m} = -\sin \alpha \sin \phi \hat{q})$$

$$\begin{aligned} \text{Not } B &= \begin{vmatrix} i_n & i_o & i_e \\ \partial_n & \partial_o & \partial_e \\ 0 & 0 & |B| \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2o |B| \\ -2n |B| \\ 0 \end{bmatrix} = \left[-\frac{j(n-ct)}{\lambda} - \frac{j(n+ct)}{\lambda} + \right. \\ &+ \left. \frac{j(n-ct)}{\lambda^2} + \frac{j(n+ct)}{\lambda^2} \right] \cos(ct) i_n + \left\{ \frac{j(n-ct)}{\lambda} + \frac{j(n+ct)}{\lambda} - \right. \\ &- 2 \frac{j(n-ct)}{\lambda^2} - 2 \frac{j(n+ct)}{\lambda^2} + 2 \frac{j(n-ct)}{\lambda^3} + 2 \frac{j(n+ct)}{\lambda^3} \left. \right\} \sin(ct) i_o, \end{aligned}$$

Compte de $\frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \operatorname{rot} B$ nous avons $E =$
((x, y, t))

inside $B_1 = B_0 = 0$, note $\nabla \cdot B = \frac{1}{\lambda \mu_0(\omega)} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_0 B_z)$ in -

$$-\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \Lambda} (n B_4) i_0 = \frac{1}{\Lambda n_{\text{max}}(e)} \left(\underbrace{\cos(e) B_{\text{eff}}}_{(\{ \dots \}_{n_{\text{max}}(e)})} + n_{\text{max}}(e) \cos(e) \{ \dots \} \right) i_0 -$$

$$-\frac{1}{\lambda} \left(B_{\mu} + \pi \frac{\partial B_{\mu}}{\partial \pi} \right) i\sigma = \frac{2\cos(\alpha)}{\pi} \left\{ -\frac{j(\lambda-\alpha)}{\lambda} - \frac{j(\lambda+\alpha)}{\lambda} + \frac{j(\lambda-\alpha)}{\lambda^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{j(\lambda+\alpha)}{\lambda^2} \right\} \dot{G}_{\mu} + \left(-\frac{\partial B_{\mu}}{\partial \lambda} - \frac{B_{\mu}}{\lambda} \right) i\sigma = \frac{2\cos(\alpha)}{\pi} \left\{ -\frac{j(\lambda-\alpha)}{\lambda^2} - \right.$$

$$- \left\{ \frac{\dot{f}(1+ct)}{1^2} + \frac{f(1-ct)}{1^3} + \frac{f(1+ct)}{1^3} \right\} \sin ct + \left\{ \frac{\ddot{f}(1-ct)}{1} + \frac{\ddot{f}(1+ct)}{1} \right\} \cos ct$$

$\text{Dato } \frac{\partial E}{\partial t} = c^2 \text{ rot } B \quad \text{vediamo che } E = 2c \cos(\omega t) \left\{ \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^3} \int \sin(\omega t) \omega \, d\omega + \frac{1}{\omega^3} \int \cos(\omega t) \omega \, d\omega \right\} \sin + \cos(\omega t) \left\{ \frac{\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{1}{\omega^3} \int \sin(\omega t) \omega \, d\omega - \frac{1}{\omega^3} \int \cos(\omega t) \omega \, d\omega \right\} \cos$

Osserviamo quindi infine che, al crescere di ω , in B ed E i termini con ω^2 (o ω^3) e denominatore divergono trascurabili rispetto a quello con ω e denominatore; inoltre, considerando una "piccola" regione dello spazio "sufficientemente lontana" dal centro dell'onda sferica, il termine (dominante) $1/\omega$ può anche considerarsi praticamente costante: in tale regione dello spazio, l'onda sferica può essere approssimata con un'onda piana.

Come noto, quando in una regione dello spazio c'è presente sia un campo elettrostatico che un campo magnetostatico, la densità di energia elettromagnetica (potenziale) è $W = \frac{1}{2} D \cdot E + \frac{1}{2} H \cdot B$; per analogia con la meccanica, ammettendo tale espressione abbia velocità generale e quindi si applichi pure al caso dei campi variabili nel tempo.

Adottando ora nel vuoto: $D = \epsilon_0 E$ e $H = \frac{1}{\mu_0} B$, otteniamo che $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} |B|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} |E|^2 + \frac{1}{2 \mu_0} |B|^2$; se il caso è quello di onde piane propaganti nel senso positivo dell'asse x , dove come noto $|B| = \frac{1}{c} |E| = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} |E|$, da cui $|B|^2 = (\epsilon_0 \mu_0) |E|^2$ e $U = \epsilon_0 |E|^2$. In particolare è evidente che l'onda si sposta con velocità c e quindi anche l'energia ed una emettente si sposta con la

stime relative; Definiamo allora "l'impedenza I " ^(2/3) _(W) di un'onda e.m. come
 l'energia che attraversa nell'unità di tempo una superficie unitaria perpendicolare
 alle direzioni di propagazione dell'onda stessa, nel vuoto con ϵ_0 e μ_0
 come costanti universali vale cioè: poiché nel tempo Δt l'onda si sposta di un
 tratto $c \Delta t$, l'energia che in tale tempo attraversa S è $u(S c \Delta t)$ e
 dunque costantemente $I = c \cdot u = c \cdot \epsilon_0 |E|^2 = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} |E|^2 =$
 $= \frac{|E|^2}{Z}$ ovvero posto $Z := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$ $\left(\frac{N}{A} \cdot \frac{Nm}{C} = \frac{1}{A^2} \left(\frac{Nm}{C} \right)^2 = \right.$
 $\left. = \frac{V^2}{A^2} = \Omega^2 \right)$, che chiamiamo "impedenza del vuoto". ^($I = c \epsilon_0 |E|^2$) ^(I è energia)
 allora $E \times B = \frac{1}{c} |E|^2 \vec{I}$ ^(che è anche il vettore di propagazione) ^{calcoliamo} $|E \times B| = \frac{1}{c} |E|^2 = \frac{I}{c^2 \epsilon_0} =$
 $= \mu_0 I$; ma (per $\perp$) $|E \times B| = |E| |B|$, unito a $|H| = \frac{|B|}{\mu_0}$, da
 $I = |E| |H|$: possiamo quindi scrivere il "flusso di energia", ovvero
 la densità di "corrente energetica", per mezzo del vettore "Poynting"
di Poynting $\boxed{S = E \times H}$ $\left(\text{in } \frac{N}{C} \cdot \frac{A}{m} = \frac{(A \cdot \frac{C}{s})}{s} \cdot \frac{W}{Am} = \frac{Nm}{sm} \cdot \frac{1}{m} = \right.$
 $\left. = \frac{W}{m^2} \right)$; per un'onda sinusoidale, E e H variano sinusoidalmente nel
 tempo e dunque è evidente che il valore medio di $|S|$ sia $\frac{|E_0|^2}{2 \mu_0 c} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot c \epsilon_0 |E_0|^2$.
 Ora, se è vero che che la formula per u che abbiamo generale, allora ci
 si può chiedere se con S valga in generale un'equazione di continuità
 dell'energia elettromagnetica del tipo, naturalmente, $\left\langle \text{div } S + \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle = 0$
 (che, tra l'altro, sarebbe coerente in $\frac{W}{m^3}$!) ; semplicemente dalle def.

Avrebbe cioè come $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = 0$;
 usando $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \stackrel{(\text{proprietà})}{=} \mathbf{H} \cdot \text{rot}(\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \text{rot}(\mathbf{H}) \stackrel{(\text{eq. m.})}{=} -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$,
 dove $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})}{\partial t}$ e $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} =$
 $= \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$, otteniamo che

$$\left\| \text{div} \mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \right\| : \text{ tale è l'eq. di continuità scalare se,$$

e solo se, $\mathbf{j} = 0$ e cioè nel vuoto ; quando invece sono presenti delle cariche la conservazione (con densità ρ) il campo elettromagnetico compie lavoro su una e quindi parte dell'energia elettromagnetica si trasforma in energia meccanica o termica (infatti, se F indica la forza risultante agente sulle cariche contenute nell'unità di volume e in moto con velocità $\mathbf{v}$, allora la potenza assorbita per unità di volume risulta $F \cdot \mathbf{v} \stackrel{(\text{B.2})}{=} \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} =$
 $= \mathbf{E} \cdot \underbrace{(\rho \mathbf{v})}_{(=\mathbf{j})} + \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}_{(=\mathbf{0})} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} !$) : considerate una qualsiasi

regione dello spazio di volume V e racchiusa da una superficie S , otteniamo (anche per Gauss)

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV$$

cioè che la somma dell'energia elettromagnetica uscente (cal in uscita) in un certo intervallo di tempo da una qualche regione dello spazio e del lavoro compiuto dal campo elettromagnetico sulle cariche elettriche contenute in tale regione è opposta alle variazioni (temporali) dell'energia elettromagnetica contenuta in tale regione. (Ottengo infine che, mentre $\Phi_S(\mathbf{S})$ può essere interpretato come la misura dell'energia elettromagnetica in uscita

per unità di tempo delle regioni V delimitate da S , S stesso in un punto dello spazio può essere collegato alla superficie delle cariche di carica elettrostatica al polo e messo ad un valore arbitrario (cioè $\phi = 0$), che tuttavia in generale si ignora.

Visto che un'onda elettromagnetica fornisce una quantità di energia e che vi è un trasporto di energia (collegato all'azione), è ragionevole ritenere che ci siano anche una quantità di moto e un momento angolare (anche collegati all'onda). Cominciamo infatti ad osservare che quando un'onda elettromagnetica si muove, oltre che acquista energia dall'onda, ne trasporta un impulso e che le due quantità sono proporzionali fra loro.

Secondo in realtà nel caso perfettamente semplice di un'onda piana monocromatica che, propagandosi nel vuoto e nelle direzioni e nel senso dell'onda x , incide su una superficie q orientata e misurata nel piano $x=0$ (cioè yz):

allora l'energia ceduta in un tempo T dall'onda elettromagnetica è chiaramente

$$|L| = \int F \cdot dS = \int_{t=0}^{t=T} F \cdot \vec{\sigma} dA = \int_0^T q(E + \vec{\sigma} \times B) \cdot \vec{\sigma} dA = q \int_0^T E \cdot \vec{\sigma} dA$$

(quindi solo E contribuisce all'energia ceduta dall'onda alla superficie!), mentre

l'impulso I ceduto in un tempo (della superficie) è $I = \int_0^T F dt = \int_0^T q(E + \vec{\sigma} \times B) dt = q \int_0^T \vec{\sigma} \times B dt$ (quindi solo B contribuisce all'impulso ceduto dall'onda alla superficie!),

$\Rightarrow I = \frac{1}{c} q \int_0^T \vec{\sigma} \times (i_x \times E) dt = \frac{1}{c} q i_x \int_0^T \vec{\sigma} \cdot E dt$ e quindi $I = \frac{|L|}{c} i_x \Rightarrow |L| = c |I|$;

il risultato è in realtà valido in generale.

quello un sistema di cariche cariche energia $\mathcal{L}$ di un'area $\mathcal{A}$. Essendo anche un impulso I le cui componenti nelle direzioni x e y della superficie dell'area $\mathcal{A}$ sono uguali in modulo a $\frac{\mathcal{L}}{c}$; ciò è valido anche in un riferimento qualunque di impulso, ma dovrebbe essere con $\frac{e}{r_{\text{Einf}}}$.

Dalla base di ciò ammettiamo che un'area $\mathcal{A}$ trasferisce oltre che un'energia anche una quantità di moto; nel caso di area $\mathcal{A}$ del tipo presente e con densità di energia u , ammettiamo in analogia che $|I| = \frac{\mathcal{L}}{c}$ che formalmente la quantità di moto $\vec{P}$ per unità di volume abbia $|P| = \frac{u}{c}$ e direzione e verso coincidenti con quelli della superficie dell'area. Ma, sempre in questo caso, è $|S| = |E \times H| = \mathcal{A} \cdot \text{intensità dell'area} = u \cdot c$, dove $|P| = \frac{|S|}{c^2}$: in quanto P e S sono (nel parallelo considerato), formano allora avere

$$\boxed{P = \frac{S}{c^2}} \quad \left(\text{effettivamente in } \frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}}{\text{m}^3} = \frac{\text{N/s}}{\text{m}^3} \right).$$

(Dalla $|P| = \frac{u}{c}$ che abbiamo generalizzato, quindi se P è la quantità di moto formiamo avere $|P| = \frac{\mathcal{L}}{c}$).

Procediamo adesso coi calcoli sul momento angolare dell'area $\mathcal{A}$, considerando in realtà nel caso iniziale la sua proiezione incidente su una circonferenza q parallela al piano $n=0$; il momento angolare L della circonferenza è legato al momento M della forza agente su essa dalla relazione $M = \frac{dL}{dt}$, dove come solo conosciamo l'origine del sistema di riferimento, e allora

Comunque il momento angolare totale dell'ide delle cariche diventa un (vettore)

$$L = \int_0^T \underbrace{r \times F}_{\substack{\text{della carica} \\ \text{nel r.o. } r=0}} dt = q \int_0^T r \times (E + v \times B) dt \Rightarrow q \int_0^T (r \times E) dt \quad (\text{le}$$

forte da $\lambda_X(A \times B)$ che (in quel caso) un numero coefficienti di polinomi esistenti nel tempo simultaneamente, tutto con la stessa funzione) : in particolare, nel caso di un'onda fissa polinomiale stazionaria e' $L = 0$ (in quanto $E // \pi$) . Decisamente fin' internamente e' il caso di un'onda

fione monocromatica polarizzata circolarmente : visto infatti che $\omega =$

$$= q \int_0^T E \cdot \frac{d\vec{\alpha}}{dt} dt = q \left\{ [E \cdot \vec{\alpha}]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \vec{\alpha} dt \right\} = -q \int_0^T \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \vec{\alpha} dt, \quad (\text{per } \frac{d\vec{\alpha}}{dt} = \pm \omega \hat{e}_x \times \vec{e})$$
$$= \mp q \omega \int_0^T \vec{\alpha} \cdot (\hat{e}_x \times E) dt \quad (= \text{"circolare"}) = \pm q \omega \hat{e}_x \cdot \int_0^T \vec{\alpha} \times E dt \quad (\cancel{(\hat{e}_x \times E)})$$

($\hat{e}_x \cdot (\hat{e}_x \times E) = 0$)

$$\begin{aligned} &= (\hat{e}_x \cdot E) \hat{e}_x - (\hat{e}_x \cdot E) E \\ &= (\hat{e}_x \cdot E) \hat{e}_x = (\hat{e}_x \cdot E) \hat{e}_x - (\hat{e}_x \cdot E) E = \hat{e}_x (\hat{e}_x \cdot E) \end{aligned}$$

$(a \cdot (b \cdot c) = c \cdot (a \cdot b) = b \cdot (c \cdot a) !)$, risulta evidente che allora

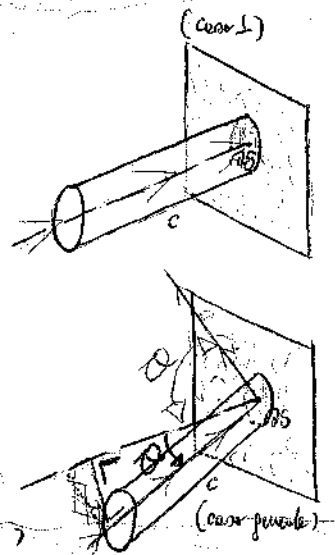
$L \cdot i_n = \pm \frac{\phi_0}{\omega}$. Per sinusoida c'è solo un periodo, quindi:

quando un sistema lo assorbe un'energia L da un'onda fredda
monocromatica polarizzata circolarmente, esso riceve un momento angolare $\hbar$
con la stessa frequenza e verso di propagazione dell'onda e il
momento angolare è L/ω . Pertanto un'onda r.m. fredda polarizzata
circolarmente trasporta con sé un momento angolare, che inoltre per
unità di volume ha modulo $\hbar\omega$.

Vole più in generale che un'area c.m. fornisca non una quantità di moto p ma un momento angolare L (per unità di volume), e che

stanno in relazione $L = \pi \times p$, $(=) \frac{1}{c^2} \pi \times S$.

ES.: quando un'onda viene emessa o riflessa dalla superficie di un corpo, la superficie risulta soggetta ad una forza e quindi ricade ad una certa pressione ("pressione delle radiazioni"); nel caso di onde e.m. (onde incidenti perpendicolarmente su una superficie perfettamente assorbente, se $|p| \equiv \frac{u}{c}$ con p quantità di moto per unità di volume (trasporto dell'onda con u), un elemento OS della superficie del corpo assorbe, nell'unità di tempo, la quantità di moto $c|p|OS$ (teorema dell'impulso) tale è il modulo della forza agente $\perp$ su tale OS : concludiamo $P_{\text{rec}} = c|p| \equiv u$. Se invece la superficie fosse perfettamente riflettente, allora ovviamente avremmo $P_{\text{rec}} = 2u$ ("rimbalzo + forza"!).



Nel caso generale d'incidenza obliqua di θ , la quantità di moto che "entra" nell'unità di tempo su OS è chiaramente $c|p| \cos \theta OS$ (in modulo), dunque la sua componente normale a OS che modulo $c|p| \cos^2 \theta OS$: in conclusione $P_{\text{rec}} = c|p| \cos^2 \theta = u \cos^2 \theta$ nel caso di perfetto assorbimento, $P_{\text{rec}} = 2u \cos^2 \theta$ nel caso di perfetto riflesso (ricordarsi infatti che per def. la pressione è il modulo della forza agente perpendicolarmente sulle unità di superficie).

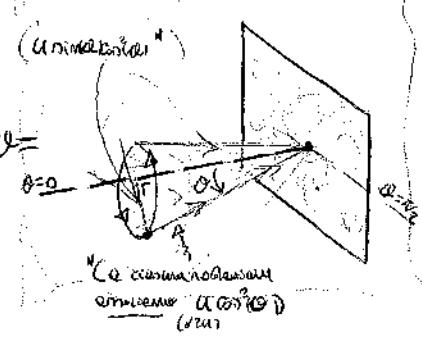
Adesso, finalmente, per una radiazione incidente isotropa (che cioè non ha pressione come contributo da onda (come da quello incidente) fornito da tutte le direzioni).

si ha, medesimo in tutte le direzioni, che

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\phi = u \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta =$$

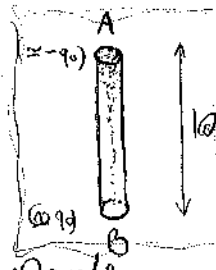
$$= u \cdot \frac{1}{2} \left(\cos^3(\theta) \right)_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{u}{3}$$

nel caso di assorbimento completo, cioè $P_{\text{rad}} = \frac{2}{3} u$ nel caso di perfetta riflessione.

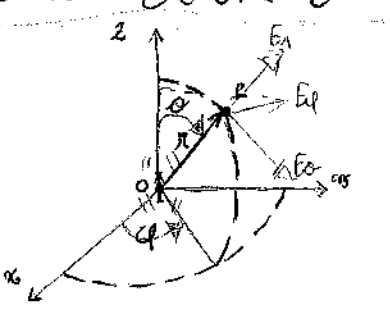


Le seguenti sono onde e.m. sono le stesse seguenti del campo e.m., cioè delle onde elettromagnetiche in movimento; grazie alle eq. di Max. è facile, in linea di principio, studiare il campo e.m. prodotto da un qualsiasi sistema di cariche in moto, ma in pratica ciò risulta il più delle volte assai complicato. Discutiamo ora il caso semplice, ma particolarmente interessante, dell'impulso di carica di un dipolo elettrico oscillante nel vuoto: prenderemo come esempio un dipolo elettrico con momento di dipolo sinusoidale $|p| = q_0 l_0 \sin(\omega t) =: |p_0| \sin(\omega t)$

(che è quello che si ha, ad esempio, in un "bistorta" lungo l_0 di sezione trasversale di elettroni di densità n di moto armonico semplice con frequenza ω , caso che per esemplificare meglio l'estremo del fatto che una carica di modulo q (in $|q_0|$) si muoveva tale dipolo immagine onde sfasate: prendo quindi un sistema di riferimento in coordinate



sferici (r, θ, ϕ) con l'origine posta "nel dipolo" e con l'asse z parallelo al dipolo stesso (piano naturalmente in espansione di dipolo), ricorrendo H ed E in un punto $P := (r, \theta, \phi)$ dalle equazioni (già ricavate) con le scelte



$$A(r) := \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |p_0| \cos(kr), \quad f(r) := 0, \quad \text{con } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad \text{dove } \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

(frequenza fissa!)

quindi da

$$\begin{cases} H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\sin \theta}{\mu_0} \left\{ -\frac{i(n-ct)}{\lambda} + \frac{A(n-ct)}{\lambda^2} \right\} i_\phi \\ E = 2c \cos \theta \left\{ \frac{A(n-ct)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3} \int A(n-ct) dn \right\} i_r + \sin \theta \left\{ -\frac{i(n-ct)}{\lambda} + \frac{A(n-ct)}{\lambda^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda^3} \int A(n-ct) dn \right\} i_\theta \end{cases}$$

(uniformemente e $\cos(k(n-ct)) = \cos \omega \left(\frac{n}{c} - t \right) = \cos \omega(t - r/c)$, da fornire in $n = \frac{c}{\omega} \sin \omega(t - r/c)$ e da derivata (in n !) $\frac{\omega}{c} \sin \omega(t - r/c)$)

che $H_r = H_\theta = 0$ ma $|H_\phi| = \frac{\omega |p_0| \sin \theta}{4\pi \lambda^2} \left\{ -\frac{\omega n}{c} \sin \omega(t - r/c) + \cos \omega(t - r/c) \right\}$, mentre $E_r = 0$ ma $|E_n| = \frac{2 |p_0| \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \lambda^3} \left\{ \frac{\omega \lambda}{c} \cos \omega(t - r/c) + \sin \omega(t - r/c) \right\}$ (e' noto meno in costante il $\frac{c}{\omega}$ delle parentesi, anzi inoltre $c^2 \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0}$!) e $|E_\theta| = \frac{|p_0| \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 \lambda^3} \left\{ \left(1 - \frac{\omega^2 \lambda^2}{c^2} \right) \sin \omega(t - r/c) + \frac{\omega \lambda}{c} \cos \omega(t - r/c) \right\}$. Distinguiamo quindi due casi:

a) $\lambda \ll r$ ($\frac{2\pi c}{\omega} \ll r$): in punti con grande r rispetto al dolo, l'effetto "dinamico" $\frac{r}{c}$ far' con una trascurabile e quindi $|H_\phi| = \frac{\omega |p_0| \sin \theta \cos \omega t}{4\pi \lambda^2}$, mentre

$$|E_n| = \frac{2 |p_0| \cos \theta \sin \omega t}{4\pi \epsilon_0 \lambda^3} \quad \text{e} \quad |E_\theta| = \frac{|p_0| \sin \theta \sin \omega t}{4\pi \epsilon_0 \lambda^3} \quad (\text{e, in effetti,})$$

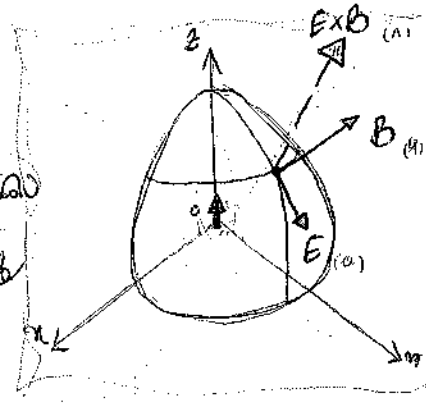
per la 1^a eq di Laplace e' $|H_\phi| = \frac{|B|}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi} i \frac{(\omega |p_0| \sin \theta)}{\lambda^3} \quad \left(\overset{A = \omega q_0 \cos \omega t}{=} \right) \quad \left(\overset{p_0}{=} \right) \frac{\omega \sin \theta \cos \omega t}{4\pi \lambda^2}$

mentre per E ricordando che ma $|E_n| = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2 |p_0| \cos \theta}{\lambda^3}$, $(E_\theta) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{|p_0| \sin \theta}{\lambda^3}$,

e quindi sotto nome $|p| = |p_0| \sin \theta$! ; chiamiamo questo campo e.m. "campo di induzione";

b) $\lambda \gg r$ ($\frac{2\pi c}{\omega} \gg r$): per distanze (sufficientemente) grandi dal dolo (in effetti i doli saranno "piccoli" ...)

per le quali forniamo brevemente i termini che vanno come $1/r^2$, o $1/r^3$, rispettivamente
 e quello che va come $1/r$, e' quindi $\|H_{\theta}\| = - \frac{\omega^2 (\rho_0 \sin \omega t) \sin \omega (t - r/c)}{4\pi C \lambda}$
 mentre $\|E_r\| = 0$ e $\|E_{\theta}\| = - \frac{\omega^2 (\rho_0 \sin \omega t) \sin \omega (t - r/c)}{4\pi \epsilon_0 C^2 \lambda}$, e cio' costituisce il cosiddetto "campo di radiazione"; notiamo che dunque
 E e B sono ortogonali tra loro e a r , per cui inoltre il vettore
 del Poynting e' parallelo, e pure costante, e a r , e che il campo e'
 (secondo l'espressione $S = E \times H$) "elettronico" e con "lo stesso" (rispetto alle onde piane) $|B_{\theta}| =$
 $= \mu_0 |H_{\theta}| = \frac{1}{c} |E_{\theta}|$. Chiamiamo "superficie d'onda" il luogo dove
 sono dove il campo e.m. ha lo stesso fase, riconosciamo subito che
 le superfici d'onda del campo di radiazione generato da un dipolo oscillante
 sono sferiche (con centro nell'oscillatore stesso).
 (Ritorniamo inoltre che un'onda piana rappresenta il caso limite e distante
 infinite delle onde emesse dall'oscillatore!)
 Ora, il vettore S del Poynting e' diretto come r , quindi
 si ha un flusso di energia che si allontana dal dipolo
 in direzione radiale; di conseguenza, se non si
 vuole che le oscillazioni del dipolo si smorzino "irrimediabilmente", se deve e lui
 fornire continuamente energia, necessariamente in qualche modo e quella
 totale emessa: dalle espressioni di $|H_{\theta}|$ e $|E_{\theta}|$, ricaviamo che (per
 1) $S = E \times H = \frac{\omega^4 \rho_0^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \omega (t - r/c)}{16 \pi^2 \epsilon_0 C^3 \lambda^2} \frac{r}{r}$ e che quindi il
 valore medio su un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ della funzione risultante fornita dal
 dipolo per unita' intervallo della direzione θ e' $I(\theta) = \langle |S| \rangle_{\text{me}} =$



$$= \frac{\omega^4 |p_0|^2 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 \lambda^2} \quad \left(\int_0^\pi \sin^2 \omega(t - r/c) dt = \frac{4}{2} ! \right) \quad j(\text{abbiamo})$$

Dunque che la potenza delle radiazioni è inversamente proporzionale al quadrato
 della distanza dalla sorgente (come per $|S|$), con una differenza
 angolare rispetto al $\sin^2(\theta)$ tale per cui (potenzialmente) la potenza tende a
 massimo nel piano equatoriale ($\theta = \pi/2$) ed è nulla lungo l'asse
 dell'orbita: in altre parole un dipolo elettrico oscillante non irradia
 energia lungo il suo asse.

L'energia che in media, nell'unità di
 tempo, attraversa una superficie dS perpendicolare alla direzione di propagazione
 dell'onda è quindi $I(\theta)dS$, per cui l'energia totale irradiata per
 unità di tempo dal dipolo è $W_m = \int I(\theta)dS$

$$= \frac{\omega^4 |p_0|^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} dS \quad \begin{matrix} \text{(dS = area element in coordinate polari)} \\ \text{(0} \leq \theta \leq \pi, \text{ 0} \leq \phi \leq 2\pi) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(area element in spherical coordinates)} \\ \text{(con normale n)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(S = 5-m)} \\ \text{(m radiante)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(4/3)} \end{matrix} = \frac{\omega^4 |p_0|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = [\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \frac{1}{3} [\cos^3 \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 2 - 2/3 = 4/3 \right), \text{ che è pure indipendente dalle}$$

particolari proprietà della costante per effettuare il calcolo (finché π non "frena").
 W_m del cos'è la misura della potenza media presa dal dipolo oscillante
 sotto forma di energia unitaria irradiata, e quindi rappresenta anche la
 potenza che deve ricevere il dipolo affinché le oscillazioni non si smorzino.

Considerando ora l'intensità della corrente che come lungo il dipolo $i =$
 $= \omega q_0 \cos(\omega t) =: i_0 \cos(\omega t)$, e usando $|p_0| = q_0 |\omega|$, possiamo
 riscrivere $W_m = \frac{1}{2} i_0^2 \frac{\omega^2 |\omega|^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \quad \left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \right) = \frac{1}{2} i_0^2 \frac{2\pi}{3 \epsilon_0 c} \left(\frac{c}{\lambda} \right)^3$ per

trovare che corrisponde alle potenze medie assorbita da una corrente (alternata)
 d'intensità $i = i_0 \cos(\omega t)$ che funziona una resistenza $R_i =$

$$= \frac{2\pi}{3\epsilon_0 G} \cdot \left(\frac{|\omega|}{\lambda} \right)^2$$
 chiamata per questo "resistenza di irraggiamento" del
 dipolo. (Quindi, fra l'altro, se fissiamo l'ampiezza $|p|$ di oscillazione
 del dipolo allora W_{irr} è proporzionale alla quarta potenza della frequenza $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$,
 mentre se fissiamo l'ampiezza i_0 della corrente che funziona il dipolo oscillante
 allora W_{irr} è proporzionale al quadrato della frequenza.)

Concludiamo sottolineando l'importanza del caso storico della luce del sole che
 qui antenna isotropa (o' era trattata come un "free antenna" di
 dipolo collegati in serie, tale che per $|\omega| \ll \lambda$ (anche se
 l'efficienza di irradiazione non è eccellente già per $|\omega| = \frac{\lambda}{40}$).

Possiamo infine trovare l'energia irradiata da una carica in movimento:
 consideriamo infatti una carica q_0 oscillante sinusoidalmente lungo l'asse z
 fra i due punti di coordinate $z = \pm |\omega|$; fissiamo quindi nel punto di
 mezzo O una carica fissa $-q_0$, il cui campo elettrostatico non fa da
 contributo al fenomeno variabile nel tempo che vogliamo studiare.

Allora è chiaro che il sistema considerato delle due cariche è come il
 dipolo studiato fino a poco fa: se che fissamente momento di dipolo
 $|p| = q_0 |\omega| \cos(\omega t) =: |p_0| \cos(\omega t)$, che valgono esattamente tutti i
 risultati ricavati finora; è interessante però riguardare rispetto alle
 accelerazioni $a(t)$ delle cariche q_0 , che ora $a(t) = -\omega^2 z =$
 (oscillazioni armoniche!)

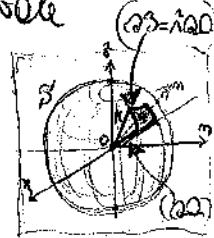
$= -\omega^2 |\mathbf{r}| \sin(\omega t)$, per un (moto effuso $|\mathbf{p}| = q_0 |\mathbf{r}|$) e' in
 integrale $S = \frac{q_0^2 \sin^2(\omega) [\mathbf{r}(t - r/c)]^2}{4\pi \epsilon_0 c^3 r^2} \frac{\pi}{r}$: Osservando che l'energia

W irradiata per unità di tempo dalla carica oscillante q_0 , sotto del
 flusso di S attraverso la superficie sferica di raggio r , vale

$$W = \int_{(S)} S \cdot \mathbf{n} dS = \int_{(4\pi)} S \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega \stackrel{(\text{eff. eff.})}{=} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{r}(t - r/c)]^2 \sin^2(\omega) r^2 d\Omega =$$

$$= \frac{q_0^2 [\mathbf{r}(t - r/c)]^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega) \mathbf{r}(t - r/c) d\Omega \stackrel{(\text{eff. eff.})}{=} \frac{q_0^2 [\mathbf{r}(t - r/c)]^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega) \mathbf{r}(t - r/c) d\Omega \right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega) (-\sin(\omega)) d\omega = \int_0^{\pi} \sin^2(\omega) d\omega = 4/3 \uparrow$$



osservando all'istante $t + \frac{r}{c}$, e non t , sulla sfera di raggio r , dunque

la "formula di Larmor" $W(t) = \frac{q_0^2 \dot{\mathbf{r}}^2(t)}{6\pi \epsilon_0 c^3}$: la relazione

ottenuta che in realtà non è generale, e fatto che la velocità di q_0 sia
 trascurabile rispetto a c . (Il moto di q_0 può esser puramente orbitale;
 tuttavia, mentre nel caso di moto armonico l'onda e.m. irradiata ha la
 stessa frequenza del moto armonico stesso, nel caso di un moto qualunque
 l'onda sarà decomponibile in un certo numero di onde monocromatiche.)

In particolare una carica in moto rettilineo uniforme non irradia energia e.m.,
 mentre invece lo fa una carica che si muove lungo una traiettoria
 circolare; notiamo infine che la formula vale anche se alla fine
 una decelerazione, e quindi possiamo rappresentare una carica in moto e
 velocità decresce una forte motricità della cui energia si trasforma per
 irraggiamento in energia e.m.

Studiamo fin in dettaglio le proprietà del campo e.m. nel vuoto (e in un dielettrico omogeneo ed isotropo, e fatto di materiale ϵ_0 e μ_0 costanti) e a fin. (inf.) (partendo naturalmente dalle equazioni di Maxwell)

$$\begin{cases} \text{rot } B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 i \\ \text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \text{div } E = \rho / \epsilon_0 \\ \text{div } B = 0 \end{cases}$$

Per convenienza $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ e ρ , si riferiscono alle sorgenti di campo e campo di carica che generano il campo e.m. in questione;

riteniamo che le incognite da determinare sono sei: funzioni del tempo e delle posizioni, come le componenti di E e B (cartesiane, ad esempio), avendo uso di ~~otto~~ equazioni scalari: è quindi naturale considerare che non ci sia necessariamente di condizioni; ma infatti, grazie all'equazione di continuità $\text{div } i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, facendo ad esempio ottenere dall'equazione di $\text{rot } B$ un'equazione per $\text{div } E$ che per noi può essere in nessun modo indipendentemente determinata dalle altre informazioni: infatti, essendo div ,

$$\text{div}(\text{rot } B) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } E = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \rho, \text{ da cui appunto } \text{div } E = \epsilon_0 \mu_0 \rho + \text{costante}.$$

Comunque, per determinare le incognite, risulta particolarmente utile introdurre un "potenziale vettore" A ed un "potenziale scalare" V del campo e.m., tenendo i quali possono infatti determinare tutte le proprietà del campo stesso: $\text{div } B = 0$ è automaticamente soddisfatto se $B = \text{rot } A$ (e comunque le inverse), e quindi $\text{rot } E + \frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } A) = \text{rot}(E + \frac{\partial A}{\partial t}) = 0$ note automaticamente

risultato $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla(-V)$ (è comunque da verificare), cioè $\mathbf{E}$

$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$ (per cui, nel limite del caso stazionario, il f. scalare è il potenziale elettrostatico!). (Formula $\text{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} A_1 = \int_{x_0}^x B_2 dy \\ A_2 = -\int_{x_0}^x B_1 dy + \int_{y_0}^y B_3 dz \\ A_3 = 0 \end{cases}$)

È subito chiaro che la somma di $\mathbf{A}$ col gradiente di un arbitrario campo scalare ψ , cioè $\mathbf{A}_0 := \mathbf{A} + \nabla \psi$, soddisfa ancora $\text{rot} \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}$, per cui $V_0 := V - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ risulta il corrispondente potenziale scalare (in quanto $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \nabla(V_0)$, $= \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right] - \left[\nabla V + \nabla\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \right] = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$ è vero). : questo "di gauge" $\mathbf{A}_0$, quindi V_0 , con le espressioni precedenti trovate, fornisce subito che i campi

$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \nabla \psi \\ V = V_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$ soddisfanno i medesimi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ (mentre le due equazioni in gioco) e la trasformazione

scelta $(\mathbf{A}_0, V_0) \mapsto (\mathbf{A}, V)$ si chiama "trasformazione di gauge", e effonda insieme invariate le espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Quindi le due equazioni in $\mathbf{B}$ e $\text{rot} \mathbf{E}$ in termini di $\mathbf{A}$ e V , avendo contemporaneamente espresso $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ come loro funzioni, otteniamo ora le ultime condizioni cui dovranno soddisfare anche le due eq. in $\text{rot} \mathbf{B}$ e $\text{div} \mathbf{E}$: $\text{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ m.m. $\text{rot}(\text{rot} \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \mu_0 \mathbf{j}$, mentre $\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ m.m. $-\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;

anche usando l'identità (geniale) $\text{rot}(\text{rot} A) = \nabla(\text{div} A) - \nabla^2 A$,

ricomponiamo le due equazioni nella forma (immediata da riconoscere)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A &= \mu_0 i - \nabla \left(\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V &= \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{aligned} \right.$$

; e questo (un po' di più)

L'idea è naturale: optare per un'opzione "velta di gauge" per A e V , o ciò è possibile, per minimare una certa arbitrarietà presente nelle scelte di A e V e, contemporaneamente, semplificare le due equazioni effere scritte, rendendole magari anche indipendenti. È comunemente utile in modo fattibile richiedere che sia soddisfatta la "Condizione di Lorentz" (per A e V)

$\boxed{\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$, che ovviamente equivale ad una condizione su ψ :

note con definite "la classe di gauge di Lorentz" (infatti $0 = \text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \text{div}(A_0 - \nabla \psi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(V_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}) \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = -\text{div} A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V_0}{\partial t}$; un'altra classe di gauge è quella di Coulomb, che consiste nel imporre $\text{div} A = 0$: le due eq. non risultano indipendenti, per V rimane e soddisfa l'equazione di Poisson $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$!).

Ottiniamo con tale scelta $\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A &= \mu_0 i \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V &= \rho / \epsilon_0 \end{aligned} \right.$, equazioni d'onde

non omogenee ma con certe sorgenti "istantanee" (dovute per A) e quelle dipendenti da E e B nel vuoto (nel caso con $\rho=0, i=0$), come visto; introducendo

l'operatore (lineare) "d'Alembertiano" $\square := \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$, abbiamo

(che resterà, sia scalare)

($1/m^2 \dots$)

equivalentemente $\begin{cases} \square A = \mu_0 \dot{s} \\ \square V = \rho / \epsilon_0 \end{cases}$ (ad osservare che in coordinate
 cartesiane $\square$ diventa $-\nabla^2$!).

Le funzioni di distribuzione ρ e $\dot{s}$ sono note, e la soluzione generale di una
 eq. di questo tipo è la somma di una o più soluzioni particolari con
 la soluzione generale dell'eq. omogenea associata (come sempre inclusa le
 condizioni al contorno delle vibrazioni specifiche considerate).

Nel caso particolare che ρ e $\dot{s}$ non dipendono dal tempo, ovvio che
 così è per A e V , le due equazioni sono di Poisson e quindi
 con soluzioni (particolari)

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ A(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}} \frac{\dot{s}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{cases}$$

e invece, nel caso

generale di dipendenza funzionale, ci aspettiamo solo tutto che viene

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}} \frac{\dot{s}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{cases}$$

(i quali, nel caso dell'equazione
 di continuità, verificano in

effetti le condizioni (meccaniche) di Lorentz $\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$!) : è

proprio così (come verificano d'ora per sostituzione diretta), e tali
 espressioni sono note col nome di "potenziali e.m. ritardati" o "potenziali
 di Lorentz". Secondo le formule che li definiscono, in effetti, i valori

di V e A all'istante t in un punto distante $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ da un

piccolo elemento di volume dV' dello spazio reticolo associato ai valori

di ρ e $\dot{s}$ che si hanno in tale volume dV' all'istante $t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}$

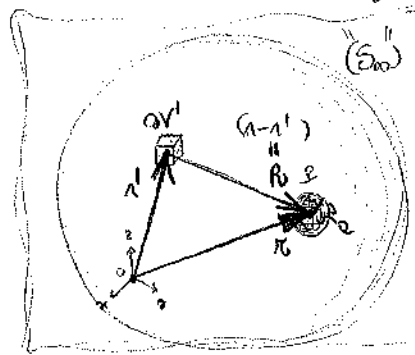
(presente!) ; in altre parole, le onde em. giungono alle cariche e alle correnti che si trovano in $\partial V'$, propagandosi a velocità c (finita!) impiegando un tempo $|R|/c$ per arrivare in un punto distante R e, di conseguenza, in tale punto gli effetti non si risentono istantaneamente (come si vedeva in!) ma con un ritardo $|R|/c$ rispetto alle sorgenti : insomma gli effetti di un dato evento sono da attribuirsi ad una situazione preesistente nell'elemento di volume $\partial V'$.

Concludiamo anzitutto facilmente che, ad esempio, $V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |R|/c)}{|R|} dV'$ (per $\partial V'$)
 soddisfa $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$ ($|R| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) : anzitutto

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla_{(\mathbf{r})}^2 \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |R|/c)}{|R|} \right\} dV' \quad \left(\nabla_{(\mathbf{r})}^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla_{(\mathbf{r})}^2 \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |R|/c)}{|R|} \right\} dV' \right)$$

L'espressione di ∇^2 in R risulta singolare in $R=0$, cioè per $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$: diciamo lo spazio materiale una "piccola" sfera di raggio $a > 0$ e centro in $\mathbf{r}$, al suo interno è $|R| \approx 0$ e dunque possiamo scrivere

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', t) \nabla_{(\mathbf{r})}^2 \left(\frac{1}{|R|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \nabla_{(\mathbf{r})}^2 \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|R|}{c})}{|R|} \right\} dV' \quad ; \text{ricordando che}$$



$\nabla_{(\mathbf{r})}^2 \left(\frac{1}{|R|} \right) = -4\pi \delta_3(R)$, il primo termine dell'espressione precedente è chiaramente $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot (-4\pi \rho(\mathbf{r}, t)) = -\rho(\mathbf{r}, t)/\epsilon_0$ ($R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) , mentre il

secondo è $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|R|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|R|}{c}) \right\} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|R|} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \rho(\mathbf{r}', t - \frac{|R|}{c}) \right\} dV'$ (per radii > a)

e pertanto ($a > 0$) $\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|R|}{c})}{|R|} dV' \right\}$
 $= -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t)$, che è la tesi. $\square$ (∇^2 !)

(Verifichiamo per esempio la fondamentale dubbio $\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi \delta_3(r)$
 (ricordando come noi già altro fatto basato sulle "funzioni delle di Dirac"):
 sostituito effettivamente $r \neq 0 \Rightarrow \nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ (: $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ha, ad
 esempio, ∂_x uguale a $\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$)
 Otteniamo così $\nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$, ed ora tale soluzione ha ∂_x uguale
 (simmetriche)
 e $\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left[(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2} (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot (2x) \right] =$
 $= \frac{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} \left[(x^2+y^2+z^2) - 3x^2 \right] = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, e per
 simmetria otteniamo chiaramente l'equazione esatta $(2x^2 - y^2 - z^2) +$
 $+ (2y^2 - x^2 - z^2) + (2z^2 - x^2 - y^2) = 0$; notiamo come sia esatto che
 le derivate delle sfere sia 3 !) ; mentre integrando
 sopra un volume sferico con centro nell'origine $r=0$ otteniamo $\int \nabla^2(\frac{1}{r}) dV =$
 $= \int_{(volume\ sfera)} \text{div}(\nabla(\frac{1}{r})) dV \stackrel{(Gauss)}{=} \int_{(sfere)} \underbrace{\nabla(\frac{1}{r})}_{(-\frac{\vec{r}}{r^3})} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{(\frac{\vec{r}}{r})} dS = \int_{(sfere)} -\frac{1 \cdot 1}{r^4} dS =$
 $= \int_{(sfere)} -\frac{1}{r^2} dS = -4\pi$.

Le condizioni di Lorentz e' ancora più di ciò che ci bastasse fare :
 rappresenta chiaramente un'equazione di continuità per i potenziali vettore e
 scalare , come vediamo anche separando e quella per le correnti
 ($\text{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$) ($\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) ; ed ora,
 e proprio da quest'ultimo , niente cambia introducendo due campi

(Gibbaldi) ρ e μ solo che

$$\begin{cases} \rho = -\operatorname{div} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mu \end{cases} \quad (\text{come se})$$

ρ come la potenziale elettrica e μ come l'intensità di magnetizzazione!
 perché infatti comunque $\operatorname{div} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mu) + \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{div} \mathbf{p}) = 0$, e in effetti potremmo benissimo considerare come sorgenti del campo e.m., in luogo delle distribuzioni di cariche e di corrente variabili nel tempo, funzioni delle opportune distribuzioni di momenti elettrici e di momenti magnetici dipolari variabili nel tempo (e le relazioni che danno le connessioni tra i due diversi punti di vista sarebbero quelle sopra note).

(Mostriamo che ρ esiste, potremo avere subito: da $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{p}}$ ricaviamo infatti $\rho(t) - \rho(0) = -\operatorname{div} \int_0^t \dot{\mathbf{p}}(t') dt'$ cioè $\rho(t) = \rho(0) - \operatorname{div} \int_0^t \dot{\mathbf{p}}(t') dt'$, per cui basta prendere $\rho(t) := \rho(0) + \int_0^t \dot{\rho}(t') dt'$, con " $\rho(0)$ " tale che $\rho(0) = -\operatorname{div} \mathbf{p}(0)$, per avere appunto $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{p}$; e questo vuole anche μ , perché $\operatorname{div} (\dot{\mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}) = 0$.)

Dallo ciò (anche) si vede che, grazie alla condizione di Lorentz, possiamo per l'analogo per i potenziali V e A : introdurre dunque i cosiddetti "potenziali vettori di Hertz" Z_e e Z_m (elettrico e magnetico rispettivamente)

solo che

$$\begin{cases} V = -\operatorname{div} Z_e \\ A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z_e}{\partial t} + \operatorname{rot} Z_m \end{cases}, \quad \text{per cui si mantiene vero che}$$

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial Z_e}{\partial t} \right) + \operatorname{div} (\operatorname{rot} Z_m) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{div} Z_e) = 0,$$

e inoltre così otteniamo che $B = \operatorname{rot} A = \frac{1}{c^2} \operatorname{rot} \frac{\partial Z_e}{\partial t} + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} Z_m)$ e

$E = \nabla(\text{div } Z_e) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_e}{\partial t^2} - \text{rot } \frac{\partial Z_m}{\partial t}$ ("cioè", naturalmente, che possiamo trovare il campo d.m. tramite Z_e e Z_m) ; allora i

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_e}{\partial t^2} - \nabla^2 Z_e = \frac{\vec{p}}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_m}{\partial t^2} - \nabla^2 Z_m = \mu_0 \vec{\mu} \end{cases}, \text{ "cioè" (come osservato)}$$

$$\begin{cases} Z_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{p}(\lambda', t - R/c)}{R} dV' \\ Z_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\mu}(\lambda', t - R/c)}{R} dV' \end{cases} \quad (R = |\lambda - \lambda'|)$$

Ritorniamo che solo equazioni non so altre impiego quando le sorgenti del campo d.m. si esprimono in termini di momento elettrico e magnetico.

$$\left(\text{da } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\text{div } Z_e) - \nabla^2 (-\text{div } Z_e) =$$

$$= \frac{(-\text{div } \rho)}{\epsilon_0}, \text{ da cui le prime equazioni ; e questo fatto, quindi,}$$

$$\begin{aligned} \text{dalle analogie } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial Z_e}{\partial t} + \text{rot } Z_m \right) - \nabla^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial Z_e}{\partial t} + \text{rot } Z_m \right) = \\ = \mu_0 \dot{\vec{j}} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \text{rot } \vec{j} \right) \text{ note che le seconde equazioni valgono} \\ \text{in quanto riconosceremo che } \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{c^2} Z_e \right) - \nabla^2 Z_e \right] = \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

Possiamo ricavare il campo d.m. generato dal dipolo oscillante (insediato in (mezzo)) utilizzando le ultime equazioni ottenute : esprimendo le densità (costitutive) di carica del dipolo oscillante nelle (omni) forme

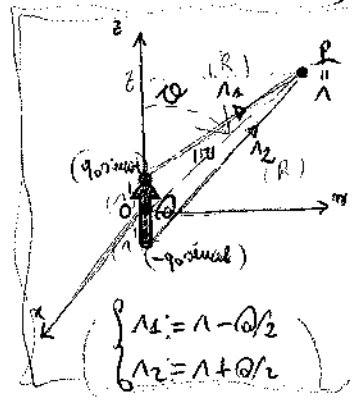
$$j(\lambda, t) = q_0 \sin(\omega t) \delta(x) \delta(y) \left[\delta(z - \frac{|\omega|}{2}) - \delta(z + \frac{|\omega|}{2}) \right],$$

Obteniamo subito che $V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} dV' =$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \frac{q_0 \sin \omega(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}) \delta(r') \delta(z') \delta(z' - \frac{b}{2})}{|\mathbf{r}|} d\mathbf{r}' d\mathbf{z}' + \right.$$

$$\left. + \int \frac{-q_0 \sin \omega(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}) \delta(r') \delta(z') \delta(z' + \frac{b}{2})}{|\mathbf{r}|} d\mathbf{r}' d\mathbf{z}' \right] =$$

$$\stackrel{(ovvio)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 \left[\frac{\sin \omega(t - |\mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r}|} - \frac{\sin \omega(t - |\mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r}|} \right] ;$$



nell'effettuazione di applo $|\mathbf{r}| \gg |b|$, possiamo usare per V l'effettuazione (che giustifica $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x)$, cioè $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$)

col tipo $f(r_1) - f(r_2) = f(r - \frac{b}{2}) - f(r + \frac{b}{2}) \approx [f(r) - b/2 \cdot \nabla f(r)] - [f(r) + b/2 \cdot \nabla f(r)] = -b \cdot \nabla f(r)$, otteniamo

$$V(\mathbf{r}, t) = - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} b \cdot \nabla \left(\frac{\sin \omega(t - |\mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r}|} \right) = - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} \left(\frac{\sin \omega(t - |\mathbf{r}|/c)}{|\mathbf{r}|} \right)$$

$$= \frac{q_0 \cos(\omega t)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\omega}{c|\mathbf{r}|} \cos \omega(t - |\mathbf{r}|/c) + \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \sin \omega(t - |\mathbf{r}|/c) \right]$$

Per quanto poi concerne A , considerate la funzione "gradino di Heaviside" $H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$ possiamo ricavare le derivate di corrente

del dipolo oscillante nelle forme $i(\mathbf{r}, t) = K \omega q_0 \cos(\omega t) \delta(r) \delta(z) [H(z + \frac{b}{2}) - H(z - \frac{b}{2})]$: infatti, anzitutto, la corrente lungo il dipolo (che si è lungo alle variazioni delle cariche) ha intensità $i(t) = \frac{d}{dt} (q_0 \sin \omega t) = \omega q_0 \cos(\omega t)$; inoltre è evidente che $i \neq 0$ in $\mathbf{r}$ solo lungo il dipolo, cioè per $z = -b/2$ e $z = b/2$, e che i vale fissi il

Adesso si ottiene il verso $\mathbf{r}_{\text{eff}} (= \{z=0\})$: $\int i(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} =$

$$= \int_{\{z=0\}} K \omega q_0 \cos(\omega t) \delta(r) \delta(z) \cdot [1 - 0] \cdot R d\mathbf{r} = \omega q_0 \cos(\omega t) = i(t).$$

(Notiamo che l'altro che in effetti $\partial_{\omega} \dot{\omega} = -\frac{\partial}{\partial t}$, visto che in questo caso $\partial_{\omega} \dot{\omega} = \frac{\partial}{\partial z} \dot{\omega}$ e che $\frac{\partial}{\partial z} H(z) = \delta(z)$!)

Allora $A = A_z \vec{R}$ con $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\dot{\omega}(z', t - |R|/c)}{|R|} dV =$
 $= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\omega q_0 \cos \omega(t - |R|/c) \delta(z') \delta(\omega') [H(z' + |R|/2) - H(z' - |R|/2)]}{|R|} d\omega' dz' d\omega' =$
 $= \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|}$ cioè $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|} \vec{R}$

Queste sono formule per V e per A (teniamo d'occhio le unità)

portando nei potenziali vettoriali di Hertz Z_e e Z_m : infatti (teniamo

$Z_m = 0$ ($\vec{J} = 0$!) mentre $\vec{p}(z, t) = q_0 \sin(\omega t) \delta(z) \delta(\omega) \delta(\omega')$ infine
 $Z_e(z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{p}(z', t - |R|/c)}{|R|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} |q_0| \frac{\sin \omega(t - |R|/c)}{|R|} \vec{R}$, da

cui $V = -\partial_{\omega} Z_e = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} |q_0| \frac{\partial}{\partial z} \frac{\sin \omega(t - |R|/c)}{|R|} = \frac{+|q_0|}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\omega}{c|R|} \right]$

$\cdot \cos \omega(t - |R|/c) + \frac{1}{|R|^2} \sin \omega(t - |R|/c)$, con come notissimo $A =$

$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial Z_e}{\partial t} = \frac{1}{4\pi(\epsilon_0 c^2)} \omega |q_0| \frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|} \vec{R}$

Da questo segue $B = \text{rot} A = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \text{rot} \left(\frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|} \vec{R} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \cdot$

$\nabla \frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|} \times \vec{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \left(\frac{1}{|R|} \frac{\partial}{\partial |R|} \frac{\cos \omega(t - |R|/c)}{|R|} \right) \times \vec{R} =$

$= \frac{\mu_0}{4\pi} \omega |q_0| \left(\frac{\omega}{c|R|} \sin \omega(t - |R|/c) - \frac{1}{|R|^2} \cos \omega(t - |R|/c) \right) \frac{\vec{R} \times \vec{R}}{|R|}$; notiamo

che $B (= \mu_0 H)$ è perpendicolare al piano contenente $\vec{R}$ e il vettore ∇ (o

l'asse z), cioè in coordinate polari (r, θ, ϕ) B e H hanno come

unica componente $\neq 0$ B_ϕ e H_ϕ , ed è chiaro che finalmente ora

$|H_\phi| = \frac{\omega |q_0| \sin(\omega)}{4\pi |R|^2} \left\{ -\frac{\omega |R|}{c} \sin \omega(t - |R|/c) + \cos \omega(t - |R|/c) \right\}$; infine,

per $E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V$, dalle equazioni $\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 p_0 \frac{\sin \omega(t-r/c)}{r}$

e $(\nabla V)_r = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\omega}{c r} \cos \omega(t-r/c) + \frac{1}{r^2} \sin \omega(t-r/c) \right]$

$= \frac{p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} \right) \sin \omega(t-r/c) - \frac{2\omega}{c r^2} \cos \omega(t-r/c) \right], =$

$= \frac{p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - 2 \right) \sin \omega(t-r/c) - \frac{2\omega r}{c} \cos \omega(t-r/c) \right], e$

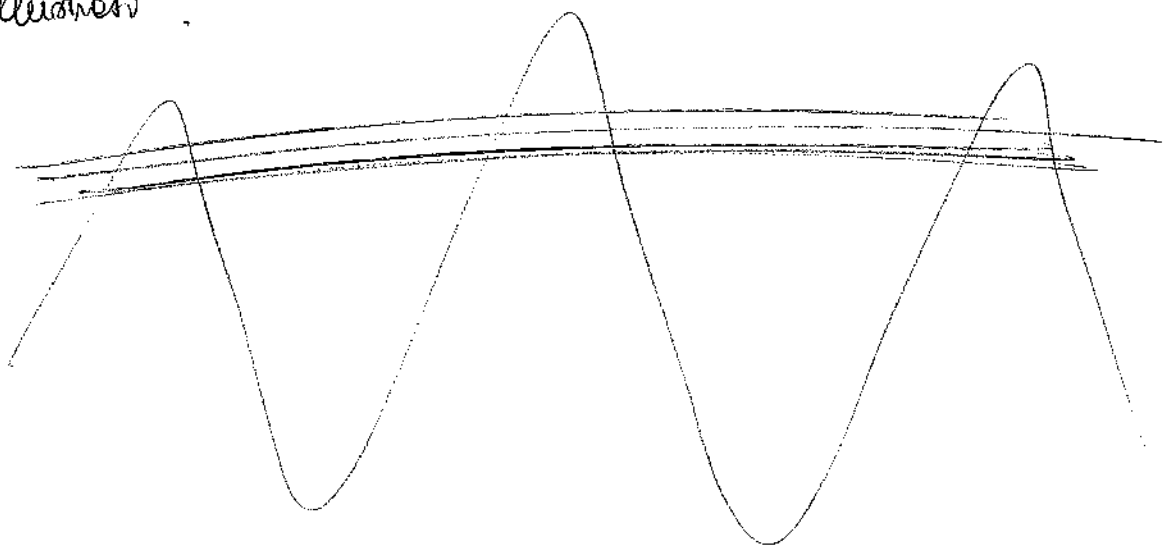
$(\nabla V)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p_0 \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\omega}{c r^2} \cos \omega(t-r/c) + \frac{1}{r^3} \sin \omega(t-r/c) \right]$

(mentre $(\nabla V)_\phi = 0$!) troviamo che chiaramente $|E_r| = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \cos \theta \sin \omega(t-r/c)}{4\pi r}$

$= \frac{p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{2}{r^3} \right) \sin \omega(t-r/c) - \frac{2\omega}{c r^2} \cos \omega(t-r/c) \right] \stackrel{(\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0)}{=}$
 $= \frac{2 p_0 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\frac{\omega r}{c} \cos \omega(t-r/c) + \sin \omega(t-r/c) \right],$ mentre infine

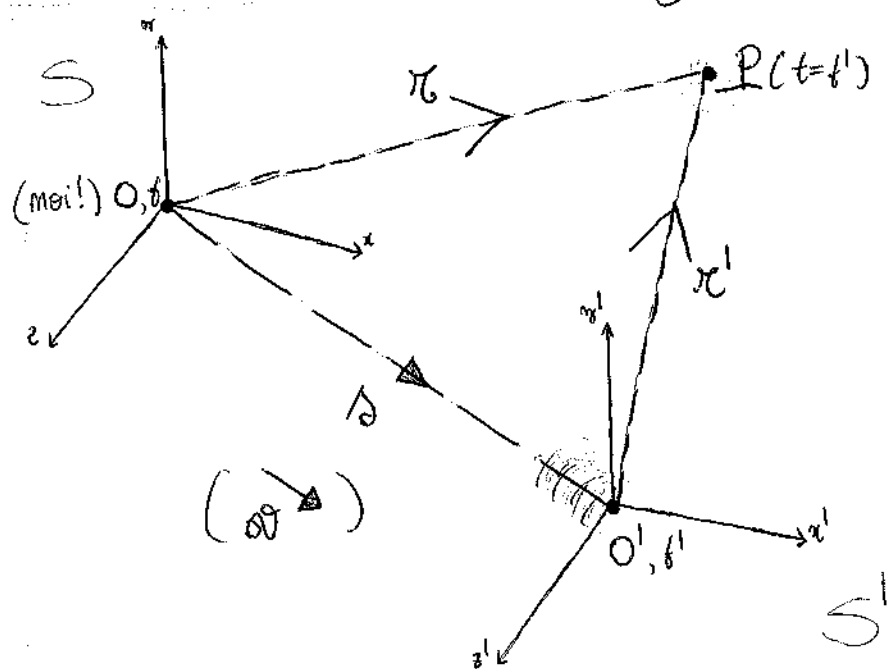
$(|E_r|=0) \quad |E_\theta| = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin(\theta)}{4\pi} \frac{\sin \omega(t-r/c)}{r} - (\nabla V)_\theta \stackrel{(\omega r/c)}{=}$
 $= \frac{p_0 \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right) \sin \omega(t-r/c) + \frac{\omega r}{c} \cos \omega(t-r/c) \right] : \text{obteniamo}$

Quindi effettivamente abbiamo le due espressioni per H ed E , ma in modo (e non altro) molto più elegante! Gli aspetti brevi del problema sono però stati illustrati.



Riconosciamo il primo principio della dinamica, il "principio di inerzia":
un punto materiale in movimento a velocità costante x , e solo x , la forza
totale che subisce è nulla. Matematicamente, e come si afferma, questo
principio non è valido in tutti i sistemi di riferimento, precisamente
non in quelli accelerati; viceversa, i sistemi di riferimento ai quali
possiamo attribuire tale principio sono i "sistemi inerziali", che sono
effettivamente sistemi che in realtà sarebbero "livi" accelerati.
L'importanza di questo speciale sistema consiste nel fatto che, rispetto ad
essi, la fisica delle forze risulta veramente "semplice", come
esprime il "principio di relatività galileiana": tutte le leggi
della fisica sono le medesime in tutti i sistemi di riferimento che si
muovono tra loro con moto (traslatorio) rettilineo uniforme, cioè per
osservatori in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. (Da
questo, le leggi che valgono in un sistema inerziale restano valide in
tutti i sistemi di tale tipo.) Ovviamente ciò non impone che fare
la descrizione di un moto visto dall'interno facendo di un sistema di
riferimento all'altro; tuttavia, considerando le stesse leggi, per
l'osservatore che si trova in uno dei due sistemi di riferimento e
che studia un certo fenomeno deve essere possibile stabilire come
lo stesso fenomeno appare all'altro osservatore: occorrono le
leggi che permettano di passare da un sistema di riferimento all'altro.
Consideriamo allora due sistemi S, S' , immaginando ad essere in S ,
e supponiamo che su entrambi il tempo scorra esattamente allo stesso
modo, cioè che $t = t'$ se partiamo da $t = t' = 0$; potremo

e proposto supponi che le origini O, O' dei due sistemi siano coincidenti
 e $t = t' = 0$. Sia ora che S si muove, rispetto a S' , con moto
 rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$ ($\Rightarrow$) (cioè che S lo faccia rispetto
 a S' con velocità $-\vec{v}$!) : allora, ad un certo istante $t = t'$,
 S' si è allontanata rispetto a S di $\Delta = vt = vt'$; ora,
 volendo osservare uno stesso fenomeno che riguarda un punto materiale P
 misuriamo che, all'istante $t = t'$, questo punto si trova in Λ rispetto a
 S e in Λ' rispetto a S' : otteniamo la legge del "feriggio"
 osservato ponendo in relazione tali misurazioni. Supponiamo per ciò
 che le osservazioni avvengano in Λ :



$$(-\Delta + \Delta' = \Delta!)$$

; è facile notare
 che, dicendo il bene
 del punto P che è in S ,
 lo osserviamo equivalentemente
 dal punto P che è in S'

trasformando (t, Λ) secondo le relazioni $\begin{cases} t' = t \\ \Lambda' = \Lambda - \Delta = \Lambda - vt \end{cases}$

le domande del problema risolve infatti in queste relazioni, ma
 comunque esplicitando anche le regole del "feriggio" tra sistemi di
 riferimento inerziali, chiamate "trasformazioni di Galileo":

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma_1 &= \gamma' + \alpha \beta' \\ \gamma_2 &= \gamma' \end{cases} & \text{e (equival.)} \quad \begin{cases} \gamma_1' &= \gamma - \alpha \beta \\ \gamma_2' &= \gamma \end{cases} \quad . \text{Osserviamo} \end{aligned}$$

che da conseguenza la legge di composizione di α con la velocità di P u, u' rispetto al sistema S, S' rispettivamente è $u = u' + \alpha$,
 o equiv. $u' = u - \alpha$ (cui grazie a $t = t'$!).

Visto tutto, capiamo che per risolvere il problema riguardante il non
 esiste un sistema di riferimento "privilegiato", "assoluto", cioè P non
 possiede un "moto assoluto": come si dice, "tutto è relativo".

Alla stessa modo, i fenomeni dell'interazione elettromagnetica, sempre
 collegati ad una variazione nel tempo del flusso magnetico, dipendono solo
 dal moto relativo tra i circuiti ed i magneti, e non dal moto dell'uno
 o dell'altro parte: in altri termini, di nuovo, il fenomeno della
 interazione elettromagnetica non permette di definire un moto assoluto né
 un sistema di riferimento privilegiato. Alla luce un'analisi completa del
 fenomeno può farsi con l'aiuto delle equazioni di Maxwell, secondo
 le quali proprio tutte le interazioni elettromagnetiche tra corpi si propagano
 nel vuoto con velocità costante $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ della luce nel vuoto,
 mentre risulta chiaro anche questo velocità dovrebbe variare col sistema
 di riferimento considerato: deduciamo che, a differenza della meccanica
 newtoniana, l'elettromagnetismo (come le eq. di Max.) non è
 invariante rispetto alle trasformazioni galileiane, e ciò rappresenta una
 grossa contraddizione; l'unico modo per uscire dal problema è,

naturalmente, modificare una delle due teorie, ma solo in seguito all'aver inventato quelle delle due se le prime fossero riferite alle proprietà delle orbite delle luce.

Grazie a tutte una serie di esperimenti, tra i quali restano fondamentali quelli eseguiti da Michelson e Morley, si era modificata (e in modo radicale) e le meccanica classica newtoniana, e ciò per mezzo delle "teorie delle relatività ristrette", o "relatività speciale", di H. Einstein, nel caso di sistemi di riferimento inerziali (mentre "teorie delle relatività generali" per sistemi non necessariamente inerziali), le quali si basano su due soli principi:

(I) tutte le leggi fisiche valgono in un sistema di riferimento inerziale sono valide anche in un qualunque altro sistema in moto (traslatorio) rettilineo uniforme rispetto al primo;

(II) la velocità della luce nel vuoto è un "invariante fisico", cioè ha lo stesso valore per ogni osservatore inerziale indipendentemente dal moto o questo rispetto alle sorgenti luminose.

Il primo enunciato ha il nome di "principio di relatività ristretta", ed in effetti impone il nuovo sistema (ammettendo le velocità generali dell'elettromagnetismo): infatti, in tutti i sistemi inerziali, le leggi fisiche sono le stesse e valgono le equazioni di Maxwell.

Sviluppiamo in seguito le principali conseguenze che si fanno dedurre dal principio di relatività, cominciando coll'ambiguità che, se un fatto è visto fisso, la teoria delle relatività ristrette comporta

molto forte importante rispetto alle leggi della meccanica newtoniana solo per velocità paragonabili a quelle della luce.

L'idea centrale delle basi del principio di relatività nasce dall'osservazione che non sia possibile trasmettere istantaneamente e in tutto i punti dello spazio un'informazione (e che, anzi, la velocità massima con cui lo si può fare coincide proprio con quella della luce), cioè che non esista una "simultaneità" assoluta: non risulta così plausibile il fatto che sia il tempo non sia assoluto. Cominciamo quindi ad occuparci delle trasformazioni di Galileo, formandoci e costruendo la struttura generale dei sistemi inerziali rappresentate matematicamente con i vettori; forniamo in realtà un'ipotesi più semplicemente che l'ora si muova costantemente rispetto all'ora x , mentre che gli assi xy e z restano paralleli a quello xy e z rispettivamente. Or, per il principio di relatività, una particella non soggetta a forze si muove con moto rettilineo uniforme rispetto a qualsiasi sistema inerziale, per cui le relazioni tra le coordinate (x, y, z, t) e (x', y', z', t') dove essere lineari; ma chiaramente, per come abbiamo scelto i sistemi cartesiani, forniamo anzitutto che $xy' = xy$ e $z' = z$, e pertanto esistano costanti γ e β tali per cui $x' = \gamma x + \beta t$. Se rispetto a S l'evento si verifica all'istante t nel punto $x' = 0$, cioè in $x = |v|t$ (NON $= |v|t'$!!), da $0 = \gamma(|v|t) + \beta t$ deduciamo che più precisamente è $\beta = -\gamma |v|$: $x' = \gamma(x - |v|t)$.

È allora facile verificare che effettivamente sia $x = \gamma x' + \beta t'$ $(=)$
 $= \gamma (x' + \beta t')$ $\stackrel{(\text{a}')}{{=}} \gamma [\gamma (x - \beta t) + \beta t']$:

$$t' = \frac{x}{\gamma \beta} - \frac{\gamma (x - \beta t)}{\beta} = \frac{x}{\gamma \beta} - \frac{\gamma x}{\beta} + \gamma t =$$

$$= \gamma \left[t - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) x \right]. \text{ Sufficiente come che un uguale}$$

numero venga messo all'interno $t = t' = 0$ dell'origine comune di S
e S' : in questo le coordinate delle luci che lo stesso punto
nei due sistemi lo riferimento, alle relative $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 =$
 $= 0$ deve coincidere l'equazione relativa $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$

(che descrive il fascio di luce dell'origine rispettiva), e
quindi deduciamo che $x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ $\stackrel{(\text{relazioni})}{=} \gamma^2 (x - \beta t)^2 -$
 $- \gamma^2 c^2 \left[t - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) x \right]^2 = \gamma^2 (x^2 - 2x\beta t + \beta^2 t^2) -$
 $- \gamma^2 c^2 \left[t^2 - \frac{2}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) xt + \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 x^2 \right]$; dovendo
tale relazione essere comune ad ognuno i valori di x e t , deduciamo

$$\begin{cases} \gamma^2 - \frac{\gamma^2 c^2}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 = 1 \\ \gamma^2 \beta^2 - \gamma^2 c^2 = -c^2 \\ -2\gamma^2 \beta + \frac{2\gamma^2 c^2}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = 0 \end{cases} : \text{ posto } \beta := \frac{\beta}{c}, \text{ cioè } \beta \text{ è certamente}$$

osservato α $\gamma = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, e pertanto

risultano infine le trasformazioni di Lorentz (essendo $\frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{\beta}{c^2}$)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

ed (equival.)

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{cases}$$

(Nel caso più generale che $\vec{v}$ non è parallelo a x e x' ,

posto $\vec{\omega} := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ si osserva che $\vec{\omega} \times (\vec{1} \times \vec{\omega}) = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})}_{=1} \vec{1} - (\vec{\omega} \cdot \vec{1}) \vec{\omega}$,

cioè che $\vec{1} = (\vec{1} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega} - (\vec{1} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}$, restano ora le relazioni

analoghe $\int \vec{1}' \cdot \vec{\omega} = \gamma(\vec{1} \cdot \vec{\omega} - |\vec{\omega}|t)$ e si ottiene anche che

$$\int (\vec{1}' \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} = (\vec{1} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}$$

$$\begin{cases} \vec{1}' = \vec{1} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{1}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega} - \gamma \vec{\omega} t \\ t' = \gamma(t - \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{1}}{c^2}) \end{cases}$$

Mostriamo ora che per $|\vec{v}| \ll c$, cioè $\beta \ll 1$ (≈ 0), cioè $\gamma \approx 1$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo: in altre parole, nel caso limite di velocità piccole rispetto a quella della luce, delle leggi delle relatività ristrette si riducono le leggi della fisica classica.

Ritorniamo ora fra immediate conseguenze delle trasformazioni di Lorentz.

(1) "Contrazione delle lunghezze". Immaginiamo un'asta AB ripida che

rispetto a S , come con velocità v lungo l'asse x , e sia S' stabile
 all'estremità stessa; volendo misurare la lunghezza di AB , mentre
 per S' le funzioni delle due estremità non cambiano col tempo e
 possono essere misurate anche in istanti diversi, sono x'_A e x'_B , per
 S con x e t è piuttosto difficile misurare la distanza fra le funzioni
 occupate dalle estremità dell'asta allo stesso istante t : allora, per
 Lorentz, abbiamo $x'_A = \gamma(x_A - vt)$ e $x'_B = \gamma(x_B - vt)$, da
 cui $\|x_B - x_A\| = \frac{1}{\gamma} (x'_B - x'_A) = \sqrt{1 - \beta^2} (x'_B - x'_A)$, ossia
 la lunghezza $x_B - x_A$ che l'asta possiede rispetto ad un osservatore in moto
 appare minore per un fattore $1/\gamma$ rispetto alla "lunghezza propria" $x'_B - x'_A$;
 in breve, un oggetto in moto appare più corto: si tratta del
 fenomeno noto come "contrazione di Lorentz".

(Poiché infine tale contrazione non si manifesta trasversalmente, il volume
 dell'asta in moto si riduce per lo stesso fattore $1/\gamma$.)

2) "Dilatazione del tempo". Consideriamo anzitutto un orologio in quiete
 rispetto al sistema S' in un punto $P' := (x', y', z')$, e facciamo
 eventi consecutivi delle segnalazioni degli istanti t'_1 e t'_2 da parte di
 questo orologio; se tale oggetto è invece rispetto a S con velocità
 $(v, 0, 0)$, allora (sempre rispetto a S) i due eventi appaiono in
 posizioni diverse (me fine a istanti diversi, e tutto ciò in moto
 (ma anche per S' si misurano costati x')
 che $\begin{cases} t_1 = \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2} x') \\ t_2 = \gamma(t'_2 + \frac{v}{c^2} x') \end{cases}$: deduciamo allora $t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$,

cioè $\boxed{T = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}}$; dunque le orologie fissole di un sistema
 per un osservatore in moto rispetto al sistema mobile dove tale fenomeno si verifica
 risultano maggiori (di un fattore γ) rispetto alle "orologie fissole proprie"
 del sistema stesso. (La bellezza di questo consiste notevolmente nel
 fatto che lo si può verificare sperimentalmente !)

(3) "Metodo del concetto di simultaneità". Se due eventi si verificano
 nello stesso istante t nel punto x_1 e x_2 , allora i tempi dei
 due eventi rispetto ad un osservatore S' in moto rispetto a S sono
 $t'_1 = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_1)$ e $t'_2 = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x_2)$, da cui otteniamo
 $t'_2 - t'_1 = \gamma \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)$: gli eventi efficaci contemporanei (anche)
 in S' o, e solo se, $x_1 = x_2$ ("cioè mai").

Osserviamo infine che $|v| \leq c$ è implicitamente contenuto nella maniera
 propria di $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ da cui si vede ($v \geq 1$) ; inoltre,
 se due eventi non sono simultanei ma connessi in qualche maniera per causalità,
 allora otteniamo conseguentemente $t'_2 - t'_1 = \gamma [t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)]$ con
 effetto $\frac{|x_2 - x_1|}{|t_2 - t_1|} \leq c$ (ci basta del resto della velocità che collega cause
 ed effetti) : il rapporto $\frac{t'_2 - t'_1}{t_2 - t_1}$ assume comunque un valore in
 $(0, 2\gamma)$ (da $\gamma(1 \pm \frac{v}{c})$), cosicché $t_2 - t_1 > 0 \Rightarrow t'_2 - t'_1 > 0$
 e cioè l'ordine fissole dei due eventi collegati da causalità rispetto ad
 un sistema di riferimento non può invertirsi quando i due eventi da un

altro sistema di riferimento.

Consideriamo a questo punto una particella in moto con velocità costante (compensata)

$$\begin{cases} u_x = dx/dt \\ u_y = dy/dt \\ u_z = dz/dt \end{cases} \text{ rispetto a } S, \text{ e } \begin{cases} u'_x = dx'/dt' \\ u'_y = dy'/dt' \\ u'_z = dz'/dt' \end{cases} \text{ rispetto a } S'$$

(notando che $t' \neq t$!) : da $\begin{cases} dx = \gamma(dx' + vt'dt') \\ dt = \gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx') \end{cases}$

ricaviamo le leggi di trasformazione delle velocità

$$\begin{cases} u_x = \frac{u'_x + vt'}{1 + vt'u'_x/c^2} \\ u_y = u'_y / \gamma(1 + vt'u'_x/c^2) \\ u_z = u'_z / \gamma(1 + vt'u'_x/c^2) \end{cases} \quad (\text{caso particolare: ad esempio, } u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vt'dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{u'_x + vt'}{1 + vt'u'_x/c^2})$$

giustamente) e quelle delle componenti trasversali se $|v| \ll c$.

Se in particolare il moto della particella avviene lungo l'asse x , ossia se $u_y = u_z = u'_y = u'_z = 0$ (mentre $u_x =: u$ e $u'_x =: u'$), allora $u = \frac{u' + vt'}{1 + vt'u'/c^2}$ e $u' = c \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{c + vt'}{(c + vt')/c} = c : \text{risultato che la velocità della luce}$$

è invariante nel sistema di riferimento considerato; inoltre vale

giustamente) che $u', |v| \leq c \Rightarrow |u| \leq c$ (purché
chiaramente $u = \frac{u' + vt'}{(u' + vt') + (c - u')(c - vt')/c} \leq c$)

Grazie a queste "regole relativistiche", è facile capire che le trasformazioni di Lorentz sono due composizioni relativistiche di velocità equivalenti ad un'unica composizione.

Infatti, ad esempio per $u = u_x$, e $u =$

$$= \frac{u' + |v|}{1 + |v|u'/c^2} = \frac{\frac{u'' + |v'|}{1 + |v'|u''/c^2} + |v|}{1 + |v| \frac{u'' + |v'|}{1 + |v'|u''/c^2}} = \frac{u'' + |v'| + |v|(1 + |v'|u''/c^2)}{1 + |v'|u''/c^2 + \frac{|v|}{c^2}(u'' + |v'|)}$$

$$= \frac{u'' + \frac{|v'| + |v|}{1 + |v'|u''/c^2}}{1 + \frac{u''}{c^2} \frac{|v'| + |v|}{1 + |v'|u''/c^2}}, \text{ e in effetti } |v''| = \frac{|v'| + |v|}{1 + |v'|u''/c^2}$$

Osserviamo infine che, per coordinate sistemi inerziali, gli oggetti studiati hanno in generale moto accelerato rispetto a tali sistemi, e che dunque sussiste la equazioni relativistiche di trasformazione delle accelerazioni; noi possiamo allora che $a = \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{a'}{\gamma^3 (1 + |v|u'/c^2)^3}$

rispetto alle forme componenti

$$\left[\text{perché } \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma(t - \frac{|v'|x}{c^2}) = \right]$$

$$= \gamma - \frac{\gamma |v'|}{c^2} u = \gamma - \frac{\gamma |v'|}{c^2} \frac{u' + |v|}{1 + |v|u'/c^2} = \frac{1}{1 + |v|u'/c^2} \cdot \gamma \left[(1 + |v|u'/c^2) - |v|/c^2 (u' + |v|) \right]$$

$$= \frac{1}{1 + |v|u'/c^2} \cdot \gamma (1 - |v|^2/c^2) = \frac{1}{\gamma (1 + |v|u'/c^2)}$$

mentre $\frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{u' + |v|}{1 + |v|u'/c^2} \right) = \frac{1}{(1 + |v|u'/c^2)^2} \left[(1 + |v|u'/c^2) a' - (u' + |v|) \frac{|v|}{c^2} a' \right] =$

$$(= a' - \frac{|v|^2}{c^2} a' = (1 - \frac{|v|^2}{c^2}) a' = \frac{1}{\gamma^2} a')$$

$$= \frac{a'}{\gamma^2 (1 + |v|u'/c^2)^2}, \text{ da cui il doppio risultato } \sqrt{\quad}$$

Porto più comodamente $\gamma_v := 1/\sqrt{1 - \beta_v^2} := 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, dalle relazioni

$$\begin{cases} \alpha' = \gamma_v (\alpha - (v/c)\beta) & , \alpha_y' = \alpha_y & , \alpha_z' = \alpha_z \\ \beta' = \gamma_v (\beta - (v/c)\alpha) \end{cases}$$

conviene dire, per una

particella in moto con velocità u rispetto a S e u' rispetto a S' , ne

$$\begin{cases} u_1' \beta' = \gamma_v (u_1 - (v/c)\beta) & , u_2' \beta' = u_2 \beta & , u_3' \beta' = u_3 \beta \\ \beta' = \gamma_v (1 - (v/c)u_1) \beta \end{cases}$$

ottenuta fatta che $c^2 \beta'^2 - \alpha'^2 - \alpha_y'^2 - \alpha_z'^2 = c^2 \beta^2 - \alpha^2 - \alpha_y^2 - \alpha_z^2$

otteniamo $(c^2 - u'^2) \beta'^2 = (c^2 - u^2) \beta^2$, cioè $\frac{\beta'}{\gamma_{u'}} = \frac{\beta}{\gamma_u}$,

e perciò

$$\begin{cases} \gamma_{u'} u_1' = \gamma_v \gamma_u (u_1 - (v/c)) \\ \gamma_{u'} u_2' = \gamma_u u_2 \\ \gamma_{u'} u_3' = \gamma_u u_3 \\ \gamma_{u'} = \gamma_v \gamma_u (1 - \frac{v u_1}{c^2}) \end{cases} \quad : \text{ se } m \text{ è la massa}$$

invariante delle particelle, cioè moltiplicando per un numero costante delle particelle,

allora otteniamo

$$\begin{cases} m \gamma_{u'} u_1' = \gamma_v (m \gamma_u u_1 - m \gamma_u (v/c)) \\ m \gamma_{u'} u_2' = m \gamma_u u_2 \\ m \gamma_{u'} u_3' = m \gamma_u u_3 \\ m \gamma_{u'} = \gamma_v (m \gamma_u - \frac{v}{c^2} m \gamma_u u_1) \end{cases}, \text{ cioè}$$

$(m \gamma_u u_1, m \gamma_u u_2, m \gamma_u u_3, m \gamma_u)$ si trasforma esattamente come

$$(\alpha, \alpha_y, \alpha_z, \beta)$$

; si può quindi naturalmente definire "le quantità di moto"

della particella in questione come

$$p := \frac{m u}{\sqrt{1 - |u|^2/c^2}} = m \gamma_u u$$

per cui si ha conservazione delle quantità di moto (in un sistema isolato)
 se, e solo se, si ha conservazione delle somme delle rispettive quantità
 $m\gamma_u$ e in effetti la formula è confermata sperimentalmente.

Definiamo allora la massa relativistica delle particelle come

$$M := \frac{m}{\sqrt{1 - |u|^2/c^2}} = m\gamma_u, \text{ che si legge come } \text{energia} \\ \text{relativistica} \quad \left\| E := \frac{mc^2}{\sqrt{1 - |u|^2/c^2}} = m\gamma_u c^2 \right\| \text{ che appunto resta}$$

conservata in un sistema isolato di due particelle che si urtano.

(Notiamo che $E = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - |u|^2/c^2}} = mc^2 (1 - |u|^2/c^2)^{-1/2} \stackrel{(SEMPRE)}{=} mc^2 (1 + \frac{1}{2} \frac{|u|^2}{c^2} + O(\frac{|u|^4}{c^4})) \approx mc^2 + \frac{1}{2} m |u|^2$, cioè $E - mc^2 \approx \frac{1}{2} m |u|^2$;

in generale invece l'energia cinetica relativistica è molto diversa da quella
 newtoniana $(E - mc^2)$.)

Per $u=0$ vediamo inoltre che la formula fornisce un'energia associata
 alla loro massa riposa m , che vale appunto $E = mc^2$, e in
 effetti per u qualsiasi $E - mc^2 =$ en. cinetica relativistica: Ender
 formula con il principio di equivalenza fra massa ed energia, ma il
 quale massa ed energia sono due nomi diversi di una stessa grandezza
 fisica, e ciò con fattore di conversione c^2 . Ciò è stato
 verificato dell'esperimento, e fuoricanto, quando l'energia E di un sistema
 cambia, anche la sua massa cambia in esatto della relazione

$$\Delta E = c^2 \Delta m \quad \left(\text{in fisica, } \Delta \text{ indica energia di un sistema} \right)$$

fin' che term' "impossibile" emerge ne aumentano le masse !)

Da conclusioni di qui fatte che la massa m e' associata all'energia E , e
inoltre, si ha la relazione $E = m \gamma_u c^2 = mc^2 + E_{\text{cinetica rel.}}$

Così mc^2 e' l'energia a riposo della particella ; abbiamo inoltre

$$\text{che } \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \gamma_u^2 (c^2 - |\mathbf{u}|^2) = m^2 \gamma_u^2 c^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}\right) = m^2 c^2 \quad (\gamma_u^2)$$

ovvero $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$: e' così fermata l'induzione di

particella senza massa e riposo nullo ($m=0$) ma con energie ed impulsi
finiti, tale che finalmente $E = |\mathbf{p}| c$.

Accenniamo infine al fatto che, mentre il ruolo del principio di relatività è
più stato compreso, il secondo principio della dinamica $F = ma$ sembra
inadeguato $F = dp/dt$, mentre il terzo principio di azione e
reazione non può essere direttamente esteso al caso relativistico e causa delle
modifiche del concetto di simultaneità.

Il principio d'invarianza del sistema di riferimento ideale sotto dove
sono inscripte nelle espressioni matematiche che rappresentano le leggi che si
manifestano qui (e ciò risulta più conveniente), dove deve essere
possibile esprimere ciascuna legge fisica tramite un'equazione relativisticamente
covariante e cioè invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz ;
cioè che ogni trasformazione è ora un "quadrato" che abbia tutti

è sferico.

(a) Per individuare un punto che coincide ad un certo istante t nel punto (x, y, z) del sistema S potremo usare come coordinate le seguenti quantità
 Originali : $x^0 := ct$, $x^1 := x$, $x^2 := y$ e $x^3 := z$;
 si tratta delle "coordinate contravarianti", indicate in seguito come " x^μ "
 con $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ricordiamo allora le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v x}{c^2} \right) \\ x' = \gamma \left(x - v t \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{Come} \quad \begin{cases} x'^0 = \gamma \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) \\ x'^1 = \gamma \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} ;$$

le quantità $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ risulta conservata.
 $(= c^2 t^2 - r^2)$

(b) Introducendo il "tensore metrico" 4×4 $g_{\mu\nu}$ coi componenti $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ e $g_{\mu\nu} = 0$ se $\mu \neq \nu$ ($\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$),
 che è simmetrico nei suoi due indici, e considerando efficientemente $x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3)$, otteniamo che le quantità

$$\left| \Delta^2 := g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \right| \text{ rappresenta il}$$

quadrato delle "lunghezze" del quadrivettore spazio-temporale, e che efficientemente
 il covariante $\left[\right]$ si viene ottenendo le convenzioni che un indice preso fosse
 comune ad indici $0, 1, 2, 3$, mentre un indice libero solo $1, 2, 3$, e
 soprattutto che, quando in un $\left[\right]$ un dato indice è ripetuto due volte, una
 in alto (indice "contravariante") e una in basso (indice "covariante"),

note infine una somma rispetto ai valori che l'indice può assumere (salvo
così come contenuto) $\left[\begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \end{smallmatrix} \right]$; forniamo anche l'introduzione del "coefficiente

coefficiente" $x_{\mu} := (x_0, x_1, x_2, x_3) \stackrel{\text{coordinata}}{=} g_{\mu\nu} x^{\nu} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (ct, -\mathbf{x})$, nonché conoscere e $g_{\mu\nu}$ coefficiente il tensor metrico
contravariante corrispondente $g^{\mu\nu}$ tale che $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$

$\left(= \begin{cases} 1 & \alpha = \nu \\ 0 & \alpha \neq \nu \end{cases} \right)$, per cui $\delta^{\mu}_0 = g^{\mu\alpha} g_{\alpha 0} \stackrel{\text{coordinata}}{=} g^{\mu 0}$ mentre

$\delta^{\mu}_i = g^{\mu\alpha} g_{\alpha i} = -g^{\mu i}$, per cui $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$ mentre $g^{\mu\alpha} = 0$ se $\alpha \neq \mu$: ricominciamo

$\|g^{\mu\nu}\| = \|g_{\mu\nu}\|$, δ indifferentemente solo per un quadratello

che $A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}$ o $A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$.

(c) Senza alcune ipotesi aggiuntive sulla funzione γ , la trasformazione di
Lorentz è, come visto, $\begin{cases} t' = t + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} - \gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \\ x' = \gamma (x - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2}) \end{cases}$, che

potremmo scrivere notando che $\delta^2 = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$;

il bello è che solo il quadrato, come ormai c'è: una

qualche trasformazione lineare (omogenea) del tipo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ per

la quale resti invariato lo scalare $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 =$
 $= (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$ è una trasformazione di Lorentz.

Ovviamente Λ^{μ}_{ν} è in generale non simmetrico, ~~ma~~ ~~per~~ ~~la~~ ~~trasformazione~~

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma \left(x^0 - \frac{|\mathbf{v}|}{c} x^1 \right) \\ x'^1 = \gamma \left(x^1 - \frac{|\mathbf{v}|}{c} x^0 \right) \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \end{cases} \quad \text{e} \quad (\Lambda^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma \frac{|\mathbf{v}|}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{|\mathbf{v}|}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

osserviamo che in Λ^μ_ν debba essere una matrice reale.

Introduciamo ora $\Lambda^\mu_\nu := g^{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\nu$ e $\Lambda_{\alpha\mu} := g_{\alpha\nu} \Lambda^\nu_\mu$,

per cui le coordinate contravarianti del sistema fornito dalle trasformazioni di Lorentz fanno una coppia in termini delle coordinate covarianti di

verifichiamo: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\nu g^{\nu\rho} x_\rho = \Lambda^{\mu\rho} x_\rho$;

analogamente $x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu \Leftrightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho x^\rho = \Lambda_{\mu\rho} x^\rho$,

$= \Lambda_{\mu\rho} g^{\rho\sigma} x_\sigma = \Lambda^\sigma_\mu x_\sigma$. Ora, richiediamo l'invarianza

delle quantità $s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \stackrel{(\text{lineare})}{=} x^\mu x_\mu$, che è $s^2 =$

$= x'^\alpha x'_\alpha \Leftrightarrow \Lambda^\alpha_\mu x_\mu \Lambda_{\alpha\gamma} x^\gamma$, deduciamo che necessariamente debba

essere $\Lambda^\alpha_\mu \Lambda_{\alpha\gamma} = \delta^\gamma_\mu$, con cui analogamente $\Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\nu_\alpha = \delta^\nu_\mu$;

moltiplicando quest'ultima identità per x^μ otteniamo $\Lambda^\nu_\alpha x^\alpha = x^\nu$,

cioè che le trasformazioni inverse di $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ è

$x^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x'^\alpha$. Adesso, $\delta^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_{\alpha\nu} \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\alpha g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu$

ci dà (moltiplicando per $g^{\gamma\beta}$) $g_{\mu\beta} = g^{\alpha\beta} \Leftrightarrow \Lambda^\mu_\alpha g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu$:

concludendo in conclusione i coefficienti Λ^μ_ν e $g_{\alpha\beta}$ come

elementi delle matrici Λ e γ (rispettivamente), abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\Lambda^T \gamma \Lambda = \gamma} \quad (\text{scambiando } \alpha := \mu \text{ e } \beta := \lambda, \text{ e usando le} \\ \text{simmetrie di } \gamma)$$

ma anche $(\det \Lambda)^2 = 1$ (per Binet),
cioè $\det \Lambda = \pm 1$. Non solo: prendendo $\alpha = \beta = 0$ nelle (con)-

relazioni $\gamma_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \gamma_{\alpha\beta}$ troviamo pure che debbe essere

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1, \quad \text{da cui } (\Lambda^0_0)^2 \geq 1, \quad \text{cioè o}$$

$$\boxed{\Lambda^0_0 \geq 1 \text{ o } \Lambda^0_0 \leq -1} \quad ; \quad \text{possiamo così raggruppare le trasformazioni}$$

Λ in Lorentz in quattro sottoinsiemi, secondo che $\det \Lambda = \pm 1$ e

$\Lambda^0_0 \geq 1$ o ≤ -1 : le trasformazioni "proprie" di Lorentz

hanno $\det \Lambda = 1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$, e tutti i risultati precedenti
sono in accordo con l'invarianza delle leggi fisiche rispetto a queste.

② Un quadrivettore contravariante è $A^\mu := (A^0, A^1, A^2, A^3)$
tale che, nel passaggio da un sistema inerziale a un altro, si trasforma
sotto le trasformazioni "dell'asse" di Lorentz esattamente come le coordinate
 x^μ : vale a dire le relazioni

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \frac{v}{c} A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \frac{v}{c} A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases}$$

anzi, più in generale, $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$, per cui sono da usare

$$\text{ovviamente } A'^\mu = \Lambda^\mu_\rho A^\rho, \quad \text{e } (A'_\mu = \Lambda_{\mu\rho} A^\rho (= \tilde{\Lambda}_\mu^\nu A_\nu)).$$

Chiameremo allora i quadri-vettrici scalari e forme scalari del tutto analoghe a quelle scalari fra i vettori; in particolare definiremo il "prodotto scalare" $A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$, che è un invariante.

Lo Lemma: $A^\mu B_\mu \stackrel{(\text{cov.})}{=} \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\rho_\mu A^\nu B_\rho = A^\nu B_\nu$; note

quindi invariante il quadrato delle "lunghezze" di un quadri-vettore, cioè $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$ (che può essere < 0 , $= 0$ o > 0).

Introduciamo finalmente l'operatore gradiente nello spazio quadri-dimensionale:

se $\phi(x)$ è una funzione (scalare) di $x := (x^0, x^1, x^2, x^3)$,

allora lo è anche la sua derivazione $\partial\phi$ nel semplice di x e

$x + \partial x = (x^0 + \partial x^0, x^1 + \partial x^1, x^2 + \partial x^2, x^3 + \partial x^3)$, Chiamiamo
 $\partial\phi = \left\| \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \right\|_{(\text{grad. } x)}$; e' allora $\partial_\mu \phi := \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$, che per noi

è un quadri-vettore covariante. Inoltre ovviamente $\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} =$

$= g_{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} = g^{\mu\nu} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}$, cioè (per def.) $\partial^\mu \phi := \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$

ed è un quadri-vettore contravariante: pertanto $\partial^\mu := \partial/\partial x_\mu$ si trasforma come un quadri-vettore covariante, e $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$ come il quadri-vettore contravariante corrispondente. (Una relazione che conferma la

covarianza di $\partial/\partial x^\nu$ è $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Leftrightarrow \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ (perché $\Lambda^\nu_\mu x'^\mu = x^\nu$!).

Averebbe tale operatore abbiamo così assegnato il "gradiente", il "divergente" e le "derivazioni",

E' in particolare il ∂ identitativo che e' $\partial^\mu \partial_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu =$
 $= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) =$
 $= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \doteq \square$

Definiamo ora la "quadrivelocita'" di una particella per analogia con la
 velocita' classica: la relazione implichera' tra due sistemi inerziali
 x^μ e $x^\mu + \partial x^\mu$ e' $(\partial x^\mu)^2 = \partial x^\mu \partial x_\mu = (\partial x^0)^2 - (\partial x^1)^2 - (\partial x^2)^2 -$
 $-(\partial x^3)^2 = c^2 (\partial t)^2 - (\partial r)^2$, che e' scalare, dunque definiamo

$$u^\mu \doteq c \frac{\partial x^\mu}{\partial s}$$
 . Nel sistema S' in cui la particella e' in quiete

e' $\partial x^1 = \partial x^2 = \partial x^3 = 0$, per cui $(\partial x^0)^2 = c^2 (\partial t)^2 - (\partial r)^2 =$
 $= c^2 (\partial t)^2$ e quindi $\partial s = c \partial t$: la relazione implicherebbe

che i due eventi si separano ∂s^2 in termini del "tempo proprio" ∂s
 riferito a questo sistema (cioe' quando esiste nel sistema in cui entrambi
 nello stesso punto spaziale), ed eredita' da un'incertezza delle nostre

conoscenze in un qualunque sistema inerziale nessuno oltre il corrispettivo
 tempo proprio. Dunque, essendo $\partial r = \partial \vec{r}$, $\partial t^1 = \frac{1}{c} (c^2 (\partial t)^2 -$
 $-(\partial r)^2)^{1/2} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 (\partial t)^2 - (\partial r)^2} = \partial t \sqrt{1 - \frac{|\partial \vec{r}|^2}{c^2}} = \frac{\partial t}{\gamma}$

(dilatazione del tempo!), per cui $u^\mu = c \frac{\partial x^\mu}{\partial s} = \frac{\partial x^\mu}{(\partial t^1)} =$
 $= \gamma \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \gamma (c, \vec{v})$, cioe' $\begin{cases} u^0 = \gamma c \\ u^i = \gamma v^i \end{cases}$ e in

conclusione le componenti delle quadrivelocita' NON sono indipendenti tra
 loro poche' soltanto soddisfano la relazione $u^\mu u_\mu = c^2$

$$\left(\gamma^2 (c^2 - \underbrace{\vec{v}^2}_{(-|\vec{v}|^2)} - \underbrace{\vec{v}^2 - \vec{v}^2}_{(-\vec{v}^2)}) = c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2} \right) \right) .$$

Potremo far definire il "quadrivettore accelerazione" naturalmente come

$$\left\| \frac{c \frac{d\vec{u}}{ds} = c^2 \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} \right\| , \text{ ottenendo che (nella forma quadrivettoriale)}$$

accelerazione non ortogonale tra loro $(c^2 = a_\mu u^\mu \geq$

$$0 = a_\mu \frac{du^\mu}{ds}) .$$

Oltre i risultati sperimentali sono in accordo con una legge di conservazione delle cariche elettriche totale di un sistema, le quali dunque risulta indipendenti dal suo stato di moto: la carica elettrica totale è un invariante rispetto a trasformazioni di Lorentz; ciò nonostante, le densità (volumetriche) di carica non risulta ad alto un invariante di L , e invece del numero di cariche delle lunghezze (per un foglio di x/y), ma proprio per questo fornisce comunque calcoli come avere tale densità di carica: minimando in $\mathcal{O}V_0$ una carica $\mathcal{O}q = \rho_0 \mathcal{O}V_0$ rispetto al sistema S ideale e $\mathcal{O}V_0$ stesso, rispetto invece al sistema S' in moto è $\mathcal{O}V = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} \mathcal{O}V_0$,

e dunque in ogni caso avere $\mathcal{O}q = \rho_0 \mathcal{O}V_0 = \rho \mathcal{O}V$ deducendo subito

$$\left\| \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} = \gamma \rho_0 \right\| \text{ (giustamente } \geq \rho_0 !) . \text{ Potremo}$$

tra l'altro ora definire il "quadrivettore corrente" j^μ come

$$j^{\mu} := j_0 u^{\mu} = \underbrace{j_0}_{(=j)} (c, \underbrace{\vec{v}}_{(=\vec{v})}) = (cj, j\vec{v}) = (cj, \vec{i}) ,$$

Per effetto ricambio il vettore potenziale ordinario diventa lo corrente $\vec{i}$ nelle ultime tre componenti, e quindi risolvere l'equazione di continuità come $0 = \frac{\partial j}{\partial t} + \text{div } \vec{i} (=) \frac{\partial j_0}{\partial x^0} + \frac{\partial i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial i^3}{\partial x^3}$, eiol
 (= $\frac{\partial(cj)}{\partial(ct)}$) $\quad$ (= $\text{div } \vec{i}$)

$$\boxed{\frac{\partial j^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0} : \text{abbiamo così le (stesse) equazioni elettrostatiche in}$$

forme covarianti! Risolviamo allo stesso modo le equazioni di Maxwell in modo implicito secondo (substituisce per i potenziali vettore A e scalare V

tale che $\square A = \mu_0 \vec{i}$ e $\square V = j/\epsilon_0$, e inoltre le equazioni di Lorentz $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } A = 0$: definito per questo il "quadrivettore potenziale" $A^{\mu} := (A^0, A^1, A^2, A^3) := (V/c, A)$,

non in forme covarianti le equazioni di L. $\boxed{\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0}$ e

risolte le due equazioni per V ed A riunite nell'unica equazione

$$\boxed{\square A^{\nu} = \mu_0 i^{\nu}} \quad (\mu_0 c^2 = 1/\epsilon_0 !)$$

quest'ultima ha come soluzioni (nel vuoto) onde che si propagano a velocità c e quindi riflettano che, rispetto a qualunque osservatore inerziale, le velocità delle luce (nel vuoto) che segue lo stesso valore c . In conclusione le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo possono essere scritte direttamente in forme covarianti.

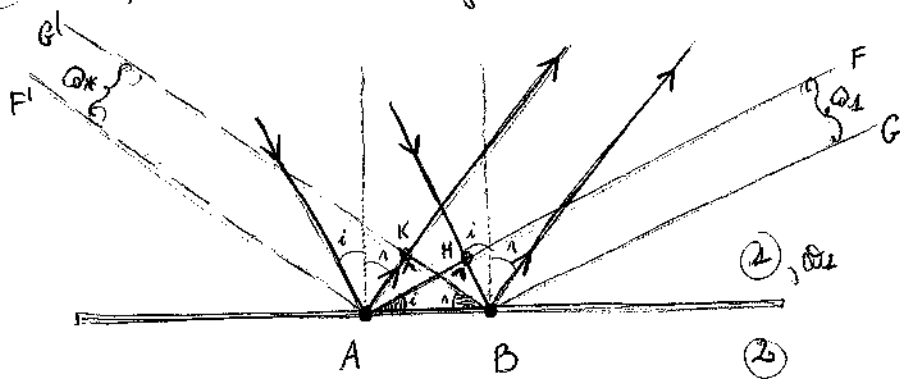
Tutti i corpi emettono in continuazione energie elettromagnetiche ottenendo
 la "radiazione termica" ed emettono energie radianti anche come altri corpi;
 l'occhio umano ^(a temperature > 0K) percepisce la radiazione termica emessa spontaneamente dai corpi
 quando la loro temperatura è $\geq 520^\circ\text{C}$, dove parla di tale radiazione
 si costruisce la "luce" (= ogni radiazione capace di stimolare le reti
 dell'occhio umano). I meccanismi attraverso i quali un corpo può
 emettere luce, discutendo con i luminosi, sono molteplici ma comunque compresi
 in concomitanza ad una modifica dell'energia di un atomo o di una
 molecola. Invece un oggetto non luminoso può divenire visibile quando
 viene illuminato, perché parte della luce incidente viene in parte riflessa
 da questo; contemporaneamente, parte viene assorbita e parte attraversa
 l'oggetto, e tutto ciò dipende in larga misura dalla natura dell'oggetto.
 I fenomeni luminosi propri di sfere sono "riflessione", "rifrazione"
 "interferenza", "diffusione" e "polarizzazione", per cui si possono in modo
 naturale una "teoria ondulatoria della luce" piuttosto che "corpuscolare".

Come visto, le onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo ed isotropo si
 propagano a velocità (scalare) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, $= \frac{c}{n}$ ($\leq c$):
 il rapporto tra la velocità nel vuoto e quella in un mezzo materiale isotropo,
 dove $n := c/v = \sqrt{\epsilon\mu}$ (≥ 1), viene chiamato "indice
 di rifrazione" del mezzo stesso; anche per le grandi magnitudini

Dalle nostre $\mu \approx 1$, e da solo (sopra) quelle sottoposte in quasi
 tutto i fenomeni ottici interagenti, abbiamo in generale $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1}$.
 Osserviamo però che, in un mezzo materiale, si definisce anche l'angolo
 di riflessione, per cui (equiv.) così si ha n .
 Consideriamo quindi un'onda elettromagnetica piano incidente su una superficie
 piana "infinitamente estesa" (cioè di dimensioni infinitesime rispetto alla
 lunghezza d'onda), la quale separa due mezzi materiali isotropi omogenei;
 nel caso della luce, parte da questo viene riflessa nel mezzo dal
 quale proviene, mentre l'altra parte penetra e si propaga nel secondo
 mezzo: i due fenomeni sono quello della "riflessione" e della "rifrazione",
 rispettivamente. Le grandezze (in energia) della luce riflessa e rifratta sono
 funzioni delle caratteristiche del mezzo 1, dell'angolo incidente sulla superficie,
 come vediamo cominciando con lo studio della riflessione; anzitutto
 sono E_0 , E_r ed E_t le energie dei fasci incidenti, riflessi e
 trasmessi, rispettivamente, per cui definiamo $\rho := E_r/E_0$ come il
 "coefficiente di riflessione" e $\tau := E_t/E_0$ come il "coefficiente di trasmissione".
 Chiameremo inoltre "angolo di incidenza" θ quello fra la direzione di
 propagazione della luce incidente e la normale alla superficie, mentre
 "angolo di riflessione" π quello fra la normale e la direzione di
 propagazione dell'onda riflessa, si osserva spontaneamente che la
 direzione d'incidenza, la normale alla superficie e la direzione di riflessione
 (tutte nel piano d'incidenza) sono complesse e che $\theta = \pi$;
 in molte situazioni possiamo facilmente ottenere questo risultato per via fisica

chiamo nel caso che l'onda incidente e quella riflessa siano figura, e che propagandosi nello stesso mezzo lo facciano con la stessa velocità.

Chiamiamo infatti F e G i punti dell'onda incidente agli istanti t_0 e $t_1 := t_0 + \Delta t$, A e B i punti d'incontro con le superficie riflettenti e F' e G' i punti dell'onda riflessa ai soliti istanti t_0 e t_1 , le velocità delle due onde nel primo mezzo e' effusivo le stesse, per cui F e G distano tra loro $CG_1 := v_1 \Delta t$ ma pure F' e G' distano tra loro $CG_1 = CG_1$; dato che le onde sono figura, formano dunque le strutture come segue:



Notare che $i = \hat{A}BH$ e $i = \hat{A}BK$ e analogo per r !

; fatto costante, come la

Conclusione: dal triangolo ABH deduciamo $AB = \frac{BH}{\sin(i)} = \frac{CG_1}{\sin(i)}$, mentre da ABK che $AB = \frac{AK}{\sin(r)} \stackrel{(r=i)}{=} \frac{CG_1}{\sin(i)}$, da cui $i = r$.

Per questo riguarda il fenomeno della rifrazione, se i_1 e' l'angolo d'incidenza delle due (nel primo mezzo) e i_2 l'angolo di rifrazione, cioè quello tra le normali e le direzioni delle due rifratte (nel secondo mezzo), allora in generale $i_1 \neq i_2$: per fenomeni d'esperienza notiamo che il rapporto tra $\sin(i_1)$ e $\sin(i_2)$ e' indipendente da i_1 , cioè che vale la "legge di Snell"

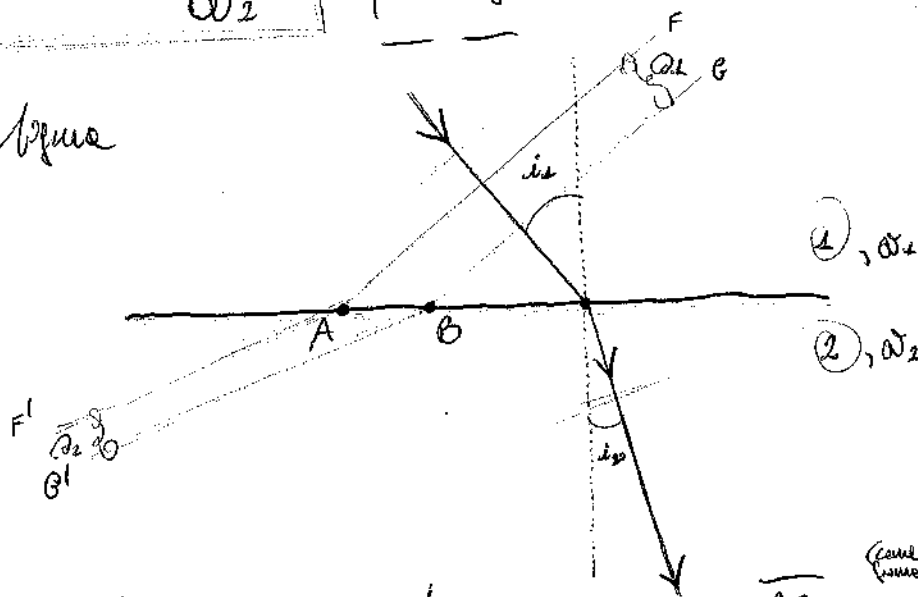
$$\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = n_{12}$$

considero m_{12} una costante caratteristica del mezzo, chiamata "indice di rifrazione del mezzo (2) rispetto al mezzo (1)" ; analogamente al fenomeno delle riflessioni, le rifrattioni e' conseguenza delle forze elastiche delle due sui due mezzi mutuamente coesivi, e infatti e'

$$m_{12} = \frac{v_1}{v_2}$$

ragionando esattamente come fanno, ma rispetto alle

figure



colle onde egualitarie

$v_1 = v_1 \Delta t$ e $v_2 = v_2 \Delta t$, dunque $\overline{AB} = \frac{v_1}{\sin(i_1)} = \frac{v_2}{\sin(i_2)}$ (cosine)

effettivamente $\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_{21}}{m_{12}}$

così noto che l'indice di rifrazione fra due mezzi si trova se non noti gli indici di rifrazione di questo rispetto ad un terzo materiale

(infatti $m_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_3} \frac{v_3}{v_2} = \left(\frac{v_1}{v_3} : \frac{v_2}{v_3} = \frac{m_{31}}{m_{32}} \right)$: $\frac{v_3}{v_2} : \frac{v_3}{v_1} = \frac{m_{32}}{m_{31}}$)

Considero quindi scegliere un 3° mezzo come riferimento, e come tale scegliere mutuamente il vuoto, ottenendo $\frac{v_1}{v_2} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{m_2}{m_1}$

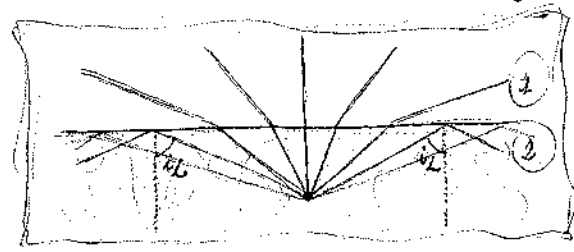
e cioè $m_{12} = \frac{m_2}{m_1}$ e in conclusione $\frac{\sin(i_1)}{\sin(i_2)} = \frac{m_2}{m_1}$

E' ovvio che allora $m_{21} = \frac{1}{m_{12}}$, e cioè che il reciproco

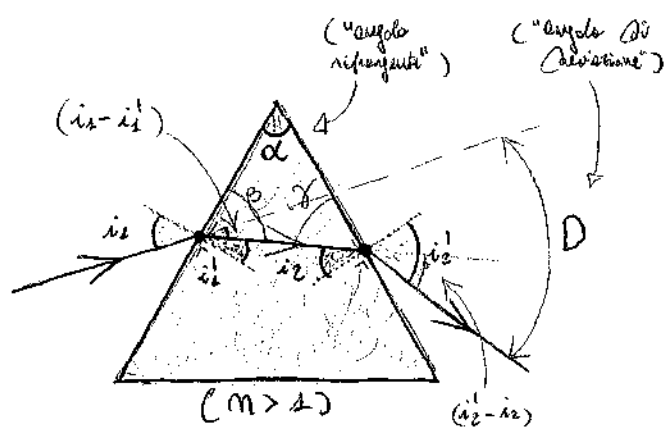
raggio incidente - raggio riflesso e' invariabile totalmente : come per
 l'analogia di questo nel caso delle rifrattioni (in modo (almeno), otteniamo
 n_1'' "invariabile" sul cammino luminoso", cioè da ogni "raggio"
 "luminoso" che subisce fra rifrattioni e riflessioni (usando un termine
 dell'"ottica geometrica", che coincide con la traiettoria ortogonale al fronte
 d'onda, ossia con la direzione di propagazione dell'onda); l'impegno
 di tale concetto vale per giustificare solo nei casi in cui le densità
 degli oggetti incidenti hanno "densità reali" $\gg$ densità reale,
 altrimenti sarebbero dominanti i fenomeni di riflessione e interferenza
 per i quali occorre n_1'' "ottica ondulatoria".

Diciamo ora che il mezzo (2) e' più rifrangente del mezzo (1) se
 $n_2 > n_1$ (cioè $n_{22} > 1$), ossia $i_2 < i_1$, per cui
 nel passaggio da un mezzo ad un altro più rifrangente un raggio si
 avvicina alla normale (e' racchiuso); se appunto $n_2 > n_1$,
 allora che cosa succederebbe se si avesse $n_2 = n_1$
 con $\sin(i_1) = \frac{n_2}{n_1}$, che conseguente sarebbe anche il valore: i_1 si
 direbbe "angolo limite" e infatti, essendo, per $i_2 \geq i_1$ i raggi del
 mezzo (2) non passano nell'altro mezzo, ma vengono totalmente
 riflessi; tale e' l'effetto al fenomeno delle "riflessioni totali".

Un corpo esteso di 180° di apertura visibile appare con contorni di
 un corpo di apertura $2i_1$.



Come più detto, l'indice di rifrazione di un mezzo materiale dipende anche dal "colore", cioè dalle lunghezze d'onda della luce; si intuisce quindi la possibilità di separare la luce bianca nei vari colori (come nel caso "spettro") : Consideriamo per questo (le stesse condizioni di) un prisma a base triangolare, l'indice di rifrazione n rispetto al mezzo esterno; immaginiamo finalmente



$$(i + \beta + \gamma = 180^\circ = 90^\circ + 90^\circ = (i_1' + \beta) + (i_2 + \gamma))$$

, e' cosicché $i_1' + i_2 = \alpha$ e

$$D = (i_1 - i_1') + (i_2' - i_2) =$$

$= i_1 + i_2' - \alpha$, per cui e' possibile esprimere D in funzione di

i_1 , α e n (con l'aiuto di) : infatti, per Snell, $\sin(i_2') =$

$= n \sin(i_2)$, $\Rightarrow n \sin(\alpha - i_1') = \sin(i_2')$, da cui $\sin(i_1') = \frac{1}{n} \sin(i_2')$ oppure

$\sin(\alpha - i_1') = \sin(\alpha) \cos(i_1') - \sin(i_1') \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \sqrt{1 - \sin^2(i_1')} - \frac{1}{n} \sin(i_2') \cos(\alpha) =$

$= \sin(\alpha) \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2(i_2')} - \frac{1}{n} \sin(i_2') \cos(\alpha)$, da cui chiaramente $D =$

$= i_1 - \alpha + \arcsin(\sin(\alpha) \sqrt{n^2 - \sin^2(i_2')} - \sin(i_2') \cos(\alpha))$, dove

osserviamo esplicitamente che D varia all'aumentare di n ; risulta inoltre

che, per le miscele dei materiali, l'indice di rifrazione e' maggiore per

lunghezze d'onda più ^{corte} (come e' facile intuire!), D e' più grande

per il blu che per il rosso: conviene così il fenomeno di "dispersione

della luce". Concludiamo osservando che, se $\angle$ e' l'angolo lorde

del fronte rispetto all'esterno, un raggio α lui incidente viene effettivamente
 ad attraversarlo α , e solo α , $i_1' < L$ e $i_2' < L$, cioè $\alpha - L < L - i_1' < L$; deduciamo quindi anche le condizioni (necessarie)
 $L < 2L$.

Le soluzioni delle equazioni di Maxwell soddisfano il principio di sovrapposizione,
 per cui i campi elettrici e magnetici di due segnali contemporaneamente presenti
 si sommano rispettivamente fra loro ; accade invece in generale che le
 forze luminose di due fonti di luce non si sommano algebricamente :
 infatti, precisamente, se due onde della stessa frequenza e con differenza di
 fase costante si superano "quasi" nella stessa direzione, allora esse non
 combaciano in modo tale che l'energia totale emessa è il doppio di cui
 fanno parte separatamente e minimo (anche nullo) in altri ; in ciò consistono
 i fenomeni di "interferenza" costruttiva e distruzione.

Or, risulta e fu proposto che nelle manifestazioni dei vari fenomeni di interferenza
 sono fin strettamente collegati alle nature oscillatorie della luce che non
 è carattere elettromagnetico, molte leggi dell'ottica fanno anzi riscontro
 con l'acustica di onde fin troppo, anche se meno giuste, di quelle
 elettromagnetiche di Maxwell (e ai calcoli esposti non sono complicate!);
 ricorda un noto paradosso le onde proposte da G. Huggens, nelle quali
 le onde si fanno di una natura oscillatoria della luce, e che è basata
 su una costruzione geometrica che permette di trovare le posizioni future di

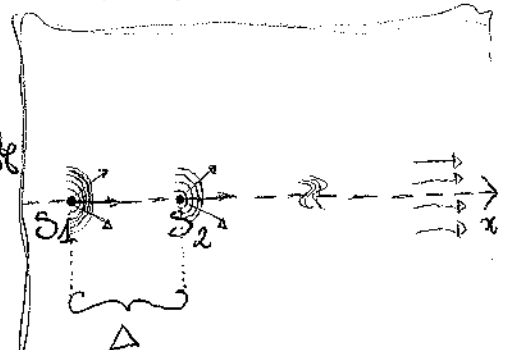
un fronte d'onda mobile che ne sia la funzione di un dato istante; ciò viene facilmente realizzato in esatto al "principio di Huygens":

Ad un generico istante, ogni punto di un fronte d'onda può essere considerato come una sorgente puntiforme di onde sferiche secondarie, e allora la funzione del fronte d'onda dopo un tempo Δt coincide con la superficie involucre di tutte le onde secondarie al tempo in questione.

Consideriamo una sorgente puntiforme di onde elettromagnetiche di frequenza ω : le onde sferiche sono spinte verso, ma "obbligate a tornare" dalle sorgenti stesse efficaci come onde riflesse; allora, qui il campo elettromagnetico risulta e' tale che E e B siano fra loro ortogonali e anche perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda: Prendiamo quindi un sistema di riferimento con l'asse x nella direzione di propagazione e l'asse y parallelo al campo elettrico E , possiamo scrivere $E = \hat{y} |E_0| \sin(kx - \omega t - \alpha)$ e $B = k \frac{|E_0|}{c} \sin(kx - \omega t - \alpha)$; notiamo quindi che in tutti i punti di un fronte d'onda o' che ha lo stesso fase $\phi := kx - \omega t - \alpha$. Abbiamo allora che $|S| := |E \times H| = \frac{|E_0|^2}{c \mu_0} \sin^2(kx - \omega t - \alpha) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \sin^2(kx - \omega t - \alpha)$ ($\hat{=}$ intensità dell'onda, cioè l'energia che attraversa nell'unità di tempo una superficie unitaria nel fronte d'onda), che con il valore medio (rispetto al tempo) della funzione seno risulta identica a quella per una onde "libera" di ampiezza $|E_0|$ e', n 2 e' costante, $I_0 = \frac{1}{2} |S|_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2$. Possiamo dire di avere come sorgenti puntiformi S_1 e S_2 aventi uguale frequenza di oscillazione, ma sfasamenti α_1 e α_2

costruttivamente distrutti; immaginando inoltre che si hanno nell'ordine x e
 distanza rilevante $\Delta (>0)$, si deduce che "lavoro" da solo
 seguito si abbia $|E| = |E_0| \sin(kx - \omega t - d_1) + |E_0| \sin(k(x-\Delta) - \omega t - d_2)$ (e $|B| = |E|/c$), per

che l'intensità dell'onda "combinata" è espletamente
 $|S| = I = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E|^2$, dove finalmente si



$$|E|^2 = |E_0|^2 \left[\sin^2(kx - \omega t - d_1) + \sin^2(k(x-\Delta) - \omega t - d_2) + 2 \sin(kx - \omega t - d_1) \cdot \sin(k(x-\Delta) - \omega t - d_2) \right] \equiv |E_0|^2 \left[\sin^2(kx - \omega t - d_1) + \sin^2(k(x-\Delta) - \omega t - d_2) + \cos(k\Delta + d_2 - d_1) - \cos(2(kx - \omega t - (k\Delta + d_1 + d_2))) \right]$$

($2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$!) , e allora (e d_1 e d_2
 sono costanti) osservando che in media ("lungo") $(|E|^2)_m =$
 $= \left(\frac{1}{2} |E_0|^2\right) \cdot 2 + |E_0|^2 \cos(k\Delta + d_2 - d_1) = |E_0|^2 (1 + \cos(k\Delta + d_2 - d_1))$:

osservando pertanto che $(I)_m$ "risultante" si legge e $I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2$

o ciascuna onde componente delle relazioni $(I)_m = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (|E|^2)_m =$
 $= 2 I_0 (1 + \cos(\delta))$, dove $\delta := k\Delta + d_2 - d_1 \stackrel{(k = \frac{2\pi}{\lambda})}{=} \left[d_2 - d_1 + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \right]$,

cioè $(I)_m = 4 I_0 \cos^2(\delta/2)$ ($\cos(\delta) = 2 \cos^2(\delta/2) - 1$!);

osservando così che l'intensità può essere, in media, sia un valore minimo
 nullo o un valore massimo di $4 I_0$ e risulta dalle antenne "fase" Δ
 (e quelle "co fase" $d_1 - d_2$): nel primo caso si ha interferenza

costruttiva e si osserva esattamente quando $\delta = (2m+1)\pi$ per un

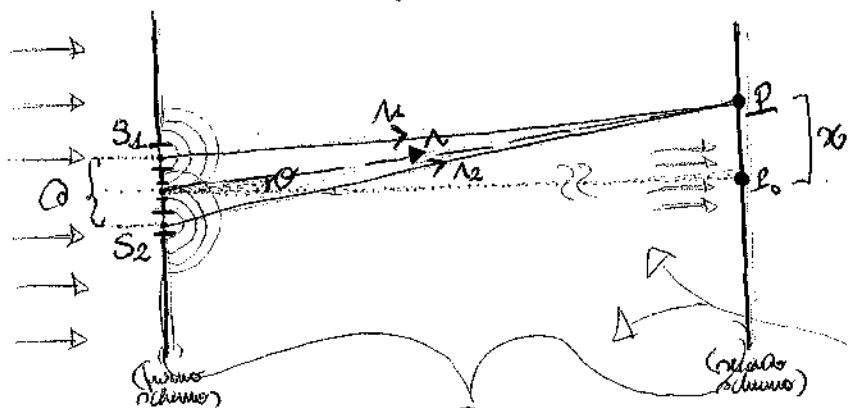
qualcosa intorno m , cioè quando $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi}(d_1 - d_2) + (m + \frac{1}{2})\lambda$, mentre nel modo così si ha interferenza costruttiva e cioè quando $\delta = 2m\pi$, cioè per $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi}(d_1 - d_2) + m\lambda$.

Concludiamo osservando che, se le fasi d_1, d_2 variano indipendentemente tra di loro in modo casuale all'interno del tempo dell'ordine di qualche periodo $T (= \frac{2\pi}{\omega})$ ("sorgenti incoerenti"), allora gli integrali calcolati

risultano invariati ed eguali a quello per $(|E|^2)_m$, che ora è $|E_0|^2$: si risulta così $(I)_m = 2I_0$, cioè che nel caso di due sorgenti incoerenti l'intensità media totale è la somma delle intensità medie delle due onde componenti.

(Solo risultati si dimostrano facilmente se le due onde hanno intensità diverse, e anche se l'onda risultante rimane polarizzata in una direzione diversa dalle rette congiungenti le due sorgenti; in quest'ultimo caso, tuttavia, la complessione matematica del calcolo è un po' più "obscura").

Stacchiamo infine questo insetto all'effetto ottenuto da Young per le frange spaziali dell'interferenza dei raggi di interferenza per la luce (questo per una veloce confusione delle varie espressioni della luce):



("modo delle diffrazioni" per passare le due sorgenti) $(D \gg \lambda)$

i per notare, facendo la differenza, il fatto che anche se le condizioni "ideali" rispettate

lunghezza d'onde λ che lo investe; sul resto della parte si forma l'immagine
 di un insieme di righe, fin' a meno luminose, intercalate e non completamente
 scure, chiamate "frange di interferenza": differenza e ipotesi che

anche $\lambda \ll D$ ^(come l'interferenza è data); Per questo, cominciamo affacciando l'osservazione alle
 due fenditure otteniamo immediatamente che esse appaiono come sorgenti coerenti,
 con stesso campo elettrico in fase e di ugual ampiezza, i quali inoltre
 arrivano (per l'ipotesi appena fatta) fronteggiati parallelamente nel resto schermo.

Comunque, essendo $\alpha = (D \sin \alpha)$, dalle equazioni identiche $|r_1|^2 =$
 $= D^2 + (D \sin \alpha - D/2)^2$ e $|r_2|^2 = D^2 + (D \sin \alpha + D/2)^2$ otteniamo che
 $|r_2|^2 - |r_1|^2 = 2(D \sin \alpha)$, da cui $|r_2| - |r_1| = \frac{2(D \sin \alpha)}{|r_2| + |r_1|} \approx$
 $\frac{2(D \sin \alpha)}{2D} = \sin \alpha$

Si conclude che per ogni α uguale che arriva nelle due fenditure meno
 una differenza di fase δ tale che $\delta = K \sin \alpha$ (in P) $\int \delta ds - dr =$
 $= K \Delta$!), cioè $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (D \sin \alpha)$, si affaccia i risultati

precedenti troviamo che l'illuminamento dello schermo in P è dato da
 $I(\alpha) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} D \sin \alpha\right)$; questo è massimo ($4I_0$) per
 $\delta = 2\pi m$, cioè $\sin \alpha = \frac{m\lambda}{D}$ (in inter), mentre è minimo
 (=0) per $\delta = (2m+1)\pi$, cioè $\sin \alpha = \frac{(m+1/2)\lambda}{D}$. Alle altre

si ha massimo in P con $\alpha := \alpha_m \approx D \sin \alpha = \frac{m\lambda D}{D}$, per cui
 le differenze fra due massimi consecutivi (effetti nelle approssimazioni fatte)
 è chiaramente $\alpha_{m+1} - \alpha_m = \frac{\lambda D}{D}$ (chiaramente le altre per minimi!)
 e la conseguenza formiamo anche come λ (come in effetto Young fece!!).

Se una delle due fenditure viene coperta, allora il campo luminoso risultante
illuminato uniformemente; il bello è che ciò si verificherebbe finanche
in modo identico anche nel caso si rendessero S_1 e S_2 incoerenti (ad
esempio sostituirle con due sorgenti pienamente incoerenti tipo lampadine a incandescenza e vari);
infatti, se nel punto P si osserva la coerenza per un mezzo d'interferenza,
allora per un altro mezzo qualsiasi si verificherebbe la stessa coerenza,
come pure quella d'interferenza distruttiva.

Concludiamo notando che, se le sorgenti sono di luce bianca, allora la
frangia centrale risultante appare mentre le altre frange del blu sono il
rosso (più forti e confuse...) !)

Am mette un'azione per spiegare dell'interferenza nelle inquadrate
nella storia delle "Diffrazioni" (della luce): questo fenomeno consiste
nell'immersione dei raggi luminosi attorno agli ostacoli incontrati, come il
bordo di una fenditura o lo spigolo di un oggetto, ed esso che le
luci sono raggiunte zone che dovrebbe rimanere nell'ombra, se le leggi
dell'ottica geometrica fossero risolvibili esattamente; tale comportamento è
ben più pronunciato quando si fa immersione nei colori dell'arcobaleno incontrati
sotto piccole nicchie delle lampade d'onda della luce ultravioletta (come
funzionano per quel caso!) , e ciò lo si interpreta ancora con
Huygens: trattando i punti dell'ostacolo come un insieme di sorgenti puntuali
con contributo, la diffrazione è il caso d'interferenza tra

infinite perpendicolarmente "in un piano fisso", le cui "linee di campo" e' cost
tale per cui l'onda si può ripresentare più o meno periodicamente e con una
fase, con l'effetto effetto di poter opporre l'ostacolo.

~~...~~
Potremmo trovare giustamente che, entrato in certo cristallo, un
raggio di luce non si comporta simmetricamente rispetto ai suoi componenti
le due direzioni, e ciò è dovuto alle proprietà delle linee
elettromagnetiche che la luce si comporta come trasversale (con
E e B perpendicolari alle direzioni di propagazione) e non se onde
longitudinali: per le linee non si infletti necessariamente in quel
modo anche le direzioni delle perturbazioni ondose (ad esempio di E), come
con effetto le "polarizzazioni" dell'onda; mostrando e facendo come
interferenza e differenza non potremo certo dimostrare che le onde luminose non
trasversali.

Considerando il caso di un'onda elettromagnetica come nel caso; come più
detto, tale è "polarizzata linearmente" se in tutti i suoi punti le
direzioni di E non che non parallele: chiamando "piano di polarizzazione"
(o "di vibrazione") quello generato da tali direzioni (con quella di propagazione),
un'onda polarizzata linearmente che può di polarizzazione parallela tra loro.
Un'onda è invece "polarizzata ellitticamente" o "circularmente",

Se in ogni punto dello spazio E esiste almeno una direzione di propagazione, con frequenza uguale a quella dell'onda, dovremo avere un'ellisse; preso un vettore complesso E_0 perpendicolare all'onda x , cioè con componenti $E_1 = 0$, $E_2 = A_2 e^{i\phi_2}$ ed $E_3 = A_3 e^{i\phi_3}$, dovremo quindi avere una ellisse monocromatica (independente) nelle direzioni dell'onda x nelle forme

$E = \operatorname{Re} \{ E_0 e^{i(\omega t - kx)} \}$: infatti $E = \operatorname{Re}(E_0) \cos(\omega t - kx) - \operatorname{Im}(E_0) \sin(\omega t - kx)$, per cui $E_1 = 0$ mentre $E_2 = A_2 [\cos(\phi_2) \cos(\omega t - kx) + \sin(\phi_2) \sin(\omega t - kx)] = A_2 \cos(\omega t - kx + \phi_2)$, e analogamente $E_3 = A_3 \cos(\omega t - kx + \phi_3)$, e allora il tipo di polarizzazione viene determinato dai valori di $\phi := \phi_3 - \phi_2$ e di A_2/A_3 .

(I) La polarizzazione lineare si osserva per $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ (cioè), purché otteniamo $E = E_0 \cos(\omega t - kx + \phi_2)$ con $E_0 = A_2 \delta \pm A_3 K$ rispettivamente ($\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$!), che cui risulta evidente che l'oscillazione di E avviene nel tempo in direzione fissa di E_0 (per ogni x), che per $\phi = \pi$ è $E = \pm A_3/A_2 \cos(\omega t - kx)$ in ogni punto perpendicolare all'onda x .

(II) La polarizzazione circolare corrisponde a $A_2 = A_3$ e $\phi = \pm \pi/2$ (cioè), ottenendo infatti $E = A_2 [\delta \cos(\omega t - kx + \phi_2 \mp \pi/2) + K \cos(\omega t - kx + \phi_2)]$ e che chiaramente ($\delta = \pm \sin(\omega t - kx + \phi_2)$) è descrivibile una circonferenza in senso orario se $\phi = \pi/2$ (cioè) (e il senso si considera "elicoidale negativo"),

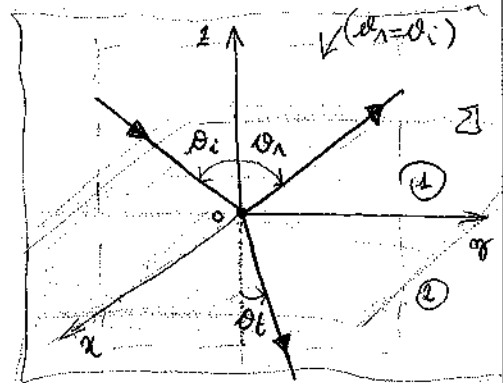
in uno stato di $\phi = -\pi/2$ (e il campo che "Muove" forse) , come anche segue dalle equazioni $\frac{\partial E}{\partial t} = \mp \omega I \times E$ ($I \times E = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix}$!).

(III) Su ogni altro caso si ha polarizzazione ellittica, (anche in generale)
 $\frac{E_2^2}{A_2^2} + \frac{E_3^2}{A_3^2} - 2 \frac{E_2 E_3}{A_2 A_3} \cos(\phi) = \sin^2(\phi)$ [cioè], posto $\theta = \omega t - kx$,
 $\cos^2(\theta + \phi_2) + \cos^2(\theta + \phi_3) - 2 \cos(\theta + \phi_2) \cos(\theta + \phi_3) \cos(\phi_3 - \phi_2) =$
 $= \sin^2(\phi_3 - \phi_2)$, cioè $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\beta - \alpha) =$
 $= \sin^2(\beta - \alpha)$: infatti $[\sin(\beta - \alpha)]^2 = [\sin(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\beta)]^2 =$
 $= \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\alpha) \cos(\beta)$, e in effetti il
 primo membro che fornisce $-2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\beta - \alpha) = -2 \cos(\alpha) \cos(\beta) [\cos(\alpha) \cos(\beta)$
 $+ \sin(\alpha) \sin(\beta)] = -2 \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\alpha) \cos(\beta)$, e da
 sempre $\cos^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta) = \cos^2(\alpha) [1 - \cos^2(\beta)] = \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta)$.
 e ciò è tutto quello che serve.

Osserviamo infine che la luce emessa dalle magnetosfere delle sorgenti luminose
 è NON polarizzata (luce naturale), come ben si può capire,
 ma che in molti altri casi è me' completamente polarizzata me' completamente
 non polarizzata, me' parzialmente polarizzata.

Quando un raggio di luce incide nella superficie di separazione (interfaccia) fra due mezzi con indici di rifrazione diversi, la luce viene in parte riflessa e in parte trasmessa; ciò che accade è che la direzione della luce riflessa dipende dall'angolo d'incidenza α , se tale è $\neq 0$, la luce riflessa risulta parzialmente polarizzata, e questa polarizzazione risulta esprimibile intorno ad un particolare valore dell'angolo d'incidenza, chiamato "l'angolo di Brewster". Consideriamo il caso particolare di un'onda piana

monocromatica incidente su $\sum$ di separazione, alle quali due fra l'altro corrisponde la scomposizione delle componenti tangenziali di E e di H (come per ora; quelle delle componenti normali di D e B sembra allora altrettanto!) ; otteniamo allora $E_i(r, t) = Re E_{i0} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$,



per cui convenientemente $H_i = \frac{m_z}{\mu_z c} \frac{R_i}{|k_i|} \times E_i$, ossia $E_i = -\frac{\mu_z c}{m_z} \frac{R_i}{|k_i|} \times H_i$, nel mezzo ① avviene (E_1, H_1) , mentre nel mezzo ② avviene (E_t, H_t) .

Analizziamo ora le condizioni di compatibilità sopra ricordate nei due casi seguenti:

(a) L'onda incidente è polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza ($= \pi E$), cioè con E_i perpendicolare a tale ; questo è il caso " $\perp$ " ;

(b) E_i è parallelo al piano d'incidenza (cioè H_i è ad esso perpendicolare), e questo è il caso " $\parallel$ " ; il membro delle condizioni di compatibilità:

il caso generale sarà un'opportuna sovrapposizione di onde coi due precedenti tipi di polarizzazione.

Adesso, notando che i vettori $\vec{k}_i = (0, \sin(\alpha_i), -\cos(\alpha_i))$,

$\vec{k}_r = (0, \sin(\alpha_r), \cos(\alpha_r))$ e $\vec{k}_t = (0, \sin(\alpha_t), -\cos(\alpha_t))$, ed

inibendo del caso (e) assume il comp elettro delle forme $\vec{E} = (E_{\perp}, 0, 0)$ per tutte e tre le onde, e pertanto le due condizioni di continuità sono chiaramente $E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp}$ (ovvero $E_{\text{per}} \parallel \Sigma$) e $\frac{m_1}{\mu_1} (E_{i\perp} - E_{r\perp}) \cos(\theta_i) = \frac{m_2}{\mu_2} E_{t\perp} \cos(\theta_t)$

(ad esempio, $H_{i\perp} = \frac{m_1}{\mu_1 c} \hat{k}_i \times E_{i\perp} = \frac{m_1}{\mu_1 c} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta_i) \\ -\cos(\theta_i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{i\perp} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_1}{\mu_1 c} \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{i\perp} \cos(\theta_i) \\ -E_{i\perp} \sin(\theta_i) \end{pmatrix}$)

Perché (per analogia) $H_{t\perp} = \frac{m_2}{\mu_2 c} \begin{pmatrix} 0 \\ -E_{t\perp} \cos(\theta_t) \\ -E_{t\perp} \sin(\theta_t) \end{pmatrix}$ mentre $H_{r\perp} = \frac{m_2}{\mu_2 c} \begin{pmatrix} 0 \\ E_{r\perp} \cos(\theta_r) \\ -E_{r\perp} \sin(\theta_r) \end{pmatrix}$,

ed ora possiamo ovviamente le stesse componenti (usando $\theta_r = \theta_i$!):

finalmente troviamo che i coefficienti di riflessione e di trasmissione (per polarizzazione normale) sono rispettivamente $\Lambda_{\perp} := \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{(m_1/\mu_1) \cos(\theta_i) - (m_2/\mu_2) \cos(\theta_t)}{(m_1/\mu_1) \cos(\theta_i) + (m_2/\mu_2) \cos(\theta_t)}$

e $t_{\perp} := \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2(m_1/\mu_1) \cos(\theta_i)}{(m_1/\mu_1) \cos(\theta_i) + (m_2/\mu_2) \cos(\theta_t)}$ (infatti, per $\Lambda_{\perp}$,

se $\gamma_1 := m_1/\mu_1$ e $\gamma_2 := m_2/\mu_2$ $\gamma_1 (E_{i\perp} - E_{r\perp}) \cos(\theta_i) = \gamma_2 (E_{i\perp} + E_{r\perp}) \cos(\theta_t)$,

cioè $\gamma_1 (1 - \Lambda_{\perp}) \cos(\theta_i) = \gamma_2 (1 + \Lambda_{\perp}) \cos(\theta_t)$; per $t_{\perp}$,

analogamente, se $\gamma_1 (2E_{i\perp} - E_{t\perp}) \cos(\theta_i) = \gamma_2 E_{t\perp} \cos(\theta_t)$ e $\gamma_1 (2 - t_{\perp}) \cdot \cos(\theta_i) = \gamma_2 t_{\perp} \cos(\theta_t)$),

ed omettendo $\mu_1 \sin \theta_i \sim \mu_2$

$\Lambda_{\perp} = \frac{m_1 \cos(\theta_i) - m_2 \cos(\theta_t)}{m_1 \cos(\theta_i) + m_2 \cos(\theta_t)}$ e $t_{\perp} = \frac{2m_1 \cos(\theta_i)}{m_1 \cos(\theta_i) + m_2 \cos(\theta_t)}$; ora,

ricordando $\frac{\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} \stackrel{\text{Snell}}{=} \frac{m_2}{m_1}$ e cioè che $m_2 = m_1 \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)}$ e

osservando che $\Lambda_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$ e $t_{\perp} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$:

sarebbe "velocità di Fresnel (per polarizzazione normale)"

Omniscio di fatto esprime θ_t in funzione di θ_i (guasi e snell):

$$\cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2(\theta_i)}$$

Proseguendo quindi col cos θ_t , e' ovvio che analogamente le componenti di corrente sono $H_{i||} + H_{r||} = H_{t||}$ e $\frac{\mu_1}{\mu_2} (H_{i||} - H_{r||}) \cos(\theta_i) =$

$$= \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{t||} \cos(\theta_t), \text{ da cui direttamente } A_{||} := \frac{E_{r||}}{E_{i||}} =$$

$$= \frac{(\mu_2/\mu_1) H_{r||}}{(\mu_2/\mu_1) H_{i||}} = \frac{(\mu_1/\mu_2) \cos(\theta_i) - (\mu_2/\mu_1) \cos(\theta_t)}{(\mu_1/\mu_2) \cos(\theta_i) + (\mu_2/\mu_1) \cos(\theta_t)} \text{ e } b_{||} := \frac{E_{t||}}{E_{i||}} (=)$$

$$= \frac{(\mu_2/\mu_1) H_{t||}}{(\mu_2/\mu_1) H_{i||}} = \frac{(\mu_2/\mu_1) \cdot 2(\mu_1/\mu_2) \cos(\theta_i)}{(\mu_1/\mu_2) \cos(\theta_i) + (\mu_2/\mu_1) \cos(\theta_t)} = \frac{2(\mu_2/\mu_1) \cos(\theta_i)}{(\mu_1/\mu_2) \cos(\theta_i) + (\mu_2/\mu_1) \cos(\theta_t)}$$

Quindi per $\mu_1 \approx 1 \approx \mu_2$ $A_{||} = \frac{\cos(\theta_i) \frac{1}{n_2} - \cos(\theta_t) \frac{1}{n_1}}{\cos(\theta_i) \frac{1}{n_2} + \cos(\theta_t) \frac{1}{n_1}}$ e $b_{||} = \frac{\cos(\theta_i) \frac{n_1}{n_2}}{\cos(\theta_i) \frac{1}{n_2} + \cos(\theta_t) \frac{1}{n_1}}$

co. Come le relazioni di Snell per polarizzazione parallela (guasi e

$$\frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} \Rightarrow A_{||} = \frac{\sin(2\theta_i) - \sin(2\theta_t)}{\sin(2\theta_i) + \sin(2\theta_t)} \stackrel{(\text{snell})}{=} \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$\text{e } b_{||} = \frac{2 \cos(\theta_i) \sin(\theta_t)}{\cos(\theta_i) \sin(\theta_t) + \cos(\theta_t) \sin(\theta_i)} = \frac{4 \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)}{\sin(2\theta_i) + \sin(2\theta_t)}$$

Adesso, poiché l'onda e' fissa monocromatica, la sua intensita media

$$\text{e' } I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_o|^2 \text{ (visto!) : Considera } I_i, I_r \text{ e } I_t$$

Quelle che onde, $R := \frac{I_r}{I_i}$ e' "le riflessione" coefficiente e

$T := \frac{I_t}{I_i}$ la sua "trasmissione" (per cui $R + T = 1$);

e' quindi evidente che, ad esempio, la riflessione su superficie normale

se $R_{\perp} = \frac{(E_{\perp})^2}{(E_{i\perp})^2} = \Lambda_{\perp}^2 = \frac{\sin^2(\alpha_i - \alpha_s)}{\sin^2(\alpha_i + \alpha_s)}$, mentre per $\parallel$.

parallela $R_{\parallel} = \Lambda_{\parallel}^2 = \frac{\tan^2(\alpha_i - \alpha_s)}{\tan^2(\alpha_i + \alpha_s)}$, e dunque in generale

$R_{\perp} \neq R_{\parallel}$ ed è proprio per questo conveniente che la luce riflessa
sia polarizzata parzialmente, e avviene in effetti, per α_i
tale per cui $\alpha_i + \alpha_s \approx \pi/2$ ed $R_{\parallel} = 0$ e cioè la luce
riflessa è completamente polarizzata in direzione normale al piano d'incidenza;
tale $\alpha_i = \alpha_s$ è appunto l'angolo di Brewster ("angolo polarizzante");
osservando che, oltre alle superfici che in α_s e α_i richiama, si può
ricorrere ad α_s grazie a quell' α e $\alpha(\alpha) \equiv \sin(\pi/2 - \alpha_s) = \cos(\alpha_s)$,
ottenendo subito $\boxed{\tan(\alpha_s) = \frac{n_2}{n_1}}$.

(Diamo una spiegazione di ciò che avviene momentaneamente a Huygens, ricordando
contemporaneamente che gli atomi del mezzo ②, messi in oscillazione da
E in direzione perpendicolare alla superficie, e loro vibrazioni con
frequenza uguale in tutte le direzioni producono in media effetti in
quella delle loro oscillazioni (come visto per un difetto): ora è tutto così!)

Si ha "Differenza" della luce quando queste incute "forte" causa di
differenza di "piccoli" movimenti e disturbi incoerenti, come è ovvio; ma
allora ciò può essere visto per polarizzare la luce, visto che gli atomi del
mezzo reagiscono e formano un modo d'oscillazione approssimativo tale per cui si ha
l'emissione di luce in tutte le direzioni tranne quella del campo elettrico esterno!

Recette (6 lines) O'nde (do ampere neurale) (dimension 1)

Andon enue ω in egale

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

$$(i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C})$$

$\Rightarrow$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t') e^{i\omega(t-t')}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega = \delta(t-t')$$

$$(F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t-t') dt')$$

ex: $\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x) \right]$

alors $N^2 := \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt =$

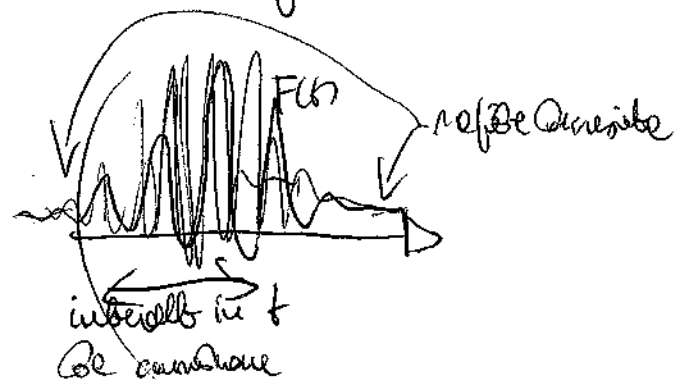
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \overline{G(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(t') e^{-i\omega t'} dt'$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(t'')} e^{i\omega t''} dt'' = \frac{1}{2\pi} \iiint d\omega dt' dt'' F(t') \overline{F(t'')} e^{i\omega(t''-t')} \quad \underline{\underline{1}}$$

$$= \iint dt' dt'' F(t') \overline{F(t'')} \delta(t''-t') = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \overline{F(t')} dt' = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t')|^2 dt'$$

et d'après $\left\{ \begin{aligned} \langle t \rangle &:= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |F(t)|^2 dt, & \Delta t &:= \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |F(t)|^2 dt \right]^{1/2} \\ \langle \omega \rangle &:= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega, & \Delta \omega &:= \frac{1}{N} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |G(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \end{aligned} \right.$



$\langle t \rangle$ est le centre de gravité ;
 Δt mesure le temps moyen de
 réponse ;
 $\Delta \omega$ mesure le temps de la
 fréquence constante F ;

$$\Rightarrow \Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad [\dots]$$

$$\rightarrow \bar{u} := \langle n \rangle$$

pacchetto d'onde = non effettuale (infinito d'onde) (non bene K solo per n con $|n - \bar{n}| < \Delta n$; o $\Delta n \ll \bar{n}$ e $\omega = \omega(n)$, allora

$$\psi(x, t) = \int u(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad , \quad \omega = \bar{\omega} + (n - \bar{n})\bar{\omega}' + O(|n - \bar{n}|)$$

$$\Rightarrow \psi(x, t) \approx \int u(k) e^{i(kx - \bar{\omega} t - (n - \bar{n})\bar{\omega}' t)} dk =$$

$$= e^{-i(\bar{\omega} - \bar{n}\bar{\omega}')t} \underbrace{\int u(k) e^{ik(x - \bar{\omega}' t)} dk}_{= \psi(x - \bar{\omega}' t, 0)} \quad , \quad \text{come si trova}$$

una simple idea ~~non~~ che si muove e velocità $\bar{\omega}' = \left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_{n=\bar{n}}$;

$\omega_g := \frac{\partial \omega}{\partial n}$ e' la velocità di gruppo del pacchetto ; (invece

$$\omega_f = \frac{\omega}{n} \quad \text{per quelle con numero d'onde } K \quad \text{per cui}$$

$$\omega_g = \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial (K \omega_f)}{\partial n} = \omega_f + K \frac{\partial \omega_f}{\partial n} \quad \left(n = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial \lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} \right) \downarrow = \omega_f - \lambda \frac{\partial \omega_f}{\partial \lambda}$$

ALTRI CONTI SUI PACCHETTI D'ONDA :



ci sono N fotoni che $\Delta x = N\lambda$ e $\Delta t = NT$, se ω

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi N}{\Delta x} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi N}{\Delta t} \quad \text{se } \omega$$

$$\boxed{\Delta N = \frac{\Delta k \Delta x}{2\pi}} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\omega}{2\pi} = \nu\right) \quad \boxed{\Delta \nu \Delta t = \Delta N} \quad \text{che rappresenta}$$

un'incertezza; NOTA: se $\nu \Delta t = N$ fotoni wave N , e meglio

$$\Delta \nu = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{per avere l'intervallo } (\nu - \Delta \nu, \nu + \Delta \nu) \quad \text{e frequenza delle}$$

"onde envelope" che ho rappresentato il pacchetto!

Intendo effetto come integrale $\phi(x,t) = \int \tilde{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$, $\ominus$

$\ominus \phi(x,t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ $\text{e } K := k - k_0 \text{ e } \Omega := \omega - \omega_0$ allora

$$\phi(x,t) = \int \tilde{\phi}(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \ominus \int \tilde{\phi}(K) e^{i(Kx - \Omega t)} dK \Rightarrow$$

$$\tilde{\phi}(K) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(x,t) e^{-i(Kx - \Omega t)} dx, \quad \tilde{\phi}(K) e^{-i\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \int \phi(x,t) e^{-iKx} dx$$

per cui introduce $\pi_0 := \int \phi(x,t) dx = 2\pi \tilde{\phi}(0) e^{-i\Omega t}$, e envelope

lo spostamento $\langle x \rangle(t) := \frac{1}{\pi_0} \int x \phi(x,t) dx$, $\ominus$

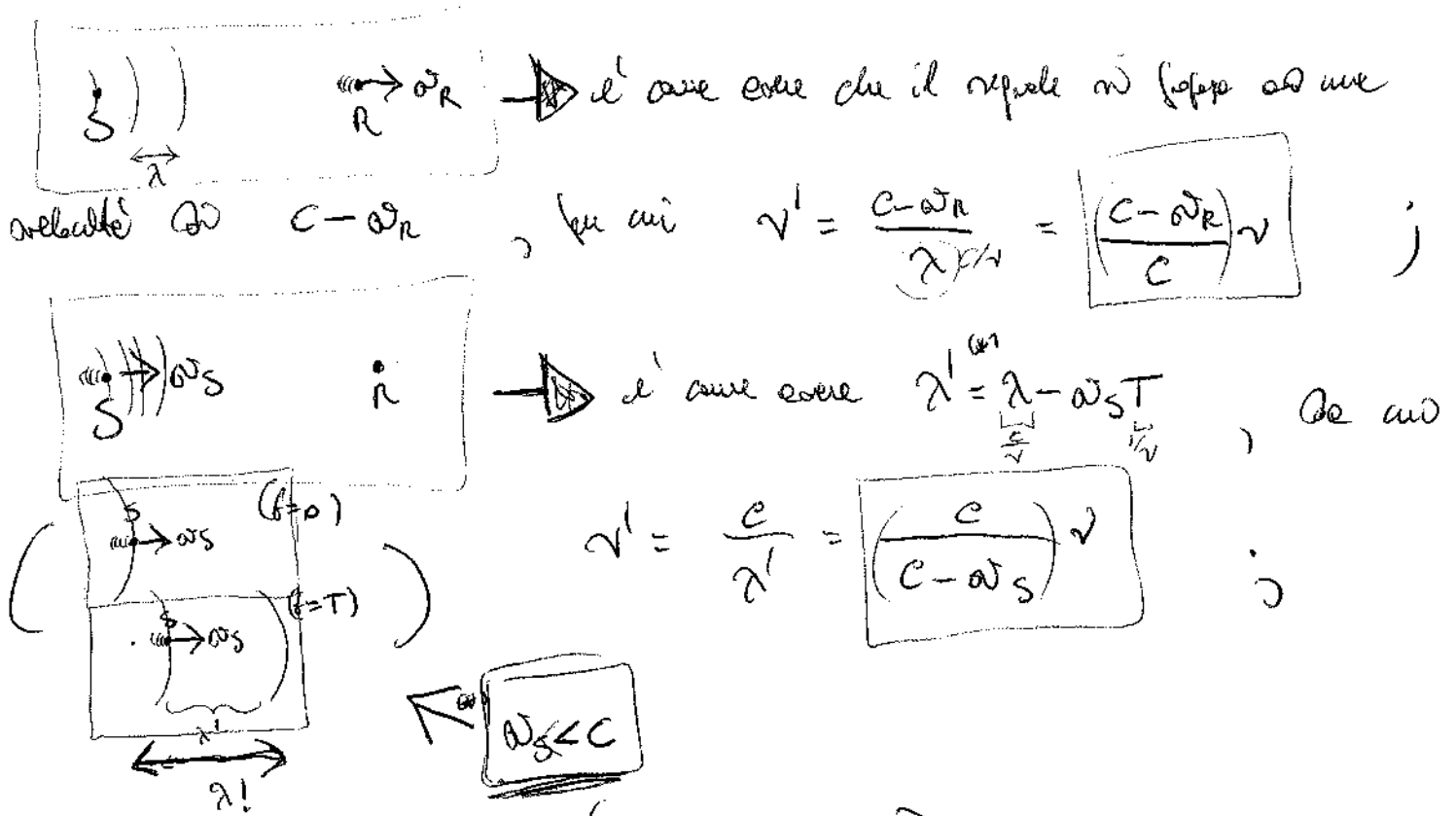
$$\ominus \frac{1}{\pi_0} (2\pi i) \frac{\partial}{\partial K} (\tilde{\phi}(K) e^{-i\Omega t}) \Big|_{K=0} = \frac{i}{\tilde{\phi}(0) e^{-i\Omega t}} \left(e^{-i\Omega t} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial K} \Big|_{K=0} + \right.$$

$$\left. + \tilde{\phi}(0) (-i\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{\partial \Omega}{\partial K} \Big|_{K=0} \right) = \frac{i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial K} \Big|_{K=0}}{\tilde{\phi}(0)} + t \frac{\partial \Omega}{\partial K} \Big|_{K=0} =$$

$\Rightarrow$

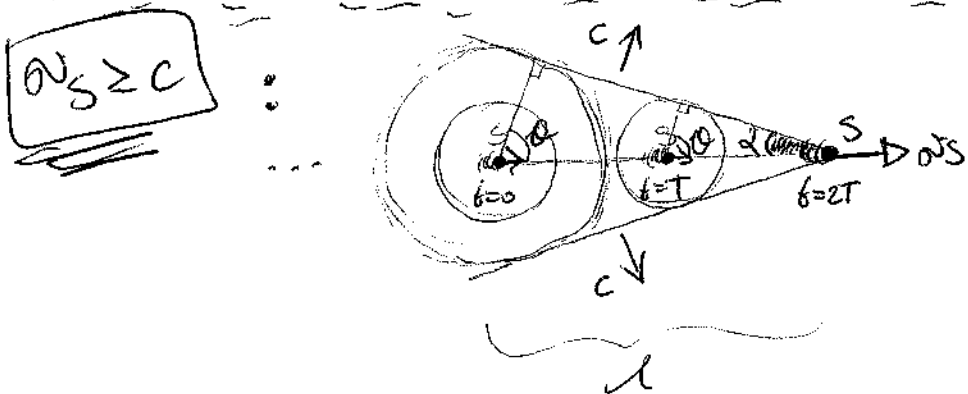
$$=: \mathcal{Q} + t \omega_f \quad \rightarrow \text{Case } \omega_f := \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial K} |_{K=0} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial n} |_{n=n_0} !$$

DOPILNA ČERVENOV : (analýzy i seriové analýzy!)

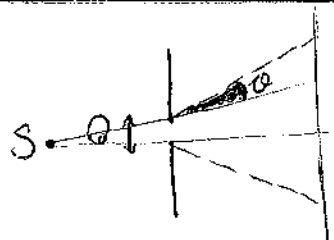


nel caso ci sono entrambi $\left(\begin{smallmatrix} S \\ \alpha \end{smallmatrix} \rightarrow \alpha S \quad \alpha \rightarrow \alpha R \right) \quad \therefore t = \frac{C}{C - \alpha S} \left(\frac{C - \alpha R}{C} (\alpha) \right) =$

$= \boxed{\frac{C - \alpha R}{C - \alpha S} \alpha}$ (basta sostituire C con $C - \alpha R$!.)
(numeratore
ultra facile)



Cono con il tale che, per similitudine, $\frac{l \cos \theta}{c} = \frac{l}{v_s}$, cioè
 $\sin \alpha = \cos \theta = \frac{c}{v_s}$, cioè con $\alpha = \arcsin \frac{c}{v_s}$!



Per le onde lunghe & la DIFFRAZIONE è tale che $\theta \approx \frac{\lambda}{a}$, dunque

$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow 0$; in tal caso possono formare raggi

Onde (tip. raggi luminosi!) : ed esempio, se A

vibraz. $e^i \nabla^2 A = j$ ed è del tipo $f(x, t) = F(x) e^{-i\omega t}$,

allora F deve soddisfare $\nabla^2 F + \omega^2 F = 0$; se invece si è

ottenuto $\omega = \frac{c}{\mu}$, allora $\nabla^2 F + \left(\frac{\omega \mu}{c}\right)^2 F = 0$; se è me

scelte $F(x) \doteq A \cos(kx)$ con $k := \frac{\omega}{c}$, allora $\nabla F =$

$= \nabla A e^{i k x} + i k A \nabla S e^{i k x} \Rightarrow \nabla^2 F = \nabla^2 A e^{i k x} + [i k \nabla A \cdot \nabla S e^{i k x} +$
 $+ i k \nabla A \cdot \nabla S e^{i k x} + i k A \nabla^2 S e^{i k x} - k^2 A |\nabla S|^2 e^{i k x}]$, quindi ho

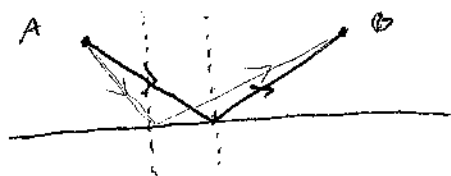
$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A + \frac{i}{\mu} (2 \nabla A \cdot \nabla S + A \nabla^2 S) - A (|\nabla S|^2 - k^2) = 0$;

per $\lambda \rightarrow 0$ ($\mu \rightarrow \infty$) ho $\begin{cases} |\nabla S| = \mu \\ 2 \nabla A \cdot \nabla S + A \nabla^2 S = 0 \end{cases}$; me $\nabla S \stackrel{cl}{=} \nabla S \hat{s} = \mu \hat{s}$

$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{-A \nabla^2 S}{2 \mu}$, cioè rispetto la linea del percorso!

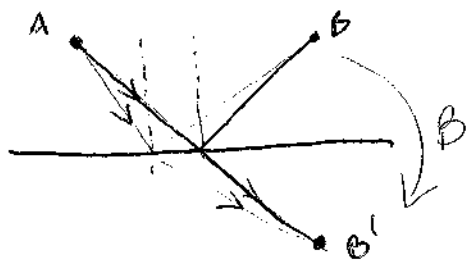
Quando allora FERMAT (la luce sceglie il percorso più corto tra
 punto A e punto B) dimostrò SNELL :

(RIFLESSIONE)

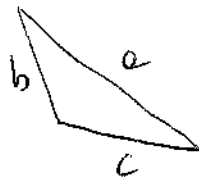


la luce sceglie il percorso più
 corto (v₁ = v₂) perché è

più corto ; ed esempio perché possono essere come



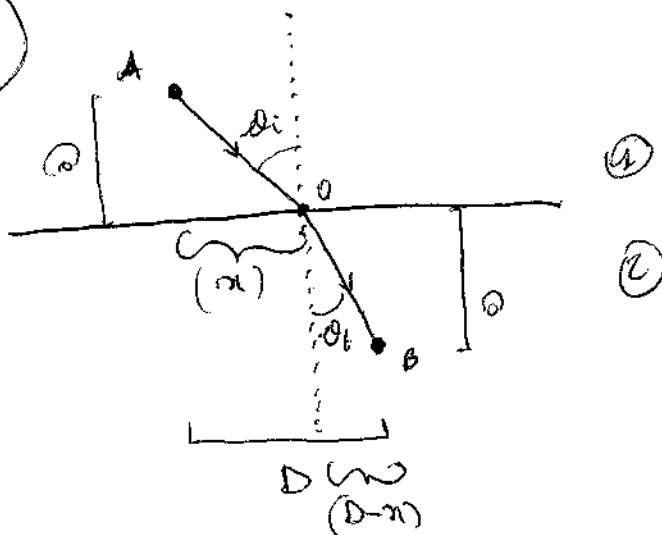
1. ed ora



$$b+c \geq a \quad !$$

(Nota: l'angolo di riflessione
è uguale all'angolo di incidenza
ma non è uguale all'angolo di rifrazione!)

REFRAZIONE

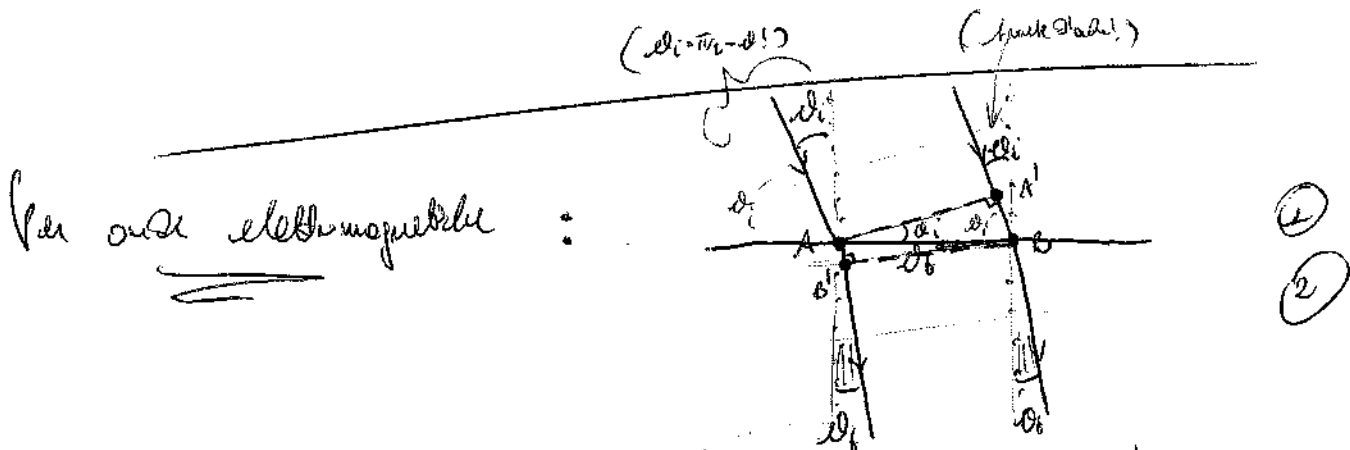


troviamo n tale che ne minimizziamo $t_{AO} + t_{OB} = \frac{\sqrt{D^2 + n^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{D^2 + (D-n)^2}}{v_2} :$

$$\frac{d}{dn} = \frac{n}{v_1 \sqrt{D^2 + n^2}} + \frac{(D-n)}{v_2 \sqrt{D^2 + (D-n)^2}} = 0 \Leftrightarrow n v_2 \sqrt{D^2 + (D-n)^2} =$$

$$= \cancel{v_1} v_1 (D-n) \sqrt{D^2 + n^2}, \text{ cioè } \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n / \sqrt{D^2 + n^2}}{(D-n) / \sqrt{D^2 + (D-n)^2}} =$$

$$= \frac{v_2}{v_1} = \frac{c/v_1}{c/v_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad !$$



Per onde elettromagnetiche :

NATURALE che debba essere $\frac{A'B}{v_1} = \frac{AB'}{v_2}$ (che include la riflessione!), $\left(\begin{cases} A'B = AB \sin \theta_i \\ AB' = AB \sin \theta_r \end{cases} \right),$

Ciò che $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} \quad !$

$\boxed{\rho=0, \quad \vec{J}=0} :$

$$\begin{cases} \text{rot } B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{div } E = 0 = \text{div } B \end{cases}$$

$\rightarrow \text{rot}(\text{rot } E) =$
 $\underbrace{\quad}_{\quad} =$
 $-\frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$= \nabla(\text{div } E) - \nabla^2 E$, cioè $\frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E = 0$ (e lo stesso

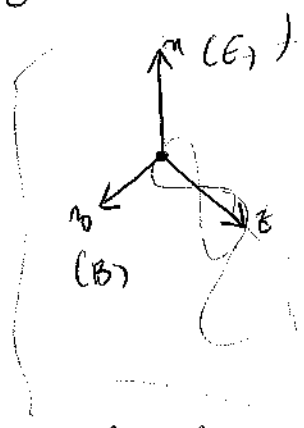
per B) ; quindi $E = |E_0| \hat{n} e^{i(\omega t - kz)}$, $\Rightarrow -\frac{\partial B}{\partial t} =$

$= \text{rot } E = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} |E_0| e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} |E_0| e^{i(\omega t - kz)} \\ 0 \end{pmatrix} = |E_0| \frac{\partial}{\partial z} e^{i(\omega t - kz)} =$

$= -\frac{\partial}{\partial t} (|E_0| \frac{1}{\omega} \frac{k}{\omega} e^{i(\omega t - kz)})$, da cui $B = |E_0| \frac{k}{\omega} \hat{n} e^{i(\omega t - kz)}$

da $\hat{z} \times \hat{n} = \hat{y} \Rightarrow B = \frac{k}{\omega} \hat{z} \times E$, $\Rightarrow$

$\frac{\omega}{k} B \times \hat{z} = (\hat{z} \times E) \times \hat{z} = E$
 $(\hat{z} \cdot E - E \cdot \hat{z}) \hat{z} = 0$



$E \times B = \frac{1}{\omega} E \times (\hat{z} \times E) = \frac{k}{\omega} |E|^2 \hat{z}$; risulta un vettore

costante $k \in \mathbb{R}$ e $\frac{\omega}{k} = c$, da cui riconosciamo

$\begin{cases} E = |E_0| \hat{n} e^{i(\omega t - kz)} \\ B = \frac{|E_0|}{c} \hat{m} e^{i(\omega t - kz)} \end{cases}$

sono due v. tridimensionali (perpendic.) in direzione e verso dell'asse z (ovvio) con $\omega/k = c$,

avendo stessa fase, polarizzazione lineare (E lungo $\hat{n}$ e B lungo $\hat{m}$) , viene (ed qui è, comunque lo stesso valore per $kz =$ costante , che è un fix!) , trovando $(E \cdot \hat{z} = 0 = B \cdot \hat{z} !)$

e solo che $(E, B, \hat{z})$ ne descrivono , come mostrano

$$B = \frac{1}{c} \hat{z} \times E \Leftrightarrow E = c B \times \hat{z} \Leftrightarrow E \times B = \frac{|E|}{c} \hat{z}, = \\ = c |B|^2 \hat{z} = |E| |B| \hat{z} \quad \text{car } |B| = \frac{|E|}{c} !$$

$$\begin{cases} \text{rot } B = \mu_0 J + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{div } E = \rho / \epsilon_0 \\ \text{div } B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{rot}(\text{rot } E) = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} - \nabla^2 E \\ -(\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}) \end{cases} \quad \text{car } \text{rot}(\text{rot } E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} ; \text{ mais}$$

$$\hookrightarrow \text{rot}(\text{rot } B) = -\nabla^2 B, \quad \text{car } \text{rot}(\text{rot } B) = \nabla(\nabla \cdot B) - \nabla^2 B = -\nabla^2 B$$

$$\mu_0 \text{rot } J - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\boxed{J=0, J=\sigma E} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rot } B = \sigma \mu_0 E + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \\ \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \text{div } E = 0 = \text{div } B \end{cases}$$

$$\propto \begin{cases} E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ B = B_0 e^{i(\omega t - kz)} \end{cases} \quad \text{obvious}$$

(p.e. lin., time e space!)

$$\text{div } E = 0 = \text{div } B \Rightarrow E_z = 0 = B_z \quad (\text{check new frequencies!})$$

$$-\frac{\partial B}{\partial t} = \text{rot } E = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{k}{\omega} \hat{z} \times E \right) \Rightarrow B = \frac{k}{\omega} \hat{z} \times E \Rightarrow E \cdot B = 0,$$

et aussi $(E, B, \hat{z})$ est orthogonale! ; inverse, obtenons aussi

$$\text{mais } E = \frac{\omega}{k} B \times \hat{z}, \quad \text{obtiens aussi } \text{rot } B = \sigma \mu_0 E + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma \mu_0}{i\omega} + \mu_0 \epsilon_0 \right) \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow \text{cioè } \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\omega}{\omega \mu_0 \epsilon_0 - i\sigma \mu_0} \text{rot } B \quad \text{(10.1.12.10 A)} \Rightarrow$$

$$= \frac{\omega}{\omega \mu_0 \epsilon_0 - i\sigma \mu_0} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{R}{\omega} \vec{t} \times B \right) \quad \text{De ad}$$

$$E = \frac{R}{\omega \mu_0 \epsilon_0 - i\sigma \mu_0} B \vec{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega}{R} = \frac{k}{\omega \mu_0 \epsilon_0 - i\sigma \mu_0} \quad \text{cioè}$$

$$R^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - i\omega \sigma \mu_0 = \tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{i\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) =:$$

$$=: \tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0 (1 - iD) \quad , \quad D := \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad \left(\overset{\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}}{=} \frac{1}{\omega \tau} \right) ,$$

per cui $R \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$! Dunque $\boxed{R = \beta - i\alpha}$ $\alpha = \frac{\omega}{\beta}$,

e infatti $E = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z} \quad (\Rightarrow$

$\alpha := \frac{1}{2}$ e' numero di attenuazione!) ; NOTA che

~~...~~ $\mu_0 \left(\frac{R}{\omega \mu_0 \epsilon_0 - i\sigma \mu_0} \right) = \frac{R}{\omega \epsilon_0 - i\sigma} \quad \uparrow \quad \frac{\omega \mu_0}{k} =: Z$
 $(\omega \epsilon_0 - i\sigma = \frac{n^2}{\omega \mu_0})$

e' un'impedanza! $\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \text{---} \Rightarrow \left[\frac{\omega \mu_0}{R} \right] = \frac{m}{s} \frac{N}{A} \frac{1}{A} = \left(\frac{N}{C} \right) \frac{1}{A} = \frac{Q}{A}$

CALCOLO R : $\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0 \\ Z\beta = (\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0) D \Rightarrow \beta = \frac{(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0) D}{2\alpha} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0)^2 D^2}{4\alpha^2} - \alpha^2 = \tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0 \quad \text{cioè } \alpha^4 + \tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0 \alpha^2 - \frac{(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0)^2 D^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \left[-(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0) \pm \sqrt{(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0)^2 + (\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0)^2 D^2} \right] =$$

$$(\tilde{\omega} \mu_0 \epsilon_0) \sqrt{1 + D^2}$$

$$= \frac{1}{2} [\omega \epsilon_0 \mu_0 (\sqrt{1+D^2} - 1)] \quad , \text{ de } \omega$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{1+D^2} - 1$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{1+D^2} + 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2 (\epsilon_0 \mu_0) (1+D^2) \quad ,$$

quasi: $R = |K| e^{i \arctan(\frac{D}{P})} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{1+D^2} e^{-i \arctan(\frac{D}{P})} \quad , \text{ de}$

$$\omega Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{1+D^2}} e^{i \arctan(\frac{D}{P})}$$

$D \ll 1$ (buen dielectric) $\rightarrow \beta \approx \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{\beta} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad ; \text{ invell } \sqrt{1+D^2} \approx 1 + \frac{1}{2} D^2 \Rightarrow \alpha \approx \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{2} \frac{D^2}{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\sigma}{2} \quad (\text{invell de } \omega!)$$

$D \gg 1$ (buen conductor) $\rightarrow \alpha \approx \beta \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{\frac{D}{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{\epsilon \omega}{\sigma \mu_0}} \Rightarrow n = \frac{c}{\sigma} = c \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2 \omega}} \quad \text{admisión}$$

all'umentate di ω !! superficie $\sigma_f \neq \sigma$: $\frac{\partial \omega}{\partial \beta} =$

$$= \left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right)^{-1} = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\omega \sigma \mu_0}} \left(\frac{\sigma \mu_0}{2} \right)^{-1/2} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma \mu_0}{2 \omega}} \right]^{-1} = 2 \sigma ! \quad /$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} (=) \frac{\partial \omega}{\partial \theta_1} = \frac{c/\partial \theta_1}{c/\partial \theta_1} = \frac{m_1}{m_2} ; \text{ rif. tot. per } \theta_1 = \pi/2,$$

$$\cos \theta_c = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\left(\omega = \frac{1}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{c}{\tau_{\text{eff}}} = \frac{c}{n} \right)$$

$$\perp \begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ m_1 (E_i - E_r) \cos \theta_i = m_2 E_t \cos \theta_t \end{cases} \Leftrightarrow \eta_{\perp} = \frac{E_{tr}}{E_i} =$$

$$= \frac{m_1 \cos \theta_i - m_2 \cos \theta_t}{m_1 \cos \theta_i + m_2 \cos \theta_t} = \frac{-\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} ; \text{ equivalente}$$

$$\eta_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad \text{con cui} \quad \begin{cases} R_{\perp} = (\eta_{\perp})^2 \\ R_{\parallel} = (\eta_{\parallel})^2 \end{cases} \quad \text{e } R_{\parallel} = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_i = \theta_t \text{ tale che } \theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}, \text{ onde } \cos \theta_t = \sin(\theta_i),$$

$$\text{e m} \quad \tan \theta_t = \frac{m_1}{m_2} !$$

$$w = \frac{1}{2} (D \cdot E + B \cdot H) \Rightarrow E \cdot E^{\sim} , \text{ e allora } I = \frac{(E \cdot E^{\sim}) \cos \theta}{\omega} =$$

$$= \omega E \cdot E^{\sim} \quad \left(\omega E = \frac{1}{\sigma \mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \right) \text{ e le (obene per onde)}$$

$$\text{a) superficie perpendicolare ; } S = \frac{1}{\mu} E \times B \text{ che } |S| \stackrel{!}{=} \frac{1}{\mu} (|E| |B|) =$$

$$= \frac{1}{\mu \omega} |E|^2 = I ! \quad \text{e } E \text{ è sinusoidale } E = E_0 \sin(\omega t),$$

$$\text{allora } I := \langle I \rangle = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle |E|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |E_0|^2 = \langle |S| \rangle.$$

$$\text{Vale } \text{div } S + \frac{\partial w}{\partial t} = -E \cdot j \quad \left(F = \rho(E + \partial \times B) \Rightarrow F \cdot \partial = \right.$$

$$= (\rho \cdot \omega) E = j \cdot E ! \quad \text{perché } \text{div}(E \times B) = B \cdot \text{rot } E - E \cdot \text{rot } B$$

μ , ed esempio, $\frac{1}{\mu} B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial t} B \cdot B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} B \cdot H$.

$p(t) = q|a| \sin \omega t \Rightarrow i(t) = \omega q \cos \omega t$, e $z(t) = |a| \sin \omega t$

$e(t) = -\dot{\omega} z(t) = -\omega^2 |a| \sin \omega t$; campo elettromagnetico: $(\mathbf{r}, \mathbf{e}, \varphi)$

$H_n = H_{\theta} = 0$, $H_{\varphi} = \frac{\omega |a| \sin \vartheta}{4\pi r^2} \left\{ \cos \omega(t-r/c) - \frac{\omega r}{c} \sin \omega(t-r/c) \right\}$;

$E_{\varphi} = 0$, $E_r = \frac{(|a| \cos \vartheta)}{2\pi \epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{\omega r}{c} \cos \omega(t-r/c) + \sin \omega(t-r/c) \right\}$
 $E_{\theta} = \frac{(|a| \sin \vartheta)}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{\omega r}{c} \cos \omega(t-r/c) + \left[1 - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right] \sin \omega(t-r/c) \right\}$;

Se ω il campo θ radiazione per $r \gg \lambda$: fatto zero eccetto per

$H_{\varphi} = \frac{-\omega^2 |a| \sin \vartheta}{4\pi c r} \sin \omega(t-r/c)$, $\cos \vartheta$ (per $\perp$)
 $E_{\theta} = \frac{-\omega^2 (|a| \sin \vartheta)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \sin \omega(t-r/c)$

$|S| = \frac{\omega^4 (|a|^2 \sin^2 \vartheta)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \omega(t-r/c)$ e quindi $\langle S \rangle =$

$= \frac{\omega^4 (|a|^2)}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} =: K \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2}$, $\Rightarrow \langle W \rangle = K \int \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} dS$
 $(=: K)$

$= 2\pi \cdot K \cdot \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3} K$. δ Concentrazione invece col

on q , α ~~potenza~~, dove $|S| = \frac{q^2 |a|^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}$, $\cos$

ai mlti $W = \frac{q^2 \tilde{e}^2}{46 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{8\pi}{3} = \frac{q^2 \tilde{e}^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \quad (\text{LARMOR!})$

$F(x,t)$ scalare tale che $\square F = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \nabla^2 F = 0 \quad \text{E.D.}$

$F(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad : \quad \begin{cases} u := x-ct \\ w := x+ct \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} = 0 !$

$B \neq \text{rot } A_0, \quad E = -\nabla V_0 - \frac{\partial A_0}{\partial t} \quad \text{me seems here ok}$

$\oint A = A_0 - \nabla \phi$, e cos'è una infinita implementata da
 $\oint V = V_0 + \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$\square A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ per far avere $\begin{cases} \square A = \mu_0 j \\ \square V = \rho/\epsilon \end{cases}$

in generale $\square F = \overset{\text{costante}}{\downarrow} \text{E.D.} \quad \text{(KIRCHHOFF)} \quad F(x,t) = \frac{c}{4\pi} \int \frac{f(x', t-|R|/c)}{|R|} \partial V'$

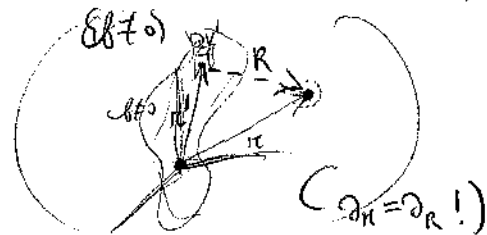
se $R = x - x'$, e lo so che per esempio

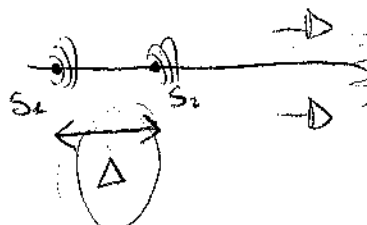
diretta : come problema di valore in

con $\partial V'$ e "molto" altro e π , in questo senso anche che

$|R|/c \approx 0$ e $\nabla_{(R)}^2 \left(\frac{1}{|R|} \right) = -4\pi \delta_3(R)$; allora semplicemente

le funzioni per funzioni RADIALI $\nabla_{(R)}^2 \phi = \frac{1}{|R|} \frac{\partial^2}{\partial |R|^2} (|R| \phi) !$





$$E = |E_0| \left(\underbrace{\sin(kx_1 - \omega t - d_1)}_{=: u} + \underbrace{\sin(k(x_1 - \Delta) - \omega t - d_2)}_{=: v} \right)$$

$$\Rightarrow |E|^2 = |E_0|^2 \left[\sin^2(\dots) + \sin^2(\dots) + 2 \underbrace{\sin u \sin v}_{\text{use}} \right]$$


 (da qui interpreti!)

$$\underbrace{\cos(\omega - \omega) - \cos(\Delta + \omega)}_{\cos(\delta), \text{ se } \delta := k\Delta + d_2 - d_1} \uparrow \text{differenza dei!}$$

media $\langle |E|^2 \rangle = |E_0|^2 [1 + \cos \delta] = 2|E_0|^2 \cos^2(\delta/2)$, de cui

$$I = \left(\frac{\epsilon}{8\pi} \right) \langle |E|^2 \rangle = 4 I_0 \cos^2(\delta/2)$$

$\uparrow$
 (de I_0 di quella di comune)

$\begin{matrix} \nearrow \text{MAX} & 4 \\ \searrow \text{MIN} & 0 \end{matrix}$

$\bullet$
 (in $\mathbb{Z}$)

MAX: $2\pi m = \delta = \underbrace{k\Delta + d_2 - d_1}_{\frac{2\pi}{\lambda}}$, cioè $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} (d_1 - d_2) + \lambda m$;

MIN: $\frac{(2m+1)\pi}{2} = \delta$, cioè $\Delta = \frac{\lambda}{2\pi} (d_1 - d_2) + \lambda \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4} \right)$!

(NOTA: $d_1 = d_2 \Rightarrow I = |E_0|^2$ de cui $I = 2I_0 = I_0 + I_0$!)

Dimensione generale: $\sin(k(x - x_0) \pm \omega t + \varphi)$!

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$= 2\pi \frac{c}{\lambda} = kc, \quad \text{cioè} \quad \frac{\omega}{k} = c, \quad \text{cioè} \quad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$

$$N := N(\Delta t) := \text{numero di onde che passano nel tempo } \Delta t \Rightarrow \frac{c \Delta t}{\lambda} = \nu \Delta t, \quad \text{cioè} \quad \nu = \frac{N}{\Delta t}!$$

$$\left(\sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega t + \varphi) \right)!$$

$$\sin(kx - \omega t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow e \cos(\omega t) + e \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= 2e \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$\uparrow$ (ampiezza envelope)
 $\uparrow$ fase (iniziale)
 $\uparrow$ velocità di oscillazione

$$\text{costante} \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

onde in "opposizione di fase"

(T-funzione) ("serie armonica")

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \varphi_2\right) +$$

$$+ A_3 \cos\left(2\pi \frac{t}{T_3} + \varphi_3\right) + \dots$$

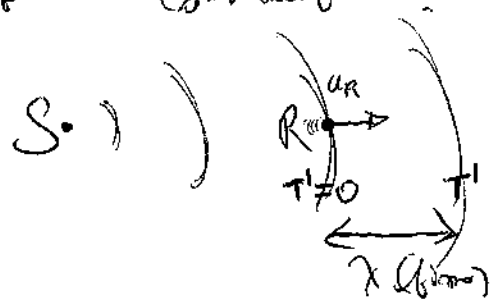
(ANALISI ARMONICA)

$$\left[\forall m \geq 0, \quad m \frac{2\pi}{T} = m\omega = m(2\pi\nu) \quad \Rightarrow \quad m(kc) = m\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) \right]$$

(multiplo di ν) (multiplo di λ)

Effetto Doppler (Suono): se una sorgente S e un ricevitore R sono in moto relativo, allora la frequenza f' ricevuta è diversa da quella f emessa; in particolare $f' < f \Leftrightarrow$ S e R si allontanano, ma valgono ancora formule distinte

I S ferma, R in moto:



$$T'(\omega - u_R) = \lambda, \quad \text{cioè} \quad \lambda = \omega T$$

$$T' = \frac{\omega}{\omega - u_R} T, \quad \text{cioè} \quad \left(f' = \frac{\omega - u_R}{\omega} f \right) \quad (+ u_R \text{ se si allontana})$$

II S in moto, R ferma:



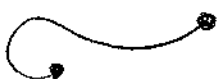
R.

$$\lambda' = \omega T - u_S T = (\omega - u_S) T, \quad \text{cioè} \quad T' = \frac{\omega - u_S}{\omega} T, \quad \text{cioè}$$

$$f' = \frac{\omega}{\omega - u_S} f \quad (+ u_S \text{ se si allontana})$$

(considerare DVE casi successivi!)

F irrotazionale: $\text{rot } F = 0$,
 cioè $F = -\nabla V$, cioè
 "funzione del bordo in $\text{dim } 1$ "



G solenoidale: $\text{div } G = 0$,
 cioè $G = \text{rot } A$, cioè
 "funzione del bordo in $\text{dim } 2$ "



Per cui $\text{div}(\text{rot } B) = 0$ (ovvero), con $\text{rot } B = \mu_0 (\vec{J}_c + \vec{J}_s)$, si ha
 $\text{div } \vec{J}_s = -\text{div } \vec{J}_c \stackrel{(\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{J = E \cdot \text{div } \epsilon}{=} \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$, da cui
 si deduce anzitutto che $\vec{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$!

$$\vec{J}_c = \sigma E \quad (R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}) \quad , \quad \vec{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad ;$$

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t}(t) = i\omega E(t) \quad , \quad \Rightarrow \frac{|\vec{J}_s|}{|\vec{J}_c|} =$$

$$= \frac{\epsilon_0 \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|}{\sigma |E|} = \boxed{\frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma}} \quad , \quad \text{che per buona conduttività è}$$

$$\ll 1 \quad (\text{cioè } \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \gg 1 \text{ !})$$

Dimostrare $B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow \dots$ in senso orario :

$B_0 \equiv B$ iniziale che genera E_0 (Finale), mentre genera $\vec{J}_c \gg \vec{J}_s$:

$$\begin{cases} \text{rot } B_0 = \mu_0 \vec{J} \\ \text{div } B_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{div } E_0 = 0 \\ \text{rot } E_0 = -\frac{\partial B_0}{\partial t} \end{cases} ; \text{ dove } E_0 \text{ genera } B_1 \text{ come}$$

$$\text{in totale } B_0 + B_1 \text{ tale che } \begin{cases} \text{div}(B_0 + B_1) = 0 \\ \text{rot}(B_0 + B_1) = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_0}{\partial t} \end{cases}$$

$$\text{cioè } \text{rot } B_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_0}{\partial t} \quad , \quad \text{e così via} ; \quad \text{se } I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

l'effetto che l'induttore L !! , dove $\text{rot } B_0 = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow$

$$\oint_{\gamma} B_0 \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad , \quad \text{con } |B_0| \approx \frac{\mu_0 I}{L} \quad ; \quad \text{evidentemente}$$

$$\text{rot } E_0 = -\frac{\partial B_0}{\partial t} \Leftrightarrow |E_0| L \approx -\frac{\partial}{\partial t} |B_0| L^2 \propto \omega |B_0| L^2$$

ovvero $|E_0| \approx \omega |B_0| L = \left(\frac{\omega L}{c}\right) |B_0| c$, e infine

$$|B_0| L \approx \frac{1}{c} \frac{\partial |B_0|}{\partial t} L^2, \text{ ovvero } |B_0| \approx \frac{1}{c} \omega L |E_0| = \frac{\omega L}{c} \frac{|E_0|}{c} \approx$$

$$\approx \left(\frac{\omega L}{c}\right) \left(\frac{\omega L}{c}\right) |B_0| \quad : \quad \text{in generale è } |B_m| = \left(\frac{\omega L}{c}\right)^m |B_0|$$

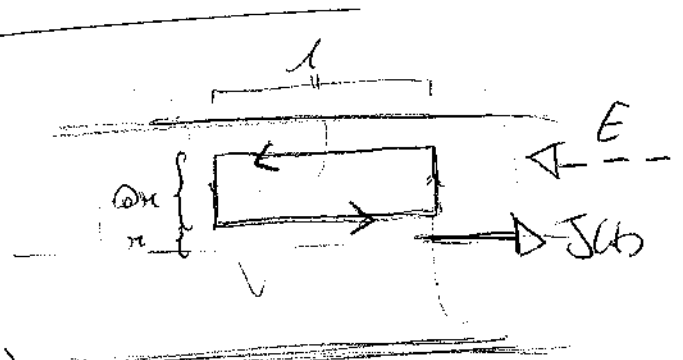
($m \geq 0$ intero), per cui si ha convergenza se e solo se $\frac{\omega L}{c} < 1$,

ossia $\frac{\omega L}{c} \ll 1$: $\frac{\omega L}{c} = 2\pi \frac{L/c}{T} \ll 1$ significa che

il tempo impiegato dalla luce per attraversare l'elemento deve essere $\ll$ del tempo in cui nell'elemento cambia qualcosa! Le cariche devono essere (relativamente) "lento variabili", ovvero

$$\frac{dJ}{dt} \approx 0, \text{ ovvero } \frac{d^2 \phi}{dt^2} \approx 0$$

Effetto pelle : J corre lungo B



crescente, che genera E decrescente

(che, opponendosi al cambiamento, è diretto in senso opposto a B)

con $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ e quindi circolazione negativa : $-|E(0)|l + |E(l+h)|l < 0$, cioè $|E(l+h)| < |E(0)|$; questo E

indica che il massimo al centro del filo e minimo ai suoi bordi, ovvero solo il valore per quello punto di J , e anche per J stesso : le cariche si concentrano sui bordi del filo!

Se ora $E = \vec{\sigma} J$ con σ lentamente variabile, per cui

$$\text{rot } \vec{B} \approx \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{allora } \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

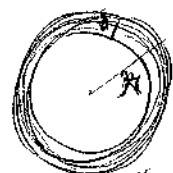
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \text{ omie } \nabla^2 \vec{J} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} =$$

$$(\text{sk} = \delta \cdot \omega)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \stackrel{\downarrow}{=} i \left(\frac{\sigma \omega}{\epsilon_0 c^2} \right) \vec{J} : \delta := \left(\frac{\sigma \omega}{\epsilon_0 c^2} \right)^{-1/2} \text{ e' l'indice di}$$

$$\text{frequenza di Debye o di rilassamento } \delta! \quad \left(\delta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 c^2}{\sigma \omega}} \right)$$



$$\left[\left(\frac{\sigma \omega}{\epsilon_0 c^2} \right) \right] = \frac{1}{\Omega m} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{N m^2}{C^2} \cdot \frac{C^2}{m^2} = \frac{1}{V} \frac{N}{m} \frac{1}{C^2} = \frac{1}{V} \frac{N m}{C^2} \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2} \left[\frac{1}{m} \right]$$

$$\omega \text{ in una espansione del tipo } e^{-\frac{(1-i)\omega}{\delta}} ! \text{ La condizione reale e'}$$

$$\text{Quindi } R \ll \delta, \text{ allora nella resistenza } R : R = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta} \propto$$

$$\frac{1}{\sigma} \propto \sqrt{\frac{\sigma \omega}{\epsilon_0 c^2}}, \text{ quindi } R \propto \sqrt{\omega} \text{ e } R \propto \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \text{ (nel caso contrario)}$$

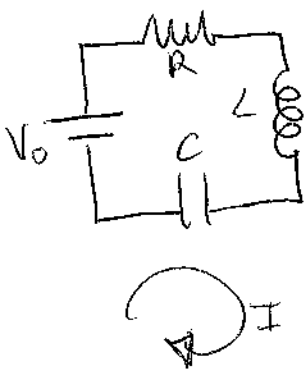
$$R \propto \frac{1}{\sigma} ! \text{) , } \text{ per i bassi angoli le curve si ridistribuiscono quasi}$$

$$\text{allora } : 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} \vec{J} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} f, \text{ cosi' } \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} f,$$

$$\text{cosi' } f(t) = f_0 e^{-t/\tau} \text{ con } \tau := \frac{\epsilon}{\sigma} !$$

Ogni campo vettoriale $\vec{F}$ irrotazionale all'infinito puo' essere scritto come
somma di un campo irrotazionale e di un campo solenoidale ;
(Coursier)

$$\vec{F} = \vec{F}_L + \vec{F}_T \text{ con } \int \text{rot } \vec{F}_L = 0 \text{ (ma non solenoidale)} \\ \int \text{div } \vec{F}_T = 0 \text{ (ma non irrotazionale)}$$



KIRCHHOFF : $V_0 = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C}$

(POTENZA : $V_0 I = RI^2 + \underbrace{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} L I^2)}_{L I \dot{I}} + \underbrace{\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C})}_{\frac{Q}{C} \dot{Q} = \frac{Q}{C} I}$)

ce qui donne l'eq. !)

→ $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = 0$, on se $I(t) = A e^{\gamma_1 t} + B e^{\gamma_2 t}$ car

A, B se déterminent en deux conditions initiales de γ_1, γ_2 le (polynômes)

que nous (in C) on $L\gamma^2 + R\gamma + \frac{1}{C} = 0$:

(•) $0 = I(0) \Rightarrow B = -A$, et inoltre $V_0 (=) V_L(0) = L\dot{I}(0) = L A (\gamma_1 - \gamma_2)$, cioè $A = \frac{V_0}{L(\gamma_1 - \gamma_2)}$ (effettivamente in ampere)

e quindi $I(t) = A (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}) = \frac{V_0}{L(\gamma_1 - \gamma_2)} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t})$

(•) $\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}$

Alcune le discriminante è nel segno di $1 - \frac{4L}{R^2 C}$:

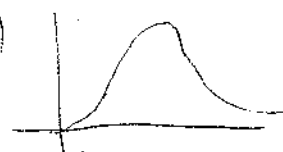
$\boxed{L/R < RC/4}$: $\gamma_{1,2}$ reali negative ;

$L/R \ll RC/4 \Rightarrow \gamma_{1,2} \approx -\frac{R}{2L} \pm \frac{R}{2L} \left(1 - \frac{2L}{R^2 C}\right)$
 $\nearrow \gamma_{10} \approx -\frac{R}{2L} \frac{2L}{R^2 C} = -\frac{1}{RC}$
 $\searrow \gamma_{20} \approx -\frac{R}{2L} + \frac{1}{RC} \approx -\frac{R}{2L}$

$\boxed{L/R > RC/4}$: $\gamma_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i \underbrace{\frac{R}{2L} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}}_{=\omega_0} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega_0$ complexe

conjugate (per cui $\gamma_1 - \gamma_2 = 2i\omega_0$)

$\left(\frac{R^2 C}{L/R} \right)$



$$I(t) = \frac{V_0}{L(2i\omega_0)} e^{-\frac{R}{2L}t} \left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} \right) = \frac{V_0}{L\omega_0} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_0 t) ;$$

notions de $L/R \gg RC/4 \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{R}{2L} \frac{2\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} !$

$\boxed{L/R = RC/4} : \gamma_1 = \gamma_2 = -\frac{R}{2L} \quad \underline{MA} \quad \text{le solution } I(t) \text{ est}$

de la forme $I(t) = (A + Bt) e^{-\frac{R}{2L}t} ; 0 = I(0) = A$, et

par $V_0 = V_L(0) = L \dot{I}(0) = L \frac{d}{dt} (Bt e^{-\frac{R}{2L}t}) \Big|_{t=0} = LB$, on a

$B = \frac{V_0}{L}$ et on conclut $I(t) = \frac{V_0}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$. ✓

$$X := \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} = \frac{RC}{C} \left(\omega RC - \frac{1}{\omega RC} \right) =$$

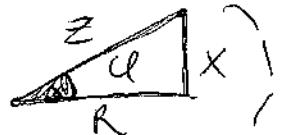
$$= \frac{RC}{C} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) , \Rightarrow \tan \phi = \frac{X}{R} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \text{ et}$$

$$\left\| Q := \frac{RC}{RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{\omega_0 L}{R} \right\| ; \text{ inverse}$$

$\left(= \frac{1}{RC\omega_0} \right)$

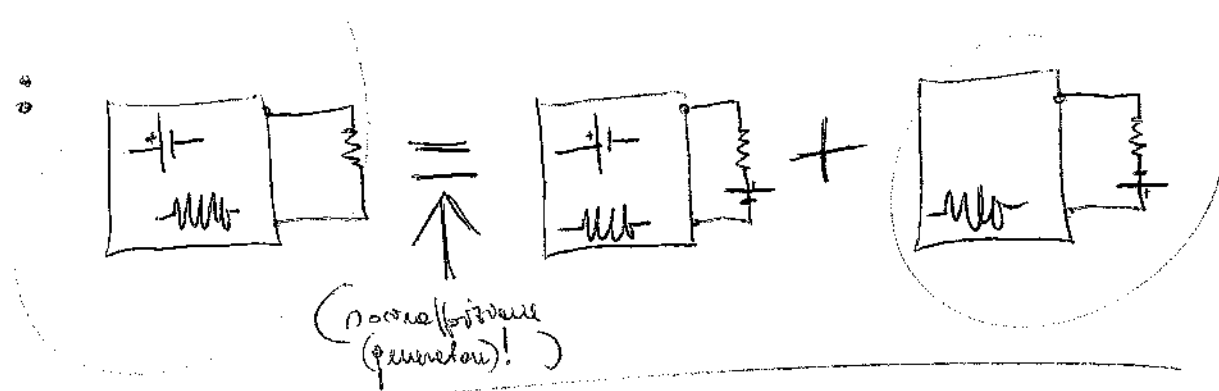
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R \sqrt{1 + (X/R)^2} = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$\left(\vec{Z} = Z e^{i\phi} , Z = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ et } \phi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) : \right.$



Un oscillateur (exemple ci-dessus) de la courbe , on a de la courbe , de la l'oscillation amortie! Aléatoire!

THEVENIN



$$i_{tot} = i + i_f + i_m, \quad j_{tot} = j + j_f \quad (i, j \text{ sorgenti!})$$

$$\text{con } j_f = -\omega \sin P, \quad \hat{i} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{e} \quad i_m = \text{rot } H$$

Diagram illustrating the phasor representation of a sinusoidal current $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ and its complex representation $\tilde{i} = I_m e^{j\omega t}$.

The complex representation is shown as $\tilde{i} = I_m e^{j\omega t}$, which can be written as $\tilde{i} = I_m \cos(\omega t + \pi/2)$ (capacitive) or $\tilde{i} = I_m \sin(\omega t)$ (inductive).

The diagram also shows the relationship between the complex representation and the real representation:

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \left(\frac{-j}{\omega}\right) e^{j\omega t}$$

and

$$\frac{e^{j\omega t}}{\omega} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

The diagram also shows the relationship between the complex representation and the real representation:

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \left(\frac{-j}{\omega}\right) e^{j\omega t}$$

and

$$\frac{e^{j\omega t}}{\omega} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

The diagram also shows the relationship between the complex representation and the real representation:

$$\frac{e^{j\omega t}}{j\omega} = \left(\frac{-j}{\omega}\right) e^{j\omega t}$$

and

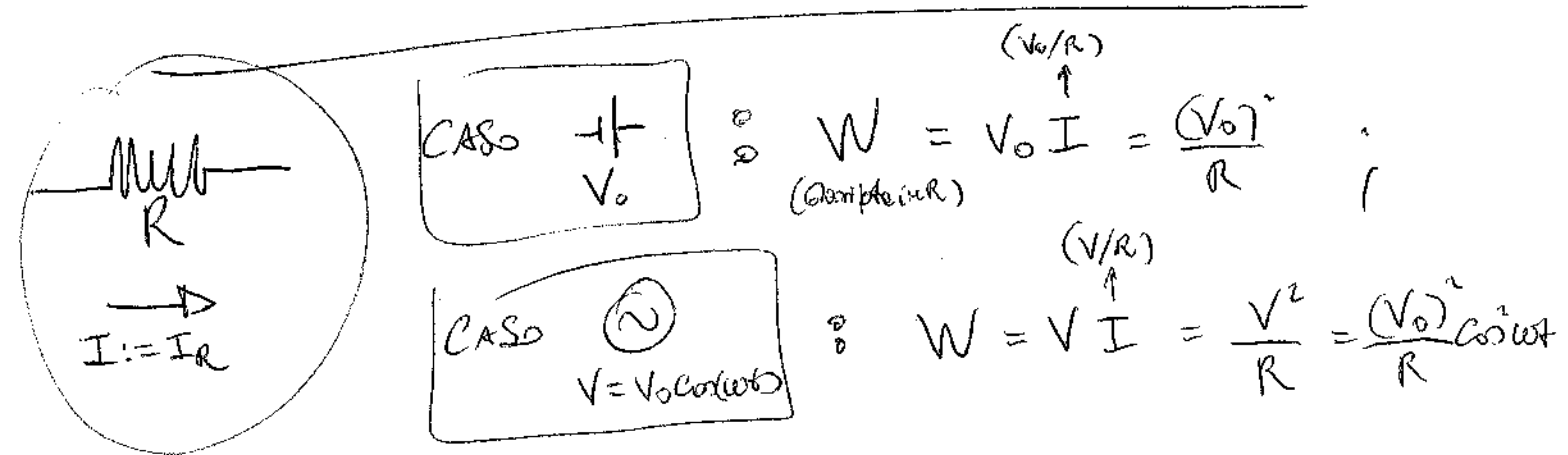
$$\frac{e^{j\omega t}}{\omega} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

Se in futuro abbiamo una Q.Q.F. $V = V_0 \cos \omega t$ o $\cos \omega t$ di un elemento R, L o C , allora le corrente (alt.) I che ord
 nome e' : $[R] : I = \frac{V}{R} = \left(\frac{V_0}{R}\right) \cos \omega t$; $[L] : I =$
 $= \frac{V}{L} \Rightarrow I = \frac{1}{L} \int V = \left(\frac{V_0}{L\omega}\right) \cos(\omega t - \pi/2)$ (ritardo!) ; $[C] : Q = C V$
 $I = C \dot{V} = (\omega C V_0) \cos(\omega t + \pi/2)$ (anticipo!)

Condizione ideale per un elemento di circuito: nessuna
condotta di corrente! Questo $Z_R = R = 0$, $Z_L = X_L = i\omega L =$
 $= 0$ ($\omega \rightarrow 0$) e $Z_C = X_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C} = 0$ ($\omega \rightarrow \infty$)
 Z e' tale che in serie si somma e in parallelo si sommano i reciproci
 (per avere il reciproco), visto che C e' capacitance, e inoltre
 e' sempre $V = ZI$: $V = RI$ f; ~~$V = V_0 e^{i\omega t}$~~
 $I = \frac{1}{Z} V \Leftrightarrow I = \frac{1}{Z} V = \frac{-i}{\omega L} V$, ossia $(i\omega L)I = V$ f;
 $Q = CV \Leftrightarrow I = C\dot{V} = i\omega C V$, ossia $\frac{1}{i\omega C} I = V$ f

Velocità : $\gamma(c, \omega)$; potenziale : $(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla_{\vec{r}})$;
 $i^{\mu} := \int_0^{\omega} = \int_0^{\omega} \gamma(c, \omega) = (f^c, i)$, che av
 $\frac{\partial i^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$ (conservato) ; $A^{\mu} := (\frac{V}{c}, A) \Rightarrow \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0$
 (Lorentz) , e non ~~potenziale~~ $\square A^{\mu} = f_{\mu} i^{\nu}$ (potenziale relativistico!) ;
 ($c^2 \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0}$)
 $\left(\begin{matrix} n^{\mu} \\ \text{funzione di } \omega \text{ e } t \end{matrix} \right) \Rightarrow \gamma x + \beta t = \gamma (x - \omega t)$; $n = \gamma n' + \beta t' = \gamma (n' + \omega t')$, che
 cui $t' = \gamma \left[t - \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{1}{\gamma \gamma'} \right) x \right]$, e potenziale $c^2 t'^2 - n'^2 \stackrel{(II)}{=} 0$
 $= c^2 t'^2 - n'^2$ allora $\gamma' = \gamma := (1 - \beta^2)^{-1/2}$ con $\beta := \omega/c$, che
 cui $t' = \gamma \left(t - \frac{\omega x}{c^2} \right)$!

Allora con riferimento in $\mathcal{P}$: $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ me anche $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$,
 che fatto però concludo in I_0 infinitesimo $I_0 = \frac{V_0}{Z}$ con
 $Z = Z e^{i\varphi}$, per cui $\hat{I} = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t} = \frac{V_0}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)}$! ($\hat{V} = Z \hat{I}$)

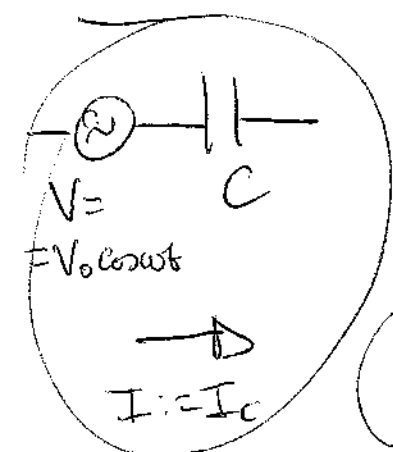


$\Rightarrow \langle W \rangle = \langle W_{\text{m}} \rangle = \frac{(V_0)^2}{2R}$; anche $V_{\text{rms}} = V_{\text{eff}} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} =$

$= \frac{V_0}{\sqrt{2}}$, e' dunque sempre $\langle W_{\text{eff}} \rangle = \frac{(V_{\text{rms}})^2}{R}$!

Anche per $I = V/R$, banalmente segue $I_{\text{rms}} = V_{\text{rms}}/R$ e
 quindi $\langle W_{\text{eff}} \rangle = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$.

(NOTA : $V = V_0 e^{i\omega t} \Rightarrow (V_{\text{rms}} \sqrt{2}) e^{i\omega t}$)



$W_{\text{tot}} = V I = (V_0 \cos \omega t) (-\omega V_0 \sin \omega t) =$
 $= -\omega C \frac{(V_0)^2}{2} \sin(2\omega t) \Rightarrow \langle W \rangle = 0!$

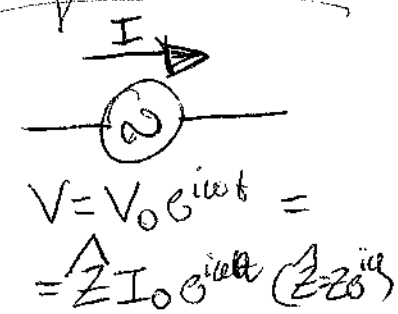
$Q = CV$
 $\Rightarrow I = C \dot{V}$

(NOTARE che in effetti energia immag. = $\frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C (V_0)^2 \cos^2 \omega t \Rightarrow \int_0^T W dt$)

$\alpha := a + ib, \beta := c + id$ (complexi) $\Rightarrow \alpha \cdot \beta = (a+ib)(c+id) =$
 $= (ac - bd) + i(ad + bc)$, in particolare $\text{Re}(\alpha \cdot \beta) =$

$= \text{Re}(\alpha) \text{Re}(\beta) - \text{Im}(\alpha) \text{Im}(\beta)$, per cui $\text{Re}(\alpha \cdot \beta) = \text{Re}(\alpha) \text{Re}(\beta)$

~~Il~~ almeno uno fra α e β è reale, che in generale NON è
 il caso; per esempio con $\begin{cases} I = I_0 \cos \omega t \\ V = V_0 \sin \omega t \end{cases}$



per cui $\text{Re}(W) = I \cdot \text{Re}(V)$; ma

$\text{Re}(V) = \text{Re}(Z I_0 \sin \omega t) = I_0 [\underbrace{\text{Re}(Z)}_{Z \cos \varphi} \underbrace{\text{Re}(\sin \omega t)}_{\cos \omega t} - \underbrace{\text{Im}(Z)}_{Z \sin \varphi} \underbrace{\text{Im}(\sin \omega t)}_{\sin \omega t}] =$

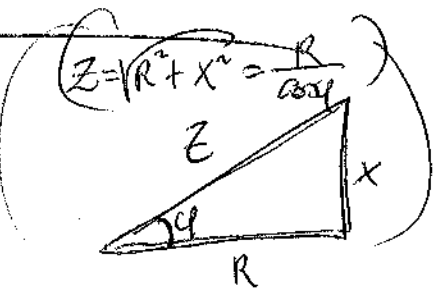
$= Z I_0 [\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi]$, da cui $\text{Re}(W) =$

$= Z (I_0)^2 [\cos^2 \omega t \cos \varphi - \sin^2 \omega t \sin \varphi]$, che per cui è

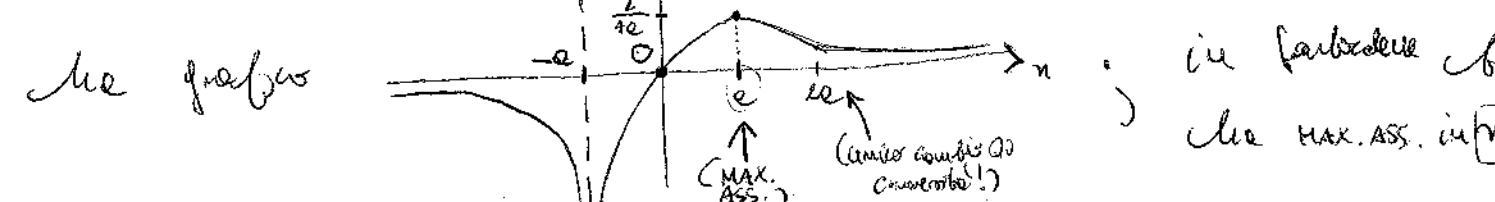
W : allora $\langle W \rangle = \frac{1}{2} Z (I_0)^2 \cos \varphi = Z (I_{RMS})^2 \cos \varphi =$

$= V_{RMS} I_{RMS} \cos \varphi$; meglio me $\cos \varphi \approx 1 \dots$
 $(\varphi = \arctan(\frac{X}{R}))$

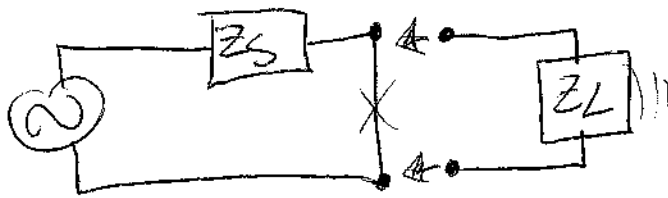
$(I_0 = \frac{V_0}{Z})$
 $\frac{1}{2} (I_0)^2 \frac{Z \cos \varphi}{R} = \frac{1}{2} R \frac{(V_0)^2}{(R^2 + X^2)}$;



e proporzionale, è facile vedere che $f(x) = \frac{n}{(x+n)^2}$ con $x > 0$



APPLICAZIONE



Z_L "obiettivo"

per avere W_L massimo possibile e' $Z_L = \overline{Z_S}$: infatti

$$\hat{Z}_L := R_L + iX_L \text{ e } \hat{Z}_S := R_S + iX_S \Rightarrow \langle W_L \rangle = \frac{1}{2} (I_0)^2 \hat{Z}_L \cos \varphi =$$

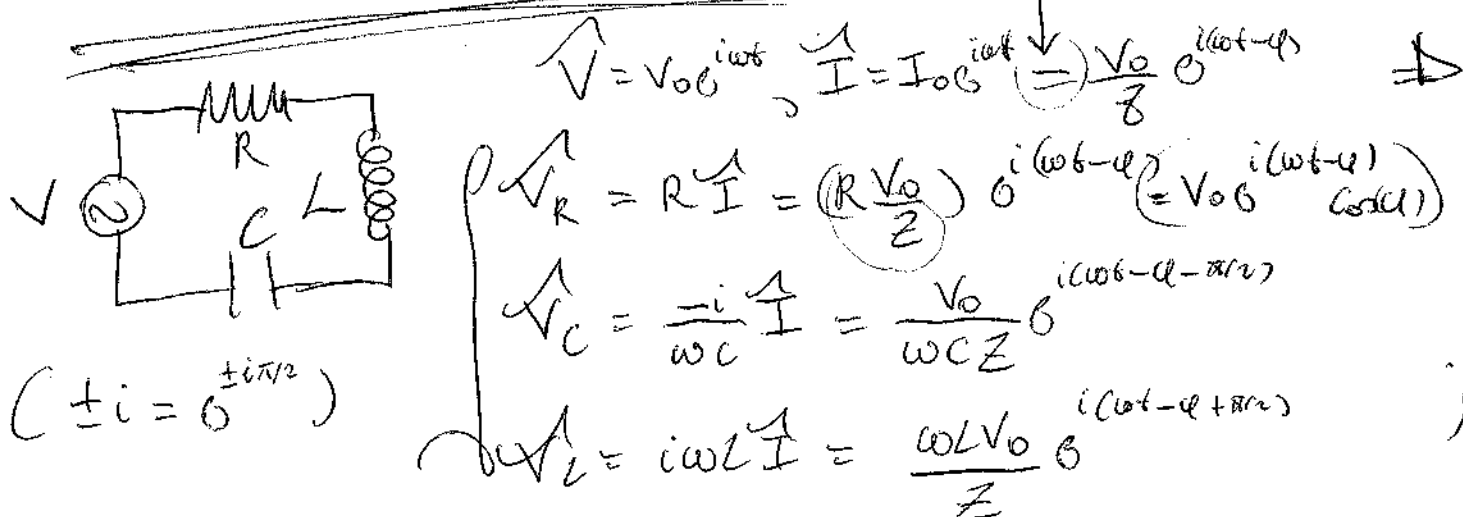
$(I_0 = \frac{V_0}{|\hat{Z}|}, \hat{Z} = \hat{Z}_S + \hat{Z}_L)$

$$= \frac{1}{2} (V_0)^2 \frac{R_L}{(R_L + R_S)^2 + (X_L + X_S)^2} \text{ e' (obiettivo) massimo per } X_L = -X_S$$

e (quando) $R_L = R_S$. (NOTA : metà energia in Z_S e metà in Z_L !)

Infatti no che (in media) $\frac{1}{2} \frac{(V_0)^2}{2R_S}$, perché $(R_S + iX_S) + (R_S - iX_S) = 2R_S$, e effetto $\langle W_L \rangle|_{X_L = -X_S} = \frac{1}{2} (V_0)^2 \frac{1}{4R_S} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{(V_0)^2}{2R_S} \right) !$$



in funzione	Z	$ \hat{V}_C = \frac{V_0}{\omega C Z}$
$\omega \rightarrow 0$	$\approx \frac{1}{\omega C}$	$\approx V_0$
$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$= R$	$= V_0 \frac{1}{\omega_0 C R} = V_0 \frac{1}{R} = Q V_0$
$\omega \rightarrow \infty$	$\approx \omega L$	≈ 0

$Q \gg 1 \Rightarrow Q^2 = \frac{L}{CR^2} \gg 1$ (since $L/R \gg RC$) implica

che $Q V_0$, per max emulazione, è quantitativo per

$|V_c|$: $\frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{-1}{\omega^2 (R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \left[\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} + \right.$
 $\left. + \cancel{\omega} \frac{1}{\cancel{2} \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cdot \underbrace{(\omega L - \frac{1}{\omega C})(\omega L + \frac{1}{\omega C})}_{\omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right] = 0 \Leftrightarrow$

$0 = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + \omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2} = R^2 - \frac{2L}{C} + 2\omega^2 L^2$ così

$\omega^2 = \frac{1}{2L} - \frac{R^2}{2L^2} = \frac{1}{2L} \left(1 - \frac{R^2 C}{2L} \right)$, che è $\approx \frac{1}{LC}$ e

effettivo $Q^2 \gg 1$, facile $\frac{R^2 C}{L} \ll 1$!

Ona : $W_R = \overset{\text{valore medio}}{\downarrow} V_R \cdot I = (V_0 \cos \varphi \cos(\omega t - \varphi)) \left(\frac{V_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi) \right) =$

$= \frac{(V_0)^2}{Z} \cos^2(\omega t - \varphi) \Rightarrow \langle W_R \rangle = \frac{(V_0)^2}{2R} \cos^2(\varphi)$; me
 (così facile
 $Z = \frac{R}{\cos \varphi}$)

$\cos^2 \varphi = \frac{R^2}{Z^2} = \frac{R^2}{R^2 + X^2} = \frac{1}{1 + (X/R)^2}$: per $\omega \approx \omega_0$,

uso $X(\omega) \approx X(\omega_0) + (\omega - \omega_0) X'(\omega_0)$ con $X'(\omega_0) = \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega L - \frac{1}{\omega C}) =$

$= L + \frac{1}{\omega^2 C} \Rightarrow X'(\omega_0) = 2L$, altrimenti $X(\omega) \approx (\omega - \omega_0) 2L$

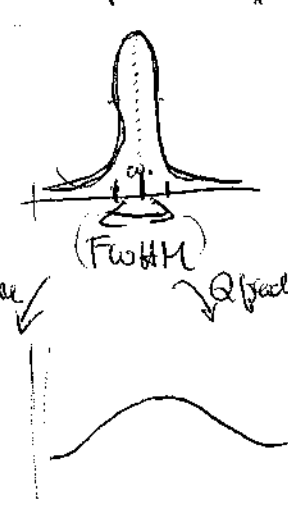
e quindi $\langle W_R \rangle \approx \frac{(V_0)^2}{2R} \frac{1}{1 + \frac{4L^2}{R^2} (\omega - \omega_0)^2}$; in particolare

per $\omega^* := \omega_0 \pm \frac{R}{2L}$, ne fa' un esempio $L/R \gg RC$ e così
 (R/L piccolo)

$Q \gg 1$, $\langle W_R \rangle(\omega^*) \cong \frac{1}{2} \langle W_R \rangle(\omega_0)$ e' automaticamente effettibile:

Definiamo $F_{WHM} = R/L$, per cui $\frac{F_{WHM}}{\omega_0} =$

$$= \frac{R}{L} \sqrt{LC} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$$



inoltre $\omega L - \frac{1}{\omega C} \Big|_{\omega=\omega^*} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \Big|_{\omega=\omega^*} =$

$$= \frac{(\omega_0 \pm R/2L)^2 LC - 1}{(\omega_0 \pm R/2L) C} = \frac{(\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2} \pm \omega_0 R/L) LC - 1}{\omega_0 C \pm RC/2L} =$$

$$= \frac{R^2 C/4L \pm \omega_0 RC}{\omega_0 C \pm RC/2L} = R \frac{\pm \omega_0 C + RC/4L}{\omega_0 C \pm RC/2L} \approx \pm R$$

Sappiamo in queste approssimazioni $\omega \cong \omega_0$ (con $\frac{R}{L}$ "piccolo")

$X(\omega) \cong iL(\omega - \omega_0) \Rightarrow \cancel{Z} \cong R + i2L(\omega - \omega_0) =$

$= R [1 + i \frac{4\omega_0 L}{R} (\omega - \omega_0)] = R [1 + 2iQ \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}]$, e in effetti

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \cong \pm \frac{R}{2L\omega_0} = \pm \frac{1}{2Q}$$

Altrove interferenza di Q : $\langle W_R \rangle(\omega_0) = \frac{(V_0)^2}{2R}$, dunque nel tempo $\frac{1}{\omega_0}$ in tempo energia $\frac{(V_0)^2}{2R\omega_0}$; quella immagazzinata e' invece

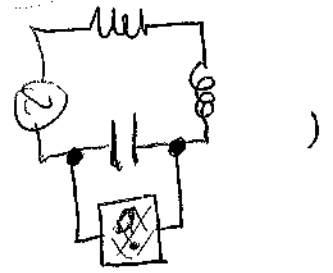
$$\frac{1}{2} C (V_C)^2 + \frac{1}{2} L I^2 \stackrel{(max)}{=} \frac{1}{2} \frac{(V_0)^2}{\omega^2 C^2} \cos^2(\omega t - \varphi - \pi/2) + \frac{1}{2} L \frac{(V_0)^2}{Z^2} \cos^2(\omega t - \varphi)$$

$\stackrel{\omega=\omega_0}{=} \frac{1}{2} \frac{(V_0)^2 L}{R^2} (= \frac{1}{2} L (I_0)^2)$, da cui il rapporto $\frac{en. imm.}{en. sm.} \stackrel{(caso risonanza)}{=} =$

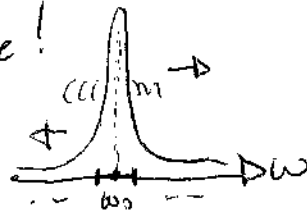
$$= \frac{L\omega_0}{R} = Q!$$

Ma cosa si "qualifica" $Q \gg 1$, funzione di trasferimento
(compito per esempio)

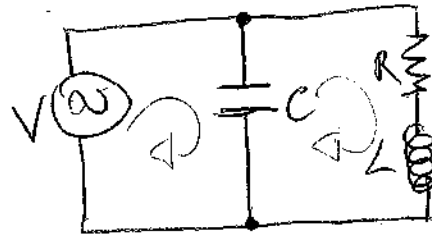
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ di risonanza combinatoria } C$$



risultato che Frequenza ω da trovare!



Source che mette C in serie con R e L la funzione risulta
in parallelo :



$$\frac{1}{Z} = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}$$

$$= \frac{R - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + i\omega \left(C - \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \text{ da cui}$$

$$(Re \hat{Z} = Z \cos \phi) \quad \phi = 0 \Rightarrow \text{Im}(\hat{Z}) = 0 \quad (\hat{Z} = Z = \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R})$$

$$\Rightarrow \omega \text{ tale che } \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} = C, \text{ cioè } \frac{L}{C} - R^2 = \omega^2 L^2, \text{ cioè}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R^2 C}{L} \right) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{Q^2} \right) \text{ (valido per } \omega \leq \omega_0)$$

Al risonanza (risultato)

$$\omega \approx \omega_0 ! \text{ Ora } \hat{V} = V_0 e^{i\omega t}, \hat{I} = I_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t}$$

$$\text{per cui alla risonanza } I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{RV_0}{R^2 + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L} \right) L^2} = \frac{RCV_0}{L} = \frac{RV_0}{\omega_0^2 L^2}$$

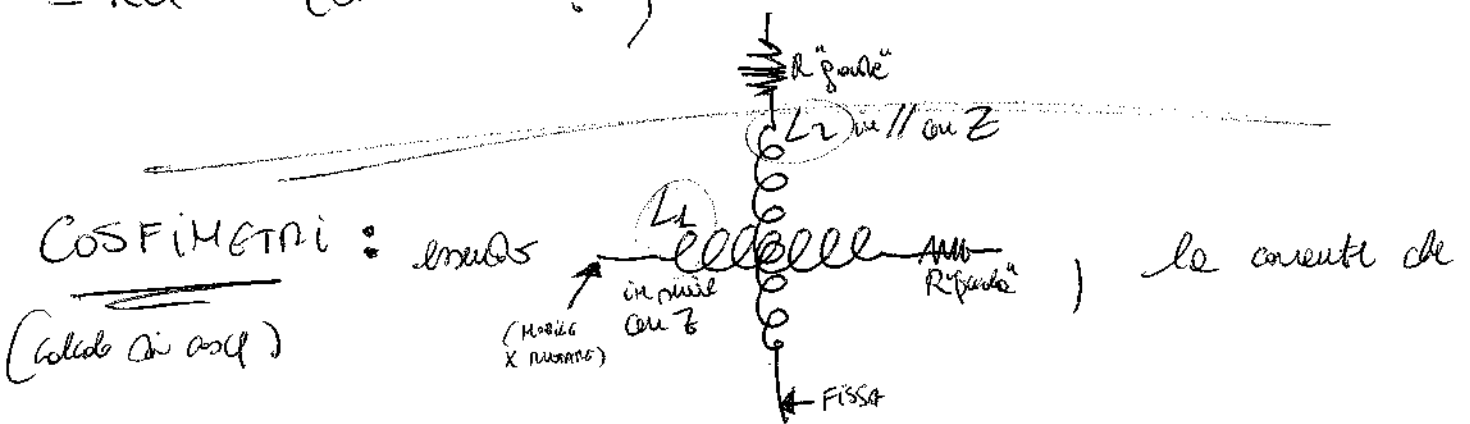
Ma forse comente! In effetti Z ha come massimo finché si parla!

in ogni caso minimo possibile, che per avere la massima corrente possibile MA in serie offeso! Inconveniente:

$$\hat{V}_C \equiv \hat{V} \Rightarrow \hat{I}_C = i\omega C \hat{V} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C Z \hat{I}, \text{ quasi}$$

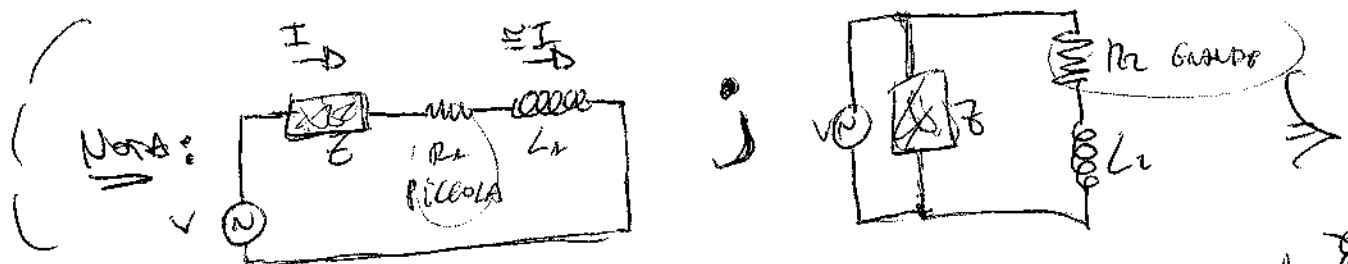
alla risonanza $I_C = \omega C Z I_0$; per $Q \gg 1$ $\omega C Z =$
 $\frac{C}{RC} (R + \frac{L}{RC}) = \underbrace{R \left(\frac{C}{L} \right)}_{1/Q} + \underbrace{\frac{L}{RC}}_Q \cong Q, \Rightarrow I_C \cong Q I_0!$

(Anche Z (o' era approssimato, in realtà: $R + \frac{L}{RC} = R + RQ \cong RQ \cong RQ^2$ ($Q \gg 1$) !)



altre cose L_2 e' IN FASE con V , mentre quella che ottiene L_1 e' LA STESSA I (o' quasi), che con la bobina L_1 e' opposta

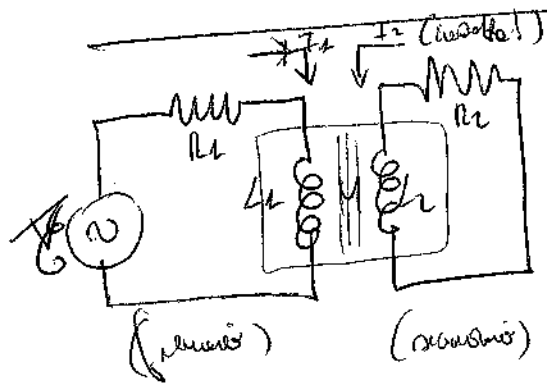
e momento $\propto V \cdot I$; a questo in collettore di una molla, allora si fermano quando il momento sopra alla molla equilibra un momento $\propto \Delta W$!



~~$\frac{L}{Z_{tot}} = \frac{L}{R} + \frac{L}{Z_{L1}} = \frac{L}{R + i\omega L} = \frac{R}{Z_{tot}} = \frac{1}{Z}$~~



ci affa R_2 e L_2 che $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$ come, e l'impedanza in quel ramo vale $R_2 + i\omega L_2 \cong R_2$, che NON modifica poi l'ampiezza!



TRASFORMAZIONE IDEALE, moltiplicando per $\frac{N_1}{N_2}$ membro a membro: $M I_1 = I_2 \left(\frac{L_1 N_2}{N_1} \right)$,

ovvero $M = \frac{N_2}{N_1} L_1 \stackrel{\text{(Simmetria)}}{=} \frac{N_1}{N_2} L_2$, da cui

$$L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2 \text{ e } M^2 = M \cdot M = L_1 L_2 \quad (" = " \equiv " \cong ");$$

da $\begin{cases} \mathcal{E} = R_1 I_1 + L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 \\ 0 = R_2 I_2 + L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 \end{cases}$, e $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$, $\hat{I}_n = \hat{I}_n e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = R_1 I_1 + i\omega L_1 I_1 + i\omega M I_2 \\ 0 = R_2 I_2 + i\omega L_2 I_2 + i\omega M I_1 \end{cases}, \text{ quando } I_2 = \frac{-i\omega M I_1}{R_2 + i\omega L_2} \Rightarrow$$

$$i\omega M I_2 = \frac{\omega^2 M^2 I_1}{R_2 + i\omega L_2}, \text{ da cui } I_1 = \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega L_2)}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{-i\omega M \mathcal{E}_0}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad ; \quad \text{Quanto } \frac{\mathcal{E}_0}{I_1} =$$

$$= (R_1 + i\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + i\omega L_2} = (R_1 + i\omega L_1) + \underbrace{\frac{\omega^2 M^2}{i\omega L_2}}_{-i\omega L_2} \frac{1}{1 + \frac{R_2}{i\omega L_2}} :$$

se ω è tale che $R_2 \ll \omega L_2$, usando $(1+n)^{-1} \approx 1-n$, ho =

$$= (R_1 + i\omega L_1) - i\omega L_1 \left(1 + \frac{R_2}{i\omega L_2} \right) = R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2 = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_2,$$

quindi se $N := \frac{N_1}{N_2}$ allora nel circuito c'è come avere una resistenza

di $R_1 + \frac{1}{N^2} R_2$! Dunque $\frac{I_2}{I_1} = \frac{-i\omega M}{R_2 + i\omega L_2} \approx -\frac{M}{L_2} =$

$$= \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{1}{N} \right) \text{ e per avere } \mathcal{E}_2 \text{ allora } R_2 I_2 = -i\omega M \mathcal{E}_0 R_1.$$

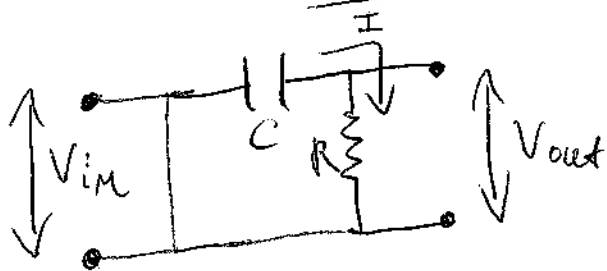
$$\frac{1}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 \underbrace{M^2}_{L_1 L_2}} \cdot \frac{-i\omega M \mathcal{E}_0 R_1}{i\omega L_2 R_2} = -\frac{M}{L_1} \mathcal{E}_0 =$$

$$= -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_0, \text{ come in modulo } \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_0} = \frac{N_2}{N_1} = N, \text{ e quindi}$$

$$\frac{\mathcal{E}_2}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\mathcal{E}_0}{I_1} \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left[R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_2 \right] = R_1 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 R_2 =$$

$$= R_1 + N^2 R_2 !$$

QUALCHE SEMPLICE FILTRO (DI FREQUENZE) :



$$\begin{cases} V_{in} = \frac{1}{i\omega C} I + RI \\ V_{out} = RI \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC} \quad : \quad \boxed{\omega RC \gg 1}$$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} \approx 1, \text{ cioè } V_{out} \approx V_{in} ; \quad \boxed{\omega RC \ll 1} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} \approx$$

$$\approx i\omega RC \quad (\downarrow 0) ! \text{ Dunque } \omega = \frac{1}{RC} \text{ e' risonante, e}$$

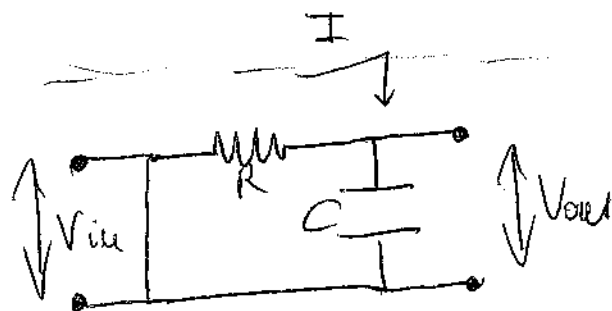
il filtro e' passo alto ; e' anche detto "differenziale" filtro

$$V_{out} \approx i\omega RC V_{in}, \text{ e allora nel caso } V_{in} = V_{in} e^{i\omega t} \text{ ho}$$

$$V_{out} \approx RC \frac{dV_{in}}{dt}. \text{ Dunque } \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{(i\omega RC)(1 - i\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} =$$

$$= \frac{(\omega RC)^2 + i(\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2} \text{ Me } \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \text{ Dunque}$$

une fonction de ω et



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

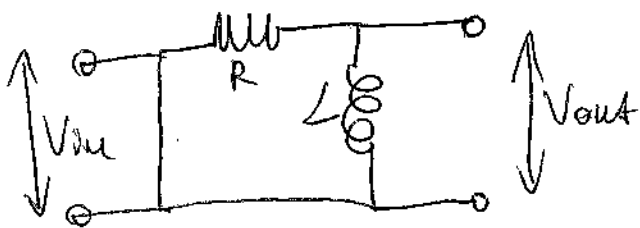
soit $V_{out} \approx V_{in}$ pour $\omega RC \ll 1$, inverse pour $\omega RC \gg 1$ et

$V_{out} \approx \frac{1}{i\omega RC} V_{in}$; $\frac{1}{RC}$ est la fréquence de coupure, il s'agit d'

une fonction de "intégration" puisque $V_{in} = |V_{in}| e^{i\omega t} \rightarrow$

$$V_{out} \approx \frac{1}{RC} \int V_{in} dt \quad ! \quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1 - i\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \quad \text{me}$$

$$\left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

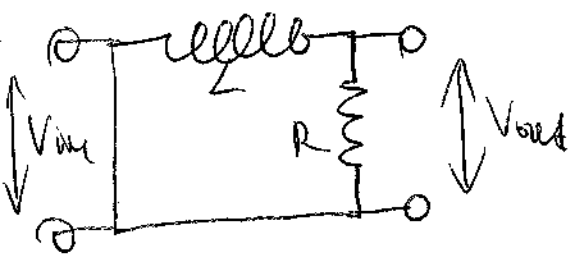


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{i\omega L/R}{1 + i\omega L/R}$$

, couple d'inductance

$\frac{R}{L}$ est la fréquence de coupure (inverse), il s'agit d'

$$\omega L/R \ll 1 \rightarrow V_{out} \approx i\omega L/R V_{in}$$

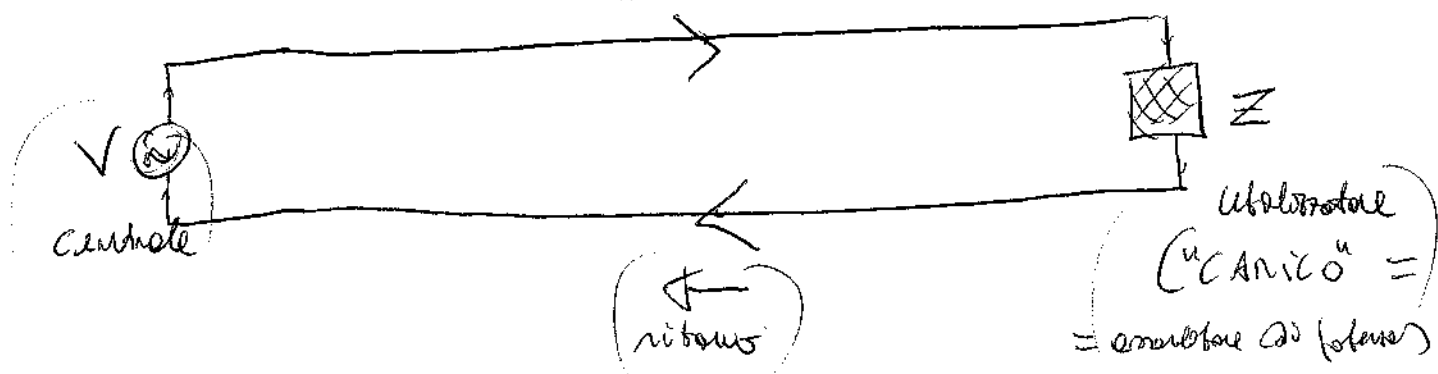


$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + i\omega L} = \frac{1}{1 + i\omega L/R}$$

all'asse delle frequenze (integrale), o

$$\omega L/R \gg 1 \Rightarrow V_{out} \approx \frac{1}{i\omega L/R} V_{in}$$

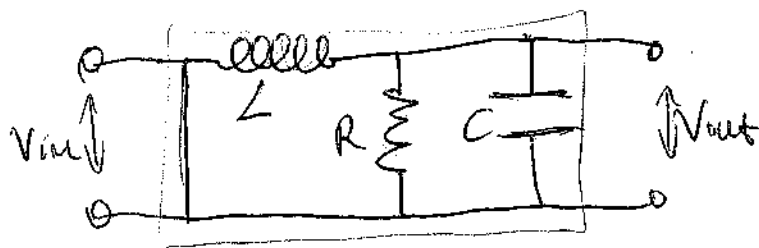
MA IN EFFETTI $\left\{ \begin{array}{l} i\omega L \rightarrow 0 \text{ } \omega \rightarrow 0 \text{ (cortocircuito)} \\ i\omega L \rightarrow \infty \text{ } \omega \rightarrow \infty \text{ (cortocircuito)} \\ \frac{1}{i\omega C} \rightarrow \infty \text{ } \omega \rightarrow 0 \text{ (cortocircuito)} \\ \frac{1}{i\omega C} \rightarrow 0 \text{ } \omega \rightarrow \infty \text{ (cortocircuito)} \end{array} \right\}$



Ampiezza (potenza) indefinita
(conferma ad "casi speciali")

il che è una linea di trasmissione se l'energia fluisce in "parti" collegamenti elettronici che sono più consistenti; OVVERO che ciò non è fatto per avere un'ampiezza "on"

transmission



$$Z =$$

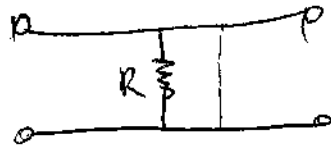
$$= i\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = i\omega L + \frac{R}{1 + i\omega RC}$$

se si le frequenze

non "terro" $\omega RC \ll 1 \Rightarrow Z \approx i\omega L + R(1 - i\omega RC) =$

$$= R + i\omega(L - R^2 C), \text{ e con la scelta } R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

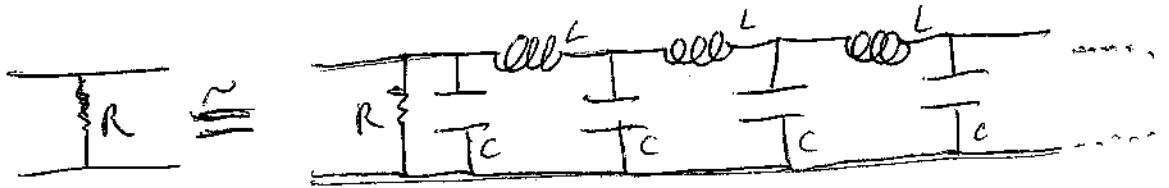
$$Z \approx R$$



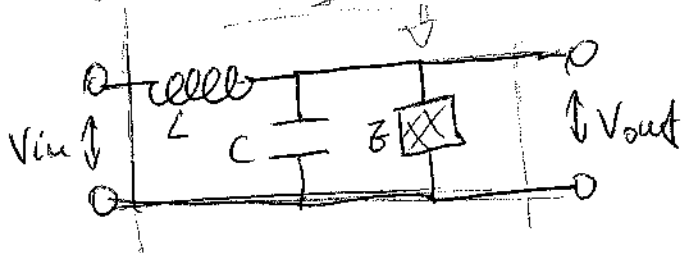
$$V_{out} = V_{in}$$

quindi filtra i broni! Motore al core cpto che, in tale

struttura,



Vogliamo far in generale Z tale che, considero



$$\text{we } \left(\frac{V_{in}}{I}\right) = i\omega L + \left(\frac{1}{Z} + i\omega C\right) =$$

$$= Z : i\omega L + \frac{Z}{1 + i\omega C Z} = Z, \quad i\omega L(1 + i\omega C Z) + \frac{Z}{Z} =$$

$$= Z(1 + i\omega C Z), \quad i\omega L - \omega^2 L C Z = i\omega C Z^2$$

$$Z^2 - i\omega L Z - \frac{L}{C} = 0 \Rightarrow Z_{\pm} = \frac{i\omega L}{2} \pm \sqrt{\frac{(i\omega L)^2}{4} + \frac{L}{C}} =$$

$$= \frac{i\omega L}{2} \pm \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 L C}{4}}$$

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

Se ω ω rispetto a ω_0 scelta il rapporto nella radice; conviene fare
fare lo stesso conto con un'altra variabile;

$$T := \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{(1/Z + i\omega C)^{-1}}{Z} = \frac{1}{1 + i\omega CZ} \quad , \quad \text{since } 1 =$$

$$= T(1 + i\omega CZ) \quad , \quad \text{since } \frac{1}{T} - 1 = i\omega CZ = i\omega C \left(i\omega L + \frac{Z}{1 + i\omega CZ} \right) = -\omega^2 LC + \frac{i\omega CZ}{1 + i\omega CZ} \quad \text{cioe}$$

$$\left(\frac{1}{T} - 1 \right) T = 1 - T$$

$$1 - T = -\omega^2 LC T + T - T^2 \quad , \quad \text{cioe} \quad T^2 + (\omega^2 LC - 2)T + 1 = 0$$

$$\Rightarrow T_{\pm} = \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2} \right)^2 - 1} = \left(\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \right)$$

$$= \left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \pm \sqrt{\left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 - 1} =$$

~~Handwritten scribbles and crossed-out text.~~

$$= \left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \quad \left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_{+} = -\infty \right) !$$

Scritto
T+

$$\boxed{\omega \geq \omega_0} \Rightarrow T_{+} \text{ reale in } [-1, 0] \quad \left(\text{Quello reale} \right)$$

$$(x \geq 1) \Rightarrow -1 \leq 1 - 2x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} \leq 0 \quad (\text{Squaring})$$

$$2x^2 - 2 \leq 2x\sqrt{x^2 - 1} \quad ,$$

$$4x^4 + 4 - 8x^2 \leq 4x^2(x^2 - 1) = 4x^4 - 4x^2$$

$$\boxed{4 \leq 4x^2} \quad \checkmark$$

$$2x\sqrt{x^2 - 1} \leq 2x^2 - 1$$

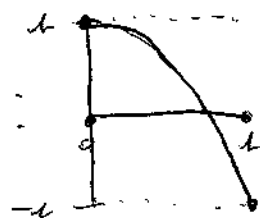
$$4x^2 - 4x^2 \leq 4x^2 + 1 - 4x^2$$

$$0 \leq 1 \quad \checkmark$$

in particolare $\omega = \omega_0 \Rightarrow V_{out} = -V_{in}$

$\boxed{\omega < \omega_0} \rightarrow T_+ = \left[1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] + 2i\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{(long pathing)} =$
 $(0 \leq)$
 $= \underbrace{\left[1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]}_{=: Q} + i \underbrace{\sqrt{1 - \left[1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^2}}_{=: Q^2} =: Q + i\sqrt{1 - Q^2}$

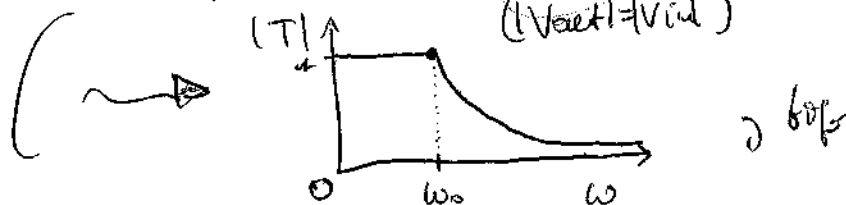
mae $|Q| \leq 1 \quad (0 \leq \omega \leq 1 \Rightarrow 1 - 2\omega^2 \in [-1, 1])$



quindi c'è $\phi \in [0, \pi]$ tale che $Q = \cos \phi$, per cui

$T_+ = \cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$, e allora $(|T_+| = 1 \text{ e } |V_{out}| = |V_{in}|)$

$V_{out} = V_{in} e^{i\phi}$



(one bene (e forse bene)!) $\left(1 - 2\omega^2 + 2\omega\sqrt{1 - \omega^2} \right)$ che $\frac{\partial}{\partial \omega} =$

$= -4\omega + 2\sqrt{1 - \omega^2} + \frac{2\omega}{\sqrt{1 - \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} \left[-4\omega\sqrt{1 - \omega^2} + 4\omega^2 - 2 \right]$, e

in effetti > 0 : $4\omega^2 - 2 > 4\omega\sqrt{1 - \omega^2}$, $16\omega^4 + 4 - 16\omega^2 > 16\omega^2$

$-(\omega^2 - 1)$, $4 > 0$; e ...) ;

$\boxed{\omega < \omega_0} \rightarrow Q \approx 1, \phi \approx 0 \rightarrow 1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = Q = \cos \phi \approx$

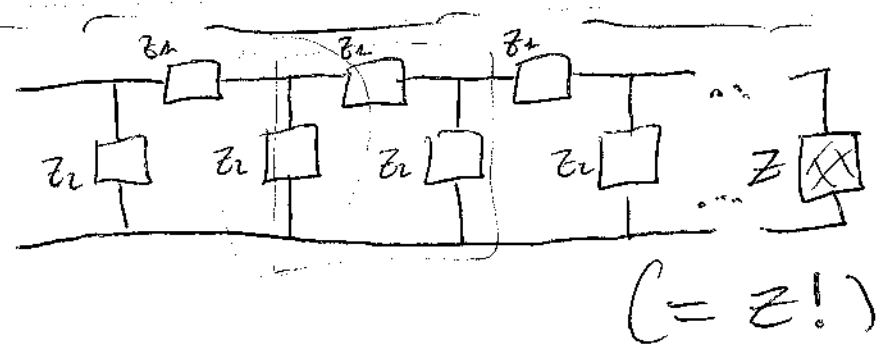
$\approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$, onde $\phi \approx 2\frac{\omega}{\omega_0}$, e quindi

$V_{in} = |V_{in}| e^{i\omega t}$
 $V_{out} = |V_{in}| e^{i(\omega t + \phi)} = |V_{in}| e^{i(\omega t + 2\frac{\omega}{\omega_0})} \Rightarrow |V_{in}| e^{i\omega(t + \frac{2}{\omega_0})}$

cioè $V_{out}(t) = V_{in}(t + \frac{2}{\omega_0})$! $\frac{2}{\omega_0}$ cioè quattro volte che

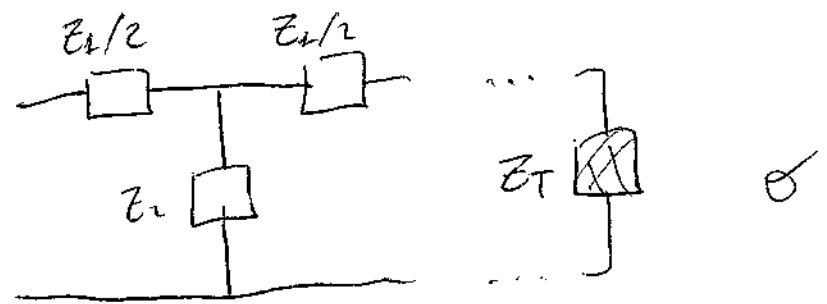


Quo, e' possibile, invece che

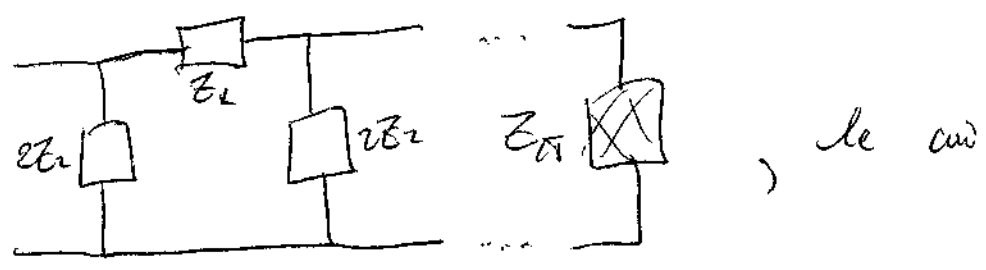


Unsero Corvino!!

" T " come



" 1/L " come



relazione e' $Z_T + Z_{\pi} = Z_L Z_T$:

$\textcircled{T}$ $Z_T = \left[\underbrace{\left(Z_T + Z_L/2 \right)^{-1} + 1/Z_T}_{\frac{1}{Z_T + \frac{Z_L}{2}}} \right]^{-1} + Z_L/2$

$$\frac{(Z_T + \frac{Z_L}{2})Z_T}{Z_T + Z_L/2 + Z_T}$$

$\Rightarrow$

$$Z_T (Z_T + \cancel{Z_L/2} + \cancel{Z_T}) = Z_L (\cancel{Z_T} + \frac{Z_L}{2}) + \frac{Z_L}{2} (Z_T + \cancel{Z_L/2} + \cancel{Z_T})$$

" $(Z_T)^2$ " $Z_L Z_T + \frac{(Z_L)^2}{4} = Z_L Z_T (1 + \frac{Z_L}{4Z_T})$,

Cioè $(Z_T)^2 = Z_L Z_T (1 + \frac{Z_L}{4Z_T})$; $\checkmark$

$\textcircled{\pi}$ $\frac{1}{Z_{\pi}} = \left[\left(\frac{1}{Z_{\pi}} + \frac{1}{2Z_T} \right)^{-1} + Z_L \right]^{-1} + \frac{1}{2Z_T}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{Z_{\pi}} = \underbrace{\left(\frac{2Z_{\pi}Z_L}{Z_{\pi} + 2Z_L} + Z_L \right)}_{\frac{Z_{\pi} + 2Z_L}{2Z_{\pi}Z_L + Z_L(Z_{\pi} + 2Z_L)}} + \frac{1}{2Z_L}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\cancel{2Z_{\pi}Z_L} + Z_L(\cancel{Z_{\pi} + 2Z_L}) \right) 2Z_L = Z_{\pi} \left(2Z_L(\cancel{Z_{\pi} + 2Z_L}) + \cancel{2Z_{\pi}Z_L} + Z_L(\cancel{Z_{\pi} + 2Z_L}) \right)$$

canc

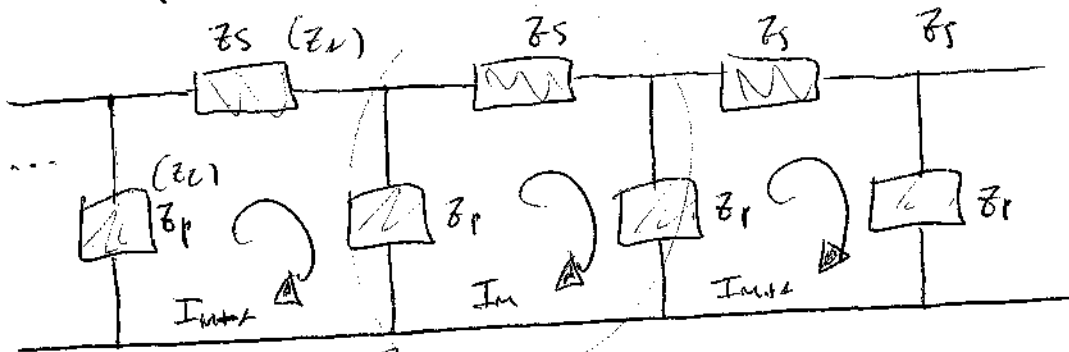
$$4(Z_L)^{\sim} Z_L = \cancel{4Z_L Z_L} (4Z_L + Z_L)(Z_{\pi})^{\sim}$$

canc

$$(Z_{\pi})^{\sim} = \frac{4Z_L(Z_L)^{\sim}}{4Z_L + Z_L} = \frac{Z_L Z_L}{4 + \frac{Z_L}{4Z_L}}$$

✓

⊗ proposto nelle rete a scale



ipotesi che $\frac{Z_s}{Z_p}$ è R!

offerta non

cerchiamo nelle equazioni $(I_m - I_{m+2})Z_p + I_m Z_s + (I_m - I_{m+2})Z_p = 0$,
 e nelle relazioni $I_{m+2} = 2I_m$, $2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ho $\begin{cases} I_{m+2} = 2I_m \\ I_{m+2} = \frac{I_m}{2} \end{cases} \rightarrow$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)Z_p + Z_s + \left(1 - 2\right)Z_p = 0, \quad 2Z_p + Z_s = \left(2 + \frac{1}{2}\right)Z_p,$$

$$\boxed{2 + \frac{1}{2} = \frac{Z_s}{Z_p} + 2}$$

$$\text{e anche } 2^2 - \left(\frac{Z_s}{Z_p} + 2\right)2 + 1 = 0,$$

perché discriminante

:

$$\boxed{\left(\frac{Z_s}{Z_p} + 2\right)^2 \geq 4}$$

cioè $\frac{Z_s}{Z_p} \geq 0$ o

$$\frac{Z_S}{Z_P} \leq -4, \quad \text{oppure} \quad \frac{Z_S}{4Z_P} \leq -1, \quad \text{e}$$

$$\left\{ -1 < \frac{Z_S}{4Z_P} < 0 \right\}; \quad \boxed{\text{nel (ulteriore caso)}} \quad \text{di cui non è, ed esiste}$$

$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{Z_S}{Z_P} + 2 \quad \lambda' \quad \begin{cases} Z_S/Z_P \geq 0 \rightarrow \lambda > 0, \lambda = \theta^{-\lambda} \\ Z_S/Z_P \leq -1 \rightarrow \lambda \leq 0, \lambda = -\theta^{-\lambda} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta^{-\lambda} + \theta^{\lambda} = \left(\frac{Z_S}{2Z_P} + 1 \right)^2 \Leftrightarrow \cosh(\lambda) = 1 + \frac{Z_S}{2Z_P} \\ (\text{envelope}) \quad \cosh(\lambda) = 1 + \frac{Z_S}{2Z_P} \end{cases}$$

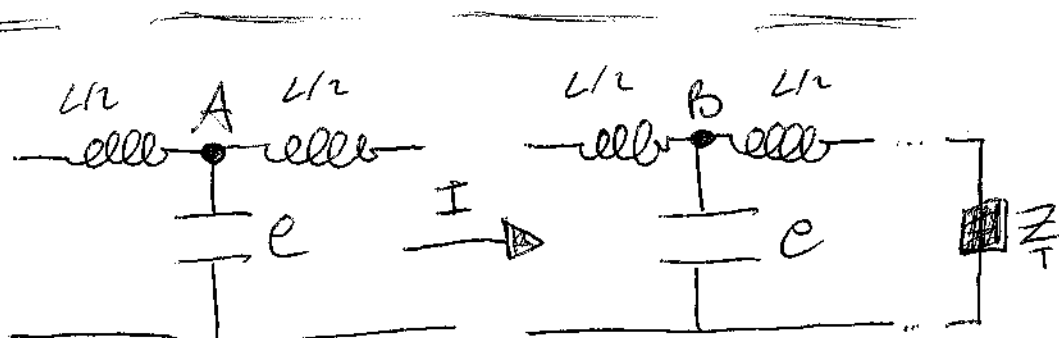
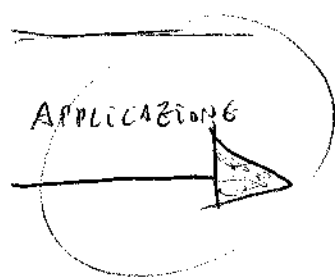
NOTA: $\lambda > 0 \Leftrightarrow$ stesso senso di rotazione; $\text{poi } |\lambda|$ rispetto a 1
 dà l'ampiezza delle correnti!

nel secondo caso λ è complesso e λ modulo 1

$$\left(\lambda_{\pm} = \left(1 + \frac{Z_S}{2Z_P} \right) \pm i \sqrt{-\frac{Z_S}{Z_P}} \sqrt{1 + \frac{Z_S}{4Z_P}} \dots! \right) \quad \text{oppure}$$

$$\lambda = \theta^{i\phi} \quad \text{e ovviamente} \quad \frac{\theta^{i\phi} + \theta^{-i\phi}}{2} = \cos \phi = 1 + \frac{Z_S}{2Z_P}$$

Ogni volta si aggiunge + ϕ alla fase!



$$Z_S = i\omega L, \quad Z_P = \frac{1}{i\omega C} \Rightarrow \frac{Z_S}{4Z_P} = \frac{-\omega^2 LC}{4} = -\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 < 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Quindi $\omega \leq \omega_0 \Leftrightarrow$ cioè nel caso sintonizzato $\phi =$

$$= \alpha \cos\left(1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \quad , \quad \text{ma anche } \omega_0 < \omega \rightarrow \alpha \text{ e' reale negativo,}$$

$$\alpha = -e^{-\lambda} \quad \text{con} \quad -\cosh(\lambda) = 1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

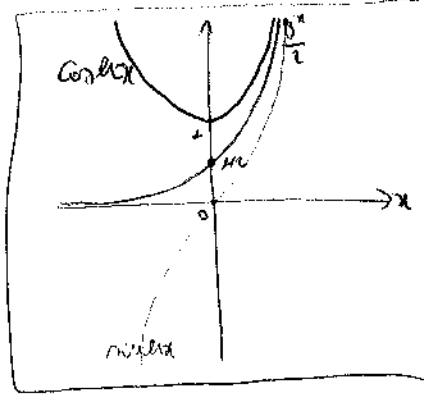
$$\text{cioe' } \cosh(\lambda) = \underbrace{2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}_{> 1} > 1 \quad , \quad \text{Quindi } \lambda \neq 0$$

$$(\alpha \neq -1) ; \quad \text{De } \alpha + \frac{1}{\alpha} < -2 \quad \text{Bisogna}$$

$$(\alpha < -1) \quad . \quad \text{f} \quad \text{Motivato inoltre che } V_A - V_B = i\omega L I$$

$$V_A = (i\omega L/2 + Z_T) I \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = i\omega L \frac{V_A}{i\omega L/2 + Z_T} \quad , \quad \text{De}$$

$$\text{cioe' } \frac{V_B}{V_A} = 1 - \frac{i\omega L}{i\omega L/2 + Z_T} = \frac{Z_T - i\omega L/2}{Z_T + i\omega L/2} \quad , \quad \alpha$$



$$\text{Dalle (este formula!) } (Z_T)^2 = \frac{L}{C} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = \frac{L}{C} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow Z_T = \frac{L}{2} \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2) \quad :$$

$$\frac{L}{C} \frac{L}{4} = \frac{L^2}{4}$$

$$\boxed{\omega \leq \omega_0} \rightarrow \text{solo sfericamente, } Z_T \text{ reale e QUINDI } \left|\frac{V_B}{V_A}\right| = 1$$

$$\boxed{\omega > \omega_0} \rightarrow \alpha < -1, \quad Z_T = i \frac{L}{2} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{immaginaria fur, } \alpha$$

(inadmissibile!)

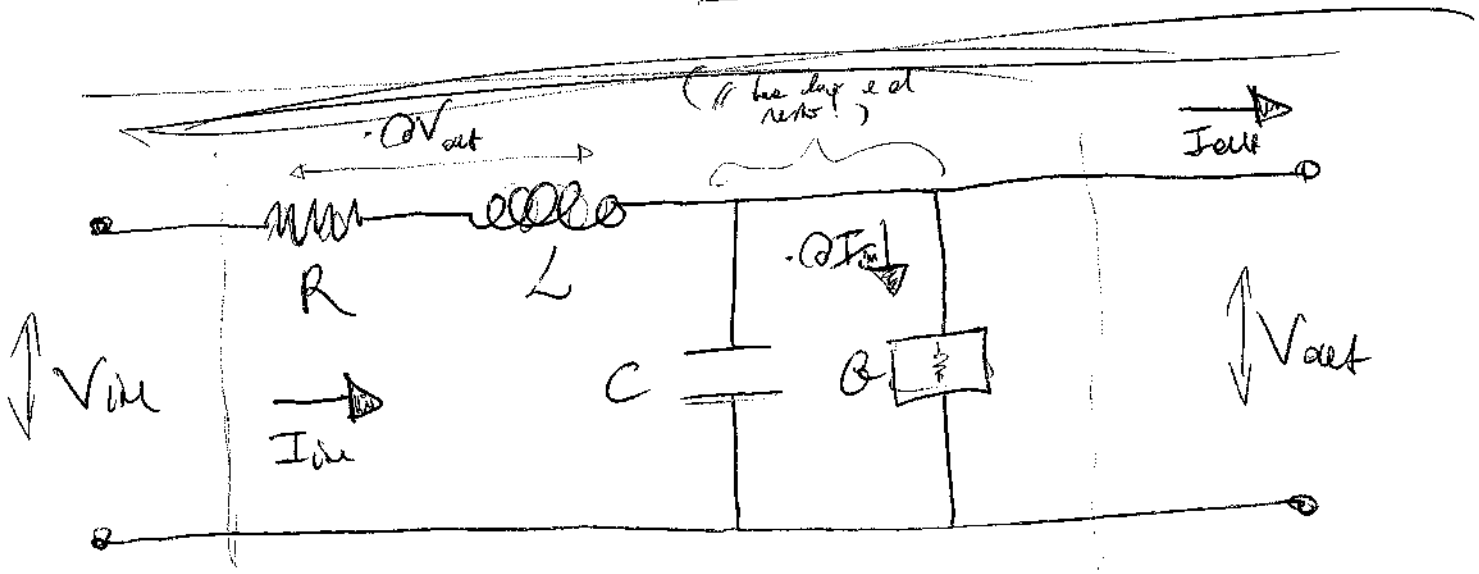
$$\text{quando chiedono } \left|\frac{V_B}{V_A}\right| < 1$$

(al=al)

trovando la linea per cui il lunghezza $\alpha L = L \Delta l$ di
 $C = C_L \Delta l$, per cui $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \Delta l \rightarrow \text{to}$, e dare
 oè $\boxed{\omega \leq \omega_0}$: Z_T e' reale e tale che

$$(Z_T)^* = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4} \right) \xrightarrow{\Delta \omega \rightarrow 0} L/C \quad (\text{mesurable})$$

$Z := \frac{L}{C}$ et cette "impédance caractéristique"



$Z = R + i\omega L$, $Y = G + i\omega C$ (admittance!), mais pour un ω donné on a $Z = R + i\omega L$; et $V_{in} - V_{out} = Z I_{in}$, même

$I_{in} - I_{out} = Y V_{out}$, pour un ω donné $- \partial V_{out} = V_{in} - V_{out}$

et $-\partial I_{in} = I_{in} - I_{out}$ alors

$$\begin{cases} \frac{\partial V_{out}}{\partial x} = -Z I_{in} \\ \frac{\partial I_{in}}{\partial x} = -Y V_{out} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 V_{out}}{\partial x^2} = ZY V_{out} \quad , \quad \text{et même équation pour } I_{in} ; \text{ caractéristique}$$

pour sinus à fréquence donnée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (ZY)V$ et $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = (ZY)I$,

de au (solutions) $\begin{cases} V(x) = V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x} \\ I(x) = I_1 e^{\gamma x} + I_2 e^{-\gamma x} \end{cases} \quad , \quad \gamma = \sqrt{ZY} \quad !$
(m⁻¹)

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + i\omega L)(G + i\omega C)} =: \alpha + i\beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = RG - \omega^2 LC \\ 2\alpha\beta = \omega(LG + RC) \end{cases} \quad (\alpha \text{ e } \beta \text{ positivi! Divergono (positivi)})$$

$$\rightarrow \beta = \frac{\omega(LG + RC)}{2\alpha} \quad \text{e anche} \quad \alpha = \frac{\omega(LG + RC)}{2\beta}, \quad \text{da cui}$$

$$\text{Assumendo} \quad \begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \left[(RG - \omega^2 LC) + \sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (RC + LG)^2} \right] \\ \beta^2 = \frac{1}{2} \left[(\omega^2 LC - RG) + \sqrt{(RG - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (RC + LG)^2} \right] \end{cases}$$

St
 $R = G = 0$ ("minimo perdite")
 ("ANTENNA")

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega \sqrt{LC} \end{cases}$$

; per in perdite

St
 $\frac{L}{R} = \frac{C}{G}$

(Z e Y in fase), $\Leftrightarrow LG = RC$: esults che

solt le resiste ane' chidamento $(\omega^2 LC)^2 + (RG)^2 + \omega^2 (RC)^2 + \omega^2 (LG)^2$

$$\Rightarrow (\omega^2 LC)^2 + (RG)^2 + 2\omega^2 (LG)^2 = (\omega^2 LC + RG)^2, \text{ effetto}$$

perche' $LCRG = (LG)^2$! Dunque

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{RG} \\ \beta = \omega \sqrt{LC} \end{cases}$$

$$I = - \frac{1}{Z} \frac{\partial V}{\partial n} = - \frac{1}{Z} (x_1 v_1 \partial_{x_1} - x_2 v_2 \partial_{x_2}) \quad \Leftrightarrow$$

$$I_1 = - \frac{x_1}{Z} v_1 \stackrel{(x_1=1)}{=} - \frac{\sqrt{Y}}{Z} v_1$$

$$I_2 = \frac{x_2}{Z} v_2 = \frac{1}{Z} v_2$$

, dunque in m n n de

$$\Gamma_1(x) \doteq \frac{V(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \frac{V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}}{-V_1 e^{\gamma x} + V_2 e^{-\gamma x}} \quad : \text{ per } V_1=0 \text{ o } V_2=0$$

$$V_2=0 \quad \text{e} \quad |\Gamma| = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (\text{"impedance coefficient"}) \quad , \quad \text{e} \quad \text{nel}$$

$$\text{caso } (R=\beta=0) \quad \sqrt{\frac{Z}{Y}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\frac{L}{C}} \doteq Z_0 \quad \text{e' utile!} \quad \text{Mentre}$$

$$\text{considero le onde viaggiatrici } V(x,t) \doteq V(x) e^{i\omega t} \quad (\text{e } I(x,t) \doteq I(x) e^{i\omega t}) ,$$

$$\text{onde } V(x,t) = V_1 e^{i\omega t} e^{\gamma x} + V_2 e^{i\omega t} e^{-\gamma x} \quad (\text{ma se bel caso } Z_0)$$

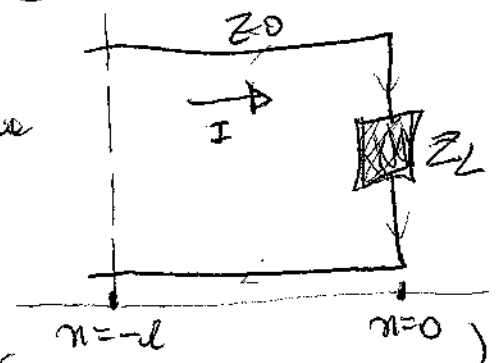
$$\text{Non dipende da } \omega! \quad \text{e} \quad \text{SG} \quad \left(\frac{L}{R} = \frac{C}{G} \right) \quad \text{allora}$$

$$\gamma = \sqrt{RG} + i\omega\sqrt{LC} \Rightarrow V(x,t) = V_1 e^{i\omega(t + \sqrt{LC}x)} e^{-\sqrt{RG}x} + V_2 e^{i\omega(t - \sqrt{LC}x)} e^{-\sqrt{RG}x}$$

$$\text{SG } R=G=0 \quad \text{con } k \doteq \beta = \omega\sqrt{LC} \quad , \quad \text{e} \quad \text{con } \omega = \pm \frac{\omega}{k} =$$

$$= \pm \frac{\omega}{\beta} \quad (=) \quad \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad \text{SIA ALLORA } R=G=0 \quad \text{e}$$

Costruisco il carico Z_L come in figura



$$\text{concedo } Z_L \quad \Gamma_1(0) = Z_0 \frac{V_1 + V_2}{-V_1 + V_2} \quad \left((-V_1 + V_2) Z_L = Z_0 (V_1 + V_2) \right)$$

$$\text{Allora } R \doteq \frac{V_1}{V_2} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \text{e'}$$

il "coefficiente di riflessione", in quanto e' come se la forza di V_2

incidente mentre quella di V_2 riflette, e sempre tornare indietro!

Poniamo così l'esponente Z_1 in funzione di Z_0, Z_L e β :

$$\boxed{Z_1(l)} = Z_0 \frac{(V_1/V_2)e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{-(V_1/V_2)e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}} = Z_0 \frac{\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{-\frac{(Z_L - Z_0)}{Z_L + Z_0}e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}} =$$

$$= Z_0 \frac{(Z_L - Z_0)e^{i\beta x} + (Z_L + Z_0)e^{-i\beta x}}{-(Z_L - Z_0)e^{i\beta x} + (Z_L + Z_0)e^{-i\beta x}} = Z_0 \frac{Z_L \cos(\beta x) - iZ_0 \sin(\beta x)}{Z_0 \cos(\beta x) - iZ_L \sin(\beta x)}$$

$$= \boxed{Z_0 \frac{Z_L - iZ_0 \tan(\beta x)}{-iZ_L \tan(\beta x) + Z_0}} \quad \text{in funzione di} \quad \boxed{Z_1(-l) = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan(\beta l)}{iZ_L \tan(\beta l) + Z_0}}$$

caso (1)* $Z_L = Z_0 \Rightarrow Z_1 = Z_0$!

caso (2)* per avere $Z_1(-l) = Z_L$ basta $\tan(\beta l) = 0$, cioè
 $\beta l = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$;

caso (3)* $\beta l = \frac{m\pi}{2} \Rightarrow Z_1(-l) = Z_0 \left[\frac{\cancel{Z_L}}{\cancel{iZ_L \tan(\beta l) + Z_0}} + \frac{iZ_0 \tan(\beta l)}{iZ_L \tan(\beta l) + Z_0} \right] =$
 $\stackrel{(\text{in limite})}{=} \frac{(Z_0)^2}{Z_L} \quad , \quad \text{ovvero} \quad Z_0 = \sqrt{Z_1(-l)Z_L} \quad ;$

caso (4)* : $(Z_L = +\infty) \Rightarrow Z_1(-l) = \frac{Z_0}{i \tan(\beta l)} = \frac{-iZ_0}{\tan(\beta l)}$, che

per $\beta l = \pi/2$ e' 0, per $\beta l < \pi/2$ e' $\frac{-i \frac{L}{c} \omega \sqrt{\epsilon} d}{\omega \sqrt{\epsilon} d} = \left(\frac{-i}{\omega \sqrt{\epsilon} d} \right)$,

per $\beta l > \pi/2$ e' $i \left(\frac{L}{c} \omega \sqrt{\epsilon} d \right) = (i\omega L) d$;

$(Z_L = 0) \Rightarrow Z_1(-l) = iZ_0 \tan(\beta l)$, che per $\beta l = \pi$ e' +oo,

per $\beta \ll 1$ instabile, per $\beta \geq \alpha$ costante !

$$(R=\beta=0)$$

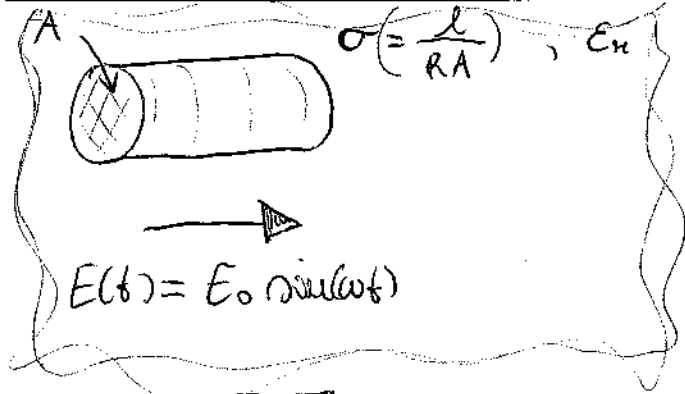
V case stazionaria per $k = \frac{V_1}{V_2} = 0^{ice}$ (caso di modo 1) :

$$V_1 = 0^{ice} V_2 \Rightarrow V(x,t) = (V_2 0^{ice}) e^{i(\omega t + \beta x)} + V_2 0^{i(\omega t - \beta x)} =$$

$$= V_2 0^{i\frac{\alpha}{2}} 0^{i\omega t} \left[0^{i(\beta x + \frac{\alpha}{2})} + \underbrace{0^{i(-\beta x - \frac{\alpha}{2})}}_{0^{i(\beta x + \frac{\alpha}{2})}} \right] = V_2 0^{i\frac{\alpha}{2}} 0^{i\omega t} \cos(\beta x + \frac{\alpha}{2})$$

OSS : $Z_L = \frac{V_L}{I_L}$ caso $\begin{cases} V_L = V(\omega) = V_1 + V_2 \\ I_L = I(\omega) = I_1 + I_2 = -\frac{Y}{Z} (V_L - V_2) \end{cases}$

questo nel caso $R=\beta=0$ $\begin{cases} V_L = V_1 + V_2 \\ I_L = -\frac{1}{Z_0} (V_L - V_2) \end{cases} \quad !!$



Avendo E abbiamo anche J_c di conseguenza e J_s di conseguenza:

$$J_c = \sigma E = \sigma E_0 \sin(\omega t)$$

$$J_s = E \frac{\partial E}{\partial t} = (E_0 \omega \sin(\omega t)) E_0 \cos(\omega t) \quad ; \quad \text{la cui origine sono (variabili)}$$

rispettivamente σE_0 e ωE_0 , e quindi $\sigma E_0 = \omega E_0$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad \text{in questo caso fornisce "sempre meglio"}$$

la cui costante pu essere quella totale $J_c + J_s = \sigma E_0 [\sin(\omega t) + \cos(\omega t)]$, ovviamente meaning per $\omega t = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (Rinno)

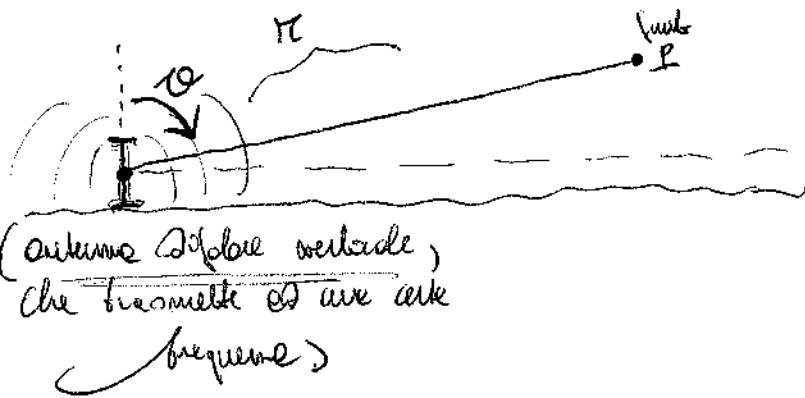
Quale solo che $\omega := \omega(k)$ soddisfa $\omega^2 = (T/\mu)k^2 + 2k^4$ (T, μ e α costanti) cioè $\omega = \sqrt{(T/\mu)k^2 + 2k^4}$, hence

$$v_{gr} := \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k} \sqrt{(T/\mu)k^2 + 2k^4} \quad \text{e} \quad v_{ph} := \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2(T/\mu)k + 4k^3}{2\sqrt{(T/\mu)k^2 + 2k^4}} =$$

(velocità di gruppo) (velocità di fase)

$$= \frac{k[(T/\mu) + 2k^2]}{\sqrt{(T/\mu)k^2 + 2k^4}} \quad ; \quad \text{allora} \quad \frac{v_{ph}}{v_{gr}} = \frac{(T/\mu)k^2 + 2k^4}{(T/\mu)k^2 + 2k^4}$$

per cui $\frac{v_{ph}}{v_{gr}} \xrightarrow{k \rightarrow 0} (T/\mu)/(T/\mu) = 1$
 $\frac{v_{ph}}{v_{gr}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2\alpha/\alpha = 2$



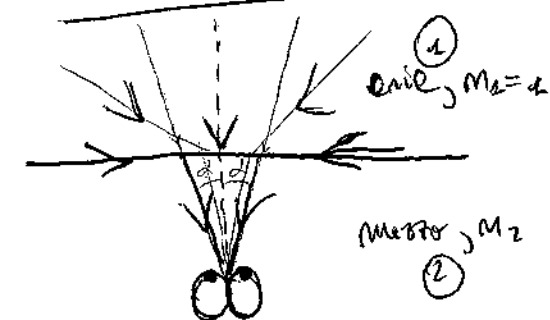
per π "obscure zone" ($\pi \gg \lambda$),
il campo elettromagnetico prende il
quello "di retroscena", tale per
cui l'intensità del raggio =

$\hat{=}$ valore medio ricevuto per una antenna isotropa alla distanza r di frequenza

$$= I(\pi, \theta) = K \frac{\sin^2(\theta)}{\pi^2} \quad \text{con } K \text{ costante con dipendenza da}$$

$$(W)_{\text{in}} : (W)_{\text{in}} = \frac{8\pi}{3} K, \quad \text{cioè } K = \frac{3(W)_{\text{in}}}{8\pi} ; \text{ se}$$

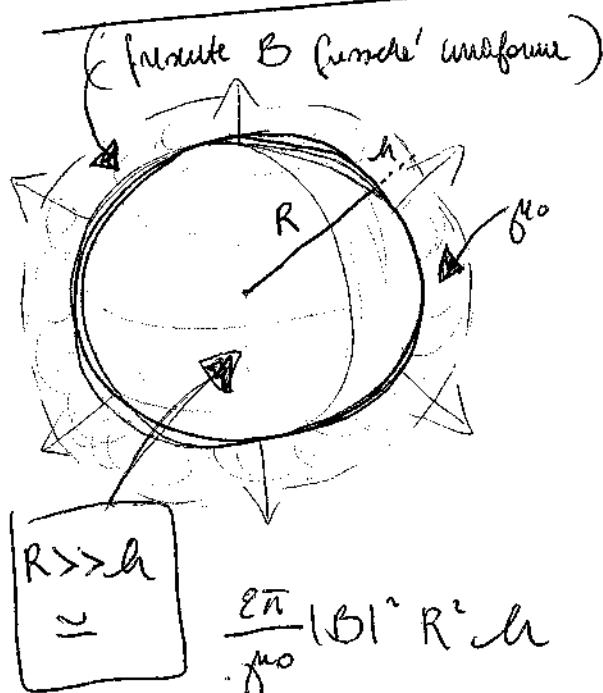
valiamo I "a terra", allora $\theta = \pi/2$!



per "valore tutto" rispetto che

$$d > d_c = \text{aria} \left(\frac{m_1}{m_2} \right) = \text{aria} \left(\frac{1}{m_2} \right),$$

$$\text{cioè } \sin \alpha > \frac{1}{m_2}, \quad \text{cioè } m_2 > \frac{1}{\sin \alpha}.$$



$$U = n \times \text{volume} =$$

nelo d'aria
de R e h

$$= \frac{1}{2\mu_0} |B|^2 \left[\frac{4\pi}{3} (R+h)^3 - \frac{4\pi}{3} R^3 \right] =$$

$R^3 + 3R^2h + 3Rh^2 + h^3$

$$= \frac{2\pi}{3\mu_0} |B|^2 (3R^2h + 3Rh^2 + h^3) \quad \boxed{\hat{=}}$$

$$\begin{aligned} 1) R \gg h &\Rightarrow R^2h \gg h^2 \Rightarrow R^2h \gg h^3 ; \\ 2) R^2h &= R(Rh) \gg h(Rh) = Rh^2 \end{aligned}$$

ci talle che $\frac{\omega}{k} = c$, e $T = \frac{2\pi}{\omega}$;

$$B := B(m, t) = B_0 \hat{e} \cos(\omega t + k m)$$

$$\Rightarrow E = c B \times (-\hat{m}) = \hat{m} \times c B =$$

$(\hat{m} \times \hat{e} = \hat{n})$

$$= c B_0 \hat{n} \cos(\omega t + k m)$$

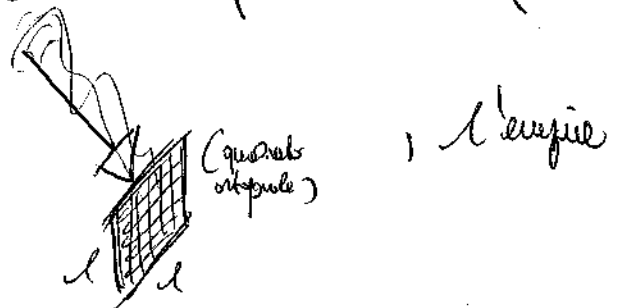
, da cui per

(intensità) $|S| = \frac{1}{\mu_0} |E| |B| = \frac{c}{\mu_0} (B_0)^2 \cos^2(\omega t + k m)$, $\Rightarrow$

$$I := \langle |S| \rangle = \frac{c}{2\mu_0} (B_0)^2$$

che è la potenza media per unità

di superficie ortogonale; o allora



considerando quel quadrato in un dato tempo t e $E(0 \rightarrow t) =$

$$= I \cdot A \cdot t \quad , \quad \text{e } A = N \text{ (area)} = \frac{N 2\pi}{\omega} \text{ allora}$$

$$E = I A N T = \frac{c}{2\mu_0} (B_0)^2 A \frac{2\pi N}{\omega}$$

$$E = \begin{cases} E_1 = (e \sin(\omega t - k(x+z)/\sqrt{2})) \\ E_2 = (e \sin(\omega t - k(x+z)/\sqrt{2} + 75^\circ)) \\ E_3 = (e \sin(\omega t - k(x+z)/\sqrt{2} + \pi)) = -E_1 \end{cases} \quad , \quad e \text{ in V/m} = N/C$$

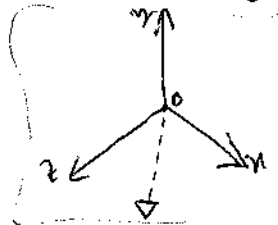
(in (x, z, t))

è un'onda diretta della forma $f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{X})$, con $\vec{X} = (x, z)$

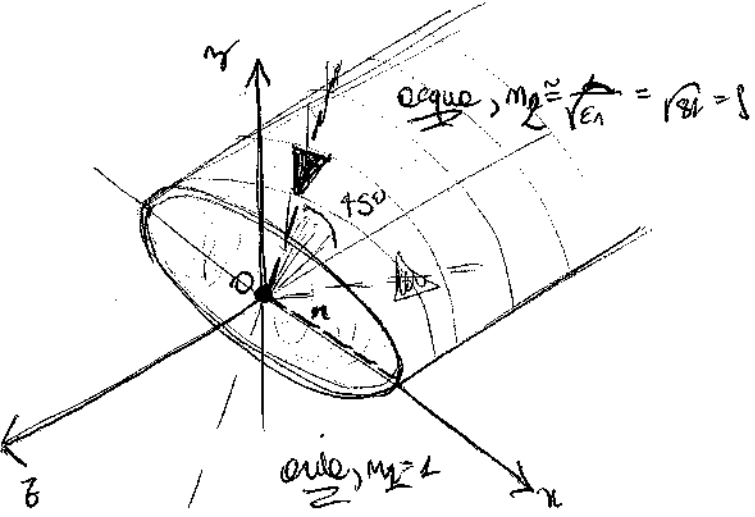
e dimensionalmente $\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hat{n} + \hat{z}}{\sqrt{2}}$, che coincide con la direzione

di propagazione, ed è **PIANA** (diretta) con polarizzazione

(K · E = 0!)

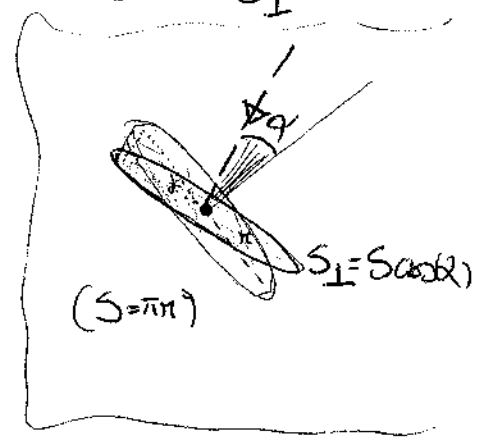


ellittica "inclinata" ; ~~diagramma~~ α



angolo $\theta_c = \arcsin \frac{1}{3} \approx 6.9^\circ < 45^\circ$
 l'asse si riflette totalmente nelle

impulsione ; da $I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{\mu_0} \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E_0^2}{\mu_0} (0^2 + (2e)^2 + 0^2) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\mu_0} (3e^2)$, da cui $E \rightarrow B = I \times S_{\perp} \times t =$
 $= I (\pi r^2) \cos(45^\circ) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$



(VUOTO)

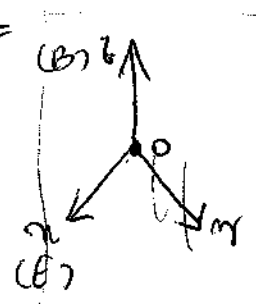
(a) $E = -3i \hat{n} \underbrace{e^{-ikr}}_{e^{i(\omega t - kr)}} e^{i\omega t}$ (in V/m = N/C) che

$Re(E) = 3 \hat{n} \sin(\omega t - kr)$, ossia $Re(E) = \begin{pmatrix} 3 \sin(\omega t - kr) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

onde (pure) indipendenti + ω are polarizzate linearmente (lungo $\hat{n}$) , e

con valore effice $3/\sqrt{2}$; ed una corrisponde $B =$
 $= \frac{1}{c} E \times \hat{n} \stackrel{(\hat{n} \times \hat{n} = 0)}{=} \frac{3}{c} \hat{z} \sin(\omega t - kr) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/c \sin(\omega t - kr) \end{pmatrix}$,

che ha valore effice $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3}{c}$



$$(b) E = (3e^{i\pi/3} \hat{x} + 3e^{i\pi/3} \hat{y}) e^{ikz} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} 3e^{i(\omega t + kz + \pi/3)} \\ 3e^{i(\omega t + kz)} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 \cos(\omega t + kz + \pi/3) \\ 3 \cos(\omega t + kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

: onde propagata in $-\hat{z}$ con frequenza

allora λ con valore efficace

(frequenza $\neq 0, \pi, 2\pi$!)

$$\frac{\sqrt{B+B}}{\sqrt{2}} = 3 \quad ; \quad \text{onde reale } B = \begin{pmatrix} (3/c) \cos(\omega t + kz) \\ -(3/c) \cos(\omega t + kz + \pi/3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

la valore efficace ~~3/c~~

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla E = - \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \right.$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_z E_y \\ -\partial_z E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 3 \cos(\omega t + kz) \\ -3 \cos(\omega t + kz + \pi/3) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(\cos)}{=} \frac{\partial}{\partial z} \left(3 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + kz) \\ -\cos(\omega t + kz + \pi/3) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$(c) E = (4e^{i\pi/4} \hat{x} + 3e^{-i\pi/2} \hat{y}) e^{-ikz} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} 4e^{i(\omega t - kz + \pi/4)} \\ 3e^{i(\omega t - kz - \pi/2)} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \cos(\omega t - kz + \pi/4) \\ 3 \cos(\omega t - kz - \pi/2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

: frequenza $+\hat{z}$ con frequenza

allora

(frequenza $\neq 0, \pi, 2\pi$!)

e con valore efficace

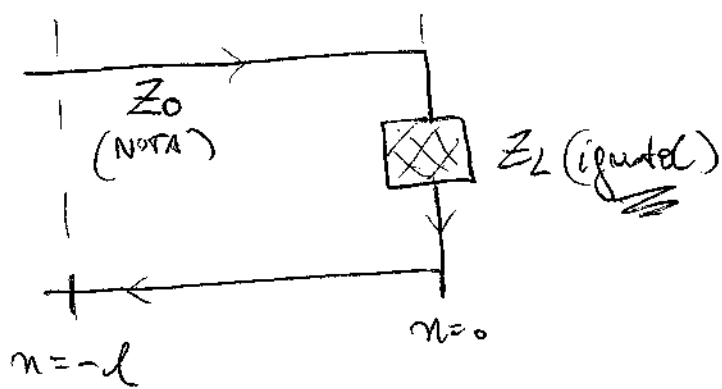
$$\frac{\sqrt{B+B}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{di quale componente } B = \begin{pmatrix} (3/c) \cos(\omega t - kz - \pi/2) \\ (+4/c) \cos(\omega t - kz + \pi/4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

la valore efficace

$$\frac{5}{c\sqrt{2}}$$

(ma che il $-\hat{z}$, per cui

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{k}{\omega} \quad ! \quad)$$



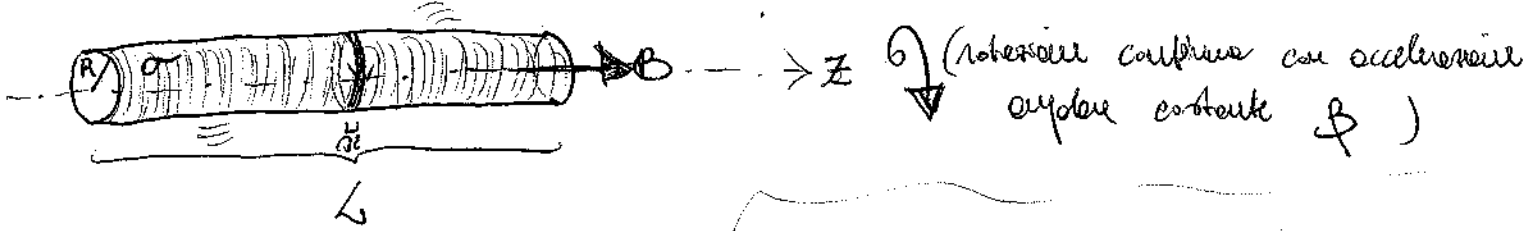
CASO $R=\beta=0$ ("pure
"reactive") : $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ reale,
funzione nel coefficiente di

riflessione $R := \frac{V_1}{V_2} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$, OSSIA $Z_L = \frac{1+R}{1-R} Z_0$

($R(Z_L + Z_0) = Z_L + Z_0$) : proprio k ! In generale k
 è complesso , cioè $k = |k| e^{i\theta}$; so che $V(x) = V_1 e^{i\theta} +$
 $+ V_2 e^{-i\theta}$, anche $\gamma = i\beta$ con $\beta = \omega \sqrt{LC}$ nel caso $R =$
 $= \beta = 0$; ma $V_1 = k V_2 \Rightarrow V(x) = V_2 e^{-i\theta} (1 +$
 $+ k e^{2i\theta})$, che ha chiaramente $|V|_{\max} = V_2 (1 + |k|)$
 $|V|_{\min} = V_2 (1 - |k|)$

(Nota) $\Rightarrow \rho := \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{1+|k|}{1-|k|}$, cioè $|k| = \frac{\rho-1}{\rho+1}$;

per il , sapere che $V_{\max}$ si trova a $-\frac{\lambda}{8}$, e
 sapere che $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \Rightarrow \frac{\lambda}{8} = \frac{\pi}{4\beta}$, proprio
 $e^{2i\theta} = 1$, cioè $0 = \theta - \pi/2$, cioè $\theta = \pi/2$,
 e ad infine $k = |k| e^{i\theta} = i |k|$ e quindi Z_L .



(solenoid lungo e NON costante)

Grazie alla rotazione, una spirale

di anse si trasforma una corrente $\mathcal{O}I = F \mathcal{O}t$ dove F (in A/m) e' $F = \sigma \omega R$ (ossia) $= \sigma (\omega R)$ $(\omega = \dot{\phi})$ e allora

$$|B| = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{(L/\mathcal{O}t)}{L} (\sigma \beta R t) \mathcal{O}t = \mu_0 \sigma \beta R t$$

$\nearrow$ no anse per μ_0 di lunghezza $\nwarrow$ corrente in una anse $\mathcal{O}I$ $\nearrow$ (stessa μ_0 costante!) $\nwarrow$ (stessa μ_0 $|B|$!)

e' allora $+\hat{z}$; allora E e' allora $-\hat{z}$, e abbiamo il modulo nelle equazioni

$$\mathcal{O}e (2\pi R) |E| = \oint |E| \cdot d\vec{l} = + \frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = (\mu_0 \sigma \beta R) \pi R^2 =$$

(calcolando l'area πR^2 nel raggio R)

$$= \pi \mu_0 \sigma \beta R^3 \quad ; \quad |E| = \frac{\mu_0}{2} \sigma \beta R^2 \quad ; \quad \text{allora chiaramente}$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} E \times B = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0}{2} \sigma \beta R^2 \right) (\mu_0 \sigma \beta R t) \hat{z} =$$

(calcolando)

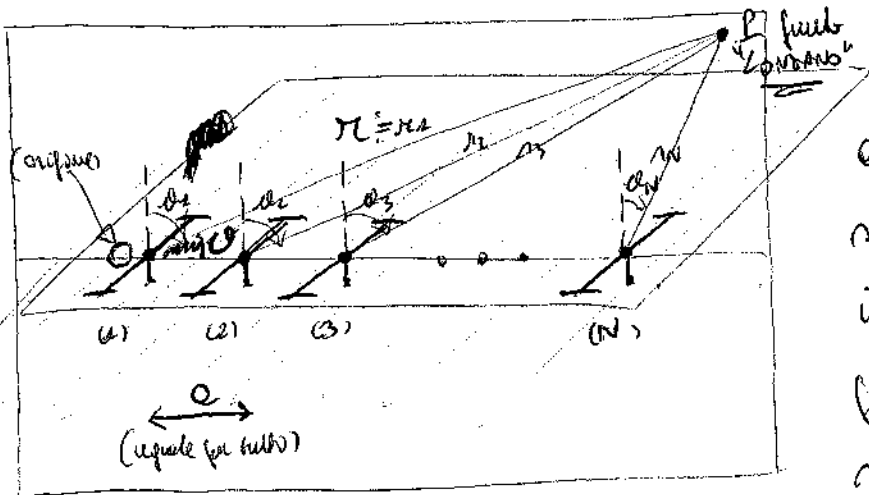
$$= -\frac{\mu_0}{2} \sigma^2 \beta^2 R^3 t \quad , \quad \text{e ne abbiamo allora questa}$$

$$\text{magnetica } \Phi(S) = |S| (2\pi R) L = \mu_0 \pi L \sigma^2 \beta^2 R^3 t \quad ; \quad \text{confrontando}$$

con la derivata delle ~~potenziali~~ energia magnetica: $U =$

$$= \frac{1}{2\mu_0} (B^2) (\pi R^2) L = \frac{\pi R^2 L}{2\mu_0} (\mu_0 \sigma \beta R t)^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \pi L \sigma^2 \beta^2 R^3 t^2,$$

$$\mathcal{O}e \text{ mi forniranno } \frac{\partial U}{\partial t} = \Phi(S) !$$



L'idea è che il campo elettrico è la somma dei campi di ogni antenna. Il campo di ciascuna antenna è uguale a quello di un dipolo, e che per le distanze molto maggiori della lunghezza d'onda, si può usare l'approssimazione di campo lontano.

(N antenne dipolo orientabili, alimentate da correnti identiche)

Per questo campo vale

una formula del tipo $E := E(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} \sin(kr - \omega t) (\hat{p}_0 \times \hat{r}) \times \hat{r}$

(case in $\hat{r}$) , dunque per trovare $E_{tot} = \sum_i E_i =$

$$= A \sum_i \frac{\sin(kr_i - \omega t)}{r_i} \quad (i=1, \dots, N) ; \text{ se, se l'antenna}$$

r_i è la distanza da $\vec{r}$, r_i nel caso $|\vec{r} - \vec{r}_i|$ se $\vec{r}_i = i \vec{e}$:

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + r_i^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i} = \sqrt{r^2 \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2} \right)} =$$

(cioè!)

$$\left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} \right) \approx \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} \cos \theta \quad \left(\triangle \right)$$

$$= r \sqrt{1 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta} \approx r \left(1 - \frac{r_i}{r} \cos \theta \right) = (r - r_i \cos \theta)$$

$$\Rightarrow E_{tot} \approx \frac{A}{r} \sum_i \sin(kr - kr_i \cos \theta - \omega t)$$

NOTATIONS COMPLEXES
 $\rightarrow$

$$\approx \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \sum_i e^{-i k r_i \cos \theta} = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)} \sum_{i=1}^N \left(e^{-i k r_i \cos \theta} \right)^i$$

che $\sum_{i=0}^N c^i = \frac{1 - c^{N+1}}{1 - c}$ (nota, oltre che infinito per infinito!)

$$\rightarrow \sum_{i=1}^N c^i = \left(\sum_{i=0}^N c^i \right) - 1 = \frac{1 - c^{N+1} - (1 - c)}{1 - c} = c \frac{1 - c^N}{1 - c}$$

e allora $E_{\text{tot}} \approx \frac{A}{\pi} \theta^{i(n\pi - \omega t)}$ $\cdot \theta^{-i n \pi}$ $\cdot \frac{1 - \theta^{-i n \pi N}}{1 - \theta^{-i n \pi}}$ $\cdot \left(\frac{1}{1 - \theta^{-i n \pi}} - \frac{\theta^{-i n \pi N}}{1 - \theta^{-i n \pi}} \right)$) de

qui si annulla anziché per $\theta = \pi/2$, mentre è anziché massimo per $\theta = 0$.

Linea ad trasmissione con γ DATA, $G=0$, e R, L, C costanti tali che anziché $\frac{\omega L}{R} \gg 1$ ($\omega = 2\pi\gamma$) ; allora l'impedenza

caratteristica è $Z_0 := \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{R}{i\omega C}} =$
 $= \left(\frac{L}{C} \sqrt{1 - \frac{iR}{\omega L}} \right) \approx \left(\frac{L}{C} \left(1 - i \frac{R}{2\omega L} \right) \right) \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{-iR}{\omega C} \right)$; (nota!) ; (nota!)

anche la funzione γ della linea ; anziché $\gamma =$
 $= \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + i\omega L) i\omega C} = \alpha + i\beta$: $G=0$ (nota! FORMULA) $\Rightarrow$

$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[-\omega^2 LC + \sqrt{(\omega^2 LC)^2 + \omega^2 (RC)^2} \right]$
 $\beta^2 = \frac{1}{2} \left[\omega^2 LC + \sqrt{(\omega^2 LC)^2 + \omega^2 (RC)^2} \right]$; anziché

$\sqrt{(\omega^2 LC)^2 + \omega^2 (RC)^2} = \omega^2 LC \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} \approx \omega^2 LC \left(1 + \frac{R^2}{2\omega^2 L^2} \right)$

e allora $\begin{cases} \alpha^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 C}{2L} \\ \beta^2 \approx \omega^2 LC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \\ \beta \approx \omega \sqrt{LC} \end{cases}$;

supponiamo $2 \cdot l \ll \lambda$ e $\Gamma = \frac{2\pi}{\beta} \frac{1}{\cos(\beta l)} \approx 1$; se il carico
 reale $Z_L = R_L$ in un ramo una costante numerica con modulo I_L :

allora $\frac{V_L}{I_L} = R_L \Rightarrow \begin{cases} V_L = V(0) = V_1 + V_2 \\ I_L = I(0) = -\frac{1}{Z_0} (V_1 - V_2) \end{cases}$

possiamo quindi esprimere le costanti lungo le linee in termini di
 I_L , calcolate in una giunzione V_1 e V_2 per $\beta \cdot 0$ avere

$$\begin{cases} V(x) = V_1 e^{i\beta x} + V_2 e^{-i\beta x} \\ I(x) = -\frac{1}{Z_0} (V_1 e^{i\beta x} - V_2 e^{-i\beta x}) \end{cases}$$
 in $x = -l$ ($e^{i\beta l} = 1$) :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_L + Z_0}{R_L - Z_0} = \frac{R_L/Z_0 + 1}{R_L/Z_0 - 1} \Rightarrow \text{allora } V_2 = \frac{R_L/Z_0 + 1}{R_L/Z_0 - 1} V_1$$

$$I_L = -\frac{1}{Z_0} \left(1 - \frac{R_L/Z_0 + 1}{R_L/Z_0 - 1} \right) V_1 = \frac{-2}{R_L/Z_0 - 1} V_1$$
 , cioè
$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} I_L (R_L - Z_0) \\ V_2 = \frac{1}{2} I_L (R_L + Z_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(-l) = -\frac{1}{Z_0} \frac{I_L}{2} \left[(R_L - Z_0) e^{-i\beta l} - (R_L + Z_0) e^{i\beta l} \right] =$$

$$= I_L \cos(\beta l) + \frac{I_L}{Z_0} R_L i \sin(\beta l)$$
 . Quindi, mentre la

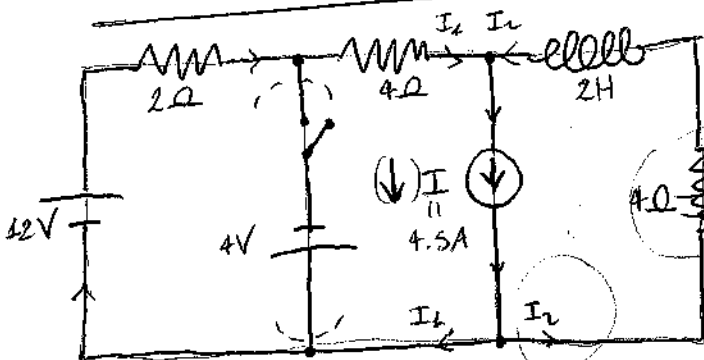
potenza dissipata nel carico R_L è $W_L = R_L (I_L)^2$, otteniamo da
 invece lungo le linee $\Delta W_L(x) = R_L \langle I(-x) \rangle^2$ (PAC656)

$$= \left(\frac{1}{2} \right) R_L (I_L)^2 \left[\cos^2 \beta x + \left(\frac{R_L}{Z_0} \right)^2 \sin^2(\beta x) \right]$$
 , che se integriamo

$$\int_0^{2\pi} f(\rho, \theta) d\theta = \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} f(\rho, \theta) \rho d\theta, \text{ si l'angle } \rho \leq 2\pi$$

$$\Rightarrow \rho \times = r \quad \left(\begin{array}{l} \rho=0 \rightarrow r=0 \\ \rho=1 \rightarrow r=\rho \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow d\rho \times = \frac{1}{\rho} d\rho$$



(Interruption ouverte de "circuit inductif"
à l'instant $t=0$)

Décharge de l'inductance $50W = R(I_2)_{\max}^2$,
on a l'énergie fournie de
 $(I_2)_{\max} \approx 3.5A$: si nous prenons

Régime permanent ($t=0^-$) :

$$4.5A = I_1 = I_2 + I_3 \quad \text{inoltre}$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = 0$$

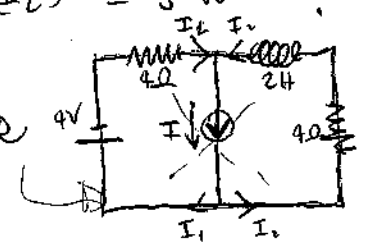
puisque nous n'avons pas de régime permanent, donc les courants

$$12V = (6\Omega)I_1 - (4\Omega)I_2 = (6\Omega)I_1 - (4\Omega)(4.5A - I_1) \quad \text{de où}$$

$$I_1 = 3A \text{ et donc } I_2 = 1.5A$$

Dans le circuit ($t=0^+$) :

$$\Rightarrow W_R = R(I_2)^2 = 9W$$



$$\text{les courants } 4V = (4\Omega)I_1 + (2H)\dot{I}_2 - (4\Omega)I_2 =$$

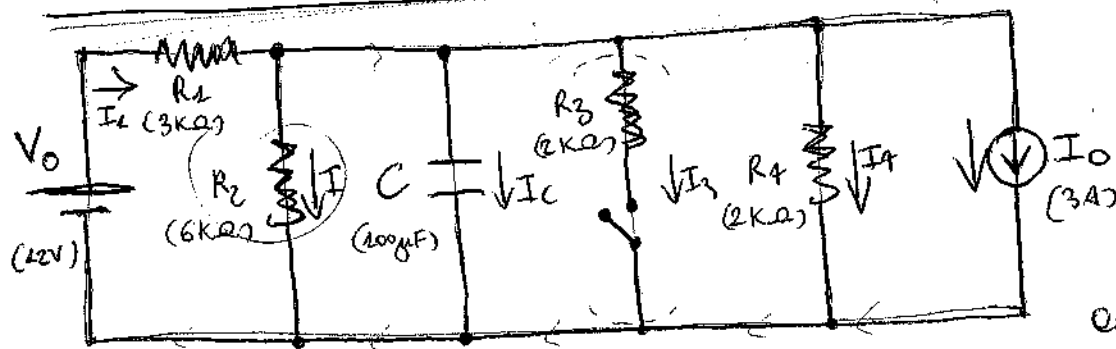
$$= (4\Omega)I_1 + (2H)\dot{I}_2 - 18V + (4\Omega)I_2 \quad \text{et donc nous avons}$$

$$\text{résoudre } 2\dot{I}_2 + 8I_2 = 22 \quad \text{et } \dot{I}_2 + 4I_2 = 11 :$$

$$\text{le résolveur nous donne l'expression } \dot{I}_2 = -4I_2 \text{ et } I_2(t) = \frac{C}{e^{-4t}}$$

(régime transitoire), nous avons une fonction ($t=0$) et courants

$I_2 \equiv \text{courant} \equiv \frac{11}{4} = 2.75 \text{ A}$, Or on $I_2(t) = C e^{-t/\tau} + 2.75 \text{ A}$;
 or, on écrit , $1.5 \text{ A} = I_2(0^+) = C + 2.75 \text{ A} \Rightarrow C = -1.25 \text{ A}$ et quindi $I_2(t) = (-1.25 \text{ A}) e^{-t/\tau} + 2.75 \text{ A}$
 $(I_2)_{\text{MAX}} = 2.75 \text{ A} < 3.5 \text{ A} \Rightarrow R \text{ NON si rompe mai!}$



(interruttore aperto se
 tempo immenso, e
 chiuso a $t=0$ e
 riaperto a $t^* = 0.16 \text{ ms}$;
 anzitutto celle connessa da

R_2 e valore minimo e $t^* = 0.16 \text{ ms}$

Se I è la corrente in R_2 , allora chiaramente $I = \frac{V_C}{R_2}$, con

$V_C = V_0 - R_1 I_1 \Rightarrow V_0 - R_1 (I + I_4 + I_0)$ quindi $I_C = 0$

per $t < 0$ (il condensatore si trova carico!) ; or $I = \frac{V_C}{R_2}$, e

analogamente $I_4 = \frac{V_C}{R_4} \Rightarrow V_C = V_0 - (R_1/R_2) V_C - (R_1/R_4) V_C - R_1 I_0$

cioè $V_C = \frac{V_0 - R_1 I_0}{1 + R_1/R_2 + R_1/R_4} = \bar{V}_C$ Or ci serve (per I)

per $t \geq 0$: chiaramente $V_C^{(0)} = A e^{-t/\tau}$ con $R := \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1}$

mentre come prima $V_C^{(\infty)} = \frac{V_0 - R_1 I_0}{1 + R_1/R_2 + R_1/R_4} \Rightarrow V_C(t) =$

$= A e^{-t/\tau} + V_C^{(\infty)}$, e allora A Or $\bar{V}_C = A + V_C^{(\infty)}$!

per $t \geq t^*$: chiaramente $V_C(t) = A' e^{-t'/\tau} + \bar{V}_C$, con $R' := \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1}$

$t' = t - t^*$, e $V_C(t^*) = V_C(t^*)$ Or ci serve A' !

Università di Pisa
Fisica III (CdL in matematica)

Prova scritta 16 Giugno 2014

Esercizio 1

Una pulsar è una stella degenerata rotante, che emette brevi impulsi di onde elettromagnetiche con frequenze dell'ordine di centinaia di MHz. Sapendo che il mezzo interstellare è dispersivo e le onde elettromagnetiche soddisfano la relazione $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ (con $\omega_0 = 9.8 \cdot 10^3$ rad/s), si sfruttino i dati in figura 1 sui tempi di arrivo degli impulsi osservati da un radiotelescopio in funzione della loro frequenza media per determinare a quale distanza si trovi la pulsar, giustificando il metodo.

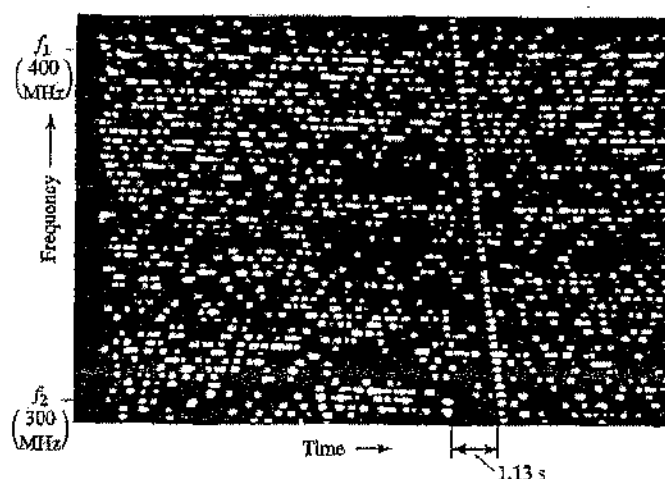


Figure 1: Esercizio 1: tempi di arrivo degli impulsi di una pulsar (serie di punti correlati nella linea diagonale) in funzione della loro frequenza media.

Esercizio 2

Su un'antenna (linea di trasmissione senza perdite) con impedenza caratteristica $Z_0 = 50 \Omega$ è presente una tensione sinusoidale di frequenza $f = 47$ MHz. Collegando l'antenna a una resistenza R si osserva che $1/9$ della potenza incidente viene riflessa.

Si indichino i valori numerici delle caratteristiche di un tratto di linea di trasmissione (senza perdite) con induttanza per unità di lunghezza $1.5 \mu\text{H}/\text{m}$,

che, se inserito tra l'antenna e la resistenza, permetta di eliminare la riflessione.

Esercizio 3

Un filamento isolante infinitamente sottile e infinitamente lungo con densità lineare di carica λ è disposto lungo l'asse z . All'istante $t = 0$ il filo inizia a muoversi con velocità costante nella direzione $+z$.

Si determini il potenziale vettore a distanza r dall'asse z per qualsiasi tempo, e il valore del campo magnetico per t che tende a infinito.

Esercizio 4

Un'astronave viaggia verso la terra a velocità $v = 2.4 \cdot 10^8$ km/s, e ha una luce che lampeggia con un periodo $T = 0.5$ s, come determinato dal pilota. Determinare la frequenza del lampeggio misurata da terra, tenendo conto del moto dell'astronave.

(4) (circled)

S
NON TRAS
nol pda c

R

$$\gamma' = \frac{c}{\lambda'} \quad , \quad \text{con}$$

$$\lambda'_{\text{Nov}} = \lambda - \omega T$$

MA

$$\lambda' = c(\delta T) - \omega(\delta T)$$

base

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{con} \quad \beta \equiv \omega/c \quad : \quad \gamma' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\gamma(c-\omega)} ;$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\underbrace{c^2 - \omega^2}_{(c-\omega)(c+\omega)}} \Rightarrow \boxed{\gamma' = \sqrt{\frac{c+\omega}{c-\omega}} \gamma}$$

(1) $\omega \approx 2\pi \cdot 10^8 \cdot 10^6 \frac{1}{s} = 2\pi 10^{14} \frac{1}{s} \gg \omega_0$, e allora $\omega_p \equiv \frac{\partial \omega}{\partial n} =$

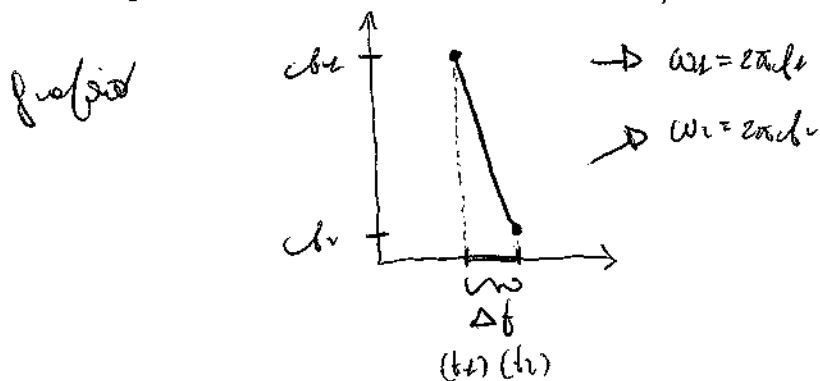
$$= \frac{\partial}{\partial k} \sqrt{(\omega_0)^2 + c^2 k^2} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{\omega} \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - (\omega_0)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \approx$$

$(\omega^2 = (\omega_0)^2 + c^2 k^2)$

$$\approx c \left(1 - \frac{(\omega_0)^2}{2\omega^2}\right) \quad , \quad \text{e allora} \quad \Delta t = \frac{L}{\omega_f} \approx \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2\right) - \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{L(\omega_0)^2}{2c} \left(\frac{1}{(\omega_1)^2} - \frac{1}{(\omega_2)^2} \right) \quad , \quad \text{base } \Delta t, \omega_1 \text{ e } \omega_2 \text{ linear nel}$$



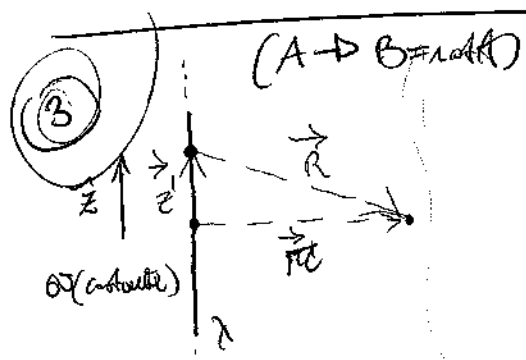
(2) $\frac{1}{g} = \frac{W_R}{W_i} = \left(\frac{R - Z_0}{R + Z_0} \right)^2 \quad (Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}})$, de cui R ;

o che chiaramente risulta $Z_1(n) = Z_0 \frac{R - i Z_0' \tan(\beta n)}{-i R \tan(\beta n) + Z_0'} = Z_0$,

dove $Z_0' = \sqrt{R Z_0}$ ("Z/Y") ($\beta = \omega \sqrt{LC}$!) : per $\beta l = \frac{\pi}{2} (+m\pi)$,

inoltre, ho $Z_1(n) = \frac{(Z_0')^2}{R} = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, de cui C !

Infine abbiamo n de $n = \frac{L}{\beta} \frac{\pi}{2}$, ovvero $\omega = 2\pi f$.



de $H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{per } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{per } \xi < 0 \end{cases}$, dove chiaramente

$\delta(\vec{r}, t) = \rho_0 H(t) \vec{z}'$, de cui (formula più o meno!)

$A(\vec{r}, t) = A_3(\vec{r}, t) \vec{z}'$, con $A_3(\vec{r}, t) =$

$\left(\vec{R} = \vec{r} - \vec{z}' \right)$
 $\left(R = \sqrt{r^2 + z'^2} \right)$
 $= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \rho_0 \vec{z}'(\omega) \frac{H(t - R/c)}{R}$, per cui

$A_3(\vec{r}, t) = 0$ per $t < R/c$, altrimenti $A_3(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\vec{z}'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} =$

$= \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi} (\omega) \left[\log(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi} (\omega) \log \left(\frac{z_2 + \sqrt{r^2 + z_2^2}}{z_1 + \sqrt{r^2 + z_1^2}} \right);$

o che, fatto ciò che siamo solo per $R \leq ct$, cioè $r^2 + z'^2 \leq (ct)^2$,

cioè $|z'| \leq \sqrt{(ct)^2 - r^2}$, de cui $-z_1 = z_2 = \sqrt{(ct)^2 - r^2}$ e in conclusione

$A_3(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi} (\omega) \log \left(\frac{(ct) + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{(ct) - \sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right) = \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi} (\omega) \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - (r/ct)^2}}{1 - \sqrt{1 - (r/ct)^2}} \right);$

Quindi in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) : il fatto che A abbia solo $A_3 = A_3(r, t)$ (formula) $\Rightarrow$ B ha solo $B_\phi = -\frac{\partial A_3}{\partial r} \dots!$