BREVE RICHIAMO "PRATICO" SU PROCESSI DI WIENER, INTEGRAZIONE STOCASTICA SECONDO ITO, PROCESSI DI ITO E FORMULA DI ITO. $\boxed{1}$

$\boxed{\text{PROCESSI DI WIENER}}$ Sia una volta per tutte $(\Omega,\mathcal{F},P)$ uno spazio di probabilità non atomico, e sia $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione (su Ω). Allora su Ω esiste unico a meno di modifiche un processo reale $W \doteq (W_t)_{t\geq 0}$, processo di Wiener (standard), che gode delle quattro seguenti proprietà fondamentali:

(1) $W_0=0$, (2) W è a incrementi indipendenti e stazionari, (3) $\forall t>0$, $W_t \sim N(0,t)$, (4) W è a traiettorie continue.

Possono essere dimostrate le seguenti proprietà derivate su processi di Wiener (standard).

- $\forall s,t\geq 0$ con $s<t$, $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$ (per cui $E[(W_t-W_s)^2]=t-s$).
- Un processo di Wiener (standard) è caratterizzato dal fatto di essere un processo gaussiano e centrato con funzione di covarianza $(s,t)\mapsto s\wedge t$, $s,t\geq 0$.
- $\forall s\geq 0$ e $\forall \lambda\neq 0$, $(W_{t+s}-W_s)_{t\geq 0}$ e $(\lambda^{-1}W_{\lambda^2 t})_{t\geq 0}$ sono processi di Wiener (standard), per cui in particolare $(-W_t)_{t\geq 0}$ lo è.
- Sia $\sigma(W) \doteq \left(\sigma(\{W_s \mid 0\leq s\leq t\})\right)_{t\geq 0}$ la filtrazione naturale di W. Allora il processo reale $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ è una $\sigma(W)$-martingala (nulla in zero e continua).
- $\forall T>0$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(W_{\frac{k+1}{2^n}T} - W_{\frac{k}{2^n}T}\right)^2 = T$ P-q.c. Dunque W è a traiettorie sì continue che a variazione quadratica mai nulla su $[0,T]$, per cui di certo queste mai possono essere anche a variazione limitata su $[0,T]$, cioè $\notin BV_{\mathbb{R}}([0,T])$.
- $\limsup_{t\to\infty}\frac{W_t}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{W_t}{t} = 0$ P-q.c. Questa uguaglianza significa sostanzialmente che $(tW_{1/t})_{t\geq 0}$ è un processo di Wiener se inteso come nullo in zero.
- $\limsup_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{t}} = \infty$ P-q.c. (per cui $\limsup_{t\to\infty} W_t = \infty$ P-q.c.). (In effetti, vale la "legge del logaritmo iterato" per un processo di Wiener (standard):

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad P\text{-q.c.}$$

) Una conseguenza è che risulti, $\forall s\geq 0$,

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{W_{t+s}-W_s}{t} = \infty \quad P\text{-q.c.}$$

(quindi la mai derivabilità in alcun punto delle traiettorie, e a maggior ragione l'assenza d'intervalli di monotonia).

⇝ Più avanti, per la formula di Ito, nei calcoli "funzionerà" alquanto considerare $\boxed{(dW_t)^2 \approx dt}$, da cui in particolare "rispetto a dt" $(dt)^2\approx 0$ e soprattutto $dt\,dW_t \approx 0$.

- $\forall \gamma\in(0,\frac{1}{2})$, e solo per tali γ, W è a traiettorie localmente γ-hölderiane.

▷ Sia $N \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ l'insieme di quelle parti di Ω che risultano esternamente trascurabili rispetto a P, e sia $\mathbb{F}^W := (\mathcal{F}^W_t)_{t\geq 0}$ la filtrazione generata da W, ossia la filtrazione meno fine tra quelle rispetto alle quali W sia adattato e che soddisfino le due usuali condizioni di completezza e di continuità a destra: formalmente

$$\forall t\geq 0,\ \mathcal{F}^W_t \doteq \bigcap_{u>t} \sigma(\sigma(\{W_s | 0\leq s\leq u\}) \cup N)$$

Allora W è additivo rispetto a $\mathbb{F}^W$, nel senso che, $\forall s,t\geq 0$ con $s<t$, $W_t - W_s$ è indipendente da $\mathcal{F}^W_s$.

Detto questo, supponiamo che la filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sia più fine di $\sigma(W)$, ossia che W sia adattato a $\mathbb{F}$. Allora chiamiamo W "processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$" se appunto W è additivo anche rispetto a $\mathbb{F}$. Dunque un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ è un processo di Wiener (standard), o equivalentemente è un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}^W$.

(Legge 0-1 di Blumenthal: la σ-algebra $\mathcal{F}^W_0$ $(\underset{\neq}{\supseteq} \sigma(W_0) = \{\phi, \Omega\})$ è degenere...)

Sia $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 1$. Un processo in $\mathbb{R}^d$ $W \doteq ((W^{(1)}_t, \dots, W^{(d)}_t))_{t\geq 0}$ è un "processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ d-dimensionale" se, per ogni $j = 1,\dots,d$, $W^{(j)} \doteq (W^{(j)}_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$, e se inoltre tali processi reali sono mutuamente indipendenti. In tal caso, $\forall s,t\geq 0$ con $s<t$, $W_t - W_s \sim N_d(0, (t-s)I_d)$.

INTEGRAZIONE STOCASTICA SECONDO ITO Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione (su Ω) tale per cui esiste un processo di Wiener $W \doteq (W_t)_{t\geq 0}$ rispetto a $\mathbb{F}$. Fissiamo allora un $T>0$ e consideriamo i tempi t solo nell'intervallo compatto $[0,T]$, continuando ad indicare $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ e $W \doteq (W_t)_{0\leq t\leq T}$. In seguito entreranno in gioco processi che saranno perlomeno adattati a $\mathbb{F}$, motivo per il quale potremmo supporre che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Definiti in questo contesto, un processo reale $X \doteq (X_t)_{0\leq t\leq T}$ $\boxed{\text{adattato a } \mathbb{F}}$ è un "processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$" se è a traiettorie costanti a tratti: più precisamente, se esistono $N\in\mathbb{N}$, $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} =: T$ e $N+1$ v.a.r. Y_i "$\mathcal{F}_{t_i}$-misurabili", $i=0,\dots,N$, tali che risulti:

$$X_t(\cdot) \overset{\text{P-q.c.}}{=} \sum_{i=0}^{N-1} Y_i(\cdot)\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t) + Y_N(\cdot)\mathbb{1}_{[t_N,T]}(t) \quad \text{per ogni } t\in[0,T].$$

A parole, $\forall k=0,\dots,N-1$ e $\forall t\in[t_k,t_{k+1})$, è costantemente $X_t \equiv Y_k$ (su Ω), e allo stesso modo $X_t \equiv Y_N$ per ogni $t\in[t_N,T]$. D'altra parte X è adattato a $\mathbb{F}$, e per tanto possiamo scrivere

$$X_t = \sum_{i=0}^{N-1} X_{t_i}\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t) + X_{t_N}\mathbb{1}_{[t_N,T]}(t), \quad t\in[0,T].$$

In particolare, un processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$ è adattato a $\mathbb{F}$ e a traiettorie continue a destra, quindi è progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$.

Inoltre, in riferimento all'ultima formula scritta per un processo elementare X rispetto a $\mathbb{F}$ risulta pressoché evidente che, $\forall p\in[1,\infty]$, X è in $\mathcal{L}^p$ se, e solo se, $X_{t_i}\in\mathcal{L}^p(P)$ per ogni $i=0,\dots,N$.

Siano adesso $a, b \geq 0$ con $0 \leq a < b \leq T$. L'integrale stocastico secondo ITO su $[a,b]$ di un processo elementare $X \doteq (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ rispetto a $\mathbb{F}$ è la seguente v.a.r., se X è esattamente della forma scritta prima:

$$\text{“}\int_a^b X_s \, dW_s\text{”} \doteq \sum_{i=0}^{N} X_{t_i}\left(W_{(t_{i+1} \vee a) \wedge b} - W_{(t_i \vee a) \wedge b}\right).$$ In particolare, $\int_a^a X_s \, dW_s = 0$.

Dunque, in generale, se $m, n \in \{0, \ldots, N\}$ sono quelli tali che $a \in [t_m, t_{m+1})$ e $b \in [t_n, t_{n+1})$, oppure $b \in [t_N, T]$ se $n = N$, così naturalmente $m \leq n$, e se N è grande abbastanza affinché $m+1 < n$, allora semplicemente

$$\int_a^b X_s \, dW_s = X_{t_m}(W_{t_{m+1}} - W_a) + \sum_{i=m+1}^{n-1} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + X_{t_n}(W_b - W_{t_n}).$$

In particolare, ~~(se $N \geq 2$, allora)~~ $\int_0^T X_s \, dW_s = \sum_{i=0}^{N} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$.

È possibile verificare le seguenti proprietà basilari dell'integrale stocastico secondo ITO di un processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$.

- La v.a.r. $\int_a^b X_s \, dW_s$ è $\mathcal{F}_b$-misurabile.
- Siano $X \doteq (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ e $Y \doteq (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ due processi elementari rispetto a $\mathbb{F}$. Allora anche "$X+Y$" $\doteq (X_t + Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$, e vale
$$\int_a^b (X_s + Y_s) \, dW_s = \int_a^b X_s \, dW_s + \int_a^b Y_s \, dW_s.$$
Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora anche $\lambda X \doteq (\lambda X_t)_{t \leq T}$ è un processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$ e
$$\int_a^b (\lambda X_s) \, dW_s = \lambda \int_a^b X_s \, dW_s.$$

$\boxed{\text{NOTA}}$ $\int_a^b dW_s = W_b - W_a$, ed in particolare $\int_0^b dW_s = W_b$. ($\boxed{\text{OSS}}$ NON è vero che, se $X \geq 0$, allora $\int_a^b X_s \, dW_s \geq 0$!)

- Per ogni $c \in [a,b]$, $\int_a^b X_s \, dW_s = \int_a^c X_s \, dW_s + \int_c^b X_s \, dW_s$.

- Se X è ($\mathbb{P}$-)integrabile, allora anche $\int_a^b X_s \, dW_s$ è ($\mathbb{P}$-)integrabile e vale $\mathbb{E}[\int_a^b X_s \, dW_s] = 0$. Se X è di quadrato integrabile, allora anche $\int_a^b X_s \, dW_s$ è di quadrato integrabile e vale la seguente formula per il suo momento secondo (o varianza):

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s \, dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_s^2 \, ds\right]} \left(= \int_\Omega d\mathbb{P}(\omega) \int_a^b X^2(\omega, s) \, ds\right) \left(= \int_a^b \mathbb{E}[X_s^2] \, ds\right).$$

Tale uguaglianza è la isometria di ITO.
Più in generale, sempre se X è di quadrato integrabile, vale che

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_s \, dW_s \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s \, dW_s\right)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_s^2 \, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_a\right].$$

Una conseguenza è che, se X è di quadrato integrabile, allora il processo $\left(\int_0^t X_s \, dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ è una $\mathbb{F}$-martingala di quadrato integrabile e nulla in zero, mentre il processo $\left(\left(\int_0^t X_s \, dW_s\right)^2 - \int_0^t X_s^2 \, ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ è una $\mathbb{F}$-martingala nulla in zero.

$\boxed{\text{Classe } M_W^2(a,b)}$ È costituita da tutti e soli quei processi reali $X \doteq (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ progressivamente misurabili rispetto a $\mathbb{F}$ tali che risulti

$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_s^2 \, ds\right] < \infty$. Dunque ogni processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$ che sia di quadrato integrabile è certamente un processo in $M_W^2(a,b)$.

Il risultato fondamentale d'integrazione stocastica secondo ITO a riguardo della classe $M^2_W(a,b)$ è che, per ogni $X \in M^2_W(a,b)$, esiste almeno una successione di processi elementari rispetto a $\mathbb{F}$ e di quadrato integrabili $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che risulti

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b (X_s - X_s^{(n)})^2 ds\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, ed inoltre per ognuna di tali successioni "convergenti"

risulta che la successione di v.a.r. di quadrato integrabili $\left(\int_a^b X_s^{(n)} dW_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente (per $n\to\infty$) in $L^2(\mathbb{P})$ al medesimo elemento di $L^2(\mathbb{P})$: per definizione, tale comune limite in $L^2(\mathbb{P})$ è "l'integrale stocastico secondo ITO su $[a,b]$ del processo X", indicato di nuovo come "$\int_a^b X_s dW_s$".

Non solo: si estendono facilmente tutte le proprietà basilari dell'integrale stocastico secondo ITO or ora elencate. In particolare, per ogni $X \in M^2_W(a,b)$, vale l'isometria di ITO

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_s^2 ds\right]$$, ed anzi, per ogni altro $Y \in M^2_W(a,b)$, vale

$$\mathrm{Cov}\left[\int_a^b X_s dW_s, \int_a^b Y_s dW_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s dW_s\right)\left(\int_a^b Y_s dW_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_s Y_s ds\right]$$; inoltre, ancora

$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_{0\le t\le T}$ e $\left(\left(\int_0^t X_s dW_s\right)^2 - \int_0^t X_s^2 ds\right)_{0\le t\le T}$ sono $\mathbb{F}$-martingale nulle in zero, se

$X \in M^2_W(0,T)$.

A questo punto, il risultato importante è che, per ogni $X \in M^2_W(0,T)$, esiste una "versione (o modifica) continua della $\mathbb{F}$-martingala di quadrato integrabile (nulla in zero)

$\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_{0\le t\le T}$, che indicheremo sempre con la medesima notazione, e questa

martingala continua ammette come variazione quadratica esattamente $\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)_{0\le t\le T}$:

in simboli, $$\left[\left(\int_0^t X_s dW_s\right)_{0\le t\le T}\right]_t = \int_0^t X_s^2 ds$$ per ogni $t \in [0,T]$.

$\boxed{\text{OSS}}$ Se W' è un altro processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$, allora $M^2_W(a,b) = M^2_{W'}(a,b)$. Se W e W' sono indipendenti, allora per ogni $X, X' \in M^2_W(a,b)$ è

$$\mathrm{Cov}\left[\int_a^b X_s dW_s, \int_a^b X'_s dW'_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s dW_s\right)\left(\int_a^b X'_s dW'_s\right)\right] = 0 .$$

$\boxed{\text{Classe } \Lambda^2_W(a,b)}$ È costituita da tutti e soli quei processi reali $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ progressivamente misurabili rispetto a $\mathbb{F}$ tali che risulti

$\int_a^b X_s^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-q.c. Dunque ogni processo in $M^2_W(a,b)$ è a maggior ragione in $\Lambda^2_W(a,b)$, e anche ogni processo elementare rispetto a $\mathbb{F}$ è in $\Lambda^2_W(a,b)$.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Più avanti capiterà di lavorare con processi reali $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ progressivamente misurabili rispetto a $\mathbb{F}$ tali che risulti

$\int_a^b |X_s| ds < \infty$ $\mathbb{P}$-q.c.: processi X cioè nella classe "$\Lambda^1_W(a,b)$". Dunque $\Lambda^2_W(a,b) \subsetneq \Lambda^1_W(a,b)$

Il risultato fondamentale d'integrazione stocastica secondo ITO a riguardo della classe $\Lambda^2_W(a,b)$ è che, per ogni $X \in \Lambda^2_W(a,b)$, esiste almeno una successione di processi

elementari rispetto a $\mathbb{F}$ $(X^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ tale che risulti
$\int_a^b (X_s - X_s^{(m)})^2 ds \xrightarrow[m\to\infty]{P} 0$, ed inoltre per ognuna di tali successioni convergenti risulta che la successione di v.a.r. $(\int_a^b X_s^{(m)} dW_s)_{m\in\mathbb{N}}$ sia convergente (per $m\to\infty$) in probabilità alla medesima v.a.r. (ossia al medesimo elemento di $L^0(P)$): per definizione, tale comune limite in probabilità è "l'integrale stocastico secondo Itô su $[a,b]$ del processo X", indicato di nuovo come "$\int_a^b X_s dW_s$".

Delle proprietà basilari dell'integrale stocastico secondo Itô prima elencate restano vere in generale solo "le primissime", ed in effetti a questo punto il risultato importante è che, per ogni $X \in \Lambda^2_W(0,T)$, esiste una versione continua del processo reale (nullo in zero) $(\int_0^t X_s dW_s)_{0\le t\le T}$, che indicheremo sempre con la medesima notazione, e questo processo modificato è in realtà una $\mathbb{F}$-martingala "locale" (nulla in zero): questo significa che esiste una successione non decrescente di tempi di arresto $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ rispetto a $\mathbb{F}$ con $\tau_m \uparrow T$ P-q.c. tale che, per ogni $m\in\mathbb{N}$, il processo arrestato $(\int_0^{t\wedge\tau_m} X_s dW_s)_{0\le t\le T}$ sia una $\mathbb{F}$-martingala. In particolare, tale processo ammette variazione quadratica.

Sia $d\in\mathbb{N}$, $d\ge 2$, e sia $W \doteq (W_t^{(1)},\dots,W_t^{(d)})_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ d-dimensionale che consideriamo solo per tempi in $[0,T]$. Siano, $\forall j=1,\dots,d$, $W^{(j)} \doteq (W_t^{(j)})_{0\le t\le T}$. Per ogni processo in $\mathbb{R}^d$ $X \doteq (X_t^{(1)},\dots,X_t^{(d)})_{0\le t\le T}$ tale che, $\forall j=1,\dots,d$, il processo reale $X^{(j)} \doteq (X_t^{(j)})_{0\le t\le T}$ sia in $\Lambda^2_{W^{(j)}}(0,T)$, l'integrale stocastico secondo Itô su $[a,b]$ del processo X è la v.a.r.

$\int_a^b X_s \cdot dW_s \doteq \sum_{j=1}^d \int_a^b X_s^{(j)} dW_s^{(j)}$, per cui $(\int_0^t X_s\cdot dW_s)_{0\le t\le T}$ resta una $\mathbb{F}$-martingala locale continua e nulla in zero. Nel caso $X^{(j)} \in M^2_{W^{(j)}}(0,T)$ per ogni $j=1,\dots,d$, tale processo è una "vera" $\mathbb{F}$-martingala continua (e nulla in zero), ed inoltre è di quadrato integrabile con

$$E[(\int_0^t X_s\cdot dW_s)^2] = E[\int_0^t \|X_s\|^2_{2,\mathbb{R}^d} ds].$$

Sia ora $K\in\mathbb{N}$, $K\ge 2$, e consideriamo un processo in $\mathbb{R}^{K\times d}$ $X \doteq ((X_t^{(i,j)})_{\substack{i=1,\dots,K\\ j=1,\dots,d}})_{0\le t\le T}$. Siano quindi, per ogni $i=1,\dots,K$, $X^{(i,\cdot)} \doteq ((X_t^{(i,1)},\dots,X_t^{(i,d)}))_{0\le t\le T}$. Se $(X_t^{(i,j)})_{0\le t\le T}$ sono in $\Lambda^2_{W^{(j)}}(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,K$ e $j=1,\dots,d$, allora l'integrale stocastico secondo Itô su $[a,b]$ del processo X è la v.a. in $\mathbb{R}^K$

$\int_a^b X_s\cdot dW_s \doteq (\int_a^b X_s^{(1,\cdot)}\cdot dW_s, \dots, \int_a^b X_s^{(K,\cdot)}\cdot dW_s)$, ossia quella di componenti
$\int_a^b X_s^{(i,\cdot)}\cdot dW_s = \sum_{j=1}^d \int_a^b X_s^{(i,j)} dW_s^{(j)}$, $i=1,\dots,K$. Risulta per ciò che $(\int_0^t X_s\cdot dW_s)_{0\le t\le T}$ resta una $\mathbb{F}$-martingala in $\mathbb{R}^K$ locale, continua e nulla in zero, e che, se $(X_t^{(i,j)})_{0\le t\le T}$ sono in $M^2_{W^{(j)}}(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,K$ e $j=1,\dots,d$, allora tale processo è una "vera" $\mathbb{F}$-martingala in $\mathbb{R}^K$ continua (e nulla in zero) e di quadrato integrabile con

$$E[\|\int_0^t X_s\cdot dW_s\|^2_{2,\mathbb{R}^K}] = E[\int_0^t \|X_s\|^2_{2,\mathbb{R}^{K\times d}} ds].$$

$\boxed{\text{PROCESSI DI ITO}}$ Sia $(\Omega,\mathcal{F},P)$ uno spazio di probabilità, sia $T>0$, sia $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ una filtrazione (con $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$) e sia $W=(W_t)_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$. Un processo reale $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ adattato a $\mathbb{F}$ è un "processo di ITO reale" se esistono $b=(b_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^1_W(0,T)$ e $\sigma=(\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ tali per cui sussiste la decomposizione (additiva)

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dW_s \quad \text{per ogni } t\in[0,T]$$

In tal caso, possiamo sfruttare la più comoda notazione "differenziale" $\boxed{dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t}$ o anche "$dX = b\,dt + \sigma\,dW_t$". Inoltre, sempre in tal situazione, ~~visto che~~ $(\int_0^t b_s\,ds)_{0\le t\le T}$ è un processo reale $\mathbb{F}$-adattato, continuo e a variazione limitata è anche a variazione quadratica nulla, mentre invece $(\int_0^t \sigma_s\,dW_s)_{0\le t\le T}$ è una $\mathbb{F}$-martingala locale continua e quindi con variazione quadratica, e che inoltre sono entrambi processi nulli in zero, possiamo affermare che un processo di ITO reale è una speciale $\mathbb{F}$-semimartingala, quindi come tale la sua decomposizione additiva sopra scritta è (essenzialmente) unica. Inoltre si tratta in particolare di un processo continuo.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Ha perfettamente senso considerare la covariazione dei due processi reali $(\int_0^t b_s\,ds)_{0\le t\le T}$ e $(\int_0^t \sigma_s\,dW_s)_{0\le t\le T}$, giacché entrambi ammettono variazione quadratica, e risulta

$$\left[\left(\int_0^t b_s\,ds\right)_{0\le t\le T}, \left(\int_0^t \sigma_s\,dW_s\right)_{0\le t\le T}\right]_t \equiv 0 \ (P\text{-q.c.}) \quad \text{per ogni } t\in[0,T].$$

Per un processo di ITO reale $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ scritto come su, è possibile dimostrare che X ammette variazione quadratica data da

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2\,ds \quad \text{per ogni } t\in[0,T].$$

In effetti, i tre processi reali $(\int_0^t b_s\,ds)_{0\le t\le T}$, $(\int_0^t \sigma_s\,dW_s)_{0\le t\le T}$ e $(\int_0^t \sigma_s^2\,ds)_{0\le t\le T}$ sono a loro volta processi di ITO reali, ed in particolare vale

$$[X]_t = \left[\left(\int_0^t \sigma_s\,dW_s\right)_{0\le t\le T}\right]_t = \int_0^t \sigma_s^2\,ds \quad \text{per ogni } t\in[0,T].$$

Pertanto, se $dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$, allora $d(\int_0^t b_s\,ds) = b_t\,dt$, $d(\int_0^t \sigma_s\,dW_s) = \sigma_t\,dW_t$ e

$$d[X]_t = \sigma_t^2\,dt.$$

A questo punto, indichiamo brevemente $V_t = \int_0^t b_s\,ds$ e $M_t = \int_0^t \sigma_s\,dW_s$, $t\in[0,T]$, per cui appunto $(V_t)_{0\le t\le T}$ e $(M_t)_{0\le t\le T}$ sono entrambi processi di ITO reali e ammettono come tali variazione quadratica. Di conseguenza, possiamo integrare "attraverso" le rispettive traiettorie secondo Young–Stieltjes ottenendo precisamente quanto segue:

per ogni processo reale $\Phi=(\Phi_t)_{0\le t\le T}$ progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$ tale che $(\Phi_t b_t)_{0\le t\le T}$ sia sempre in $\Lambda^1_W(0,T)$ e $(\Phi_t\sigma_t)_{0\le t\le T}$ sia sempre in $\Lambda^2_W(0,T)$, valgono le formule

$$\int_0^t \Phi_s\,dV_s = \int_0^t \Phi_s b_s\,ds \quad \text{e} \quad \int_0^t \Phi_s\,dM_s = \int_0^t \Phi_s \sigma_s\,dW_s \quad \text{per ogni } t\in[0,T]$$

Pertanto, equivalentemente, $\boxed{\int_0^t \Phi_s\,dX_s = \int_0^t \Phi_s b_s\,ds + \int_0^t \Phi_s \sigma_s\,dW_s}$, e resta un processo di ITO reale.

In particolare, tale formula vale per ogni processo reale $\Phi=(\Phi_t)_{0\le t\le T}$ che sia adattato a $\mathbb{F}$ e continuo.

Più in generale, sia $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, e sia $W \doteq (W^{(1)}_t, \dots, W^{(d)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ d-dimensionale, del quale indichiamo $W^{(j)} \doteq (W^{(j)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ per ogni $j = 1, \dots, d$. Abbiamo: un processo reale $X \doteq (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ adattato a $\mathbb{F}$ è "un processo di Itô reale" pure se esistono $b \doteq (b_t)_{0 \leq t \leq T}$ in $\Lambda^1_W(0,T)$ ed un processo in $\mathbb{R}^d$ $\sigma \doteq ((\sigma^{(1)}_t, \dots, \sigma^{(d)}_t))_{0 \leq t \leq T}$ con $\sigma^{(j)} \doteq (\sigma^{(j)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ per ogni $j = 1, \dots, d$ tali per cui sussiste la decomposizione

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \cdot dW_s \, , = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{(j)}_s \, dW^{(j)}_s \, , \quad \text{per ogni } t \in [0,T].$$

In tal caso, la notazione differenziale diviene $dX_t = b_t \, dt + \sigma_t \cdot dW_t$, $= b_t \, dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{(j)}_t \, dW^{(j)}_t$.

Inoltre, sempre in tale situazione, indicando brevemente $V_t \doteq \int_0^t b_s \, ds$ e $M_t \doteq \int_0^t \sigma_s \cdot dW_s$, $t \in [0,T]$, abbiamo di nuovo che $V \doteq (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un processo reale $\mathbb{F}$-adattato e nullo in zero, continuo e a variazione limitata, quindi a variazione quadratica nulla, mentre invece che $M \doteq (M_t)_{0 \leq t \leq T}$ è una $\mathbb{F}$-martingala locale nulla in zero e continua, quindi con variazione quadratica, e pertanto il processo di Itô reale X è una $\mathbb{F}$-semimartingala e quindi è continuo e con decomposizione suddetta (essenzialmente) unica. In più, vale che $[V, M]_t = 0$ per ogni $t \in [0,T]$ e che X ammette variazione quadratica data da

$$[X]_t = [M]_t = \sum_{j=1}^d \int_0^t (\sigma^{(j)}_s)^2 \, ds = \int_0^t \|\sigma_s\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \, ds \quad \text{per ogni } t \in [0,T].$$

Detto tutto questo, i tre processi reali V, M e $[X]$ risultano a maggior ragione processi di Itô reali, con precisamente

$$dV_t = b_t \, dt \, , \quad dM_t = \sigma_t \cdot dW_t = \sum_{j=1}^d \sigma^{(j)}_t \, dW^{(j)}_t \quad \text{e} \quad d[X]_t = \|\sigma_t\|^2_{2,\mathbb{R}^d} \, dt \, .$$

Infine, per ogni processo reale $\Phi \doteq (\Phi_t)_{0 \leq t \leq T}$ progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$ tale che $(\Phi_t b_t)_{0 \leq t \leq T}$ sia sempre in $\Lambda^1_W(0,T)$ e $(\Phi_t \sigma^{(j)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ sia sempre in $\Lambda^2_W(0,T)$ per ogni $j = 1, \dots, d$, vale la formula $\int_0^t \Phi_s \, dX_s = \int_0^t \Phi_s b_s \, ds + \int_0^t \Phi_s \sigma_s \cdot dW_s \, , = \int_0^t \Phi_s b_s \, ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi_s \sigma^{(j)}_s \, dW^{(j)}_s$, e resta un processo di Itô reale.

Ancor più in generale, sia $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 2$, e sia $X \doteq ((X^{(1)}_t, \dots, X^{(K)}_t))_{0 \leq t \leq T}$ un processo in $\mathbb{R}^K$ adattato a $\mathbb{F}$. Allora X è "un processo di Itô in $\mathbb{R}^K$" se tutte le sue componenti $X^{(i)} \doteq (X^{(i)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ sono processi di Itô reali, $i = 1, \dots, K$: precisamente se esistono

$b \doteq ((b^{(1)}_t, \dots, b^{(K)}_t))_{0 \leq t \leq T}$ con $b^{(i)} \doteq (b^{(i)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ in $\Lambda^1_W(0,T)$ per ogni $i = 1, \dots, K$ e

$\sigma \doteq ((\sigma^{(i,j)}_t)_{\substack{i=1,\dots,K \\ j=1,\dots,d}})_{0 \leq t \leq T}$ con $(\sigma^{(i,j)}_t)_{0 \leq t \leq T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ per ogni $i = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, d$, del

quale indichiamo $\sigma^{(i,\cdot)} \doteq ((\sigma^{(i,1)}_t, \dots, \sigma^{(i,d)}_t))_{0 \leq t \leq T}$ per ogni $i = 1, \dots, K$, tale per cui sussiste

la decomposizione $X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \cdot dW_s$ per ogni $t \in [0,T]$, ossia in componente

$$X^{(i)}_t = X^{(i)}_0 + \int_0^t b^{(i)}_s \, ds + \int_0^t \sigma^{(i,\cdot)}_s \cdot dW_s \, , = X^{(i)}_0 + \int_0^t b^{(i)}_s \, ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma^{(i,j)}_s \, dW^{(j)}_s \, , \quad i = 1, \dots, K, \ t \in [0,T].$$

In tal caso, la notazione differenziale diviene $dX_t = b_t \, dt + \sigma_t \cdot dW_t$, o più

esplicitamente $dX^{(i)}_t = b^{(i)}_t \, dt + \sigma^{(i,\cdot)}_t \cdot dW_t = b^{(i)}_t \, dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{(i,j)}_t \, dW^{(j)}_t$ per ogni $i = 1, \dots, K$.

Inoltre, sempre in tale situazione, il processo di Itô in $\mathbb{R}^K$ X è una $\mathbb{F}$-semimartingala in $\mathbb{R}^K$, e come tale è continuo ~~e ammette~~ con decomposizione (essenzialmente) unica. In più, tutte le componenti di X, $X^{(i)}$ per $i = 1, \dots, K$, ammettono variazione quadratica data da

$[X^{(i)}]_t = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t (\sigma_s^{(i,j)})^2 ds$ per ogni $i=1,\dots,k$ e $t\in[0,T]$, e più in generale

$[X^{(i)}, X^{(h)}]_t = \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_s^{(i,j)}\sigma_s^{(h,j)} ds = \int_0^t (\sigma_s\cdot\sigma_s^T)_{i,h} ds$, $i,h=1,\dots,k$, $t\in[0,T]$.

In particolare $d[X^{(i)}, X^{(h)}]_t = \sum_{j=1}^{d}\sigma_t^{(i,j)}\sigma_t^{(h,j)} dt$.

Infine, per ogni processo reale $\Phi=(\Phi_t)_{0\le t\le T}$ progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$ tale che $(\Phi_t b_t^{(i)})_{0\le t\le T}\in\Lambda_W^1(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,k$ e tale che $(\Phi_t\sigma_t^{(i,j)})_{0\le t\le T}\in\Lambda_W^2(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,k$ e $j=1,\dots,d$, vale la formula $\int_0^t \Phi_s dX_s = \int_0^t \Phi_s b_s ds + \int_0^t \Phi_s\sigma_s\cdot dW_s$, $\forall t\in[0,T]$, cioè i componenti $\int_0^t \Phi_s dX_s^{(i)} = \int_0^t \Phi_s b_s^{(i)} ds + \int_0^t \Phi_s\sigma_s^{(i)}\cdot dW_s = \int_0^t \Phi_s b_s^{(i)} ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \Phi_s\sigma_s^{(i,j)} dW_s^{j}$, $i=1,\dots,k$, $t\in$ e risulta un processo di Itô in $\mathbb{R}^k$.

FORMULA DI ITO Sia $(\Omega,\mathcal{B},P)$ uno spazio di probabilità, sia $T>0$, sia $\mathbb{F}=(\mathcal{B}_t)_{0\le t\le T}$ una filtrazione (con $\mathcal{B}_T=\mathcal{B}$), sia $W=(W_t)_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ e sia $X=(X_t)_{0\le t\le T}$ un processo di Itô reale della forma

$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$, $t\in[0,T]$, per opportuni (ed univocamente determinati)

$b=(b_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda_W^1(0,T)$ e $\sigma=(\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda_W^2(0,T)$. Più brevemente, insomma,

$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$. Allora, come già ricordato, X ammette variazione quadratica

$[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$, ossia $d[X]_t = \sigma_t^2 dt$.

Il primo risultato che richiamiamo garantisce che, per ogni funzione $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe $C_R^2(\mathbb{R})$, o più precisamente $f\in C_R^2(\mathbb{R})$, pure $f(X)=(f(X_t))_{0\le t\le T}$ è un processo di Itô reale ed infatti la sua decomposizione risulta dalla formula di Itô:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds \quad , =$$

$$= f(X_0) + \int_0^t \left[f'(X_s)b_s + \frac{f''(X_s)}{2}\sigma_s^2\right]ds + \int_0^t f'(X_s)\sigma_s dW_s \quad , t\in[0,T], \text{ o anche}$$

$$\boxed{df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{f''(X_t)}{2}\sigma_t^2 dt = f'(X_t)dX_t + \frac{f''(X_t)}{2}d[X]_t} \quad , t\in[0,T],$$

ed in particolare $[f(X)]_t = \int_0^t (f'(X_s)\sigma_s)^2 ds$, $\forall t\in[0,T]$, o anche $d[f(X)]_t = (f'(X_t)\sigma_t)^2 dt$.

NOTA È possibile ricavarsi velocemente questa formula di Itô per il processo $f(X)$ mediante uno sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Peano ma del tutto "euristico", che funziona considerando $(dW_t)^2 \approx dt$ e, rispetto a tale, $(dt)^2\approx 0$ e soprattutto $dt\, dW_t \approx 0$. Infatti seguirebbe subito che

$\boxed{(dX_t)^2 \approx d[X]_t}$, perché' appunto $(dX_t)^2 = (b_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = b_t^2(dt)^2 +$

$+ 2b_t\sigma_t dt\, dW_t + \sigma_t^2(dW_t)^2 \approx \sigma_t^2 dt = d[X]_t$, e per ciò sviluppando

$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 + o((dX_t)^2) = f'(X_t)dX_t + \frac{f''(X_t)}{2}d[X]_t + o(dt)$

Più in generale, per ogni funzione $f(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe $C^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ nella prima variabile t e di classe $C^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ nella seconda variabile x, pure $f(\cdot,X) \doteq (f(t,X_t))_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale con decomposizione data dalla "formula di ITO" [5]

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\,\sigma_s^2\,ds\,, =$$

$$= f(0,X_0) + \int_0^t \Big[\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,b_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\,\sigma_s^2\Big]ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,\sigma_s\,dW_s,$$

$t\in[0,T]$, o anche $\boxed{df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\,d[X]_t}$, ed in particolare $d[f(\cdot,X)]_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,\sigma_t\right)^2 dt$.

Più in generale, sia $d\in\mathbb{N}$, $d\ge 2$, e sia $W \doteq ((W_t^{(1)},\dots,W_t^{(d)}))_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ d-dimensionale, del quale indichiamo $W^{(j)} \doteq (W_t^{(j)})_{0\le t\le T}$ per ogni $j=1,\dots,d$. Sia quindi $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ un processo di ITO reale della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\cdot dW_s = X_0 + \int_0^t b_s\,ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_s^{(j)}\,dW_s^{(j)}\,,\ t\in[0,T],$$ per opportuni (ed unici) $b\doteq(b_t)_{0\le t\le T}\in\Lambda^1_W(0,T)$ e $\sigma\doteq((\sigma_t^{(1)},\dots,\sigma_t^{(d)}))_{0\le t\le T}$ avente $\sigma^{(j)}\doteq(\sigma_t^{(j)})_{0\le t\le T}\in\Lambda^2_{W^{(j)}}(0,T)$ per ogni $j=1,\dots,d$. Più brevemente, insomma, $dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\cdot dW_t = b_t\,dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_t^{(j)}dW_t^{(j)}$.

Allora, come già ricordato, X ammette variazione quadratica $d[X]_t = \sum_{j=1}^{d}(\sigma_t^{(j)})^2 dt$.

Ebbene, quale che sia $F(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe $C^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ in t e $C^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ in x, pure $F(\cdot,X) \doteq (F(t,X_t))_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale con decomposizione data dalla "formula di ITO"

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\sum_{j=1}^{d}(\sigma_s^{(j)})^2 ds\,, =$$

$$= F(0,X_0) + \int_0^t\Big[\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s) + \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,b_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\sum_{j=1}^{d}(\sigma_s^{(j)})^2\Big]ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,\sigma_s^{(j)}\,dW_s^{(j)},$$

$t\in[0,T]$, o anche $\boxed{dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)\,d[X]_t}$, ed in particolare $d[F(\cdot,X)]_t = \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)\,\sigma_t^{(j)}\right)^2 dt$.

Ancor più in generale, sia $K\in\mathbb{N}$, $K\ge 2$, e sia $X \doteq ((X_t^{(1)},\dots,X_t^{(K)}))_{0\le t\le T}$ un processo di ITO in $\mathbb{R}^K$ avente componenti $X^{(i)} \doteq (X_t^{(i)})_{0\le t\le T}$ della forma

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_s^{(i)}\,ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_s^{(i,j)}\,dW_s^{(j)}\,,\ t\in[0,T],$$ per opportuni (ed unici) $(b_t^{(i)})_{0\le t\le T}\in\Lambda^1_W(0,T)$ e $(\sigma_t^{(i,j)})_{0\le t\le T}\in\Lambda^2_{W^{(j)}}(0,T)$, $i=1,\dots,K$ e $j=1,\dots,d$. Più brevemente, insomma, $dX_t^{(i)} = b_t^{(i)}dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_t^{(i,j)}dW_t^{(j)}$ per ogni $i=1,\dots,K$. Allora, come già ricordato, $X^{(i)}$ ammette variazione quadratica $d[X^{(i)}]_t = \sum_{j=1}^{d}(\sigma_t^{(i,j)})^2 dt$, $i=1,\dots,K$, e più in generale $d[X^{(i)},X^{(h)}]_t = \sum_{j=1}^{d}\sigma_t^{(i,j)}\sigma_t^{(h,j)}dt = (\sigma_t\cdot\sigma_t^{T})_{i,h}\,dt$, $i,h=1,\dots,K$, se $\sigma\doteq\big((\sigma_t^{(i,j)})_{\substack{i=1,\dots,K\\ j=1,\dots,d}}\big)_{0\le t\le T}$

Ebbene, quale che sia $F(t,x_1,\dots,x_K) : [0,T]\times\mathbb{R}^K\to\mathbb{R}$, di classe $C^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ nella t e di classe $C^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^K)$ in $(x_1,\dots,x_K)$, il processo reale "$F(\cdot,X)$" $\doteq (F(t,X_t^{(1)},\dots,X_t^{(K)}))_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale con decomposizione data dalla "formula di ITO"

$$F(t,X_t) = F(0,X_0) + \int_0^t\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \int_0^t\sum_{i=1}^{K}\frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s)\,dX_s^{(i)} + \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i,h=1}^{K}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_h}(s,X_s)\sum_{j=1}^{d}(\sigma_s^{(i,j)}\sigma_s^{(h,j)})\,ds\ , =$$

$= F(0,X_0) + \int_0^t \left[\frac{\partial F}{\partial t}(s,X_s) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s)\, b_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,h=1}^k \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_h}(s,X_s)\,\sigma_s^{(i,j)}\sigma_s^{(h,j)} \right] ds + \int_0^t \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,X_s) \sum_{j=1}^d \sigma_s^{(i,j)}\, dW_s^{(j)}$,

$t\in[0,T]$, e anche $\boxed{dF(t,X_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,X_t)\,dX_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,h=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_h}(t,X_t)\, d[X^{(i)},X^{(h)}]_t}$, e

in particolare $d[F(\cdot,X)]_t = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,X_t)\,\sigma_t^{(i,j)}\right)^2 dt$.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Considerando fra l'altro $dW_t^{(j)}\, dW_t^{(j')} \approx 0$ per ogni $j \neq j'$ in $\{1,\dots,d\}$, possiamo pensare che

$dX_t^{(i)}\, dX_t^{(h)} \approx d[X^{(i)},X^{(h)}]_t$ per ogni $i,h = 1,\dots,k$.

Nel termine $\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,h=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_h}(s,X_s) \sum_{j=1}^d \sigma_s^{(i,j)}\sigma_s^{(h,j)}\, ds$, ossia $\frac{1}{2}\sum_{i,h=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_h}(t,X_t)\sum_{j=1}^d \sigma_t^{(i,j)}\sigma_t^{(h,j)}\, dt$, eccettuato con $k=1$ e $d=1$, c'è la correzione di Itô nella formula di Itô, e la si può scrivere più compattamente osservando che, per ogni $A,B\in\mathbb{R}^{k\times k}$, $\text{Traccia}(AB) = \sum_{i=1}^k (AB)_{ii} =$
$= \sum_{i=1}^k\sum_{h=1}^k A_{i,h}B_{h,i}$, da cui per A e B simmetriche

$\text{Traccia}(AB) = \text{Traccia}(BA) = \sum_{i,h=1}^k A_{i,h}B_{i,h}$, e così

$$\sum_{i,h=1}^k \frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_h}(t,X_t)\sum_{j=1}^d \sigma_t^{(i,j)}\sigma_t^{(h,j)} = \text{Traccia}\left(D^2F(t,X_t)(\sigma_t\sigma_t^T)\right) = \text{Traccia}\left(\sigma_t\sigma_t^T D^2F(t,X_t)\right).$$

$\boxed{\text{Caso } d=k=2.}$ Sia $W = ((W_t^{(1)},W_t^{(2)}))_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener rispetto a $\mathcal{F}$ 2-dimensionale, del quale indichiamo $W^{(1)} = (W_t^{(1)})_{0\le t\le T}$ e $W^{(2)} = (W_t^{(2)})_{0\le t\le T}$, e sia $((X_t,Y_t))_{0\le t\le T}$ un processo di Itô in $\mathbb{R}^2$ di componenti $X = (X_t)_{0\le t\le T}$ e $Y = (Y_t)_{0\le t\le T}$ della forma

$X_t = X_0 + \int_0^t b_s^{(1)}\, ds + \int_0^t \sigma_s^{(1,1)}\, dW_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{(1,2)}\, dW_s^{(2)}$, $t\in[0,T]$, e

$Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s^{(2)}\, ds + \int_0^t \sigma_s^{(2,1)}\, dW_s^{(1)} + \int_0^t \sigma_s^{(2,2)}\, dW_s^{(2)}$, $t\in[0,T]$, per opportuni (ed unici)

$(b_t^{(1)})_{0\le t\le T}$, $(b_t^{(2)})_{0\le t\le T}$ in $\Lambda_W^1(0,T)$, $(\sigma_t^{(1,1)})_{0\le t\le T}$, $(\sigma_t^{(2,1)})_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W^{(1)}}(0,T)$ e $(\sigma_t^{(1,2)})_{0\le t\le T}$, $(\sigma_t^{(2,2)})_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W^{(2)}}(0,T)$. Più brevemente, insomma,

$dX_t = b_t^{(1)}\, dt + \sigma_t^{(1,1)}\, dW_t^{(1)} + \sigma_t^{(1,2)}\, dW_t^{(2)}$ e $dY_t = b_t^{(2)}\, dt + \sigma_t^{(2,1)}\, dW_t^{(1)} + \sigma_t^{(2,2)}\, dW_t^{(2)}$. Allora sappiamo che sia X che Y ammettono variazione quadratica data da

$d[X]_t = (\sigma_t^{(1,1)})^2\, dt + (\sigma_t^{(1,2)})^2\, dt$ e $d[Y]_t = (\sigma_t^{(2,1)})^2\, dt + (\sigma_t^{(2,2)})^2\, dt$, e covariazione

$d[X,Y]_t = d[Y,X]_t = \sigma_t^{(1,1)}\sigma_t^{(2,1)}\, dt + \sigma_t^{(1,2)}\sigma_t^{(2,2)}\, dt$. Inoltre, quale che sia

$F(t,x,y) : [0,T]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1([0,T])$ nella t e di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ in (x,y), il processo reale $(F(t,X_t,Y_t))_{0\le t\le T}$ è un processo di Itô reale di decomposizione data dalla formula di Itô in notazione differenziale

$$dF(t,X_t,Y_t) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t,Y_t)\, dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t,Y_t)\, dX_t + \frac{\partial F}{\partial y}(t,X_t,Y_t)\, dY_t +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t,Y_t)\underset{((dX_t)^2)}{\underset{\parallel}{d[X]_t}} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(t,X_t,Y_t)\underset{((dX_t dY_t))}{\underset{\parallel}{d[X,Y]_t}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t,X_t,Y_t)\underset{((dY_t)^2)}{\underset{\parallel}{d[Y]_t}}$$

In particolare, $d\left[(F(t,X_t,Y_t))_{0\le t\le T}\right]_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t,Y_t)^2\left((\sigma_t^{(1,1)})^2 + (\sigma_t^{(1,2)})^2\right) dt +$
$+ \frac{\partial F}{\partial y}(t,X_t,Y_t)^2\left((\sigma_t^{(2,1)})^2 + (\sigma_t^{(2,2)})^2\right) dt$.

VARIE APPLICAZIONI ELEMENTARI su processi di Wiener, integrazione stocastica secondo ITO, processi di ITO e formula di ITO, in naturale continuazione rispetto alle precedenti sezioni (ed in particolare nelle medesime notazioni). 6

— Siano $W^{(1)} \doteq (W^{(1)}_t)_{0\le t\le T}$ e $W^{(2)} \doteq (W^{(2)}_t)_{0\le t\le T}$ due processi di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ che siano fra loro indipendenti, cioè essendo $\boxed{[W^{(1)},W^{(2)}]_t = 0}$ $\forall t\in[0,T]$ (caratterizzazione di Lévy). Allora, quale che sia $\rho\in[-1,1]$, esiste un altro processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ $\tilde W^{(2)} \doteq (\tilde W^{(2)}_t)_{0\le t\le T}$ tale che $[W^{(1)},\tilde W^{(2)}]_t = \rho t$, $t\in[0,T]$, ossia $\boxed{d[W^{(1)},\tilde W^{(2)}]_t = \rho\, dt}$, ed è

$$\tilde W^{(2)}_t \doteq \rho W^{(1)}_t + \sqrt{1-\rho^2}\, W^{(2)}_t, \quad t\in[0,T].$$

[È sufficiente convincersi che $(\tilde W^{(2)}_t)_{0\le t\le T}$ sia effettivamente un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$; ma questo è immediato per indipendenza di $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ e perché $(\rho)^2+(\sqrt{1-\rho^2})^2 = 1$.]

— Rapida conseguenza della formula di ITO: $dW_t^2 = 2W_t\,dW_t + dt$, o anche

$$\int_0^t W_s\,dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t). \quad ✓$$

— Siano $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ e $Y \doteq (Y_t)_{0\le t\le T}$ due processi di ITO reali. Allora anche il processo reale $XY \doteq (X_tY_t)_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale, e la sua decomposizione è data dalla formula di ITO "tipo integrazione per parti"

$$\boxed{d(X_tY_t) = Y_t\,dX_t + X_t\,dY_t + d[X,Y]_t}.$$

[Infatti questa è esattamente la formula di ITO "generale" per il processo in $\mathbb{R}^2$ $((X_t,Y_t))_{0\le t\le T}$, sviluppata eventualmente rispetto ad un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ che sia pluri-dimensionale, con $F(x,y) \doteq xy$, avente

$$\nabla F(x,y) = (y,x) \quad \text{e quindi} \quad D^2F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad]$$

— Sia $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ un processo di ITO reale "della forma" $dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$, e sia $Y \doteq (Y_t)_{0\le t\le T}$ un altro processo reale che supponiamo costante: indichiamo semplice con $Y_t \doteq$ "Y" per ogni $t\in[0,T]$, $Y\in L^0(\Omega)$. Allora, ovviamente, $Y=(Y)_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale se, e solo se, Y è $\mathcal{F}_0$-misurabile, ed in tal caso ha $dY_t = 0$ e quindi

$$d(X_tY_t) = \boxed{d(YX_t)} = Y\,dX_t = (Yb_t)\,dt + (Y\sigma_t)\,dW_t \quad \text{(integrazione per parti)}.$$

Riassumendo, dato $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ processo ~~reale adattato a $\mathbb{F}$~~ di ITO reale, vale $dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$ se, e solo se, per ogni v.a. Y $\mathcal{F}_0$-misurabile $d(YX_t) = (Yb_t)\,dt + (Y\sigma_t)\,dW_t$.

— Sia $Y \doteq (Y_t)_{0\le t\le T}$ un processo di ITO reale della forma $dY_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dW_t$, per cui (equivalentemente) "$-Y$" $\doteq (-Y_t)_{0\le t\le T}$ resta un processo di ITO reale, avendo ovviamente

$d(-Y_t) = -dY_t = (-b_t)\,dt + (-\sigma_t)\,dt$. In particolare $d[Y]_t = d[-Y]_t = \sigma_t^2\,dt$.
Allora anche il processo reale $e^Y \doteq (e^{Y_t})_{0\le t\le T}$ è un processo di ITO reale, e lo stesso per $e^{-Y} \doteq (e^{-Y_t})_{0\le t\le T}$, e precisamente

$$de^{Y_t} = e^{Y_t}\left[\left(b_t + \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt + \sigma_t\,dW_t\right] \quad \text{e (quindi)} \quad de^{-Y_t} = e^{-Y_t}\left[\left(-b_t + \frac{\sigma_t^2}{2}\right)dt - \sigma_t\,dW_t\right].$$

[Infatti la "prima" formula di ITO dà subito che $de^{Y_t} = e^{Y_t}\,dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t}\,d[Y]_t =$
$= e^{Y_t}\left[dY_t + \frac{1}{2}d[Y]_t\right]$, e effetto $d[Y]_t = \sigma_t^2\,dt$. ✓]

— Esiste uno ed un solo processo di ITO reale $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ tale che

$dX_t = X_t[b_t dt + \sigma_t dW_t]$ e $X(0)=X_0 = Y$ v.a.r. $\mathcal{F}_0$-misurabile arbitraria, ed è
$X_t \doteq Y \exp\left(\int_0^t (b_s - \frac{\sigma_s^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \right)$, $\forall t \in [0,T]$.
[Consideriamo il processo di Itô reale $Y_t \doteq \int_0^t (b_s - \frac{\sigma_s^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$, $\forall t \in [0,T]$, ossia tale che
$$dY_t = (b_t - \frac{\sigma_t^2}{2}) dt + \sigma_t dW_t \quad \text{e} \quad Y(0)=Y_0 \equiv 0 .$$
Allora, grazie al precedente risultato, anche $\exp(Y_t) = e^{Y_t}$ è un processo di Itô reale e vale
$$de^{Y_t} = e^{Y_t}[b_t dt + \sigma_t dW_t] \quad \text{e} \quad e^{Y_0} \equiv 1 .$$
Per ciò, quale che sia Y $\mathcal{F}_0$-mis., $(Y e^{Y_t})_{0\le t\le T}$ resta di Itô reale e vale
$$d(Y e^{Y_t}) = Y de^{Y_t} = Y e^{Y_t}[b_t dt + \sigma_t dW_t] \quad \text{e} \quad Y e^{Y_0} = Y .$$
In conclusione, ponendo allora $X_t \doteq (Y e^{Y_t})_{0\le t\le T}$, abbiamo che $(X_t)_{0\le t\le T}$ è di Itô e
$$d(X_t) = X_t[b_t dt + \sigma_t dW_t] \quad \text{e} \quad X_0 = Y . \quad \checkmark$$
Viceversa, supponiamo che un certo processo di Itô reale $(X_t)_{0\le t\le T}$ con $X_0 = Y$ abbia $dX_t = X_t[b_t dt + \sigma_t dW_t]$. Sempre grazie ai precedenti calcoli, abbiamo che
$$d(e^{-Y_t}) = e^{-Y_t}[(-b_t + \sigma_t^2) dt - \sigma_t dW_t] \quad \text{e} \quad e^{-Y_0} \equiv 1 ,$$ da cui allora, chiaramente
$$d[X, e^{-Y}]_t = -X_t e^{-Y_t} \sigma_t^2 dt$$ e di conseguenza (integrando per parti)
$$d(X_t e^{-Y_t}) = e^{-Y_t} dX_t + X_t de^{-Y_t} + d[X, e^{-Y}]_t = 0 ,$$ ossia per ogni $t \in [0,T]$
$$X_t e^{-Y_t} = X_0 \cdot e^{-Y_0} = X_0 = Y,$$ ossia $X_t = Y e^{Y_t}$ $\forall t \in [0,T]$, appunto. $\checkmark$]

Abbiamo allora verificato in dettaglio che, per un processo di Itô reale $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$, per una v.a.r. Y $\mathcal{F}_0$-misurabile, l'avere
$$\begin{cases} dX_t = X_t[b_t dt + \sigma_t dW_t] \\ X_0 = Y \end{cases}$$ equivale ad avere precisamente $X_t = Y e^{\int_0^t (b_s - \frac{\sigma_s^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s}$, $\forall t \in [0,T]$
Dunque, in tale situazione, se $\tilde{X} \doteq (\tilde{X}_t)_{0\le t\le T}$ è dato da $\tilde{X}_t \doteq e^{\int_0^t r(s) ds} \cdot X_t$, $\forall t \in [0,T]$ allora (equivalentemente)
$$\begin{cases} d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t[(b_t + r(t)) dt + \sigma_t dW_t] \\ \tilde{X}_0 = X_0 = Y \end{cases} \quad \checkmark$$
Altra immediata conseguenza per un tale X è che, se siano $b_t \equiv b$ e $\sigma_t \equiv \sigma$ costanti (reali), allora
$$\begin{cases} dX_t = X_t[b\, dt + \sigma dW_t] \\ X_0 = Y \end{cases} \iff X_t = Y e^{(b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$, $t \in [0,T]$, e dunque (ad esempio)
$$\begin{cases} d(e^{-rt} X_t) = (e^{-rt} X_t)[(b - r) dt + \sigma dW_t] \\ (e^{-rt} X_t)|_{t=0} = Y \end{cases} \quad \checkmark$$
In particolare, $\begin{cases} dX_t = \sigma X_t dW_t \\ X_0 = Y \end{cases} \iff X_t = Y e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$, $\forall t \in [0,T]$. $\checkmark$

Dato che siano $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ di Itô reale e $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ avente $\sigma_t \neq 0$ per ogni $t\in[0,T]$, le condizioni

$dX_t = \sigma_t\, dW_t$ equivale alla condizione $dW_t = \frac{1}{\sigma_t}\, dX_t$, o anche

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s\, dW_s,\quad t\in[0,T], \iff W_t = \int_0^t \frac{1}{\sigma_s}\, dX_s .$$

L'implicazione seria è $\Leftarrow$, la quale comunque è immediata: infatti, per ipotesi, X ammette una (sola) decomposizione $dX_t = b_t\,dt + \tilde\sigma_t\, dW_t$, così come W che ha $dW_t = 0\cdot dt + 1\cdot dW_t$; per ciò, imponendo appunto che $dW_t = \frac{1}{\sigma_t} dX_t$, otteniamo

$$0\,dt + 1\,dW_t = dW_t = \frac{b_t}{\sigma_t}\,dt + \frac{\tilde\sigma_t}{\sigma_t}\,dW_t ,$$ da cui $\frac{b_t}{\sigma_t} \equiv 0$ (cioè $b_t\equiv 0$) e $\frac{\tilde\sigma_t}{\sigma_t} \equiv 1$ (cioè $\tilde\sigma_t \equiv \sigma_t$), cioè $dX_t = \sigma_t\, dW_t$. ✓] $\left(\int_0^t dX_s = X_t - X_0\,!\right)$

DUE RISULTATI FONDAMENTALI della teoria dell'integrazione stocastica secondo ITÔ.

Sia $(\Omega,\mathcal{A},P)$ uno spazio di probabilità, sia $T>0$, sia $W \doteq (W_t)_{0\le t\le T}$ un processo di Wiener definito su Ω, e sia $\mathbb{F}^W \doteq (\mathcal{A}^W_t)_{0\le t\le T}$ la filtrazione generata da W. A questo punto, sia $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{A}_t)_{0\le t\le T}$ un'altra filtrazione su Ω rispetto alla quale W risulta un processo di Wiener (per cui $\mathbb{F}$ è più fine di $\mathbb{F}^W$), e consideriamo proprio $\mathbb{F}$ come filtrazione di riferimento.

- **Rappresentazione martingala.** Comunque presa una $\mathbb{F}^W$-martingala $M \doteq (M_t)_{0\le t\le T}$ continua e di quadrato integrabile, se $\boxed{\mathbb{F} = \mathbb{F}^W}$ allora esiste uno (ed ess. un solo) processo reale $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $M^2_W(0,T)$ tale per cui sussiste la rappresentazione

$$\boxed{M_t = M_0 + \int_0^t \sigma_s\, dW_s},\quad t\in[0,T],$$ ed in particolare M è un processo di Itô reale con $dM_t = \sigma_t\, dW_t$). Di conseguenza, a maggior ragione, e sempre se $\boxed{\mathbb{F}=\mathbb{F}^W}$, comunque presa una v.a.r. $X \in \mathcal{L}^2(P)$, esiste uno ed ess. un solo $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T} \in M^2_W(0,T)$ tale per cui sussiste la "rappresentazione"

$$\boxed{X = E[X] + \int_0^T \sigma_s\, dW_s} .$$

- **Teorema di Girsanov.** Sia $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$, e consideriamo quindi il processo di Itô reale $L \doteq (L_t)_{0\le t\le T}$ dato da

$$L_t \doteq \underset{(>0)}{e^{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac12 \int_0^t \sigma_s^2 ds}},\quad t\in[0,T],$$ ossia quello tale che $\begin{cases} dL_t = \sigma_t L_t\, dW_t \\ L_0 \equiv 1 \end{cases}$. (In particolare, L è una $\mathbb{F}$-(super)martingala locale continua e quindi, per Fatou, $E[L_T] \le E[L_0] = 1$.)

Supponiamo che σ sia tale per cui risulti esattamente $\boxed{E[L_T] = 1}$; come si può verificare, ciò accade ad esempio se per σ è soddisfatta la "condizione di Novikov" $E[e^{\frac12\int_0^T \sigma_s^2 ds}] < \infty$.

Allora la probabilità $P^* \sim P$ avente proprio $\frac{dP^*}{dP} = L_T$ è tale per cui il processo di Itô reale $W^* \doteq (W^*_t)_{0\le t\le T}$ dato da $\boxed{W^*_t \doteq W_t - \int_0^t \sigma_s\, ds}$, $t\in[0,T]$, dunque con

$dW^*_t = -\sigma_t\, dt + dW_t$, sia in realtà un P^*-processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$.

In più, nel caso $\boxed{\mathbb{F} = \mathbb{F}^W}$, vale anche il viceversa: più precisamente, per ogni probabilità "P^*" $\sim P$, esiste (ed è unico) processo $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ tale per cui il processo di Itô reale $L \doteq (L_t)_{0\le t\le T}$ dato da

$L_t \doteq e^{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}$, $t\in[0,T]$, soddisfi ($E[L_T]=1$ e) $L_T = \frac{dP^*}{dP}$ (e, effettivamente il processo $(W_t - \int_0^t \sigma_s ds)_{0\le t\le T}$ è un "P^*-Wiener")

$\boxed{\text{NOTA}}$ Sia Z una v.a.r. di legge $N(0,1)$: allora, quale che sia $a\in\mathbb{R}$, è $E[e^{aZ - a^2/2}]=1$.

[Infatti: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\cdot e^{az-a^2/2}\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-a)^2/2}\, dz = 1$. ✓] Di conseguenza, se prendessimo $\sigma_t \equiv \sigma$ ($\in\mathbb{R}$) per ogni $t\in[0,T]$ in Girsanov, allora $L_T = e^{\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T}$ avrebbe $E[L_T]=1$ perché $\frac{W_T}{\sqrt{T}}\sim N(0,1)$ e effettivamente $\sigma W_T - \frac{\sigma^2 T}{2} = (\sigma\sqrt{T})\left(\frac{W_T}{\sqrt{T}}\right) - \frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}$. ✓

■ Il processo di Itô reale $e^W \doteq (e^{W_t})_{0\le t\le T}$ sta in $M^2_W(0,T)$, cioè possiede

$E\left[\int_0^T (e^{W_s})^2 ds\right] < \infty$, e di conseguenza il processo $\left(\int_0^t e^{W_s} dW_s\right)_{0\le t\le T}$ è una F-martingala (nulla in zero e) continua e di quadrato integrabile avente variazione quadratica $\left(\int_0^t (e^{W_s})^2 ds\right)_{0\le t\le T}$

[Infatti $\int_\Omega dP(\omega)\int_0^T e^{2W_s(\omega)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_0^T e^{2w}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\cdot e^{-w^2/2s} ds$ è chiaramente $<\infty$. ✓]

■ (Possiamo facilmente generalizzare "un pochino" il precedente risultato, e lo scriviamo come segue.) Sia $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ "uniformemente limitato", nel senso che esistono $c', c''\in\mathbb{R}$ con $(0<)\, c'\le c''$ tali che, per ogni $t\in[0,T]$ ed ogni $\omega\in\Omega$, per σ risulti

$c' \le \sigma_t(\omega) \le c''$. Dunque, ovviamente, σ sta in realtà in $M^2_W(0,T)$.

Ebbene, in tal caso il processo di Itô reale $\left(e^{\int_0^t \sigma_s dW_s}\right)_{0\le t\le T}$ sta in $M^2_W(0,T)$ e ne soddisfa, cioè possiede

$E\left[\int_0^T e^{2\int_0^t \sigma_s dW_s} dt\right] < \infty$, e di conseguenza il processo $\left(\int_0^t e^{\int_0^s \sigma_r dW_r} dW_s\right)_{0\le t\le T}$ è una F-martingala, nulla in zero, continua e di quadrato integrabile.

[La dimostrazione è elementare ma non immediata, nel senso che si basa su più passi. Per iniziare l'ipotesi di uniforme limitatezza per σ garantisce subito che sia ampiamente soddisfatta la condizione di Novikov"

$E\left[e^{\int_0^T \sigma_s^2 ds}\right] < \infty$, e di conseguenza, per Girsanov, sappiamo che vale

$E\left[e^{\int_0^T \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 ds}\right] = 1$, da cui $E\left[e^{\int_0^T \sigma_s dW_s}\right] < \infty$ di nuovo per uniforme limitatezza di σ: più precisamente, infatti, $E\left[e^{\int_0^T \sigma_s dW_s}\right] \le e^{\frac{1}{2}c^2 T}$

[Infatti, ovviamente, se $c \doteq |c'|\vee|c''|$, allora chiaramente anche il processo "σ^2" $\doteq (\sigma_t^2)_{0\le t\le T}$ è uniformemente limitato (dall'alto) e lo è proprio da c^2. Per ciò, per ogni $t\in[0,T]$, abbiamo che

$\int_0^t \sigma_s^2 ds \le c^2 t \le c^2 T$, da cui $e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds} \ge e^{-\frac{1}{2}c^2 T}$ per ogni $t\in[0,T]$

Adesso, sapendo che il processo $\left(e^{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}\right)_{0\le t\le T}$ è una $\mathbb{F}$-martingala locale e positiva, possiamo contare sul fatto che, per ogni $t\in[0,T]$, sia $E\left[e^{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}\right]\le 1$ (grazie a Fatou). Mettendo insieme le cose, deduciamo che $\forall t\in[0,T]$, $1\ge E\left[e^{\int_0^t \sigma_s dW_s} e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}\right]\ge e^{-\frac{1}{2}c^2T} E\left[e^{\int_0^t \sigma_s dW_s}\right]$, da cui

$$\boxed{E\left[e^{\int_0^t \sigma_s dW_s}\right]\le e^{\frac{1}{2}c^2T}}$$

Pertanto, ricaviamo subito che $E\left[\int_0^T e^{2\int_0^t \sigma_s dW_s} dt\right]=\int_0^T E\left[e^{\int_0^t (2\sigma_s) dW_s}\right] dt \le T e^{2c^2T}<\infty$.

■ Siano $b\doteq(b_t)_{0\le t\le T}$ e $r\doteq(r_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda_W^1(0,T)$ uniformemente limitati, e sia $\sigma\doteq(\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda_W^2(0,T)$ anch'esso uniformemente limitato ma pure strettamente positivo: in altri termini, esistono $c', c''\in\mathbb{R}$ tali che $0<c'\le\sigma_t(\omega)\le c''$ per ogni $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. Consideriamo quindi una costante $x_0>0$ e quel processo di Itô reale $X\doteq(X_t)_{0\le t\le T}$ tale che

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left[b_t dt+\sigma_t dW_t\right] \\ X(0)\equiv x_0 \end{cases},\quad \text{ossia } X_t = x_0 e^{\int_0^t (b_s-\frac{\sigma_s^2}{2})ds+\int_0^t \sigma_s dW_s},\ \forall t\in[0,T]),$$

ed ora anche $\tilde{X}\doteq(\tilde{X}_t)_{0\le t\le T}$ dato da $\tilde{X}_t\doteq e^{\int_0^t r_s ds}\cdot X_t$, $\forall t\in[0,T]$, cioè tale che

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t\left[(b_t+r_t)dt+\sigma_t dW_t\right] \\ \tilde{X}(0)\equiv x_0 \end{cases}.$$

In particolare, $\tilde{X}_t>0$ per ogni $t\in[0,T]$.

A questo punto, osserviamo che $d\tilde{X}_t=\sigma_t\tilde{X}_t\left[\left(\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}\right)dt+dW_t\right]=$
$=\sigma_t\tilde{X}_t d\left[W_t+\int_0^t\left(\frac{b_s+r_s}{\sigma_s}\right)ds\right]$, o in altri termini che $\boxed{d\tilde{X}_t=\sigma_t\tilde{X}_t dW_t^*}$ se indichiamo con $W^*\doteq(W_t^*)_{0\le t\le T}$ il processo di Itô reale dato da

$$\boxed{W_t^*\doteq W_t-\int_0^t\left(-\frac{b_s+r_s}{\sigma_s}\right)ds},\quad \forall t\in[0,T].$$

Il fatto è che, per ipotesi, anche il processo $\left(+\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}\right)_{0\le t\le T}$ è uniformemente limitato e di conseguenza soddisfa ampiamente la relativa condizione di Novikov $E\left[e^{\int_0^T \frac{(b_t+r_t)^2}{\sigma_t^2}dt}\right]<\infty$, da cui, in virtù del teorema di Girsanov, la v.a. $Z\doteq\exp\left(-\int_0^T\left(\frac{b_s+r_s}{\sigma_s}\right)dW_s-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{b_s+r_s}{\sigma_s}\right)^2 ds\right)$ ha $E[Z]=1$ (oltre che essere >0) ed inoltre la probabilità $P^*\doteq Z\cdot P$ $(\sim P)$ è tale per cui W^* sia un P^*-Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ (con $\mathbb{F}^{W^*}=\mathbb{F}^W$).

Pertanto, segue quasi subito che $\tilde{X}$ è una $\boxed{\text{"}P^*-\mathbb{F}-\text{martingala"}}$, perché σ è uniformemente limitato e soprattutto perché $\tilde{X}\in M^2_{W^*}(0,T)$, ovvero $E\left[\int_0^T\tilde{X}_t^2 dt\right]<\infty$: infatti $\tilde{X}_t=x_0\exp\left(\int_0^t(b_s+r_s-\frac{\sigma_s^2}{2})ds+\int_0^t\sigma_s dW_s\right)$, $t\in[0,T]$, ed ora b, r e σ sono uniformemente limitati mentre, come dimostrato, $E\left[\int_0^T e^{\int_0^t\sigma_s dW_s}dt\right]<\infty$

Di più, sempre grazie a Girsanov, nel caso $\mathbb{F}=\mathbb{F}^W$ una "tale" P^* sarebbe chiaramente unica (relativamente al processo W^* sopra definito). Dunque, se invece fosse per qualche motivo $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{\tilde X}$ $(= \mathbb{F}^X)$, per cui ovviamente $\mathbb{F}^{\tilde X}$ "$\geq$" $\mathbb{F}^W (= \mathbb{F}^{W^*})$, oltre dal fatto che $d\tilde X_t = \sigma_t \tilde X_t \, dW^*_t \underset{(visto)}{\Leftrightarrow} dW^*_t = \frac{1}{\sigma_t \tilde X_t} d\tilde X_t$ (in quanto $\sigma_t \tilde X_t \neq 0$, ed anzi >0), dedurremmo subito che $\mathbb{F}^{\tilde X} = \mathbb{F}^W$ (cioè "$\leq$") di sicuro se σ_t è funzione della forma "$\sigma(t, \tilde X_t)$" o "$\sigma(t, X_t)$", $t \in [0,T]$; altrimenti, potrebbe benissimo essere $\mathbb{F}^{\tilde X} \not\geq \mathbb{F}^W$ e quindi venir meno l'unicità della P^* "martingala equivalente". ✓

Siano $a, b \geq 0$ con $0 \leq a \leq b \leq T$, e consideriamo un processo elementare $X \doteq (X_t)_{0\leq t\leq T}$ rispetto a $\mathbb{F}$ tale che si possa scrivere

$$\int_a^b X_s \, dW_s = \sum_{i=0}^{N} X_{t_i} \left(W_{(t_{i+1} \vee a)\wedge b} - W_{(t_i \vee a)\wedge b}\right)$$ per certi $N \in \mathbb{N}$ e $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} =: T$.

Ebbene, se in realtà il processo X fosse "deterministico", ossia non aleatorio, e cioè una funzione "$(X(t))_{0\leq t\leq T}$", allora X sarebbe semplicemente una funzione costante a tratti su $[0,T]$ (e continua a destra), ed in particolare, per ogni $i=0,\dots,N$, gli $X_{t_i} = X(t_i)$ sono fatti scalari reali: di conseguenza, ricordando che somme di v.a.r. gaussiane indipendenti resta una v.a.r. gaussiana, segue subito che

$$\int_a^b X_s \, dW_s = \int_a^b X(s) \, dW_s$$ è una v.a.r. gaussiana, ed inoltre indipendente da $\mathcal{F}_a$. ✓

Consideriamo un processo "deterministico" $\sigma \doteq (\sigma(t))_{0\leq t\leq T}$ tale che $\int_0^T \sigma(t)^2 dt < \infty$, ossia una funzione in $\mathcal{L}^2(0,T)$ o, equivalentemente, un processo deterministico σ in $\Lambda^2_W(0,T)$ o in $M^2_W(0,T)$. Siano quindi $a,b\geq 0$ con $0\leq a\leq b\leq T$, e concentriamoci sull'intervallo $[a,b]$. Ebbene, non soltanto

$\left(\int_a^t \sigma(s) \, dW_s\right)_{a\leq t\leq b}$ è una $\mathbb{F}$-martingala continua, nulla in a e di quadrato integrabile con variazione quadratica deterministica $\left(\int_a^t \sigma(s)^2 ds\right)_{a\leq t\leq b}$: vale pure che, per ogni $t\in[a,b]$,

$$\int_a^t \sigma(s) \, dW_s \sim N\left(0, \int_a^t \sigma(s)^2 ds\right)$$ indipendente da $\mathcal{F}_a$.

[Dato che $\sigma \in M^2_W(0,T)$, sappiamo che $(\forall t\in[0,T])$ la v.a.r. $\int_a^t \sigma(s)dW_s$ che speranza zero, varianza che quindi coincide col proprio momento secondo $\int_a^t \sigma(s)^2 ds$, e pertanto è sufficiente verificare che si tratti effettivamente di una v.a.r. gaussiana.
Per questo approssimiamo in $L^2(a,b)$ mediante $\sigma^{(n)} \doteq (\sigma^{(n)}_t)_{a\leq t\leq b}$ costanti a tratti, facendo in modo cioè di ottenere

$$\int_a^b (\sigma(s)-\sigma^{(n)}(s))^2 ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ e quindi che, come sappiamo dalla teoria,

$$\int_a^b \sigma^{(n)}(s) \, dW_s \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(P)} \int_a^b \sigma(s) \, dW_s.$$ Dunque abbiamo ricavato $\int_a^b \sigma(s)dW_s$ come limite in $L^2(P)$ (e quindi limite in legge) di v.a.r. gaussiane indipendenti da $\mathcal{F}_a$. ✓]

Sia $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 2$, e sia $W \doteq ((W^{(1)}_t,\dots,W^{(d)}_t))_{0\leq t\leq T}$ un Wiener d-dimensionale rispetto a $\mathbb{F}$, del quale indichiamo $W^{(j)} \doteq (W^{(j)}_t)_{0\leq t\leq T}$ per ogni $j=1,\dots,d$. Comunque assegnati $b \doteq (b_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^1_W(0,T)$, $\sigma \doteq ((\sigma^{(1)}_t,\dots,\sigma^{(d)}_t))_{0\le t\le T}$ in $\mathbb{R}^d$ con $\sigma^{(j)} \doteq (\sigma^{(j)}_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W^{(j)}}(0,T)$ per ogni $j=1,\dots,d$, e Y v.a.r. $\mathcal{F}_0$-misurabile, è dimostrabile in modo del tutto analogo al caso "$d=1$" ch

esiste uno ed un solo processo di Itô reale $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ tale che $X(0)=X_0=Y$ e [9]
$dX_t = X_t[b_t\,dt + "\sigma_t \cdot dW_t"] = X_t[b_t\,dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{(j)}\,dW_t^{(j)}]$, ed è
$X_t \doteq Y \exp\left(\int_0^t \left(b_s - \sum_{j=1}^{d} \frac{(\sigma_s^{(j)})^2}{2}\right) ds + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_s^{(j)}\,dW_s^{(j)}\right)$, $\forall t\in[0,T]$. Scritto altrimenti, se indichiamo con $\|\cdot\| \doteq \|\cdot\|_{2,\mathbb{R}^d}$, allora $X_t = Y e^{\int_0^t (b_s - \frac{\|\sigma_s\|^2}{2})ds + \int_0^t \sigma_s\cdot dW_s}$ per ogni $t\in[0,T]$.

Diamo a questo punto una generalizzazione dei teoremi di "rappresentazione martingale" e di Girsanov.

Rappresentazione. | Se $\mathbb{F}=\mathbb{F}^W$, allora per ogni v.a.r. X in $L^2(P)$ esiste uno ed un solo processo in $\mathbb{R}^d$ $\sigma \doteq (\sigma_t^{(1)},\dots,\sigma_t^{(d)})_{0\le t\le T}$ con $\sigma^{(j)} \doteq (\sigma_t^{(j)})_{0\le t\le T}$ in $M^2_{W^{(j)}}([0,T])$ per ogni $j=1,\dots,d$ tale per cui sussiste la "rappresentazione"

$$X = E[X] + \int_0^T \sigma_s\cdot dW_s = E[X] + \sum_{j=1}^{d} \int_0^T \sigma_s^{(j)}\,dW_s^{(j)}.$$

Girsanov. | Sia $\sigma \doteq (\sigma_t^{(1)},\dots,\sigma_t^{(d)})_{0\le t\le T}$ con $\sigma^{(j)} \doteq (\sigma_t^{(j)})_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W^{(j)}}([0,T])$ per ogni $j=1,\dots,d$, e consideriamo quindi il processo di Itô reale $L \doteq (L_t)_{0\le t\le T}$ dato da
$L_t \doteq e^{\int_0^t \sigma_s\cdot dW_s - \frac12\int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds}$, $t\in[0,T]$, ossia quello tale che $\begin{cases} dL_t = L_t\,\sigma_t\cdot dW_t \\ L_0 \equiv 1\end{cases}$.
Ebbene, se $E[L_T]=1$, allora la probabilità $P^*\sim P$ avente profilo $\frac{dP^*}{dP}=L_T$ è tale per cui il processo di Itô d-dimensionale $W^* \doteq (W_t^{*(1)},\dots,W_t^{*(d)})_{0\le t\le T}$ dato da
$W_t^* \doteq W_t - \int_0^t \sigma_s\,ds$, cioè di componenti $W_t^{*(j)} \doteq W_t^{(j)} - \int_0^t \sigma_s^{(j)}\,ds$, $j=1,\dots,d$, $t\in[0,T]$,
è in realtà un P^*-Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ (con $\mathbb{F}^{W^*}=\mathbb{F}^W$). Di più, nel caso $\mathbb{F}=\mathbb{F}^W$, vale anche il viceversa: più precisamente, per ogni probabilità $P^*\sim P$, esiste (ed è unico) processo in $\mathbb{R}^d$ $\sigma \doteq (\sigma_t^{(1)},\dots,\sigma_t^{(d)})_{0\le t\le T}$ con $\sigma^{(j)}\doteq(\sigma_t^{(j)})_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W^{(j)}}([0,T])$ per ogni $j=1,\dots,d$ tale per cui la v.a.r. (>0)
$Z \doteq e^{\int_0^T \sigma_s\cdot dW_s - \frac12\int_0^T\|\sigma_s\|^2 ds}$ soddisfa $E[Z]=1$ e $Z=\frac{dP^*}{dP}$.

Oss. | Nella situazione del teorema di Girsanov appena enunciato, la mutua indipendenza dei processi $(W_t^{*(j)})_{0\le t\le T}$ è quasi automatica da quella dei Wiener $(W_t^{(j)})_{0\le t\le T}$, una volta verificato che si tratti effettivamente di altri Wiener.

Ci riferiamo al fatto che risulti $[W^{*(i)}, W^{*(j)}]_t = \delta_{ij}\cdot t$, $t\in[0,T]$, per ogni $i,j=1,\dots,d$, sfruttando l'analoga proprietà per $W^{(i)}$ e $W^{(j)}$. Ma, infatti, $W_t^{*(i)} \doteq W_t^{(i)} - \int_0^t \sigma_s^{(i)}\,ds$ per ogni $i=1,\dots,d$ e $t\in[0,T]$, e la covariazione è notoriamente bilineare. Inoltre, com'è ampiamente ben noto, ogni processo reale continuo e a variazione limitata su $[0,T]$ (e quindi a variazione quadratica nulla su $[0,T]$) ha covariazione nulla con qualsiasi altro processo reale che ammetta variazione quadratica. In particolare, quale che sia $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^1([0,T])$, così è per il processo $\left(\int_0^t \sigma_s\,ds\right)_{0\le t\le T}$.

Torniamo alla prima applicazione del teorema di Girsanov "con $d=1$": siano per questo $b \doteq (b_t)_{0\le t\le T}$, $r \doteq (r_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^1_W([0,T])$ e $\sigma \doteq (\sigma_t)_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W([0,T])$ (uniformemente limitati), dei quali σ pure >0, e sia $x_0>0$. Consideriamo quindi il processo di Itô reale e >0 $\bar X \doteq (\bar X_t)_{0\le t\le T}$ tale che

$\begin{cases} d\tilde{X}_t = \tilde{X}_t\left[(b_t+r_t)\,dt + \sigma_t\,dW_t\right] \\ \tilde{X}(0) \equiv x_0 \end{cases}$, cioè dato da $\tilde{X}_t = x_0\, e^{\int_0^t (b_s+r_s-\frac{\sigma_s^2}{2})ds + \int_0^t \sigma_s dW_s}$, $t\in[0,T]$, o

ancora più esplicitamente $\tilde{X}_t(\omega) = x_0\, e^{\int_0^t (b_s(\omega)+r_s(\omega)-\frac{\sigma_s^2(\omega)}{2})ds + (\int_0^t \sigma_s dW_s)(\omega)}$, $\omega\in\Omega$, $t\in[0,T]$.

Abbiamo già mostrato che esiste almeno una probabilità equivalente $Q \sim P$ tale per cui $\tilde{X}$ sia una Q-$\mathbb{F}$-martingala, ed è la medesima tale per cui il processo di Itô nella

$(W_t - \int_0^t (-\frac{b_s+r_s}{\sigma_s})ds)_{0\le t\le T}$ sia un Q-$\mathbb{F}$-Wiener: per questo era già chiaro $Q \doteq Z\cdot P$, dove

$Z \doteq \exp\left(-\int_0^T \frac{b_t+r_t}{\sigma_t}dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T (\frac{b_t+r_t}{\sigma_t})^2 dt\right)$.

Abbiamo, supponendo che $\boxed{\mathbb{F} = \mathbb{F}^{\tilde{X}}}$ $(\supseteq \mathbb{F}^W)$, mostriamo adesso che, se $\mathbb{F}^{\tilde{X}} > \mathbb{F}^W$, allora una tale Q potrebbe benissimo non essere unica (nel fare questo appunto descritto).

Supponiamo per ciò che σ sia "più aleatorio" di W, supponendo precisamente che esiste un altro P-$\mathbb{F}$-Wiener $W' \doteq (W'_t)_{0\le t\le T}$ con $\boxed{\mathbb{F}^{W'} > \mathbb{F}^W}$ tale che risulti

$d\sigma_t = \alpha(t,\sigma_t)\,dt + \beta(t,\sigma_t)\,dW'_t$ (per due enti $(\alpha(t,\sigma_t))_{0\le t\le T} \in \Lambda^1_{W'}(0,T)$ e $(\beta(t,\sigma_t))_{0\le t\le T} \in \Lambda^2_{W'}(0,T)$

In questo modo, intanto, $\mathbb{F} = \boxed{\mathbb{F}^{\tilde{X}} = \mathbb{F}^{W'}} > \mathbb{F}^W$. Supponiamo inoltre che i due processi W e W' siano indipendenti. Immaginiamo allora che lo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F}_T,P)$ di riferimento e che W e W' abbiano in realtà il legame descritto in seguito:

se $(\Omega_1 =: \Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ è uno spazio di probabilità sul quale esiste un P_1-Wiener standard $W^{(1)} \doteq (W^{(1)}_t(\omega_1))_{0\le t\le T}$, e se $(\Omega_2 =: \Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ è un altro spazio di probabilità sul quale esiste un P_2-Wiener standard $W^{(2)} \doteq (W^{(2)}_t(\omega_2))_{0\le t\le T}$, e se $\mathbb{F}^{W^{(2)}} > \mathbb{F}^{W^{(1)}}$, allora immaginiamo che sia

$\Omega = \Omega_1\times\Omega_2$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ con $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^{W^{(1)}}_t \otimes \mathcal{F}^{W^{(2)}}_t$ per ogni $t\in[0,T]$, $P = P_1\otimes P_2$ e

$W_t(\omega) = W_t(\omega_1,\omega_2) = W^{(1)}_t(\omega_1)$ e $W'_t(\omega) = W'_t(\omega_1,\omega_2) = W^{(2)}_t(\omega_2)$ per ogni $\omega_1\in\Omega_1, \omega_2\in\Omega_2$

Pertanto, σ dipende in realtà solo da $\omega_2\in\Omega_2$, e possiamo descrivere sinteticamente il tutto come

$\begin{cases} d\tilde{X}_t(\omega_1,\omega_2) = \tilde{X}_t(\omega_1,\omega_2)\left[(b_t(\omega_*) + r_t(\omega_*))\,dt + \sigma_t(\omega_2)\,dW_t(\omega_1)\right] \\ d\sigma_t(\omega_2) = \alpha(t,\sigma_t(\omega_2))\,dt + \beta(t,\sigma_t(\omega_2))\,dW'_t(\omega_2) \\ [W,W']_t \equiv 0 \quad,\quad \mathbb{F} = \mathbb{F}^{\tilde{X}} = \mathbb{F}^{W'} > \mathbb{F}^W. \end{cases}$

Ma allora "(W,W')" $\doteq (W_t,W'_t)_{0\le t\le T}$ è un P-$\mathbb{F}$-Wiener bidimensionale su Ω con

$\mathbb{F}^{(W,W')} = \mathbb{F}^{W'} = \mathbb{F}$: di conseguenza, grazie al teorema di Girsanov "con $d=2$", tutte

le probabilità equivalenti $P^* \sim P$ hanno

$\frac{dP^*}{dP} = e^{\int_0^T \sigma^{(1)}_s dW_s + \int_0^T \sigma^{(2)}_s dW'_s - \frac{1}{2}\left[\int_0^T (\sigma^{(1)}_s)^2 ds + \int_0^T (\sigma^{(2)}_s)^2 ds\right]}$ per due opportuni processi univ. unici

$\sigma^{(1)} \doteq (\sigma^{(1)}_t(\omega_*))_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_W(0,T)$ e $\sigma^{(2)} \doteq (\sigma^{(2)}_t(\omega_*))_{0\le t\le T}$ in $\Lambda^2_{W'}(0,T)$, e sono tali per cui

i due processi $(W_t - \int_0^t \sigma^{(1)}_s ds)_{0\le t\le T}$ e $(W'_t - \int_0^t \sigma^{(2)}_s ds)_{0\le t\le T}$ siano P^*-$\mathbb{F}$-Wiener indipendenti

In particolare, deduciamo subito che $\left(W_t - \int_0^t \left(-\frac{b_s+r_s}{\sigma_s}\right) ds\right)_{0\le t\le T}$ è un P^*-$\mathbb{F}$-Wiener, e dunque che $\tilde{X}$ è una P^*-$\mathbb{F}$-martingala, per ogni $P^* \sim P$ con dP^*/dP della forma precedente con

$$\sigma_t^{(1)} \doteq -\frac{b_t+r_t}{\sigma_t} \text{ per ogni } t\in[0,T], \text{ e } \sigma^{(2)} \text{ "libero" (e non necessariamente nullo).}$$

---

255. Continuando, se $S = S(\omega) = S(\omega_1,\omega_2)$ è una v.a. su Ω, allora per ogni $P^* \sim P$ è

$$E^{P^*}[S] = \int_\Omega S(\omega)\, dP^*(\omega) = \int_\Omega S(\omega) \frac{dP^*}{dP}(\omega)\, dP(\omega) = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} S(\omega_1,\omega_2) \frac{dP^*}{dP}(\omega_1,\omega_2)\, d(P_1\otimes P_2)(\omega_1,\omega_2) =$$

$$(\text{Fubini}) \quad = \int_{\Omega_2} dP_2(\omega_2) \int_{\Omega_1} S(\omega_1,\omega_2) \frac{dP^*}{dP}(\omega_1,\omega_2)\, dP_1(\omega_1).$$

Ora, sempre guardando alla prima applicazione di Girsanov "con $d=1$", ma alla luce delle notazioni dei calcoli appena svolti, supponiamo di fissare un $\bar\omega_2 \in \Omega_2$ e di ripetere quindi tale applicazione di Girsanov su $(X_t(\omega_1,\bar\omega_2))_{0\le t\le T}$, come se lo spazio di probabilità ed il Wiener di riferimento fossero $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ e $W^{(1)}$, con filtrazione associata $\mathbb{F}^{W^{(1)}}$ (immaginando eventualmente che $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}^{W^{(1)}}_T$). Ebbene, è facile avvio riconoscere che per il processo

$\left(+\frac{b_t(\omega_1,\bar\omega_2)+r_t(\omega_1,\bar\omega_2)}{\sigma_t(\bar\omega_2)}\right)_{0\le t\le T}$ continua a valere (a maggior ragione) la relativa condizione di Novikov $E^{P_1}\left[e^{\int_0^T \left(\frac{b_t(\cdot,\bar\omega_2)+r_t(\cdot,\bar\omega_2)}{\sigma_t(\bar\omega_2)}\right)^2 dt}\right] < \infty$ (per le premesse, per q.o. $\bar\omega_2 \in \Omega_2$), per cui resta

$$E^{P_1}\left[e^{-\int_0^T \frac{b_t+r_t}{\sigma_t} dW_t(\omega_1,\bar\omega_2) - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}\right)^2 dt(\omega_1,\bar\omega_2)}\right] = 1 \quad (\text{per q.o. } \bar\omega_2 \in \Omega_2) \text{ e cioè}$$

"$P_1^{*,\bar\omega_2} \doteq \exp\left(-\int_0^T \frac{b_t+r_t}{\sigma_t} dW_t(\cdot,\bar\omega_2) - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}\right)^2 dt(\cdot,\bar\omega_2)\right) \cdot P_1$" è una probabilità $\sim P_1$.

Pertanto, ricordando $\frac{dP^*}{dP} = e^{\int_0^T \sigma_t^{(1)} dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_t^{(1)})^2 dt} \cdot e^{\int_0^T \sigma_t^{(2)} dW_t' - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_t^{(2)})^2 dt}$, se $\sigma_t^{(1)} \doteq -\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}$ per ogni $t\in[0,T]$ e se $\sigma^{(2)}$ dipende solo da $\omega_2 \in \Omega_2$, allora (tornando sopra)

$$E^{P^*}[S] = \int_{\Omega_2} dP_2(\omega_2) \int_{\Omega_1} S(\omega_1,\omega_2)\, e^{-\int_0^T \frac{b_t+r_t}{\sigma_t} dW_t(\omega_1,\omega_2) - \frac{1}{2}\int_0^T \left(\frac{b_t+r_t}{\sigma_t}\right)^2 dt(\omega_1,\omega_2)} \cdot e^{\int_0^T \sigma_t^{(2)} dW_t'(\omega_2) - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_t^{(2)})^2 dt(\omega_2)}\, dP_1(\omega_1)$$

ed in particolare la scelta $S \equiv 1$ dà $E^{P_2}\left[e^{\int_0^T \sigma_t^{(2)} dW_t' - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_t^{(2)})^2 dt}\right] = 1$.

In conclusione, indicando anche "$P_2^* \doteq \exp\left(\int_0^T \sigma_t^{(2)} dW_t' - \frac{1}{2}\int_0^T (\sigma_t^{(2)})^2 dt\right)$", abbiamo ottenuto che

$$E^{P^*}[S] = \int_{\Omega_2} dP_2^*(\omega_2) \int_{\Omega_1} S(\omega_1,\omega_2)\, dP_1^{*,\omega_2}(\omega_1)$$

. ($\boxed{\text{NOTA}}$ Lo "$*$" è coerente col fatto che si tratta di probabilità equivalenti "martingala" (su $\mathcal{F}_T^*$ o Ω_2)!)

"BREACK": ragionamenti elementari su speranze condizionale e martingale.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, e sia Q una probabilità equivalente a P: in simboli, $Q \sim P$. Questo significa che P e Q hanno esattamente gli stessi trascurabili. Equivalentemente, com'è ben noto, esiste una (sola) v.a. $Z > 0$, $\mathcal{F}$-misurabile, avente $E^P[Z] = 1$, la quale sia la densità di Q rispetto a P: in simboli,

$Z = \frac{dQ}{dP}$, o anche $Q = Z \cdot P$. Questo significa che, per ogni $A \in \mathcal{F}$, è

$Q[A] = \int_A Z \, dP = E^P[1_A Z]$. Allora, di nuovo in modo equivalente, vale che, per ogni v.a.r. X $\mathcal{G}$-misurabile, X è Q-integrabile se e solo se XZ è P-integrabile, ed in tal caso è

$$E^Q[X] = E^P[XZ] .$$

Se adesso $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$ è una filtrazione su Ω (con eventualmente $\mathcal{G}_T=\mathcal{G}$), allora è davvero evidente che, per ogni $t\in[0,T]$, resti

$Q|_{\mathcal{G}_t} \sim P|_{\mathcal{G}_t}$ (riferendosi allo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{G}_t,P|_{\mathcal{G}_t})$), ed in effetti risulta $\boxed{\frac{d(Q|_{\mathcal{G}_t})}{d(P|_{\mathcal{G}_t})} = E^P[Z|\mathcal{G}_t]} =: Z_t$ per ogni $t\in[0,T]$.

[Infatti, per convincersi, $Z_t \doteq E^P[Z|\mathcal{G}_t]$ è una v.a.r. $\mathcal{G}_t$-misurabile e P-integrabile con $E^P[Z_t] = E^P[Z] = 1$, ed è >0 perché Z lo è. Inoltre, è $\forall A\in\mathcal{G}_t$, $Q(A) = \int_A Z_t \, dP$ semplicemente perché $\int_A Z_t \, dP = \int_A Z \, dP$ (per definizione di speranza condizionale), ed ora sappiamo già che $\int_A Z \, dP = Q[A]$. ✓]

Dunque introduciamo $Z_T \doteq Z$, supponendo $\mathcal{G}_T=\mathcal{G}$, ed osserviamo che il processo $Z \doteq (Z_t)$ è una P-$\mathbb{F}$-martingala, essendo precisamente la P-$\mathbb{F}$-martingala chiusa da Z_T, e che è >0 (di speranza unitaria).

Compreso ciò, sia $X \doteq (X_t)_{0\le t\le T}$ un processo reale su Ω ed indichiamo con XZ il processo reale

$$XZ \doteq (X_t Z_t)_{0\le t\le T} .$$

In particolare, è evidente che X è $\mathbb{F}$-adattato se, e solo se, XZ è $\mathbb{F}$-adattato e pure che in tal caso X è Q-integrabile se, e solo se, XZ è P-integrabile e

$\forall t\in[0,T]$, $E^Q[X_t] = E^P[X_t Z_t]$.

Allora, supponendo adunque X o XZ $\mathbb{F}$-adattato, ed inoltre X Q-integrabile ovvero XZ P-integrabile, risulta facilmente che X è una Q-$\mathbb{F}$-martingala se, e solo se, XZ è una P-$\mathbb{F}$-martingala.

[Semplicemente perché, per ogni $s,t\in[0,T]$ con $s\le t$ e per ogni $A\in\mathcal{G}_s$, vale

$\int_A X_t \, dQ = \int_A X_t Z_t \, dP$ (in questo a maggior ragione $A\in\mathcal{G}_t$), da cui subito la tesi.]

Inoltre, presa una v.a.r. Y $\mathcal{G}_T$-misurabile limitata, la formula di Bayes per la speranza condizionale dà subito che

$\forall t\in[0,T]$, $E^Q[Y X_t|\mathcal{G}_t] = \dfrac{E^P[Y X_t Z_t|\mathcal{G}_t]}{E^P[Z_t|\mathcal{G}_t]}$ $(Z_t!)$ $(Q/P\text{-q.c.})$. ✓