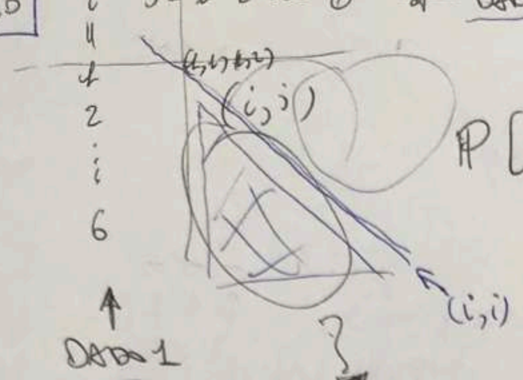
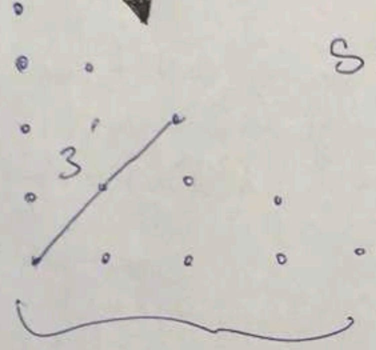
$\boxed{1.20}$ i $j = 1\ 2 \cdots 6$ ← DADO 2



$P[\text{N° DADO } 1 > \text{N° DADO } 2]$

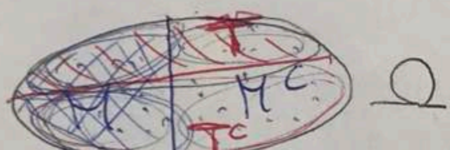
$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12} \simeq 41\%$$



$5 \times 3 = 15$

S

$\boxed{1.23}$



Ω

$M \doteq$ "IL PAZIENTE È MALATO" $M^C =$ "IL PAZIENTE È SANO"

$T \doteq$ "IL RISULTATO DEL TEST È POSITIVO"

$T^C =$ "IL RISULTATO DEL TEST È NEGATIVO"

	M	M^C
T	MALATI POSITIVI	FALSO POSITIVO
T^C	FALSO NEGATIVO	SANI NEGATIVI

$P[M] = 0.03 \Leftrightarrow P[M^c] = 0.97$

$P[T \mid M] = 0.95 \Leftrightarrow \underline{P[T^c \mid M] = 0.05}$

$\mathbb{P}[T^c \mid M^c] = 0.8 \Leftrightarrow \mathbb{P}[T \mid M^c] = 0.2$ 2

(a) $\mathbb{P}[T] = \mathbb{P}[T \cap M] + \mathbb{P}[T \cap M^c]$

$$= \underbrace{\mathbb{P}[T \mid M]}_{0.95} \underbrace{\mathbb{P}[M]}_{0.03} + \underbrace{\mathbb{P}[T \mid M^c]}_{0.2} \underbrace{\mathbb{P}[M^c]}_{0.97}$$

$\simeq 22.25\% = 0.2225$

(b) $$\mathbb{P}[M \mid T] \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[M \cap T]}{\mathbb{P}[T]}$$

$$\overset{\text{(BAYES)}}{=} \frac{\mathbb{P}[T \mid M]\,\mathbb{P}[M]}{\mathbb{P}[T]}$$

$$= \frac{0.95 \cdot 0.03}{0.2225} \approx 0.1281$$

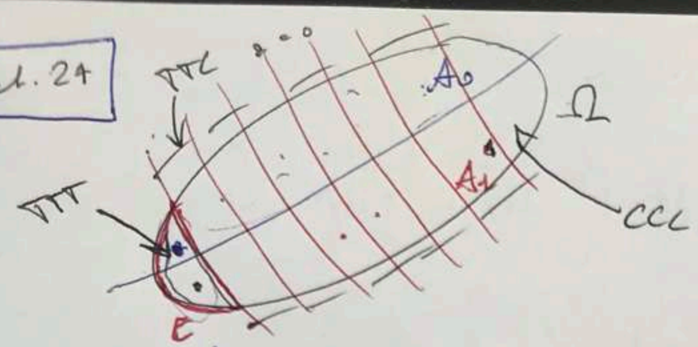
(c) $$\mathbb{P}[M \mid T^c] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}[T^c \mid M]\,\mathbb{P}[M]}{1 - \mathbb{P}[T]}$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.03}{0.7775} \approx 0.0019^2$$

(0.19%)

$\boxtimes$

$\boxed{n.\ 24}$



TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI DI "T" E "C" DAL LANCIARE 3 VOLTE UNA MONETA

$$\underset{2}{\uparrow}\ \underset{2}{\uparrow}\ \underset{2}{\uparrow} \qquad 2^3 = 8$$

$A_0 :=$ "SCELTA MONETA EQUILIBRATA"

$A_1 := A_0^c =$ "SCELTA MONETA NON EQUILIBRATA"

$$\mathbb{P}[A_0] = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{5}$$

$E :=$ "TTT"

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E \cap A_0] + \mathbb{P}[E \cap A_1]$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}[E|A_0]}_{\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}} \underbrace{\mathbb{P}[A_0]}_{4/5} + \underbrace{\mathbb{P}[E|A_1]}_{\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}} \underbrace{\mathbb{P}[A_1]}_{1/5}$$

(a) $\simeq 0.1592 \quad (16\%)$

(b) $\mathbb{P}[A_0|E] \iff \mathbb{P}[A_1|E] = 1 - \mathbb{P}[A_0|E]$

$$\frac{\mathbb{P}[E|A_0]\,\mathbb{P}[A_0]}{\mathbb{P}[E]} = \cancel{\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{5}}\ \frac{1}{10 \cdot 0.1592} \simeq 0.6281$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathbb{P}[A_1|E] \simeq 37\%\right)$$

$E_1 =$ " ANCHE UN/IL QUARTO LANCIO DA TESTA " (TTTT) 4

$$P[E_1 | E] \overset{def.}{=} \frac{P[E_1 \cap E]}{P[E]}$$

$$P[E_1 \cap E] = P[(E_1 \cap E) \cap A_0] + P[(E_1 \cap E) \cap A_1]$$

$$= \underbrace{P[E_1 \cap E | A_0]}_{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \overbrace{P[A_0]}^{4/5} + \underbrace{P[E_1 \cap E | A_1]}_{\left(\frac{2}{3}\right)^4} \overbrace{P[A_1]}^{1/5}$$

$$\simeq 0.09 \quad \Rightarrow \quad P[E_1 | E] = 0.56$$

c) $E_n =$ " LA MONETA LANCIATA n VOLTE HA DATO n VOLTE TESTA "

$$P[E_n | A_0] = \frac{1}{2^n}$$

$$P[E_n | A_1] = \frac{2^n}{3^n}$$

$$\Rightarrow P[E_n] = P[E_n | A_0] P[A_0] + P[E_n | A_1] P[A_1]$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2^n}{3^n}$$

$$n \left\{ P[A_0 | E_n] \overset{Bayes}{=} \frac{\boxed{P[E_n | A_0] P[A_0]}}{P[E_n]} \leq \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots \right.$$

... $n \geq 5$ ◻

$\boxed{\text{EXC.}}$ MAZZO 52 CARTE DA POKER (13 CARTE PER SEME).

(CONTARE) Si ESTRAGGONO, A CASO, 3 CARTE.

(a) PROB. ALMENO UN ASSO.

(b) PROB. TRE SEMI DIVERSI.

(c) PROB. ALMENO DUE DELLE CARTE RIPORTINO LO STESSO N° O LA STESSA FIGURA.

$\boxed{2.30}$ 3 FACCE: BIANCA, ROSSA, GIALLA

LANCIO: PROBABILITÀ $1/3$

k LANCI (INDIPENDENTI), $k \geq 1$ intero

(a) (i) NESSUNA FACCIA BIANCA NEI k LANCI

$\mathbb{P}$[h "SUCCESSI" IN k PROVE INDIPENDENTI, DOVE LA PROBABILITÀ DI "SUCCESSO" VALE p] $(h \leq k,\ p \in [0,1])$

$$= \binom{k}{h} p^h (1-p)^{k-h}$$

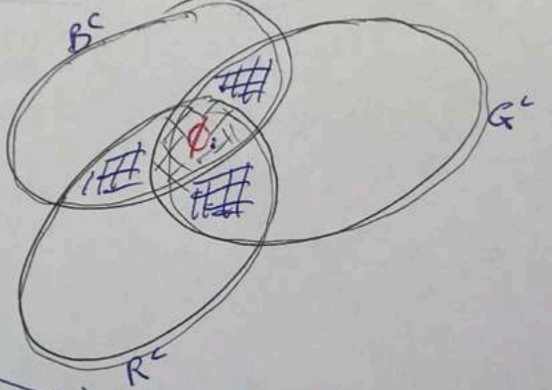
LEGGE $\text{Bin}(k,p)$

$$\mathbb{P}[\,0 \text{ "FACCE BIANCHE" NEI } n \text{ LANCI}\,] \underset{P=\frac{1}{3}}{=} \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \qquad (h=0)$$

(ii) $$\mathbb{P}[\,k \text{ "GIALLE" NEI } n \text{ LANCI}\,] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(b) $\mathbb{P}[$"ALMENO UNO DEI TRE COLORI NON È MAI APPARSO"$]$

$$= \mathbb{P}[\,\text{"}\underbrace{\text{NESSUNA BIANCA}}_{B^c}, \text{ o } \underbrace{\text{NESSUNA ROSSA}}_{R^c}, \text{ o } \underbrace{\text{NESSUNA GIALLA}}_{G^c}\text{"}\,]$$



$\left(\frac{2}{3}\right)^{k}$

$$= \mathbb{P}[B^c] + \mathbb{P}[G^c] + \mathbb{P}[R^c]$$

$$- \mathbb{P}[B^c \cap R^c] - \mathbb{P}[B^c \cap G^c] - \mathbb{P}[R^c \cap G^c]$$

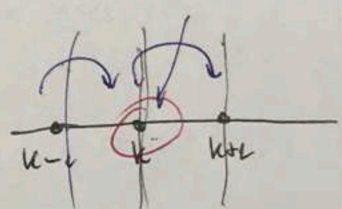
$(1/3)^{k}$

$$= 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k} \qquad k=4,\ k=10,\ k=20, \ldots$$

(c) $T =$ N° LANCIO "MINIMO" AFFINCHÉ TUTTI E TRE i COLORI SIANO APPARSI ALMENO UNA VOLTA

$(T \geq 3 \ldots)$

$$\underbrace{\mathbb{P}[T > k]}_{\text{PER I PRIMI } k \text{ LANCI C'È (ALMENO) UN COLORE NON APPARSO}} \quad \forall k$$



(i) $\boxed{\mathbb{P}[T = k]} =$

$$= \mathbb{P}[T \geq k, T < k+1]$$

$$= \mathbb{P}[T \geq k] - \mathbb{P}[T \geq k+1]$$

$$= \mathbb{P}[T > k-1] - \mathbb{P}[T > k]$$

$$= 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \left(3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k} - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$$

(ii) $$\mathbb{E}[T] = \sum_{k=2}^{\infty} k \, \boxed{\mathbb{P}[T=k]}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}}_{9-1=8} - 2\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}_{\frac{9}{4}-1=5/4} = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \left(= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \right)$$
$$= 1/p^2$$

[SUGG. : PASSARE PER $\frac{d}{dp}$ ...]

$\boxed{2.31}$

(a) $\mathbb{P}[0$ "BIT DISTORTI" IN n PROVE INDIPENDENTI$]$ (p)

$= (1-p)^n$ $\quad$ $\left(\mathbb{P}[k \text{ BIT DISTORTI IN } n \text{ PROV. INDIP.}] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right)$

(b) $\boxed{N \sim GEOM(\lambda)}$, $\lambda \in (0,1)$

$\left(\forall k \geq 1, \ \mathbb{P}[N=k] = \lambda \cdot (1-\lambda)^{k-1} \right)$

$\forall i = 1, 2, \ldots, N$, $\quad (\forall i)$

$$X_i \doteq \begin{cases} 1, & \text{SE LO } i\text{-ESIMO BIT È DISTORTO} \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ N° TOTALE BIT DISTORTI $= X_1 + X_2 + \ldots + X_N =: S_N$

$$\mathbb{P}[S_N = 0] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\underbrace{N=k, S_k=0}_{\{N=k\} \cap \{S_k=0\} \text{ INDIP.}}] =$$

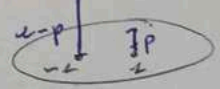
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}[N=k]}_{\lambda(1-\lambda)^{k-1}} \underbrace{\mathbb{P}[S_k=0]}_{(1-p)^k}$$

$$= \lambda(1-p) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-\lambda)(1-p)\right]^{k}}_{\frac{1}{1-(1-\lambda)(1-p)}} = \frac{\lambda(1-p)}{1-(1-\lambda)(1-p)} . \square$$

$\boxed{\text{EXC.}}$ $p \in]0,1[$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$Z_1, \dots, Z_m$ V.A. INDIPENDENTI A VALORI $\{-1, 1\}$

CON $\mathbb{P}[Z_i = 1] = p \quad \forall i = 1, \dots, m$.



SIA $X \doteq \prod_{i=1}^{m} Z_i = Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_m$

(V.A. A VALORI IN $\{-1, 1\}$).

1) $\mathbb{E}[X]$ / LEGGE DI X

2) X È INDIP. DAL $(Z_1, \dots, Z_N)$?

3) X È INDIP. DAL $(Z_2, Z_3, \dots, Z_m)$?

$\boxed{3.67}$ "dx" misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^d$ — $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ boreliani di $\mathbb{R}^d$

μ misura σ-finita su $\mathbb{R}^d$

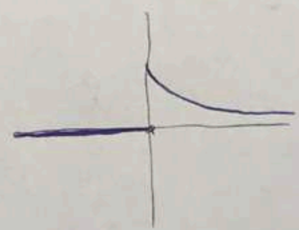
$$\mu \ll dx \iff \exists!\, f \in L^1_+(dx) \text{ t.c. } \forall A \in \mathbb{R}^d,\ \boxed{\mu[A] = \int_A f(x)\,dx}\ ,$$

f densità di μ rispetto a dx $\left(f(x) = \frac{d\mu}{dx}(x) \right)$

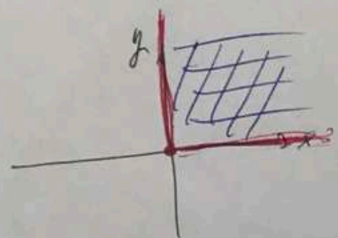
e) X, Y indip. $\sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

$\uparrow$
$[0, +\infty[$
$]0, \infty[$



$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

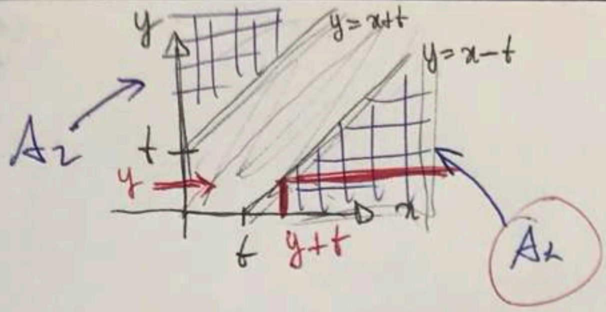


$\Rightarrow$ (X,Y) ass. continuo e

$$f_{(X,Y)}(x,y) \overset{(\text{indip.})}{=} f_X(x) f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$$

$\forall t>0$,
$$\mathbb{P}[|X-Y|>t] = \iint_{\{|x-y|>t\}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} (\dots) + \iint_{A_2} (\dots)$$

$$\left[\ \mathbb{P}[Z \in A] = \underbrace{Z(\mathbb{P})}_{\text{"}\mu\text{"}}[A] = \int_A f_Z(x)\,dx \ \right]$$



$$\iint_{A_1} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty dy \int_{y+t}^\infty dx\, f_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty dy\, e^{-\lambda y} \int_{y+t}^\infty dx\, e^{-\lambda x}$$

$$= \dots = \frac{1}{2} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}[\,|X-Y| > t\,] = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \text{per } t = \frac{1}{\lambda}, \quad e^{-1}$$

(b) DENSITÀ $|X-Y|$. $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{P}[\,|X-Y| \leq t\,] = 1 - \mathbb{P}[\,|X-Y| > t\,]$$

$$= \underbrace{1 - e^{-\lambda t}}_{\text{F.D.R. } \mathcal{E}(\lambda)}$$

$|X-Y|$ RIMANE $\mathcal{E}(\lambda)$

(c) DENSITÀ $X-Y$.

$\begin{cases} X \text{ VETTORE ALEATORIO } n\text{-DIM. ASS. CONTINUO CON DENSITÀ } f_X \\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ APERTO T.C. } \mathbb{P}[X \in U] = 1 \\ \varphi : U \to V \text{ DIFFEOMORFISMO } (C^1), \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ APERTO} \end{cases}$

$\Rightarrow$ IL VETTORE (ALEATORIO) n-DIM. $Y \doteq \varphi(X)$

THM

È ASS. CONT. CON DENSITÀ

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\, |\det D\varphi^{-1}(y)|\, 1\!\!1_V(y)}$$

$$(X,Y) \xmapsto{\phi} (X-Y, Y) \qquad \phi(x,y) = (x-y, y) \quad C^\infty$$

$$\underbrace{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}_{(x,y)} \xrightarrow{\phi} \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}_{(u,v)} \qquad (\mathbb{R}_+ = [0, \infty[)$$

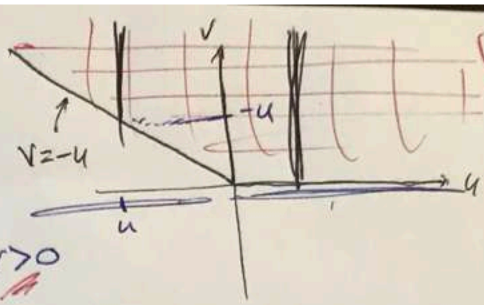
$$\phi^{-1}(u,v) = (u+v, v) \qquad C^\infty$$

$\Rightarrow \phi$ DIFFEO! $\quad D\phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \det(\dots) = 1$

THM $\Rightarrow$ $(X-Y, Y)$ HA DENSITÀ

$$g(u,v) = f_{(X,Y)}(u+v, v) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(2v+u)}, & v>0, v>-u \\ 0, & \text{otherw} \end{cases}$$

$\checkmark$ $\boxed{u \geq 0}$ $\checkmark$ $\boxed{u < 0}$



13

$u \geq 0 \Rightarrow g(u,v) = \underbrace{\lambda^2 e^{-\lambda(2v+u)}}$ $\forall v > 0$

DENSITÀ $X-Y$:

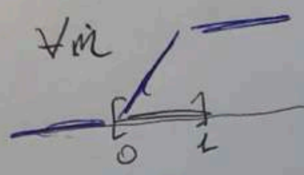
$g_1(u) = \int_0^\infty g(u,v)\,dv = \ldots = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda u}$

$u < 0 \Rightarrow g(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda(2v+u)}$ $\forall v > -u > 0$

$g_1(u) = \int_{-u}^\infty g(u,v)\,dv = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda u}$

$g_1(u) = f_{X-Y}(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$ LAPLACE λ $\boxtimes$

$\boxed{\text{EXC.}}$ $(X_n)_n$ i.i.d. con $X_n \sim U(0,1)$ $\forall n$



$[\forall x \in \mathbb{R},\ P[X_n \leq x] = (x \vee 0) \wedge 1]$

(i) $\forall n$, siano $Y_n := -\log X_n$. (≥ 0 q.c.)

$\longrightarrow$ DISTRIBUZIONE DI Y_n

$\longrightarrow$ OSS. CHE Y_n SONO MUTUAM. INDIPENDENTI

(ii) DISTRIBUZIONE $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$

(iii) $\forall n,\ Z_n \doteq X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$ (PRODOTTO)

$(\in [0,1]$ q.c.$)$

→ FZ. RIPARTIZIONE Z_n

→ MOSTRARE Z_n È ASS. CONTINUA

→ DENSITÀ Z_n

(SUGG.: OSS. CHE

$$Z_n = \exp(-S_n) \ \ldots\ldots)$$

$F_Z(z) = \mathbb{P}[Z \le z]$

(Z V.A.R.)

F_Z C^1 A TRATTI

⇓ THM/PROP

Z È ASS. CONT., E

$f_Z = F_Z'$

$\left(f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) \right)$

⚠ PROSSIME VOLTE: I LUNEDÌ IN ORARIO 14/16:30

18 MAGGIO | TUTORAGGIO

$\underbrace{(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{L}^d)}$ LEBESGUE

(BOREliani sopra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$)

PROP $X = (X_1, \dots, X_d)$ VETT. ALEAT. IN $\mathbb{R}^d$ ($(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ FISSATO).

SONO EQUIVALENTI:

(a) X È ASS. CONTINUO CON DENSITÀ $f_X \in \mathcal{L}^1_+(\mathbb{R}^d)$.

$\left[f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty[\quad \text{CON} \int_{\mathbb{R}^d} |f_X(x)|\, dx < \infty \right]$ $\quad \int_{\mathbb{R}^d} f_X\, dx = 1$

(b) $\exists f \in \mathcal{L}^1_+(\mathbb{R}^d)$ TALE CHE, $\forall \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ MIS. E LIMITATA,

$$\left(\int_\Omega \varphi(X(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \right) \boxed{\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x)\, dx}.$$

X HA DENSITÀ f_X : ALLORA, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\text{"}\mathbb{P}[X \in A]\text{"} := \mathbb{P}[X^{-1}(A)] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}_X[A] = \int_A f(x)\, dx.$$

$$\mathbb{P}[X^{-1}(A)] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{X^{-1}(A)}}_{= \mathbb{1}_A(X)}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \underbrace{\int_A f(x)\, dx}_{= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x) f(x)\, dx}$$

$\left(\mathbb{P}(B) = \int_\Omega \mathbb{1}_B(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) \right)$

$\varphi = \mathbb{1}_A$

$E \subseteq D$

E insieme, $x \in E$

$$\mathbb{1}_E(x) := \begin{cases} 1, & \text{SE } x \in E \\ 0, & \text{SE } x \notin E \ (x \in D \setminus E) \end{cases}$$

(2

(X,Y) VETTORE ALEATORIO CON DENSITÀ ~~CONGIUNTA~~ $f_{X,Y}$.

$\Rightarrow$ $\forall \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ MIS. LIMITATA,

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

$\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ MIS. (NON NEC. LIMITATA!) ; $I \subset \mathbb{R}$ MIS.

$$\mathbb{P}[\psi(X,Y) \in I] = \mathbb{E}[\boxed{\mathbb{1}_I(\psi(X,Y))}]$$

$$\left[\ \mathbb{P}[|X-Y| > t] = \right.$$
$$\left. = \mathbb{P}[|X-Y| \in]t,\infty[\,]\ \right]$$

$$\mathbb{E}[(\mathbb{1}_I \circ \psi)(X,Y)]$$
$$\varphi \text{ (LIMITATA!)}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{\boxed{(\mathbb{1}_I \circ \psi)(x,y)}}_{\begin{cases} 1 & \text{SE } \psi(x,y) \in I \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\{(x,y) \mid \psi(x,y) \in I\}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy. \qquad \square$$

ES. $\quad \mathbb{P}[|X-Y| > t] = \iint_{\{|x-y|>t\}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$(\psi(x,y) \doteq |x-y|)$

Exc. 4.40 (Baldi) $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. di legge $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$. 13

$$\left[\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathbb{P}[X_1 \leq x] = \begin{cases} 0, & \text{se } x\leq 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{se } x\geq 0 \end{cases}\right]$$

$$\mathbb{P}[X_1 > x] = 1-\mathbb{P}[X_1\leq x] = \begin{cases} 1, & x\leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

(a) $\forall n$, sia

$$Z_n := \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

La succ. $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge in distribuzione/legge?

A cosa?

(b) Stesse domande per:

$\longrightarrow$ $Y_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$

$\longrightarrow$ $\left(Y_n / \log n\right)_{n\geq 2}$ $(n\to\infty)$.

Svolgo

Def. $(Z_n)_n$, Z v.a.r. aventi f.d.r. F_{Z_n}, F_Z $(\forall n)$. Sono equivalenti:

(a) $Z_n \xrightarrow[n\uparrow\infty]{d} Z$

(b) $\forall x\in\mathbb{R}$ "dove" F_Z è continua,

$$\boxed{F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} F_Z(x)}.$$

Limite delle funzioni di ripartizione!

(2) $\left(Z_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

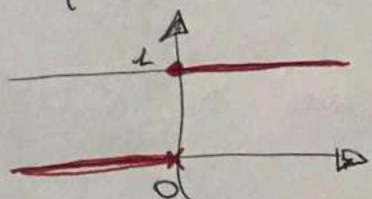
$$F_{Z_n}(x) := P[Z_n \le x]$$

$$= 1 - \underbrace{P[Z_n > x]}_{P[X_1>x,\, X_2>x,\, \dots,\, X_n>x]}$$

$$\underset{\substack{\text{indip.}\\ \&\\ \text{"stessa legge"}}}{=} \left(P[X_1>x]\right)^n = \begin{cases}1, & x\le 0\\ e^{-\lambda n x}, & x>0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda n x}, & x>0\end{cases}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \boxed{\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x)} = \begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1, & x>0\end{cases} =: F_Z(x)$$



δ_0 (su $\mathbb{R}$)

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\delta_0(x) = \mathbb{1}_{\{x\}}(0) = \begin{cases}1, & x=0\\ 0, & \text{altrove}\end{cases}$; LEGGE DELLA V.A.R. IDENTICAMENTE NULLA

$$\left(\text{"} P_{Z_n} \longrightarrow \delta_0 \text{"}\right).$$

✓

5

b) ($Y_n \doteq \max_{i=1,\dots,n} X_i$, $Y_n / \log n$)

→ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) \doteq \mathbb{P}[Y_n \le x]$

$$= \mathbb{P}[X_1 \le x, \dots, X_n \le x]$$

$$= (\mathbb{P}[X_1 \le x])^n$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0, \\ (1-e^{-\lambda x})^n, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) \to 0$ per ~~...~~ $n \to \infty$.

$(Y_n)_n$ NON converge in Distr.

→ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left[\frac{Y_n}{\log n} \le x\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0, \\ \left(1 - \frac{1}{n^{\lambda x}}\right)^n, & \text{se } x > 0. \end{cases}$

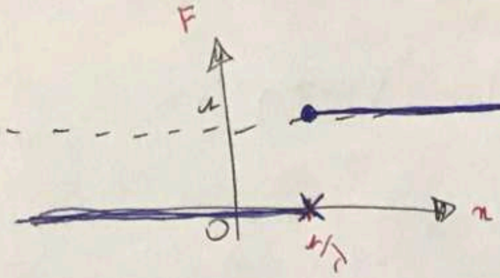
$\exp(-\lambda x \log n)$

$$\lim_{N \uparrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^{\lambda x}}\right)^{n^{\lambda x}}\right]^{n^{1-\lambda x}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \boxed{\lambda x < 1} \\ \frac{1}{e}, & \text{se } \boxed{\lambda x = 1} \\ 1, & \text{se } \lambda x > 1 \end{cases}$$

$n \le 0$

$x = 1/\lambda$



$\delta_{\frac{1}{\lambda}}$

Sì CONV. IN LEGGE, ALLA COSTANTE $1/\lambda$. ☐

EXC. 3.41 X, Y V.A. DI DENSITÀ CONGIUNTA (X,Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, & x>0 \text{ e } y>0 \\ 0, & \text{ALTRIMENTI}. \end{cases}$$

(a) DENSITÀ f_X DI X E f_Y DI Y

[EXC. Z NON COST. CON DENSITÀ. MOSTRARE CHE IL VETTORE (Z,Z) NON HA DENSITÀ!]

(b) $U := X$, $V := XY$ SONO INDIPENDENTI?

(c) DENSITÀ DI $V = XY$.

(d) SPERANZA CONDIZIONALE $\mathbb{E}[X \mid Y=y]$, $y \in \mathbb{R}$. $(y>0)$

(a) $\forall x > 0$, $f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$(f_X(x) = 0$ SE $x \leq 0)$

(7)

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \underbrace{\int_0^\infty x e^{-\lambda x y} dy}_{\left[\frac{e^{-\lambda x y}}{-\lambda}\right]_{y=0}^{y=\infty}}$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$= \lambda e^{-\lambda x}$$

$\forall y > 0$, $f_Y(y) = \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} dx$

$$= \int_0^\infty \lambda^2 \left(\frac{t}{y+1}\right) e^{-\lambda t} \frac{dt}{y+1}$$

$t := x(y+1)$

$dx = \frac{dt}{y+1}$

NON DIPENDE DA λ!

$$= \frac{1}{(y+1)^2} \underbrace{\int_0^\infty \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt}_{\Gamma(2) = 1} = \frac{1}{(y+1)^2}$$

$\left(\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty \lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right)$ $\left(\Gamma(n) = (n-1)!\right)$

8

(b) $\phi(x,y) := (x, xy)$ $\phi : (\underbrace{\mathbb{R}^*_+}_{\shortparallel \;]0,\infty[})^2_{(x,y)} \longrightarrow (\mathbb{R}^*_+)^2_{(u,v)}$

(X, XY)
$\;\;\shortparallel \;\;\;\; \shortparallel$
$\;\;U \;\;\;\;\; V$

$C^1 \quad (C^\infty)$

$\exists\, \phi^{-1}, \quad \phi^{-1}(u,v) = \left(u, \frac{v}{u}\right) \quad C^1 \quad (C^\infty)$

(LEGGE CONGIUNTA DI (U,V) MA $\begin{matrix} \nearrow U \\ \searrow V \end{matrix}$)

$$\left| D\phi^{-1}(u,v) \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \right| = 1/u$$

$\overset{\text{THM}}{\Longrightarrow}$ $(U,V) \equiv (X, XY) = \phi(X,Y)$ HA DENSITÀ

$$f_{U,V}(u,v) \underset{\substack{\uparrow \\ u,v>0}}{=} f_{X,Y}(\underbrace{\phi^{-1}(u,v)}_{\left(u, \frac{v}{u}\right)}) \cdot \frac{1}{u}$$

$$= \lambda^2 \cancel{u}\, e^{-\lambda u \left(\frac{v}{u} + 1\right)} \cdot \frac{1}{\cancel{u}}$$

$$= \underbrace{\left(\lambda e^{-\lambda u}\right)}_{\text{DENSITÀ DI } X!} \left(\lambda e^{-\lambda v}\right)$$

(c) ✓

$\Longrightarrow$ $U = X$, $V = XY$ SONO INDIPENDENTI E $V \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(d) RICORDIAMO CHE: SE (X,Y) HA DENSITÀ $f(x,y)$,

LA DENSITÀ CONDIZIONALE $f_{X|Y}(\cdot|y)$ DI X (DENSITÀ f_X) DATO/A $Y=y$,

$y \in \mathbb{R}$ (f_Y DENSITÀ DI Y) È COSÌ DEFINITA:

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) \propto f_{X,Y}(x,y)}$$ (DIRETTAMENTE PROPORZIONALE)

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$f_Y(y) \to \frac{1}{(y+1)^2}$

$\Rightarrow$ $\forall x,y>0$, $f_{X|Y}(x|y) = \lambda^2 x (y+1)^2 e^{-\lambda x(y+1)}$

$$= [\lambda(y+1)]^2 \cdot x \cdot e^{-[\lambda(y+1)]x}$$

DENSITÀ $\Gamma(2, \lambda(y+1))$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X|Y=y] =$ VALORE ATTESO DELLA LEGGE "$f_{X|Y}(\cdot|y)$" $(\Gamma(2,\lambda(y+1)))$

$$= \frac{2}{\lambda(y+1)}.$$

$\left(\mathbb{E}[\text{Gamma}(\alpha,\tau)] = \frac{\alpha}{\tau}\right)$

EXC. 3.75 X, Y V.A.R. CON $Y \sim Beta(\alpha, \beta)$ $[\alpha, \beta \in (0,1)]$ 10

E, $\forall y \in]0,1[$, LA LEGGE CONDIZIONALE DI X DATO $Y = y$ È'

UNA GEOMETRICA DI PARAMETRO y ("$= p$").

$(k = 1,2,3,\dots)$

$p(k) = y(1-y)^{k-1}$

(a) LEGGE DI X. (NB $f_X =: p_X$)

(b) $\mathbb{E}[X]$

(c) $\mathbb{E}[Y \mid X = k]$, $k \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$.

SVOLGO $\boxed{Y}$ Y HA DENSITÀ

$y \in]0,1[$

$$f_Y(y) \doteq \frac{1}{B(\alpha,\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} \quad \text{dove}$$

$$\boxed{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\, dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}.$$

(VALORE ATTESO : $\alpha/\alpha+\beta$).

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) \overset{\text{def}}{=} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}} \quad \left(\Rightarrow (X,Y) \text{ AMMETTE DENSITÀ}\right)$$

$f_X =: p_X$

"MISTA"

$$f_{X,Y}(x,y) =: f_{X,Y}(k,y) = f_{X|Y}(k|y)\cdot f_Y(y)$$

$k \in \mathbb{N}^*$

$y \in]0,1[$

$$= \underbrace{y(1-y)^{k-1}}\cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot y^{\alpha}(1-y)^{\beta+k-2}$$

$\left(f_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \text{si } x \notin \mathbb{N}^* \text{ ou } y \notin]0,1[. \right)$

e) $f_X(k) \overset{k\in\mathbb{N}^*}{=:} p_X(k) = \int_0^1 f_{X,Y}(k,y)\,dy$

$$= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_0^1 y^{\alpha}(1-y)^{\beta+k-2}}_{}}$$

$$\underbrace{B(\alpha+1, \beta+k-1)}_{}$$

$$\frac{\Gamma(\ldots)\,\Gamma(\ldots)}{\Gamma(\ldots)}$$

$$\boxed{\Gamma(\gamma+1) = \gamma\,\Gamma(\gamma)}$$

$\rightsquigarrow \quad f_X(k) =: p_X(k) \to \text{``}\, p(\alpha,\beta,k)\text{''}$

$\mathbb{P}[X=k]$, $k \in \mathbb{N}^*$

(b) $\mathbb{E}[X] \overset{(def.)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k\, \underbrace{P[X=k]}_{p_X(k)} = ?$ No

$\Gamma(\beta+k-1)$

USIAMO LA FORMULA:

$$\boxed{\mathbb{E}[X] \overset{THM}{=} \int_0^1 \boxed{\mathbb{E}[X|Y=y]} \cdot f_Y(y)\,dy}$$

$1/y$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_0^1 y^{\alpha-2}(1-y)^{\beta-1}}_{B(\alpha-1,\beta)}$$

$$B(\alpha-1,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}$$

" $\Gamma(\alpha,\beta)$ "

(c) " $\mathbb{E}[Y|X=k]$ " SE AVESSIMO

$\boxed{f_{Y|X}(y|k)}$) ALLORA BASTA "INTEGRARE"

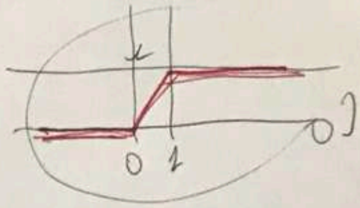
$$\overset{(def.)}{=} \frac{f_{X,Y}(k,y)}{f_X(k)} \ldots$$

FINIRE I CONTI!)

13

ESC $(X_n)_n$ v.a. i.i.d. , $X_1 \sim U(0,1)$

$[\forall x \in \mathbb{R},\ P[X_1 \le x] = (x \vee 0) \wedge 1]$



1) Legge di $Y_n \doteq -\log X_n$ $(\ge 0$ q.c.$)$

[le Y_n sono indipendenti!]

2) Legge di $S_n \doteq Y_1 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

3) $Z_n := X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$. $(\in [0,1]$ q.c.$)$

→ Fz. ripartizione Z_n $(\forall n)$.

→ Z_n è ass. cont.? Se sì, densità $(\forall n)$

Svolgo

(1) $\forall y \ge 0$ e $\forall n$,

$$P[\underbrace{Y_n}_{-\log X_n} \le y] = P[X_n \ge e^{-y}]$$

$$= 1 - \underbrace{P[X_n \le e^{-y}]}_{e^{-y}}$$

$$= 1 - e^{-y}$$

$$\boxed{Y_n \sim \mathcal{E}(1)} =: \Gamma(1,1)$$

α λ

2) $S_n := Y_1 + \dots + Y_n \overset{\text{(independenti)}}{\sim} \Gamma(n,1)$

$\Gamma(1,1) \dots \Gamma(1,1)$

$\left[\text{"}\Gamma(\alpha,\lambda) + \Gamma(\beta,\lambda) = \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)\text{"} \right]$

independenti

$$f_{S_n}(s) = \frac{1}{\underbrace{\Gamma(n)}_{(n-1)!}} s^{n-1} e^{-s} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s) = \boxed{\frac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)}$$

---

(3) $\boxed{Z_n = X_1 \cdots X_n}$ $\in [0,1]$ q.c.

$\forall z \in [0,1]$, $\forall n$, $\mathbb{P}[\underbrace{Z_n \le z}_{\underbrace{\exp(-S_n)}_{Z_n} \le z}] = \mathbb{P}[S_n \geq -\log z]$

F.D.R. $S_n \sim \Gamma(n,1)$

$= 1 - \mathbb{P}[S_n < -\log z]$

$= 1 - F_{S_n}(-\log z)$

$\Rightarrow$ $f_{Z_n}(z) \overset{q.c.}{=} F_{S_n}'(z) = \dots \to \frac{1}{(n-1)!}(-\log z)^{n-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$ $\boxtimes$

$\boxed{2.37\ (+\boxed{2.36})}$ X, Y V.A. INDIP. GEOMETRICHE DI PAR. $p \in]0,1[$.

(a) LEGGE $X+Y$

(b) LEGGE CONDIZIONALE DI X DATA $X+Y = n$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

(c) UNA MONETA VIENE LANCIATA PIÙ VOLTE

(LANCI INDIP. ; PROB. TESTA, T, UGUALE p).

$Z :=$ N° LANCI NECESSARIO PER OTTENERE T PER LA SECONDA VOLTA.

SAPENDO CHE $Z = n$ $(\in \mathbb{N}^*)$, PROBAB. CHE LA "1ª TESTA" SIA STATA OTTENUTA AL $k^{\circ} \in n$ $(k \leq n-1)$ LANCIO,

C'È UN VALORE $k \in \{1, \dots, n-1\}$ PIÙ PROBABILE?

(a) OSSERVIAMO CHE:

X, Y INDIP. CON DENSITÀ (DISCRETA) p_X, p_Y $\Rightarrow$ $X+Y$ HA DENSITÀ

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p_X(k)\, p_Y(n-k) = \sum_{h \in \mathbb{N}} p_X(n-h)\, p_Y(h)$$

(a) $(\forall m \in \mathbb{N}^*)$ 4-6

$$p_{X+Y}(m) = \sum_{k=1}^{m-1} p_X(k)\, p_Y(\underbrace{m-k}_{m-k \geq 1})$$ $(k \leq m-1)$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} p^2 (1-p)^{k-1} (1-p)^{m-k-1}$$

$m-1$ addendi

$$= (m-1)\, p^2 (1-p)^{m-2}$$

(b) $$p_{X|X+Y}(k|m) \overset{def.}{=} \frac{p_{X,X+Y}(k,m)}{p_{X+Y}(m)}$$ $(k,m \in \mathbb{N}^*)$

$1 \leq k \leq m-1$

$$\Big[\quad \mathbb{P}[X=k,\, X+Y=m] = \mathbb{P}[X=k,\, Y=m-k]$$

$$\overset{indip.}{=} \mathbb{P}[X=k]\,\mathbb{P}[Y=m-k]$$

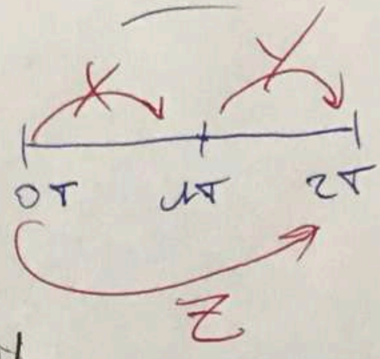
$$= p^2 (1-p)^{m-2} \quad \Big]$$

$$= \frac{1}{m-1} \quad \forall k \in \{1,2,\dots,m-1\}$$

$(0$ per $k \geq m)$

LEGGE UNIFORME SULL'INSIEME $\{1,2,\dots,m-1\}$

(c) $\begin{cases} X := \text{"N° lanci per ottenere T la 1a volta"} \\ Y := \text{"N° lanci "ulteriori" (dopo X) per ottenere T una 2a volta"} \end{cases}$ (17



$$\Rightarrow Z = X + Y$$

$\boxed{\text{EX. 2.36}} \Rightarrow$ X, Y indip. $\sim$ Geom(p)!

$$\mathbb{P}[X = k \mid \underbrace{Z}_{X+Y} = n] \equiv p_{X|\underset{X+Y}{Z}}(k|n) = \frac{1}{n-1} \qquad 1 \le k \le n-1$$

Uguale $\forall k = 1, \dots, n-1$!

$(Z_n)_{n \geq 1}$, $Z_n :=$ esito del n-esimo lancio

(Z_n) i.i.D., $\mathbb{P}[Z_1 = T] = p$ $\quad (\mathbb{P}[Z_1 = C] = 1-p)$.

$\forall k, h \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}[X = k, Y = h] =$

(h-1) termini

$$= \mathbb{P}[\underbrace{Z_1 = C, \dots, Z_{k-1} = C}_{k-1}, Z_k = T, Z_{k+1} = C, \dots, Z_{k+h-1} = C, Z_{k+h} = T]$$

$$= p^2 (1-p)^{(k-1)+(h-1)} = p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{h-1}$$

EXC $N \geq 2$ (INTERO) PAIA DI GUANTI. VENGONO MESCOLATI E DISTRIBUITI

[OGNI PAIO È DX E SX (SX E DX)]

A CASO A N PERSONE PRESCELTE (DUE GUANTI A TESTA).

PROBAB. CHE CIASCUNO RICEVA SX E DX (DX E SX)?

[Metodo CONTARE i "GIUSTI" MESCOLAMENTI :

$$S_{2N} = \{ \text{permutazioni di } \{1,2,\dots,2N\} \}.$$

$(|S_{2N}| = (2N)!)$.

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{2^N \cdot (N!)^2}{(2N)!}} \quad]$$

PROSSIMA VOLTA: TLC! :)

(TEOREMA LIMITE CENTRALE)

25 MAGGIO — PROB. E STAT. (TUTORAGGIO) pp ①
/ 1 GIUGNO

EXC Sia X V.A.R., anche con densità. Allora la coppia (X,X) non può avere densità.

[$\forall I, J \subset \mathbb{R}$ mis. con $I \cap J = \phi$, $P[(X,X) \in I \times J] = 0$. Se esistesse densità $f \in L^1_+(\mathbb{R}^2)$ di (X,X), allora avremmo (per simmetria)

$$\iint_{I\times J} \underbrace{f(x,y)}_{\geq 0}\,dx\,dy = 0 = \iint_{J\times I} \underbrace{f(x,y)}_{\geq 0}\,dx\,dy$$

Unione finita (anzi numerabile) di trascurabili resta trascurabile!

da cui, $\tilde{\forall} x \in I \cup J$ e $\tilde{\forall} y \in J \cup I$ ("q.o." rispetto alla mis. di Leb.), $f(x,y) = 0$.

Scegliendo $I \neq \phi$ e $J = \mathbb{R} \setminus I$, otteniamo l'assurdo $f \equiv 0$ (mentre dovrebbe valere $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$!) ▫]

Brevi precisazioni volte scorse: * $\delta_x[A] \doteq \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$

* $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $\mathbb{N}^* \doteq \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3,\ldots\}$
* Analog., $\mathbb{R}_+ = [0,\infty[\; (\equiv [0,+\infty))$ mentre $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} =]0,\infty[$.
* $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \wedge b \doteq \min\{a,b\}$ e $a \vee b \doteq \max\{a,b\}$.

  Es. $U \sim U(0,1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $P[U \leq x] = (x \vee 0) \wedge 1 = \min\{\max\{0,x\}, 1\}$.

---

* Ultimo EXC lasciato (Guanti) va scritto N invece di n ! ✓

EXC 2.46 $\begin{cases} Z \text{ unif. su } \{-1,1\} \quad (P[Z=-1] = P[Z=1] = \frac{1}{2}) \\ X \text{ unif. su } \{k \in \mathbb{N} \mid |k| \leq m\} = \{-m, -(m-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m\}, \quad m \in \mathbb{N}^* \text{ fissato} \end{cases}$

$P[X=k] = \frac{1}{2m+1}$

X, Z indipendenti, $Y := X^2 + Z$.

Il valore atteso dipende solo dalla legge!

(a) Calc. $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[X^3]$.

(b) Calc. legge condizionale di Y dato $X = k$, $k = -m, \ldots, m$, e la sua media.

(c) Calc. coeff. angolare retta di regressione lineare di Y risp. a X.

(Sono tutte V.A.R. in L^2, perché sono anzi limitate!) [Serve che il prodotto sia integrabile]

PP(2)

[(a) $\mathbb{E}[X] \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} k\, \mathbb{P}[X=k] = \frac{1}{2m+1} \{(-m)+(-(m-1))+\dots+(-1)+0+1+\dots+m\} = 0$.

Lo stesso per $\mathbb{E}[X^3]=0$ e, in gen., $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X^{2m+1}]=0$ $\left((-1)^{2m+1}=-1\right)$.

In effetti, X^{2m+1} è simmetrica, cioè X^{2m+1} e $-X^{2m+1}$ hanno la stessa legge e così

$$\mathbb{E}[X^{2m+1}] = \mathbb{E}[-X^{2m+1}] \equiv -\mathbb{E}[X^{2m+1}] \quad (\Rightarrow =0).$$

(b) $\forall k=-m,\dots,m$ e $\forall r \in \mathbb{N}$, la densità congiunta di Y e X vale

$$\mathbb{P}[Y=r, X=k] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}[X^2+Z=r, X=k]$$
$$= \mathbb{P}[Z=r-k^2, X=k]$$
$$\overset{\text{indip}}{=} \mathbb{P}[Z=r-k^2]\,\mathbb{P}[X=k] = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m+1}, & \text{se } r=k^2+1 \text{ o } r=k^2-1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $p_{Y|X}(r|k) \overset{\text{def}}{\equiv} \mathbb{P}[Y=r \mid X=k]$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[Y=r, X=k]}{\mathbb{P}[X=k]} = \begin{cases} 1/2, & \text{se } r=k^2+1 \text{ o } r=k^2-1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che ha v. atteso $\frac{1}{2}(k^2+1)+\frac{1}{2}(k^2-1)=k^2$.

(c) Il coeff. richiesto è $\varrho^* \doteq \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathbb{E}[X^2]}$ $(\mathbb{E}[X]=0)$.

Allora

$$\mathrm{Cov}[X,Y] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[XY] - \cancel{\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}^{\,0}$$
$$\overset{\text{def }Y}{=} \mathbb{E}[X(X^2+Z)]$$
$$= \cancel{\mathbb{E}[X^3]}^{\,0} + \mathbb{E}[XZ]$$
$$\overset{\text{indip.}}{=} \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Z] = 0\cdot 0 = 0 \rightarrow \text{perfetta scorrelazione}.$$

(in effetti, Y dipende più da X^2 che da X.) ■]

$\hookrightarrow$ A proposito, $\rightarrow$

~~XXXXXX~~ BREVE DIGRESSIONE SULLA COVARIANZA

DATE $X, Y \in L^2(P)$, CIOÈ DOTATE DI MOMENTO SECONDO (E QUINDI ANCHE INTEGRABILI/SOMMABILI (JENSEN)), IL LORO PRODOTTO $X \cdot Y$ È INTEGRABILE (DIS. SCHWARTZ) E HA SENSO CONSIDERARE LA COVARIANZA

$$Cov[X,Y] \overset{def.}{=} \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$
$$\equiv \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\right] \quad \in \mathbb{R}$$
$$\left(= Cov[Y,X]\right).$$

NOTA. PER $X, Y \in L^+(P)$ (INTEGRABILI), SE X, Y SONO INDIPENDENTI ALLORA $X \cdot Y$ È A SUA VOLTA INTEGRABILE E VALE $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$! (NON SERVE $X, Y \in L^2(P)$).

PROPRIETÀ DI BASE. ① ESTENSIONE/GENERALIZZ. della VARIANZA:

$$Cov[X,X] = Var[X].$$

② BILINEARITÀ: $\forall c, c' \in \mathbb{R}$ e $\forall X' \in L^2(P)$,

$$Cov[cX + c'X', Y] = c\,Cov[X,Y] + c'\,Cov[X',Y].$$

③ INDIPENDENZA: SE X E Y SONO INDIP., ALLORA $Cov[X,Y] = 0$. ("SCORRELAZIONE").

④ "SCHWARTZ": $|Cov[X,Y]| \leq \sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}$

→ COEFF. DI CORRELAZIONE: $\rho \overset{def.}{=} \dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var Y}} \in [-1,1]$.

$\left(\begin{cases} \text{POSITIVA CORRELAZIONE} \to \rho \in]0,1] \\ \text{SCORRELAZIONE} \to \rho = 0 \\ \text{NEGATIVA CORRELAZIONE} \to \rho \in [-1,0[\end{cases} \right)$

$\boxed{\text{OSS.}}$ SE $X_1, \dots, X_n$ SONO SCORRELATE, CIOÈ $Cov[X_i, X_j] = 0$ $\forall i \neq j$, ALLORA $Var[X_1 + \dots + X_n] = Var[X_1] + \dots + Var[X_n]$.

$\boxed{\text{ES.}}$ V.A.R. SCORRELATE MA NON INDIP. Sia Z V.A. UNIF. SU $\{-1, 0, 1\}$, DUNQUE $P[Z=-1] = P[Z=0] = P[Z=1] = \frac{1}{3}$ E Z È CENTRATA (NONCHÉ IDENTICA A OGNI SUA POTENZA DISPARI: $Z^3, Z^5, \dots, Z^{2n+1}, \dots$). Così, PER OGNI ALTRA V.A.R. Z', $Cov[Z, Z'] = \mathbb{E}[ZZ']$. CONSIDERIAMO $Z' := Z^2$, CIOÈ

V.A. A VALORI IN $\{0,1\}$ CON $\mathbb{P}[Z'=0]=\frac{1}{3}$ E $\mathbb{P}[Z'=1]=\frac{2}{3}$, IN MODO PP④

CHE $\quad Cov[Z,Z'] \equiv \mathbb{E}[Z\cdot Z'] = \mathbb{E}[Z^3]=0$, OSSIA Z E $Z'=Z^2$ SONO

SCORRELATE, MA NON INDIPENDENTI, ad esempio perché

$$\mathbb{P}[Z=0, \underbrace{Z'=1}_{Z^2=1}] = \mathbb{P}[\emptyset]=0 \neq \frac{2}{9} = \mathbb{P}[Z=0]\mathbb{P}[Z^2=1] \quad . \quad \checkmark$$

$\boxed{\text{EXC. } 2.47}$ X,Y,Z i.i.d. DI LEGGE (COMUNE) $Pois(\lambda)$, $\lambda>0$. ← Limiti di Binomiali ......

[DUNQUE SONO DI QUADRATO INTEGRABILI CON VARIANZA = MEDIA $=\lambda$.]

ⓐ LEGGE, E SPERANZA, CONDIZIONALE DI X DATO $X+Y=m$.

ⓑ COEFF. CORRELAZIONE TRA $X+Y$ E $X+Z$.

ⓒ CALC. $\mathbb{P}[X+Y=2, X+Z=3]$.

[ⓐ RICORDIAMO CHE, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}[X=k]=\mathbb{P}[Y=k]=\mathbb{P}[Z=k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, E CHE

X,Y INDIPENDENTI DI LEGGE $Pois(\lambda) \Rightarrow$ $X+Y$ HA LEGGE $Pois(\lambda+\lambda=2\lambda)$.

ALLORA, $\forall m\in\mathbb{N}$ e $\forall k\in\mathbb{N}$ CON $k\leq m$,

$$\mathbb{P}[X+Y=m, X=k] = \mathbb{P}[Y=m-k, X=k]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \mathbb{P}[Y=m-k]\mathbb{P}[X=k]$$

$$= e^{-2\lambda}\frac{\lambda^m}{k!\,(m-k)!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[X=k \mid X+Y=m] = e^{-2\lambda}\cdot\frac{\lambda^m}{k!(m-k)!} \Big/ e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^m}{m!} = \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}$$

$\uparrow$
$0\leq k\leq m$

CHE È UNA LEGGE BINOMIALE $Bin(m, \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{p})$ $\quad \left[P_{Bin(m,p)}(k) = \binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k} \right]$,

CHE HA VALORE ATTESO $\frac{m}{2}$ $\quad [m\cdot p]$. $\checkmark$

II ⑤

(b) $\mathrm{Cov}[X+Y, X+Z] \overset{\text{bilin.}}{=} \mathrm{Cov}[X,X] + \cancel{\mathrm{Cov}[X,Z]} + \cancel{\mathrm{Cov}[Y,X]} + \cancel{\mathrm{Cov}[Y,Z]}$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \mathrm{Cov}[X,X] \equiv \mathrm{Var}[X] = \lambda$$

Poi $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X+Z) = 2\lambda$ (VAR. DI UNA $\mathrm{Pois}(2\lambda)$), e così

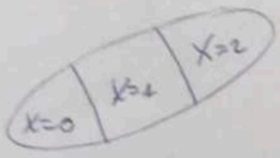
$$\frac{\mathrm{Cov}[X+Y, X+Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}\sqrt{\mathrm{Var}(X+Z)}} = \frac{1}{2} > 0 .$$

(c) $\mathbb{P}[\underbrace{X+Y=2}_{\Downarrow\ 0\le X\le 2}, \underbrace{X+Z=3}_{\Downarrow\ 0\le X\le 3}] = \mathbb{P}[X=0, X+Y=2, X+Z=3]$

$0\le X\le 2 \Rightarrow 0\le X\le 3$

$$+\ \mathbb{P}[X=1, \quad '' \quad]$$

$$+\ \mathbb{P}[X=2, \quad '' \quad]$$



$$= \mathbb{P}[X=0, Y=2, Z=3]$$

$$+\ \mathbb{P}[X=1, Y=1, Z=2]$$

$$+\ \mathbb{P}[X=2, Y=0, Z=1]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} e^{-3\lambda}\left(1 \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{\lambda^3}{6}\right)$$

$$+\ e^{-3\lambda}\left(\lambda \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

$$+\ e^{-3\lambda}\left(\frac{\lambda^2}{2} \cdot 1 \cdot \lambda\right)$$

$$= e^{-3\lambda}\left\{\frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda^4}{2} + \frac{\lambda^5}{12}\right\}. \quad \boxtimes$$

$\boxed{\text{Exc. 1.11}}$ $(X_n)_{n\ge 1}$ i.i.d. DI DENSITÀ

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } x \le 1, \\ \dfrac{c}{x^{\alpha+1}}, & \text{SE } x > 1, \end{cases}$$

DOVE $\alpha > 0$ È FISSATO.

$\Rightarrow \forall n \ge 1,\ X_n > 1$ q.c.

(6)

(a) c ($= c(\alpha)$) affinché f_α sia una densità. [$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x)dx = 1$]

(b) $\forall n \geq 1$, poniamo $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Allora $\left(\frac{1}{n^{1/\alpha}} M_n\right)_{n \geq 1}$ converge in legge?

A cosa? [Limite funz. di ripartizione!]

[(a) $1 = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x)dx = c \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = c \cdot \left[-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{c}{\alpha} \iff c = \alpha$.

(b) [$c = \alpha$] Dunque, $\forall t > 1$, $P[X_1 \leq t] = \int_{-\infty}^t f_\alpha(x)dx$

$$= \alpha \int_1^t \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$

$$= \alpha \left[-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\right]_{x=1}^{x=t}$$

$$= 1 - \frac{1}{t^\alpha}$$

$\Rightarrow$ $\forall x > 0$ e $\forall n \geq 1$ (abb. grande),

$$P\left[\frac{M_n}{n^{1/\alpha}} \leq x\right] = P[X_1 \leq x n^{1/\alpha}, \dots, X_n \leq x \cdot n^{1/\alpha}]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \left(P[X_1 \leq x n^{1/\alpha}]\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n x^\alpha}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{n x^\alpha}\right)^{n x^\alpha}\right]^{x^{-\alpha}} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-x^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{1/x^\alpha}}.$$

Sia allora $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ data da, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) := \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

Allora $G(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$ e G è non decrescente, continua a destra ($\lim_{x \downarrow 0} G(x) = 0$) con

$\lim_{x \downarrow -\infty} G(x) = 0$ e $\lim_{x \uparrow +\infty} G(x) = 1$, ossia G è una F.D.R.

e $(M_n / n^{1/\alpha})_{n \geq 1}$ conv. in legge "a G". $\boxtimes$]

Ricordiamo il Teorema Limite Centrale (Paul Lévy): NON CORRELATI! PPZ
[approssimazione normale]

$\boxed{\text{THM}}$ Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. in L^2 con media $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ e varianza $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1] > 0$ (deviazione standard $\sigma > 0$). Allora, se denotiamo, $\forall n \geq 1$,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \quad \text{e} \quad \overline{X}_n := \frac{S_n}{n} \quad (\text{media empirica}),$$

la successione "standardizzata" (media zero e varianza 1)

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}$$

($\sqrt{n}$, non n)

converge in legge alla normale standard $N(0,1)$

$$\left[\text{F.D.R. "limite"}: \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \Phi(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dx \right].$$

Equiv.,
$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \equiv \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, \sigma^2)$$
ossia la F.D.R. limite è
$$\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Ex. 4.36}}$ Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}(1) \equiv \Gamma(1,1)$ (quindi in L^2 e >0 q.c.).

(a) Densità $\dfrac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$. [$>0$ q.c.]

(b) Convergenza $\dfrac{X_1 + \dots + X_n - n}{\sqrt{n}}$.

(c) Date $(Z_n)_{n\geq 1}$ indipendenti con $Z_n \sim \Gamma(n, \sqrt{n})$ $\forall n \geq 1$, cosa dire di $Y_n := Z_n - \sqrt{n}$?

[Ricordiamo che la densità $\Gamma(\alpha,\lambda)$ è $x \mapsto \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, che ha media α/λ e varianza α/λ^2 ($\alpha, \lambda > 0$).

(a) "$\underbrace{\Gamma(\alpha,\lambda) + \Gamma(\beta,\lambda)}_{\text{se indipendenti}} = \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$", quindi $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n,1)$ e allora,

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq t \right] = \mathbb{P}[X_1 + \dots + X_n \leq t\sqrt{n}] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{t\sqrt{n}} x^{n-1} e^{-x}\, dx \qquad \leftarrow y := \frac{x}{\sqrt{n}} \in (0,t), \quad dx = \sqrt{n}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{t} (\sqrt{n})^n y^{n-1} e^{-\sqrt{n}y}\, dy$$

$$\equiv \text{F.D.R. della } \Gamma(n, \sqrt{n})$$

11(3)

cioè $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} \sim \Gamma(n;\sqrt{n})$. [In effetti, dalla teoria si sa che

$$U = \frac{V}{\lambda} \sim \Gamma(\alpha,\lambda) \iff V = \lambda U \sim \Gamma(\alpha,1)$$

$$\left(\text{cioè } " \frac{\Gamma(\alpha,\cancel{1})}{\lambda} = \Gamma(\alpha,\lambda) " \right)$$

da cui subito $\frac{\Gamma(n,1)}{\sqrt{n}} = \Gamma(n,\sqrt{n})$. ✓]

✓

ⓑ $X_1 \sim \mathcal{E}(1) = \Gamma(1,1)$ ha $E[X_1] = Var[X_1] = 1$, dunque si può applicare direttamente il TLC per concludere che

$$\frac{X_1+\dots+X_n - n\cancel{*}}{\sqrt{n}\cancel{*}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}/d} N(0,1).$$ ✓

ⓒ Semplicemente, da ⓐ e ⓑ,

$$Y_n \overset{def.}{=} Z_n - \sqrt{n} \overset{d}{=} \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{X_1+\dots+X_n - n}{\sqrt{n}},$$

dunque anche $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$. [Hanno la stessa succ. di F.D.R. che ha per limite la (F.D.R. della) $N(0,1)$.] ✓

■]

$\boxed{\text{EXC}}$ [V.A. DISCRETE] Siano $N \in \mathbb{N}^*$, con $N \geq 2$, e $p \in]0,1[$. Consideriamo $Z_1,\dots,Z_N$ v.a. i.i.d. a valori in $\{-1,1\}$ con $P[Z_1 = 1] = p$ $\quad (P[Z_1=-1] = 1-p)$ e sia

$$X \doteq \prod_{i=1}^{N} Z_i = Z_1 \cdot \dots \cdot Z_N .$$ [X ha valori in $\{-1,1\}$!]

ⓐ Legge di X.

ⓑ X è indipendente dal vettore aleatorio $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$?

ⓒ X è indip. dal vet. aleat. $(Z_2,\dots,Z_N)$?

[ⓐ L'idea è che la legge di X sia determinata da $E[X]$, essendo che X possa assumere solo

DUE VALORI. VEDIAMO: DENOTANDO $q := \mathbb{P}[X=1]$ $(1-q = \mathbb{P}[X=-1])$, SI HA 11③

$$\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\substack{\parallel \\ 1\cdot q + (-1)\cdot(1-q) \,=\, 2q-1}} \overset{def.}{=} \mathbb{E}[Z_1 \cdot \dots \cdot Z_N] \overset{indip.}{=} \mathbb{E}[Z_1]\cdot \dots \cdot \mathbb{E}[Z_N] \overset{\substack{stessa\\legge}}{=} (1\cdot p + (-1)\cdot(1-p))^N = (2p-1)^N$$

DA CUI, EQUIVALENTEMENTE, $q = \frac{1}{2}\left[1 + (2p-1)^N\right] \in]0,1[$. ✓

ⓑ X È FUNZIONE DI $(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ E NON È COSTANTE, DUNQUE NON POSSONO ESSERE INDIPENDENTI. INFATTI, AD ESEMPIO, SE FOSSERO INDIPENDENTI

$$0 = \mathbb{P}[X=-1, (Z_1, Z_2, \dots, Z_N) = (1,1,\dots,1)] = \mathbb{P}[X=-1]\cdot \underbrace{\mathbb{P}[Z_i = 1, \forall i=1,\dots,N]}_{\substack{\parallel \\ (1-q)\cdot p^N \,>\, 0}}$$

CHE È ASSURDO. ✓

ⓒ L'INTUIZIONE CI SUGGERISCE CHE X E $(Z_2, \dots, Z_N)$ SONO INDIPENDENTI $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$. VERIFICHIAMOLO: $[\Leftrightarrow q = \frac{1}{2}]$

($\Leftarrow$) SE $p = \frac{1}{2}$, ALLORA, $\forall\, t_2, \dots, t_N \in \{-1, 1\}$,

$$\mathbb{P}[X = \pm 1 \mid Z_2 = t_2, \dots, Z_N = t_N] \overset{def. X}{=} \mathbb{P}[Z_1 = \pm\, \mathrm{sgn}(t_2 \cdot \dots \cdot t_N)]$$

(RISPETTIVAMENTE)

TALE EVENTO, A t_i FISSI, È O $\{Z_1 = 1\}$ O $\{Z_1 = -1\}$!

$$= \frac{1}{2} = q = \mathbb{P}[X = \pm 1]$$ ✓

($\Rightarrow$) SE C'È INDIPENDENZA, MA PER ASSURDO $p \neq \frac{1}{2}$, ALLORA AD ESEMPIO (COME APPENA VISTO)

$$\mathbb{P}[X=1 \mid Z_2 = 1, \dots, Z_N = 1] = \mathbb{P}[Z_1 = 1] = p \neq q = \mathbb{P}[X=1].$$ ✓ ⊠

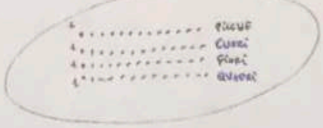
($0<p<1$, DUNQUE $p = q \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}\ (=q)$)

EXC [CALCOLO COMBINATORIO] DA UN MAZZO DI 52 CARTE DA POKER (13 CARTE PER 4 SEMI) SI ESTRAGGONO, A CASO, 3 CARTE (NON IMPORTA L'ORDINE). CALC. PROBABILITÀ DI AVERE:

ⓐ ALMENO UN ASSO; ⓑ TRE SEMI DIVERSI; ⓒ ALMENO DUE CARTE CHE RIPORTINO STESSO NUMERO O STESSA FIGURA (AL DI LÀ DEL SEME).

[$\Omega \doteq$ "INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI 3 ELEMENTI DEL MAZZO DI 52 CARTE" (TUTTE LE POSSIBILI ESTRAZIONI, SENZA ORDINE) $\Rightarrow |\Omega| = \binom{52}{3}$. [MISURA DI PROBABILITÀ UNIFORME]

(e) «NUMERO DELLE ESTRAZIONI SENZA ASSI» $= \binom{48}{3}$ ($48 = 52 -$ «4 ASSI»), DUNQUE LA RISPOSTA È $1 - \binom{48}{3}/\binom{52}{3}$.



(b) «NUMERO DELLE ESTRAZIONI CON TRE SEMI DIVERSI» =

= «N° MODI DI SCEGLIERE I SEMI» × «N° MODI DI SCEGLIERE 3 CARTE DA TALI SEMI»

$= 4 \cdot 13^3$. [$4 = \binom{4}{3}$] QUINDI LA RISPOSTA È $4 \cdot 13^3/\binom{52}{3}$.

(c) «NUMERO DELLE ESTRAZIONI CHE NON PRESENTANO RIPETIZIONE DI NUMERO O FIGURA» =

= «N° MODI DI SCEGLIERE TRE TIPI DI CARTA, TRA I 13 TIPI POSSIBILI» ×

× «N° POSSIBILI SEMI PER TALI TIPI»

$= \binom{13}{3} \cdot 4^3$, QUINDI LA RISPOSTA È $1 - \binom{13}{3} 4^3/\binom{52}{3}$. ∎]

EXC (CALC. COMBINATORIO) $N \in \mathbb{N}^*$ PAIA DI GUANTI VENGONO MESCOLATI A CASO E DISTRIBUITI A N PERSONE DIVERSE, LE QUALI QUINDI RICEVONO DUE GUANTI A TESTA [O DUE "DESTRE", O DUE "SINISTRE", O "GIUSTI"]. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE TUTTI LORO RICEVANO UNA "DESTRA" E UNA "SINISTRA" ("GIUSTI")?

[ABBIAMO 2N GUANTI E CIÒ CHE VIENE CHIESTO È IL RAPPORTO FRA IL NUMERO DEI MESCOLAMENTI "GIUSTI" DI TALE QUANTITÀ DI GUANTI COL NUMERO DEI LORO MESCOLAMENTI TOTALI.

FORMALIZZIAMO: $\Omega \doteq$ «TUTTI I POSSIBILI MESCOLAMENTI DI 2N GUANTI» =

$= S_{2N} \doteq$ «LE PERMUTAZIONI DI $\{1, 2, \dots, 2N\}$». [MISURA DI PROBABILITÀ UNIFORME]

$|\Omega| = (2N)!$

DATA $\sigma \in S_{2N}$ È CONSIDERATA LA CORRISPONDENTE DISTRIBUZIONE DI GUANTI

$$\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N), \sigma(N+1), \dots, \sigma(2N-1), \sigma(2N)$$

CONVENIAMO CHE, $\forall K = 1, \dots, N$, $(\sigma(2K-1), \sigma(2K))$ SIA IL PAIO DI GUANTI ASSEGNATO ALLA K-ESIMA PERSONA. IL PUNTO È CALCOLARE IL NUMERO DELLE $\sigma \in S_{2N}$ TALI CHE, $\forall k = 1, \dots, N$, $(\sigma(2k-1), \sigma(2k))$ SIA ("SX", "DX") O ("DX", "SX"). VEDIAMO:

$\boxed{K=1}$ PER $(\sigma(1), \sigma(2))$, ABBIAMO N SINISTRE E N DESTRE, O VICEVERSA; DUNQUE $2N^2$ SCELTE.

$\boxed{k=2}$ Per $(\sigma(3),\sigma(4))$, avendo già scelto $(\sigma(1),\sigma(2))$, abbiamo $(N-1)$ SX e $(N-1)$ DX, (11)

o viceversa, da cui $2(N-1)^2$ scelte.

$\Rightarrow$ In generale, per $(\sigma(2k-1),\sigma(2k))$ si hanno $2(N-k+1)^2$ scelte (avendo già posato $k-1$ coppie), ed in conclusione

$$\text{« N° mescolamenti "giusti" »} = \prod_{k=1}^{N} 2(N-k+1)^2 = 2^N \cdot N^2 \cdot (N-1)^2 \cdot \ldots \cdot 2^2 \cdot 1^2$$
$$= 2^N \cdot (N!)^2$$

e la risposta è $\dfrac{2^N \cdot (N!)^2}{(2N)!}$. ∎]

$\boxed{\text{Exc. 1.46}}$ Si ha un'urna con 25 palline, di cui 10 rosse (R) e 15 bianche (B), e se ne estraggono ad una ad una (senza reimmissione) fino a lasciarne 3.

(a) Calc. le prob. di tutti i possibili risultati, cioè « 3R; 2R e 1B; 1R e 2B; 3B », e determinare il risultato più probabile.

(b) Come sarebbero tali probabilità se avessimo direttamente estratto 3 palline (senza reimmissione) dall'urna iniziale "completa"?

[Ricordiamo / calcoliamo la densità (discreta) della v.a. di distribuzione ipergeometrica di parametri $m, N, M \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m \leq N$ e $M \leq N$: $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \leq M)$,

« Probabilità di estrarre k palline rosse in uno schema di m estrazioni senza reimmissione da un'urna di N palline di cui M rosse » $= \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}} 1_{\{0,1,\ldots,M\}}(k)$.

(a) Ritrovarsi con «3R» alla fine equivale ad aver estratto 7R e 15B all'inizio, da cui la probabilità corrispondente è $\binom{10}{7}\binom{15}{15}\Big/\binom{25}{22}$ $[m=22, N=25, M=10\ ;\ k=7] \simeq 0.05$.

Analogamente,
$$\begin{cases} \text{« 2R e 1B » alla fine} \xrightarrow{[k=8]} \binom{10}{8}\binom{15}{14}\Big/\binom{25}{22} = 0.29 \\ \text{« 1R e 2B » alla fine} \xrightarrow{[k=9]} \binom{10}{9}\binom{15}{13}\Big/\binom{25}{22} = 0.46 \\ \text{« 3B » alla fine} \xrightarrow{[k=10]} \binom{10}{10}\binom{15}{12}\Big/\binom{25}{22} = 0.2 \end{cases}$$

ed in particolare il risultato più prob. è « 1R e 2B » (com'era intuitivo). ✓

b) LE PROBABILITÀ NON CAMBIEREBBERO, "PERCHÉ $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$" : PIÙ PRECISAMENTE, ad esempio, LA PROB. DI ESTRARRE "ALL'INIZIO" 1R E 2B È
(3 ESTRAZIONI)

$$\binom{10}{1}\binom{15}{2}\Big/\binom{25}{3} \ , \ = \binom{10}{9}\binom{15}{13}\Big/\binom{25}{22} \ . \ \checkmark \ ]$$

APPROSSIMAZIONE/SIMULAZIONE DELLE $\Gamma(N,\lambda)$, $N \in \mathbb{N}^*$ E $\lambda>0$, ED ANZI, PIÙ IN GENERALE, DELLE $\Gamma(\frac{N}{2},\lambda)$.

POSSIAMO DARE PER OK LA SIMULAZIONE DELLE $U[0,1]$ E DELLE $N(0,1)$. IN PARTICOLARE,

$$X \sim U[0,1] \Rightarrow Y := -\frac{1}{\lambda}\log X \sim \mathcal{E}(\lambda) \qquad (\text{EASY})$$

QUINDI SAPPIAMO SIMULARE LE $\mathcal{E}(\lambda)$. MA ALLORA ANCHE

$$\Gamma(N,\lambda) \sim \text{SOMMA DI } N \text{ V.A. INDIPENDENTI } \Gamma(1,\lambda) \equiv \mathcal{E}(\lambda) \ .$$

ANALOGAMENTE,

$$\Gamma(\tfrac{N}{2},\lambda) \sim \text{SOMMA DI } N \text{ V.A. INDIPENDENTI } \Gamma(\tfrac{1}{2},\lambda)$$

ED ORA BASTA RICORDARE/OSSERVARE CHE

$$\text{"}\ \Gamma(\tfrac{1}{2},\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\underbrace{\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})}_{\substack{\| \\ \chi^2(1)\sim(N(0,1))^2}}\ \text{"}$$

"$\lambda\Gamma(\alpha,\lambda) = \lambda'\Gamma(\alpha,\lambda')$"
$[\text{"} = \Gamma(\alpha,1)]$,
da cui $\Gamma(\alpha,\lambda) = \frac{\lambda'}{\lambda}\Gamma(\alpha,\lambda')$

OSSIA CHE $\Gamma(\frac{1}{2},\lambda)$ È LA LEGGE DEL QUADRATO DI UNA $N(0,\frac{1}{2\lambda})$. ✓

$\left[\text{"}\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}N(0,1) = N(0,\frac{1}{2\lambda})\text{"}\right]$, ED ORA $N(0,\frac{1}{2\lambda}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\cdot Z$ CON $Z\sim N(0,1)$.

- - - - - - - - - -

PASSIAMO ORA ~~ANCHE~~ AD UNA POSSIBILE SIMULAZIONE DELLA $Beta(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta>0$, che ricordiamo esser la legge ass. cont. di densità $u \mapsto \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}$, $u\in]0,1[$.

- - - - - - - - - -

$\boxed{\text{EXC. 3.74}}$ SIANO $X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$ E $Y\sim\Gamma(\beta,\lambda)$ INDIPENDENTI $(\alpha,\beta,\lambda>0)$. ($\Rightarrow$ SONO >0 q.c.)

a) LEGGE DELLA COPPIA $(\frac{X}{X+Y}, Y)$. $\qquad (0<\frac{X}{X+Y}<1 \text{ q.c.})$

b) LEGGE DI $\frac{X}{X+Y}$.

(c) Legge, e speranza, condizionale di Y dato $\frac{X}{X+Y} = u$, $0<u<1$.

(d) Retta di regressione di Y rispetto a $\frac{X}{X+Y}$.

(e) Simulazione della $Beta(\alpha,\beta)$.

[X ha densità $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ e Y ha densità $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \lambda^\beta y^{\beta-1} e^{-\lambda y} 1_{\mathbb{R}_+^*}(y)$.

Per indipendenza, la coppia (X,Y) ha densità

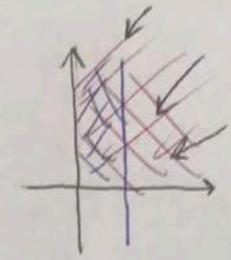
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x+y)} 1_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(x,y).$$

(a) Consideriamo i diffeomorfismi C^1 (C^∞)

$$\phi(x,y) \doteq \left(\frac{x}{x+y}, y\right)$$

$$\underset{((x,y))}{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \rightleftarrows \underset{((u,v))}{]0,1[\times \mathbb{R}_+^*}$$

$$\phi^{-1}(u,v) = \left(\frac{uv}{1-u}, v\right)$$



dove $\det D\phi^{-1}(u,v) = \frac{v}{(1-u)^2}$ (>0). Così $\left(\frac{X}{X+Y}, Y\right) = \phi(X,Y)$ e, per il teorema di cambio di variabile, otteniamo che $\left(U := \frac{X}{X+Y}, Y\right)$ ha densità

$$f_{U,Y}(u,v) \overset{\text{THM}}{=} f_{X,Y}(\phi^{-1}(u,v)) \cdot |\det D\phi^{-1}(u,v)| 1_{]0,1[\times\mathbb{R}_+^*}(u,v)$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{u^{\alpha-1} v^{\alpha+\beta-1}}{(1-u)^{\alpha+1}} \exp\left(-\lambda \frac{v}{1-u}\right).$$

(b) La v.a.r. $U := \frac{X}{X+Y}$ ammette densità, che è, $\forall\, 0<u<1$,

$$f_U(u) \equiv \int_{\mathbb{R}} f_{U,Y}(u,v)\,dv = \int_0^\infty f_{U,Y}(u,v)\,dv$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{1-u}{\lambda}\right)^{\alpha+\beta} \cdot \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{1-u}\right)^{\alpha+\beta} v^{(\alpha+\beta)-1} \exp\left(-\left(\frac{\lambda}{1-u}\right)v\right) dv}_{= \Gamma(\alpha+\beta)\,!}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}$$

OSSIA $U = \dfrac{X}{X+Y} \sim Beta(\alpha,\beta)$.

(c) SEGUE CHE, $\forall\, v>0$ E $\forall\, 0<u<1$,

$$f_{Y|U}(v|u) \equiv \frac{f_{U,Y}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{\lambda}{1-u}\right)^{\alpha+\beta} v^{(\alpha+\beta)-1} \exp\left(-\left(\frac{\lambda}{1-u}\right)v\right)$$

CHE È LA DENSITÀ DI UNA $\Gamma(\alpha+\beta, \frac{\lambda}{1-u})$, LA QUALE HA SPERANZA $\frac{1}{\lambda}(\alpha+\beta)(1-u)$.

(d) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE LA SPERANZA CONDIZIONALE DI Y DATO $U=u$ È LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE DI Y SAPENDO $U=u$ NEL SENSO DELLO SCARTO QUADRATICO MEDIO, MENTRE LA RETTA DI REGRESSIONE DI Y RISPETTO A U È LA MIGLIOR APPROSSIMAZIONE DI Y SAPENDO $U=u$ CON UNA FUNZIONE LINEARE AFFINE. DUNQUE, SE LA SPERANZA CONDIZIONALE DI Y DATO $U=u$ È LINEARE AFFINE (COME FUNZIONE DI u), ALLORA ESSA DEVE COINCIDERE CON LA RETTA DI REGRESSIONE DI Y RISPETTO A U.

QUESTO È IL CASO NOSTRO, E ALLORA LA RISPOSTA È

$$y := v = \frac{1}{\lambda}(\alpha+\beta)(1-u), \quad 0<u<1.$$

(e) DA (a) E (b) ABBIAMO VISTO CHE

$$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda),\ Y \sim \Gamma(\beta,\lambda) \text{ INDIP.} \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim Beta(\alpha,\beta)$$

COSA CHE RAPPRESENTA UN MODO DI SIMULARE LA $Beta(\alpha,\beta)$. IN PARTICOLARE, SAPPIAMO FARLO BENE PER α E β SEMI-INTERI, OSSIA PER $Beta(\frac{N}{2},\frac{M}{2})$, $N,M \in \mathbb{N}^*$.
(QUINDI ANCHE PER GLI INTERI)

☒]

TORNIAMO ALLA CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE / LEGGE, SENZA USO DEL TLC.

→ → →

$\boxed{\text{EXC. 4.42}}$ Siano $(X_n)_{n\ge1}$ v.a. i.i.d. $U[0,1]$ e poniamo, $\forall n\ge1$, $Y_n := \min\{X_1,\dots,X_n\}$.
[$\in[0,1]$ q.c.]

(a) $(nY_n)_{n\ge1}$ conv. in legge? A cosa?

(b) E se le X_n avessero densità (comune) $f(t) := 2t\,\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$?

[oss. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ è una densità, perché $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 2\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = 1$.]

[(a) $\forall t>0$ e "per $n\to\infty$", $\mathbb{P}[nY_n\le t] = \mathbb{P}[Y_n\le \frac{t}{n}]$
[$n\equiv n(t)$ abb. grande]

$$= 1-\mathbb{P}[Y_n > \tfrac{t}{n}]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} 1-\left(\mathbb{P}[X_1>\tfrac{t}{n}]\right)^n$$

$$\overset{t/n<1}{=} 1-\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n$$

$$= 1-\left[\left(1-\frac{1}{n/t}\right)^{n/t}\right]^t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-e^{-t}$$

Ed in conclusione $(nY_n)_{n\ge1}$ conv. in legge ad una v.a.r. $\mathcal{E}(1)$. ✓

(b) Allo stesso modo, $\forall t>0$ e "per $n\to\infty$", visto che, $\forall x\in[0,1]$, avremmo

$$\mathbb{P}[X_1\le x] = 2\int_0^x t\,dt = x^2$$

Allora

$$\mathbb{P}[nY_n\le t] = 1-\left(\mathbb{P}[X_1>\tfrac{t}{n}]\right)^n = 1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

$$= 1-\left[\left(1-\frac{1}{(n/t)^2}\right)^{n/t}\right]^t \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\underbrace{1^t}_{1} = 0$$

$\left(\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N^2}\right)^N = 1\right)$ e non può esserci convergenza in legge. ■]

[La funzione identicamente costante $\in[0,1]$ NON è di ripartizione!]

$\boxed{\text{EXC. 4.43}}$ Siano $(X_n)_{n\ge1}$ v.a.r. indipendenti e poniamo, $\forall n\ge1$, $M_n := \max\{X_1,\dots,X_n\}-\log n$.
Studiare la conv. in legge di $(M_n)_{n\ge1}$ se:

(a) $\forall n\ge1$, $X_n\sim\mathcal{E}(1)$; [$\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X_n\le x] = (1-e^{-x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$]

(b) $\forall n\ge1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (anche negativo), $\mathbb{P}[X_n\le x] = e^{-e^{-x}} = \exp\{-e^{-x}\}$.

Oss. È immediato verificare che $x\mapsto e^{-e^{-x}}$, $x\in\mathbb{R}$, sia una funzione di ripartizione ("liscia" (C^∞)), ed in effetti la legge che essa individua univocamente è nota col nome di →

LEGGE DI GUMBEL : $g(x) := \frac{d}{dx} e^{-e^{-x}} = e^{-x} e^{-e^{-x}} > 0$, $x \in \mathbb{R}$. () 16

[ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}$ e "per $n \to \infty$", [$m \equiv m(x)$] $\mathbb{P}[Y_n \le x] = \mathbb{P}[\max\{X_1, \dots, X_n\} \le x + \log n]$

$$\overset{\text{indip.}}{=} (\mathbb{P}[X_1 \le x + \log n])^n$$

$$\overset{x+\log n \ge 0}{=} (1 - e^{-(x+\log n)})^n$$

$$\equiv \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n$$

$$\equiv \left[\left(1 - \frac{1}{ne^x}\right)^{ne^x}\right]^{e^{-x}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-e^{-x}}$$

cioè $(Y_n)_{n\ge1}$ conv. in legge alla v.a.r. avente legge di Gumbel

ⓑ Stessa conclusione di ⓐ perché, $\forall x \in \mathbb{R}$ e per $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}[Y_n \le x] = (\mathbb{P}[X_1 \le x + \log n])^n = \left(e^{-e^{-(x+\log n)}}\right)^n$$

$$\overset{\text{come su}}{\equiv} \left(e^{-e^{-x}/n}\right)^n = e^{-e^{-x}} \quad (\text{indip. da } n)$$

Quindi, addirittura, Y_n ha legge di Gumbel per ogni $n \ge 1$.]

Exc. 2.33+4.25 Test a risposta multipla (per studenti): 30 domande, 4 possibili risposte (di cui una sola quella giusta); 4 punti per ogni risposta giusta, 0 altrimenti [Range punteggio: $4k$, $k=0,1,\dots,30$].

Il test s'intende superato quando si danno almeno 16 (= la metà, più uno) risposte giuste [64 punti].

Possiamo supporre che gli esiti delle risposte siano tra loro indipendenti.

(i) Uno studente (A) risponde a caso a tutte le domande: che punteggio ottiene in media? Qual'è la probab. che risponda correttamente ad esattamente 16 domande?

(ii) Uno studente (B) riesce ad individuare, e ad escludere, una delle tre risposte errate, dopodiché poi risponde a caso: si risponda alle stesse domande di sopra ((i)).

Adesso, usando l'approssimazione normale (T.L.C.):

ⓔ Per A, → probab. superare test;

→ probab. rispondere correttamente a meno di (≤) 5 domande.

PP 47

ⓑ PER B, PROBAB. SUPERARE TEST.

ⓒ UNO STUDENTE (C) RISPONDE A CASO A TUTTE LE DOMANDE CON PROBABILITÀ GENERICA $p \in [0,1]$ DI INDOVINARE LA RISPOSTA GIUSTA. QUANTO POSSIAMO PENSARE GRANDE p, AFFINCHÉ C SUPERI IL TEST CON UNA PROBABILITÀ $= 40\%$?

ⓓ "QUANTO" È GIUSTIFICATO L'USO DELL'APPROX. NORMALE IN ⓐ, ⓑ E ⓒ ?

[RICORDIAMO CHE UNA V.A. X È DI BERNOULLI DI PARAMETRO $p \in [0,1]$, IN SIMBOLI $X \sim Be(p)$, QUANDO $X(\Omega) = \{0,1\}$ E $P[X=1] = p$. DUNQUE UNA $Be(p)$ HA MEDIA p (CHE È ANCHE IL MOMENTO SECONDO, ED ANZI N-ESIMO $\forall N \in \mathbb{N}^*$) E VARIANZA $p(1-p)$, E SOMMA DI m V.A. i.i.d. $Be(p)$ HA LA LEGGE BINOMIALE $Bin(m,p)$ (CHE, INFATTI, HA MEDIA mp E VARIANZA $mp(1-p)$).

DUNQUE, $\forall i = 1, \dots, 30$, SIA $X_i \sim Be(p)$ L'ESITO DELLA RISPOSTA ALLA i-ESIMA DOMANDA DEL TEST (DA PARTE DEL GENERICO STUDENTE "TIPO C"), DOVE "1" STA PER "RISPOSTA GIUSTA". ALLORA IL NUMERO (TOTALE) DELLE RISPOSTE GIUSTE È DATO DALLA V.A.R.

$$S := \sum_{i=1}^{30} X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{30} \overset{\text{indip.}}{\sim} Bin(30,p) \qquad [S \equiv S^{(p)}]$$

(ERA COMUNQUE CHIARO).

ⓘ PER A, $p = \frac{1}{4}$ E ALLORA IL PUNTEGGIO MEDIO È UGUALE A (4 PUNTI) $\times$ (N° MEDIO DI RISP. GIUSTE), CIOÈ (4 PUNTI) $\times \mathbb{E}[S]$ = (4 PUNTI) $\times\ 30 \cdot \frac{1}{4}$ = 30 PUNTI (COM'ERA INTUITIVO).

INOLTRE,
$$P[S=16] = \binom{30}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{\overset{14}{30-16}} = 0.0006 = \mathcal{O}(10^{-4})$$

["1 SU 10.000"] .

ⓘⓘ PER B, $p = \frac{1}{3}$ (È COME SE TUTTE LE DOMANDE DEL TEST AVESSERO SOLO TRE POSSIBILI RISPOSTE), DA CUI IL PUNTEGGIO MEDIO = (4 PUNTI) $\times\ 30 \cdot \frac{1}{3}$ = 40 PUNTI (OK) E

$$P[S=16] = \binom{30}{16} \left(\frac{1}{3}\right)^{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{14} = 0.0116 \simeq 1\%$$

["1 SU 100"] .

OSSERVAZ.: POTREMMO PRENDERE UN QUALSIASI NUMERO IN $[15, 16[$, COME 15.5 !

ⓔ $(p=\frac{1}{4})$
$$P[S \geq 16] = 1 - P[S \leq 15]$$
$$\simeq 1 - P\left[\frac{S - 30\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} \leq \frac{15 - 30\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right] \rightarrow$$

$$\overset{TLC}{\underset{\substack{(\text{"}n\text{ grande"})\\ 30}}{\simeq}} 1-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{F.D.R.}\\ N(0,1)}}{\Phi}\left(\frac{15-30\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right) \doteq O(10^{-4}) .$$

ANALOGAMENTE, $P[S\le 5] \cong \Phi\left(\frac{5-30\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{30\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right) \simeq 20\%$.

(b) STESSO CONTO:

$(p=\frac{1}{3})$

$$P[S\ge 16] \overset{TLC}{\underset{\substack{(\text{"}n\text{ grande"})\\ 30}}{\simeq}} 1-\Phi\left(\frac{15-30\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{30\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}\right) \simeq 1.6\% .$$

(c) LO STESSO CONTO PORTA AD IMPORRE (SE p NON È "TROPPO VICINO" A 0 O A 1: VEDI (d))(*)

$$\Phi\left(\frac{15-30\cdot p}{\sqrt{30\cdot p\cdot(1-p)}}\right) = 0.6$$

DA CUI $\frac{15-30p}{\sqrt{30p(1-p)}} \in [0.25, 0.26]$ $(\Rightarrow 15-30p>0$, CIOÈ $p<\frac{1}{2})$. Scegliendo, ad esempio,

$$\frac{15-30p}{\sqrt{30p(1-p)}} = 0.253$$

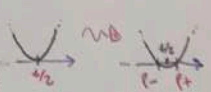
È FACILE RICAVARE UN'EQUAZ. DI 2° GRADO DI RADICI $p_+ = 0.54 > \frac{1}{2}$, NON AMMISSIBILE, E $p_- = 0.493$, DA CUI POSSIAMO PENSARE p "$\underset{[\frac{1}{2}]}{\text{QUASI}}$" $0.5 = 50\%$.

[IN EFFETTI, SE IMPONESSIMO $\frac{15-30p}{\sqrt{30p(1-p)}} \overset{(=)}{} 0.253 \cong \frac{1}{4}$, ALLORA

$$900p^2-900p+225 \equiv (15-30p)^2 \overset{(\cong)}{} \frac{1}{4}\,30p(1-p)$$, OSSIA "CIRCA"

$$9p^2-9p+\frac{9}{4} \equiv \frac{1}{100}\left(900p^2-900p+225\right) \cong 0$$, OSSIA

$$p^2-p+\frac{1}{4} \equiv \left(p-\frac{1}{2}\right)^2 \cong 0 \iff p \cong \frac{1}{2} .$$]



(d) IN EFFETTI, $n=30$ È UN "PO'" BASSO PER APPLICARE IL TLC, SPECIE SE $p=\frac{1}{4}$ (IL p PIÙ BASSO TRA $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ E $\lesssim\frac{1}{2}$), E SOPRATTUTTO 15/16 È UN "PO' LONTANO" DALLA MEDIA DELLA $Bin(30, \frac{1}{4})$ CHE È $30\cdot\frac{1}{4} = 7.5$ ("DOVE" LA CONV. DELLE F.D.R. È PIÙ LENTA!).
TUTTAVIA, LA "REGOLETTA" (*) $\boxed{n \times \min\{p, 1-p\} \ge 5}$ RESTA VERA $(\min\{p,1-p\} \ge \frac{1}{6} \cong 16\%)$. ■

1.34 Siano $(X_n)_{n\ge1}$ v.a. i.i.d. a valori in $\{-\frac12,\frac12\}$ con legge uniforme. $[P[X_1=\pm\frac12]=\frac12]$ III (9)

Sia, $\forall n\ge1$, $Y_n := \frac1n (X_1+\dots+X_n)^2$. La succ. $(Y_n)_{n\ge1}$ conv. in legge? A cosa?

[Sia, $\forall n\ge1$, $S_n := X_1+\dots+X_n$ [ER]. Visto che le X_n sono i.i.d. con media 0 e varianza (mom. secondo) $\frac14$, per il T.L.C. si ha

$$\tilde S_n := \frac{S_n}{\sqrt{n\cdot\frac14}} \equiv \frac{2}{\sqrt n}S_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$\left(\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx\right)$$

Ora, $\forall n\ge1$, $Y_n = \frac14(\tilde S_n)^2$ [≥0 q.c.] e così, $\forall t\ge0$,

$$P[Y_n\le t] = P[|\tilde S_n|\le 2\sqrt t] \xrightarrow[n\to\infty]{TLC} \Phi(2\sqrt t)-\Phi(-2\sqrt t).$$

Dunque, $\forall t\in\mathbb{R}$, $P[Y_n\le t] \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t) := \begin{cases}0, & \text{se } t\le0,\\ \Phi(2\sqrt t)-\Phi(-2\sqrt t), & \text{se } t>0,\end{cases}$ che è una F.D.R.

C^1 (C^∞) a tratti, precisamente "fuori" dall'origine, ed in effetti, $\forall t>0$,

$$f(t) := \frac{d}{dt}F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-(2\sqrt t)^2/2\}\cdot\frac{1}{2\sqrt t}$$

$\sqrt\pi=\Gamma(\frac12)$

$$= \frac{1}{\sqrt\pi}\, 2^{1/2}\, t^{1/2-1}\, e^{-2t} \quad\to\quad \text{Densità gamma}\left(\tfrac12, 2\right). \quad \blacksquare\ ]$$

Parentesi: Convergenza in probabilità. [Approfondita in corsi più avanzati.]

Una succ. $(X_n)_{n\ge1}$ di v.a.r. converge in probabilità ad una v.a.r. X se, $\forall\varepsilon>0$,

$$(\exists)\ \lim_{n\to\infty}\underbrace{P[|X_n-X|>\varepsilon]}_{\text{"probabilità di deviazione"}}=0.$$

In simboli, "$X_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}X$". La convergenza quasi-certa ("quasi-puntuale") è strettam. più forte della conv. in probabilità, la quale a sua volta è strettam. più forte della conv. in legge. Tuttavia,

EXC. Siano $(X_n)_{n\ge1}$ v.a.r. e $c\in\mathbb{R}$. Sono equivalenti:

(i) $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{P}c$. (ii) $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{d}c$. [Equiv., $\forall x\in\mathbb{R}$, $P[X_n\le x]\xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases}0, & \text{se } x<c\\ 1, & \text{se } x>c\end{cases}$.]

THM (Legge dei grandi numeri) [Limite medie empiriche]. Siano $(X_n)_{n\ge1}$ v.a.r. in $L^2(P)$ aventi lo stesso valore atteso $\mu := E[X_n]$ $\forall n\ge1$ e varianze equilimitate: $\exists K\ge0$ t.c., $\forall n\ge1$, $Var[X_n]\le K$. Se le X_n sono scorrelate allora, posto $S_n := X_1+\dots+X_n$, $n\ge1$, si ha

$$\boxed{\bar X_n := \frac{S_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}\mu}$$

["come" un $O(\frac1n)$.]

[DIM. ① DIS. MARKOV. Siano X v.a.r. e $t\in\mathbb{R}_+$. Allora:

$$\left(t\,\mathbb{P}[|X|>t]\le\right)\ t\,\mathbb{P}[|X|\ge t]\le \mathbb{E}[X].$$

[$t\cdot\mathbb{1}_{\{|X|\ge t\}}\le |X|$ (su Ω). ∎]

② DIS. CHEBYSHEV. Siano $X\in L^2(\mathbb{P})$ e $t\in\mathbb{R}_+^*$. Allora:

$$\left(\mathbb{P}[|X-\mathbb{E}[X]|>t]\le\right)\ \mathbb{P}[|X-\mathbb{E}[X]|\ge t]\le\frac{Var[X]}{t^2}.$$

[Visto che $\{|X-\mathbb{E}[X]|>t\}=\{(X-\mathbb{E}[X])^2>t^2\}$ (per "positività"), è Markov applicato a $(X-\mathbb{E}[X])^2$. ∎]

③ DIM: $\forall n\ge 1$, $\mathbb{E}[\bar{X}_n]=\mu$ e $Var[\bar{X}_n]\overset{\text{scorrel.}}{=}\frac{1}{n^2}\{Var[X_1]+\dots+Var[X_n]\}\le\frac{K}{n}$, quindi,

$(Var[b\cdot X]=b^2\,Var[X])$

$\forall\varepsilon>0$, per Chebyshev

$$\mathbb{P}[|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon]\le\frac{K}{n\varepsilon^2}=O\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad . ∎]$$

EXC. Siano $(X_n)_n$ v.a.r. in $L^2(\mathbb{P})$ e sia $c\in\mathbb{R}$ tale che

$$\mathbb{E}[X_n]\xrightarrow[n\to\infty]{}c \quad e \quad Var[X_n]\xrightarrow[n\to\infty]{}0 .$$

Mostrare che $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}c$, ma che "non vale il viceversa".

[$|X_n-c|\le|X_n-\mathbb{E}[X_n]|+|\mathbb{E}[X_n]-c|$ ………]

PROP. Per $(X_n)_{n\ge1}$, X v.a.r., sono equivalenti:

(i) $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}X$. (ii) $\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, $f(X_n)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}f(X)$.

[DIM. (i ⇒ ii). Fissiamo $\varepsilon>0$: la tesi è che $\mathbb{P}[|f(X_n)-f(X)|>\varepsilon]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Ma, infatti, se $\delta_\varepsilon>0$ è tale che, $\forall n\ge1$ ($e\ \forall\omega\in\Omega^{(*)}$), se $|X_n-X|\le\delta_\varepsilon$ allora $|f(X_n)-f(X)|\le\varepsilon$ (tutto per q.o. $\omega\in\Omega$)$^{(*)}$, dove stiamo usando la continuità di f, allora "viceversa"

$$\mathbb{P}[|f(X_n)-f(X)|>\varepsilon]\le\mathbb{P}[|X_n-X|>\delta_\varepsilon]\xrightarrow[n\to\infty]{\text{(ipotesi)}}0 \quad . ∎]$$

Torniamo agli esercizi (Baldi)!

$\boxed{\text{EXC. A.35}}$ SIANO $(X_n)_n$ V.A.R. i.i.D. A VALORI IN $\{\frac{1}{2}, 2\}$ DI LEGGE UNIFORME.

$[\ \mathbb{P}[X_n = \frac{1}{2}] = \mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1}{2}.\ ]$

ⓐ $\mathbb{E}[\log X_n] = ?$

ⓑ $Y_n := (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/n}$ CONV. IN PROBABILITÀ? A COSA?

ⓒ E $W_n := (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$?

[ⓐ PONIAMO, $\forall n \geq 1$, $Z_n := \log X_n$. ALLORA $(Z_n)_n$ È UNA SUCC. DI V.A.R. i.i.D. A VALORI IN $\{-\log 2, \log 2\}$ DI LEGGE UNIFORME, ED IN PARTICOLARE $\mathbb{E}[Z_n] = 0$, MENTRE $\mathrm{Var}[Z_n] \equiv \mathbb{E}[Z_n^2] = (\log 2)^2$, $\forall n$. ✓

ⓑ DA ⓐ OTTENIAMO SUBITO CHE, PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI,

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 .$$

$\forall n, \forall n \geq 1$, $Y_n = \exp\left\{\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n}\right\}$ (E $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ È CONTINUA) : DUNQUE

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} e^0 = 1$$

OSSIA $(Y_n)_{n\geq 1}$ CONV. IN PROBAB., CIOÈ IN LEGGE, ALLA COSTANTE 1. ✓

ⓒ ANALOGAMENTE, $\forall n \geq 1$, $W_n = \exp\left\{\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}\right\}$ [>0 q.c.] E NON POSSIAMO USARE LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI, BENSÌ SPERARE IN UNA (PIÙ DEBOLE) CONVERGENZA IN LEGGE. ED INFATTI, PER IL TLC,

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, (\log 2)^2)$$

OSSIA, $\forall t > 0$,

$$\mathbb{P}[W_n \leq t] \equiv \mathbb{P}\left[\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \leq \log t\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{\log t}{\log 2}\right)$$

E DUNQUE, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[W_n \leq t] \xrightarrow[n\to\infty]{} F(t) := \begin{cases} 0, & \text{SE } t \leq 0, \\ \Phi\left(\frac{\log t}{\log 2}\right), & \text{SE } t > 0, \end{cases}$$

DOVE, PER $t > 0$, $f(t) := \frac{d}{dt}\Phi\left(\frac{\log t}{\log 2}\right) \equiv \frac{1}{(\log 2)t}\Phi'\left(\frac{\log t}{\log 2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\log 2)t}\exp\left\{-\frac{(\log t)^2}{2(\log 2)^2}\right\}, \quad (>0)$$

NELLA QUALE RICONOSCIAMO UNA ~~LA~~ DENSITÀ LOGNORMALE : W_n CONV. IN LEGGE AD "UNA" LOGNORMALE. ✓

(RICORDIAMO CHE UNA V.A.R. $X, > 0$ q.c., È LOGNORMALE QUANDO $\exists \mu \in \mathbb{R}$ ED $\exists \sigma \in \mathbb{R}_+^*$ T.C. 22

X SIA ASS. CONT. CON DENSITÀ

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma t} \exp\left\{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad t > 0 .$$

IN TAL CASO, $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$.)]

2.46 Z UNIF. SU $\{-1,1\}$ $\left(P[Z=\pm 1]=\frac{1}{2}\right)$. SIA $m\in\mathbb{N}^*$.

X UNIF. SU $\{k\in\mathbb{N} \mid |k|\le m\} = \underbrace{\{-m,-(m-1),\dots,-1,0,1,\dots,m-1,m\}}_{2m+1}$

$\left(P[X=k]=\frac{1}{2m+1}\right)$

X, Z INDIP. $\boxed{Y \doteq X^2+Z}$ $\qquad (-1)^{2k+1}=-1$

(a) $E[X]$, $E[X^3]$. $\to 0$

(b) LEGGE COND. DI Y DATO $X=k$, $|k|\le m$, E LA SUA MEDIA.

(c) CALC. COEFF. ANGOLARE RETTA DI REGRESSIONE LINEARE DI Y DATO X.

$\rightsquigarrow \mathrm{Cov}(X,Y)$

(a) $X^3 \overset{d}{=} -X^3$ (E' SIMMETRICA)

$\Rightarrow E[X^3]=E[-X^3] \overset{LIN}{=} -E[X^3] \in \mathbb{R} \rightsquigarrow E[X^3]=0$

$E[\underbrace{X^{2k+1}}_{\text{"SIMMETRICA"}}]=0$, $k\in\mathbb{N}$

$\left(E[X] \doteq \frac{1}{2m+1}\left(-m-(m-1)-\dots-1+0+1+\dots+m-1+m\right)=0 \right)$

(b) $p_{Y|X}(r|k) \overset{def}{=} P[Y=r \mid X=k] \overset{def}{=} \boxed{\frac{P[Y=r,X=k]}{P[X=k]}}$

$\frac{1}{2m+1}$

$r\in\mathbb{N}$, $|k|\le m$

(2

$$P[Y=r, X=k] \overset{def.}{=} P[X^2+Z=r, X=k]$$

$$= P[Z=r-k^2, X=k]$$

$$\overset{indip.}{=} P[Z=r-k^2]\underbrace{P[X=k]}_{\frac{1}{2k+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k+1}, & \text{se } r=k^2\pm 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_{Y|X}(r|k) = \boxed{\begin{cases} 1/2, & \text{se } r=k^2\pm 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}} \sim W : \Omega \to \mathbb{N}$$

$$E[W] = \frac{1}{2}\{(k^2-1)+(k^2+1)\} = \boxed{k^2}$$

(c)

$$a^* = \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} \qquad \left(= \frac{Cov[X,Y]}{E[X^2]}\right)$$

COEFF. ANGOLARE RETTA REGR. LIN.

$$\parallel \quad \frac{E[X\cdot Y]}{Var[X]} \qquad a^* \propto E[X\cdot Y]$$

$$E[Y\cdot X] \overset{def.}{=} E[\underbrace{(X^2+Z)X}_{X^3+X\cdot Z}]$$

$$= \cancel{E[X^3]} + E[X\cdot Z]$$

$$= E[X]E[Z] = 0\cdot 0 = 0$$

$$\left(Y \text{ DIP. DA } X^2!\right)$$

3

2.47 X, Y, Z i.i.d. $Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$

$[\Rightarrow L^2$, SPERANZA = VARIANZA $= \lambda]$

(a) LEGGE E SPERANZA CONDIZIONALE DI X DATO $X+Y = m$, $m \in \mathbb{N}$.

(b) COEFF. CORRELAZIONE TRA $X+Y$ E $X+Z$

(c) CALC. $\mathbb{P}[X+Y=2, X+Z=3]$.

(a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[X=k] = \mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{P}[Z=k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

$(0! \doteq 1)$

X, Y indip. $\Rightarrow$ $\boxed{X+Y \sim Pois(2\lambda)}$

$\mathbb{P}[X+Y=m, X=k] = \mathbb{P}[Y=m-k, X=k]$

$m \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le m$

$= \mathbb{P}[Y=m-k]\,\mathbb{P}[X=k]$

$= e^{-2\lambda}\dfrac{\lambda^m}{(m-k)!\,k!}$

$0 \le k \le m$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}[X=k \mid X+Y=m] \overset{def.}{=} \dfrac{\mathbb{P}[X+Y=m, X=k]}{\mathbb{P}[X+Y=m]}$

$= e^{-2\lambda}\dfrac{\lambda^m}{(m-k)!\,k!} \Big/ e^{-2\lambda}\dfrac{(2\lambda)^m}{m!}$

4

$$= \binom{M}{k} 2^{-M} \quad "=" \quad Bin(M, \tfrac{1}{2})$$

$\uparrow$ p

$$\left[\binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} \right]$$

$\rightsquigarrow$ media $= \frac{M}{2}$

(b) $$\rho_{X+Y,\,X+Z} = \frac{Cov[X+Y, X+Z]}{\sqrt{\underbrace{Var(X+Y)}_{2\lambda}}\sqrt{\underbrace{Var(X+Z)}_{2\lambda}}} \quad \updownarrow 2\lambda$$

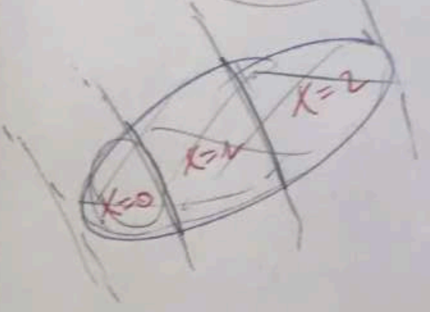
$$Cov[X+Y, X+Z] = \underbrace{\boxed{Cov[X,X]}}_{Var[X]} + \underbrace{\cancel{Cov[X,Z]}}_{0} + \underbrace{\cancel{Cov[Y,X]}}_{0} + \underbrace{\cancel{Cov[Y,Z]}}_{0}$$

$$= Var[X] = \lambda$$

$$\rightsquigarrow \rho_{X+Y,\,X+Z} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}.$$

(c) $$P[X+Y=2,\ X+Z=3] = P[X=0,\ X+Y=2,\ X+Z=3] + P[X=1, \ldots] + P[X=2, \ldots]$$

$0 \le X \le 2 \Rightarrow 0 \le X \le 3$



$$= P[X=0, Y=2, Z=3] + P[X=1, Y=1, Z=2] + P[X=2, Y=0, Z=1]$$

5

$$\overset{\text{indip.}}{=} \ldots = e^{-3\lambda}\left\{\frac{\lambda^3}{2}+\frac{\lambda^4}{2}+\frac{\lambda^5}{12}\right\}.$$

VEDI PDF "SOPRA" PER IL RESTO!

1/6/'20 PROB. E STAT. TUTORAGGIO $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 1

THM (T.L.C.) (PAUL LÉVY) Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ succ. v.a.r. i.i.d. in $L^2(P)$. Siano $(X_n - \mu)_{n\geq 1}$

$\mu := \mathbb{E}[X_1]$ e $\sigma^2 := Var[X_1] > 0$.

[deviaz. st. $\sigma > 0$].

Siano, $\forall n \geq 1$,

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \quad e \quad \overline{X}_n := \frac{S_n}{n}.$$

(MEDIA EMPIRICA)

La succ. "STANDARDIZZATA"

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \equiv \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}, \quad n \geq 1$$

CONVERGE IN LEGGE "ALLA" NORMALE STANDARD $N(0,1)$:

▷ LA F.D.R. "LIMITE" $\Phi(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx$, $t \in \mathbb{R}$.

EQUIV. $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \equiv \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,\sigma^2)}$$

▷ LA F.D.R. "LIMITE" $\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$Var[X_1 + \dots + X_n] \overset{indip.}{=} Var[X_1] + \dots + Var[X_n]$$

$$\overset{\shortparallel}{Var[S_n]}$$

$\boxed{4.36}$ $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. $\mathcal{E}(1) \equiv \Gamma(1,1)$ ($\Rightarrow$ in L^2, >0 q.c.) (2

(calc?)

(a) DENSITÀ $\dfrac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$ (>0 q.c.), $n\geq 1$

(b) CONV. $\dfrac{X_1+\dots+X_n-n}{\sqrt{n}}$

(c) DATA SUCC. $(Z_n)_{n\geq 1}$ DI V.A.R. INDIP. CON, $\forall n\geq 1$,

$$Z_n \sim \boxed{\Gamma(n,\sqrt{n})}$$

CHE COSA DIRE DI $Y_n := Z_n - \sqrt{n}$, $n\geq 1$?

RICORDIAMO CHE LA DENSITÀ $\Gamma(\alpha,\lambda)$ $(\alpha,\lambda>0)$ È

$$x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

CHE HA MEDIA α/λ E VARIANZA α/λ^2.

(a) $X_1+\dots+X_n \overset{\text{indip}}{\sim} \boxed{\Gamma(n,1)}$ $\forall n\geq 1$ $\Rightarrow$

$$\Big(\underbrace{\Gamma(\alpha,\lambda)+\Gamma(\beta,\lambda)}_{\text{indip.}} \text{"="} \Gamma(\alpha+\beta,\lambda) \Big)$$

$\forall t>0$, $P\left[\dfrac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}} \leq t\right] \equiv P\left[X_1+\dots+X_n \leq t\sqrt{n}\right]$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{t\sqrt{n}} x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

$y := \dfrac{x}{\sqrt{n}} \in [0,t]$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (\sqrt{n})^{n} y^{n-1} e^{-\sqrt{n}y}\,dy \text{"="} \Gamma(n,\sqrt{n})$$

(3

$X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n,1)$ e $\dfrac{\Gamma(\alpha,1)}{\lambda} = \Gamma(\alpha,\lambda)$

$$\frac{\Gamma(n,1)}{\sqrt{n}} = \Gamma(n,\sqrt{n}) .$$

(b) $X_1 \sim \mathcal{E}(1) = \Gamma(1,1) \to \mathbb{E}[X_1] = Var[X_1] = 1$: allora

$$\frac{(X_1+\dots+X_n) - n \cdot 1}{\sqrt{n} \cdot 1} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) . \checkmark$$

(c) ((a)+(b)) $\boxed{Y_n} := \boxed{Z_n - \sqrt{n}}$ $\stackrel{(a)}{=}$ $\dfrac{(X_1+\dots+X_n)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

$\Gamma(n,\sqrt{n})$

$$\equiv \boxed{\frac{X_1+\dots+X_n - n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) .$$

(b)

$\boxed{2.33 + 4.25}$

$\boxed{2.33}$ (i) RICORDIAMO CHE UNA V.A. X È DI BERNOULLI DI PAR. $\boxed{p \in (0,1)}$,

$\underline{X \sim Be(p)}$, QUANDO $X(\Omega) = \{0,1\}$ E $\mathbb{P}[X=1] = p$

$(\mathbb{P}[X=0] = 1-p)$. $\to$ MEDIA p (= MOMENTO n-ESIMO)

VARIANZA $= p(1-p)$. <u>SOMMA</u> DI n V.A. i.i.d.

$Be(p)$ HA LEGGE BINOMIALE $Bin(n,p)$ (CHE, INFATTI,

HA MEDIA np E VAR. $np(1-p)$).

4

$\forall i = 1, \dots, 30$, SIA $\boxed{X_i \sim Be(p)}$ ← INDIP. L'ESITO DELLA RISPOSTA ALLA i-ESIMA DOMANDA DEL TEST (DA PARTE DEL GENERICO STUDENTE "C")

DOVE CONVENIAMO CHE $1 \equiv$ RISPOSTA GIUSTA.

$$\Rightarrow \quad \underset{(S(p))}{S} \doteq \sum_{i=1}^{30} X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_{30} \overset{\text{indip.}}{\sim} Bin(30, p)$$

N° (TOT) RISPOSTE GIUSTE

(i) (A) $p = \frac{1}{4} \rightsquigarrow Bin(30, \frac{1}{4}) \rightsquigarrow$ PUNTEGGIO MEDIO $(30 \cdot \frac{1}{4}) \times 4$ PUNTI

$= 30$ PUNTI

"k"

$$P[S = 16] = \binom{30}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{30-16} \cong 0.0006$$

$\neq$

$\mathcal{O}(10^{-4})$

["1 SU 10.000"]

(ii) (B) $p = \frac{1}{3} \rightsquigarrow Bin(30, \frac{1}{3})$

PUNTEGGIO MEDIO: 4 PUNTI $\times\ 30 \cdot \frac{1}{3} = 40$ PUNTI

$$P[S = 16] = \binom{30}{16} \left(\frac{1}{3}\right)^{16} \left(\frac{2}{3}\right)^{30-16} \simeq 1\%$$

["1 SU 100"]

(USARE TLC.) $\quad S \sim Bin(30, \frac{1}{4})$ $\quad$ (5

(a) Per A, → PROB. SUPERARE TEST
→ RISPONDERE BENE A ≤ 5 DOMANDE

$$\underline{P[S \geq 16]} \equiv 1 - P[S < 16] \qquad P[S \leq 15.5]$$

$$= 1 - P[\underline{S \leq 15}]$$

$$\equiv 1 - P\left[\frac{S - 30 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} \leq \frac{15 - 30 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}\right]$$

$$\underset{(\text{"n grande"})}{\overset{TLC}{\simeq}} 1 - \Phi\left(\frac{15 - 30 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}\right) = O(10^{-4})$$

Φ: F.D.R. $N(0,1)$

$$P[S \leq 5] \overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{5 - 30 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}\right) \simeq 20\%$$

(b) $$P[S \geq 16] \overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{15 - 30 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}}\right) \simeq 1.6\%$$

S: $Bin(30, \frac{1}{3})$

(c)
(C)

$$\boxed{\begin{array}{l} P[S \geq 16] = 40\% \\ S \sim Bin(30, p) \end{array}}$$

$$\mathbb{P}[S \geq 16] = 1 - \mathbb{P}[S \leq 15]$$

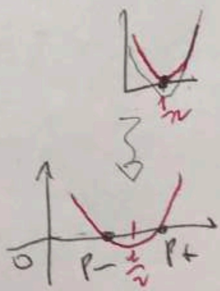
$$\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{15 - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}}\right) = 0.4$$

$$\boxed{\Phi\left(\frac{15 - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}}\right) = 0.6}$$

$\mathbb{P}[S \leq 15]$

$$\boxed{\frac{15 - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}} \in [0.25, 0.26]}$$

$$\Rightarrow 15 - 30p > 0 \quad , \quad p < \frac{1}{2}.$$



$$\frac{15 - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}} = 0.253 \simeq \frac{1}{4}$$

$$p_+ = 0.54 > \frac{1}{2} \quad e \quad \boxed{p_- = 0.493}$$

$p \lesssim \frac{1}{2}$

$$\frac{15 - 30p}{\sqrt{30p(1-p)}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (15 - 30p)^2 = \boxed{\frac{1}{16} 30p(1-p)} \simeq 0$$

$$900p^2 - 900p + 225$$

$$\underbrace{p^2 - p + \frac{1}{4}}_{(p - \frac{1}{2})^2} \simeq 0$$

$p \simeq \frac{1}{2}$

(d) $n=30$ È "UN PO' TROPPO BASSO", IN PARTE PER $p=\frac{1}{4}$

(È IL PIÙ BASSO "p" TRA $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$)

$n \cdot p = \frac{30}{4} = 7.5$

$P[S \le 15 / 15.5]$

"LONTANO" DALLA MEDIA DELLA $Bin(30, \frac{1}{4})$, 7.5

"REGOLETTA" DI APPROX. NORMALE PER $Bin(n,p)$:

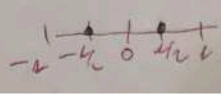
$n \times \min\{p, 1-p\} \ge 5$ $\qquad \min\{p, 1-p\} \ge \frac{1}{6} \simeq 16\%$

7.5, 10

$\boxed{4.34}$ $(X_n)_{n\ge 1}$ V.A. i.i.d. A VALORI IN $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ CON LEGGE UNIF. ($P[X_1 = \pm\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$). SIA, $\forall n \ge 1$,

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2 \equiv \frac{1}{n} S_n^2 .$$

LA SUCC. $(Y_n)_{n\ge 1}$ CONV. IN LEGGE? A COSA?



8

Svolg. $\forall n \geq 1$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Oss. che $\mathbb{E}[X_1] = 0$ e

varianza $\equiv$ momento secondo $= \frac{1}{4}$. Allora, dal T.L.C.,

$$\left(Var[U] \equiv \mathbb{E}[U^2] - \cancel{\mathbb{E}[U]}^{2^{0}} = \mathbb{E}[U^2] \right)$$

$$\tilde{S}_n := \frac{S_n}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \equiv \frac{2}{\sqrt{n}} S_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0,1).$$

$\forall n \geq 1$, $Y_n = \frac{1}{4}(\tilde{S}_n)^2$ ≥ 0 q.c. $\Rightarrow$ $\forall t \geq 0$,

$$\mathbb{P}[Y_n \leq t] = \mathbb{P}[|\tilde{S}_n| \leq 2\sqrt{t}] \xrightarrow[n \to \infty]{(TLC)} \Phi(2\sqrt{t}) - \Phi(-2\sqrt{t})$$

$$\left[\mathbb{P}[-2\sqrt{t} \leq \tilde{S}_n \leq 2\sqrt{t}] = \mathbb{P}[\tilde{S}_n \leq 2\sqrt{t}] - \mathbb{P}[\tilde{S}_n < -2\sqrt{t}] \right]$$

$Y_n > 0$ q.c.

$t > 0$

$$\mathbb{P}[Y_n \leq t] \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$$

F.D.R.!

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}[Y_n \leq t] \xrightarrow[n \to \infty]{} F(t) \doteq \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0, \\ \Phi(2\sqrt{t}) - \Phi(-2\sqrt{t}), & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

È effettiv. una F.D.R.!

C^1 (C^∞) A TRATTI ("FUORI" DA $t=0$), E $\forall t>0$ (9)

$$f(t) := \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(2\sqrt{t}) - \Phi(-2\sqrt{t})\right)$$

$$\left(\Phi(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta} e^{-x^2/2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-(2\sqrt{t})^2/2\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{1/2}\, t^{1/2-1}\, e^{-2t} \qquad (t\geq 0)$$

$\rightarrow$ DENSITÀ $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$. ☐

$\boxed{\text{CONV. IN PROBAB.}}$ UNA SUCC. $(X_n)_{n\geq 1}$ DI V.A.R.

converge in prob. AD UNA V.A.R. X SE, $\forall \varepsilon>0$,

$$(\exists)\quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right]}_{\text{PROBAB. DI DEVIAZIONE DI } X_n \text{ DA } X} = 0.$$

$$\left(\liminf_{n\to\infty}(\,''\,) = 0\right)$$

IN SIMBOLI, "$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$". $\left(\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X\right)$

$\boxed{\text{EXC}}$ SIANO $(X_n)_{n\geq 1}$ E $c \in \mathbb{R}$. SONO EQUIV.:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c \iff X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c .$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}[X_n \leq x] \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0, & \text{SE } x \leq c \\ 1, & \text{SE } x > c \end{cases} \ \ldots \right]$$

$\boxed{\text{THM}}$ (LEGGE DEI GRANDI NUMERI) SIANO $(X_n)_{n\geq 1}$ V.A.R. IN $L^2(\mathbb{P})$
(LIMITE DELLE MEDIE EMPIRICHE)

AVENTI LO STESSO VALORE ATTESO $\boxed{\mu := \mathbb{E}[X_n]}$, $n \geq 1$ E

VARIANZE EQUILIMITATE $(\exists K \geq 0$ T.C., $\forall n \geq 1$, $Var[X_n] \leq K)$.

SE LE X_n SONO SCORRELATE, ALLORA, POSTO $S_n := X_1 + \ldots + X_n$,

$$\overline{X}_n := \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mu . \quad \left[\text{"COME" } O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}[|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon] \leq C \cdot \frac{1}{n} \right)$$

$$\left(Var[\overline{X}_n] \equiv Var\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} Var[S_n] \leq \frac{K}{n}, \ldots \right)$$

$\boxed{\text{EXC}}$ $(X_n)_{n\geq 1}$ V.A.R. IN $L^2(\mathbb{P})$ E $c \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} c \quad \text{E} \quad Var[X_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

MOSTRARE CHE $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c$ "MA" CHE NON VALE IL VICEVERSA.

$$\left[|X_n - c| \leq |X_n - \mathbb{E}[X_n]| + |\mathbb{E}[X_n] - c| \leq \ldots \right]$$

PROP. DATE $(X_n)_{n\geq 1}$, X V.A.R, ~~E $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINUA~~,

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \iff \forall f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ CONT } \quad f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(X)$$

EXC. 4.35 $(X_n)_{n\geq 1}$ V.A.R. i.i.D. A VALORI IN $\{\frac{1}{2}, 2\}$ DI LEGGE UNIFORME.

(TLC)

(a) $\mathbb{E}[\log X_n] = ?$

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

(b) $Y_n := (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/n}$, $n\geq 1$, CONV. IN PROB.? A COSA?

(c) E $W_n := (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$?

TLC

SCORRELATO

(a) $Z_n := \log X_n$, $n\geq 1$. $\Rightarrow$ $(Z_n)_{n\geq 1}$ SUCC. DI V.A.R. i.i.D.

A VALORI IN $\{-\log 2, \log 2\}$ DI LEGGE UNIFORME

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[Z_n] = 0$, E $\mathrm{Var}[Z_n] \equiv \mathbb{E}[Z_n^2] = (\log 2)^2$.

STESSA MEDIA

(EQUIDIM.!)

(b)

$$\boxed{\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0},$$

MA $Y_n = \exp\left\{\frac{Z_1 + \ldots + Z_n}{n}\right\}$, E $e^x: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ È CONTINUA

$$Y_n \equiv \exp\{\sim\} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \exp(0) = 1. \quad \checkmark$$

(c) $\forall n \geq 1$, $W_n = \exp\left\{ \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \right\}$ (>0 q.c.) (42

L'IDEA È USARE TLC:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n} \cancel{\sigma}} \xrightarrow{d} N(0, (\log 2)^2)$$

σ^2

$\Downarrow$ $\forall n$, $\forall t > 0$

$$\mathbb{P}[W_n \leq t] \equiv \mathbb{P}\left[\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}} \leq \log t \right] \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi\left(\frac{\log t}{\log 2} \right)$$

" $\frac{\tau}{\sigma}$ "

F.d.R. $N(0,1)$

DUNQUE

$$\mathbb{P}[W_n \leq t] \xrightarrow[n \to \infty]{} F(t) := \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{\log t}{\log 2} \right), & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

F.D.R. è, $\forall t > 0$,

$$f(t) := \frac{d}{dt} \Phi\left(\frac{\log t}{\log 2} \right) = \frac{1}{\log 2 \cdot t} \Phi'\left(\frac{\log t}{\log 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \log 2 \cdot t} \exp\left\{ - \frac{(\log t)^2}{2 (\log 2)^2} \right\}$$

DENSITÀ LOG NORMALE!

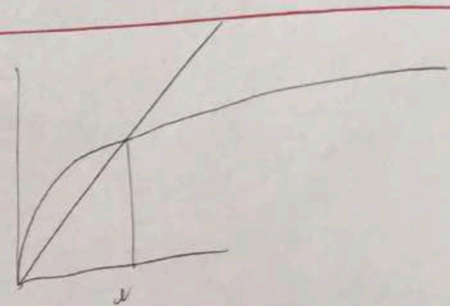
INFATTI, UNA V.A.R. X (≥ 0 q.c.) È LOGNORMALE QUANDO

$$\text{"}\log X \sim N(\mu, \sigma^2)\text{"}$$

CIOÈ $\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ E $\sigma > 0$ T.C. X SIA ASS. CONT.

CON DENSITÀ

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, t} \exp\left\{ - \frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \qquad \boxed{E}$$



PROSSIME DUE ESERCITAZIONI (LE ULTIME DUE):

SCRITTI D'ESAME!

PROBABILITÀ E STATISTICA - TUTORAGGIO — 8/6/2020 1

SCRITTI DI ESAME.

14.1.2016

(1) # PERSONE k $\quad i = 1, \dots, k$

GIORNI VIAGGIO m $\quad j = 1, \dots, m$

$A_i :=$ « IL PARTECIPANTE i-ESIMO FESTEGGIA IL COMPLEANNO DURANTE IL VIAGGIO » → INDIP. CON $\mathbb{P}[A_i] = \frac{m}{365}$

L'EXC. È IL CALCOLO DI $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = 1 - \mathbb{P}[A_1^c \cap \dots \cap A_k^c] =$

$$\overset{\text{indip.}}{=} \boxed{1 - \left(1 - \frac{m}{365}\right)^k \geq p}$$

$$\left(p = \frac{1}{2},\ p = \frac{9}{10}, \dots\right)$$

→ k NOTO (m DA TROVARE) $\quad m \geq 365\left[1 - (1-p)^{1/k}\right]$

→ m NOTO (k DA TROVARE) $\quad k \geq \dfrac{\log(1-p)}{\log\left(1 - \frac{m}{365}\right)}$

---

(2) URNA CON M PALLINE NUMERATE $i = 1, 2, \dots, M$ DI CUI NE ESTRAIAMO m, $1 \leq m \leq M$. $\forall j = 1, \dots, m$

$X_j :=$ « IL NUMERO DELLA j-ESIMA PALLINA ESTRATTA ».

SIA $Y := \max\{X_1, \dots, X_m\}$. $\quad$ (X_j È A VALORI IN $\{1, \dots, M\}$)

$\boxed{a+b}$ CON REIMBUSSOLAMENTO: $\forall 1 \leq k \leq M$, $\mathbb{P}[Y \leq k]$;

× DENSITÀ DI Y. PER QUALE k, $\mathbb{P}[Y = k]$ È LA PIÙ GRANDE?

$\boxed{c}$ SENZA REIMBUSS.: STESSE DOMANDE.

12

a/b $X_1, \dots, X_m$ SONO INDIPENDENTI CON LEGGE UNIFORME E QUINDI, $\forall k$,

$$\mathbb{P}[Y \le k] = \mathbb{P}[X_1 \le k, \dots, X_m \le k] = (\mathbb{P}[X_1 \le k])^m = \left(\frac{k}{n}\right)^m$$

IN PART., $\mathbb{P}[Y=1] = \mathbb{P}[Y \le 1] = \left(\frac{1}{n}\right)^m$ MENTRE, $\forall 1 < k \le n$,

$$\mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{P}[Y \le k] - \mathbb{P}[Y \le k-1] = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}.$$

$\boxed{\text{PROP.}}$ $k \mapsto \mathbb{P}[Y=k]$ È CRESCENTE (in k).

$\Rightarrow$ RAGGIUNGE IL SUO VAL. MAX. IN $k = n$.

PER "CONVESSITÀ" della funz. $x \mapsto x^m$, $x \ge 0$:

$$(k+1)^m - k^m \ge k^m - (k-1)^m \iff$$

$$\iff \underbrace{k^m}_{\downarrow} \le \frac{1}{2}(k+1)^m + \frac{1}{2}(k-1)^m.$$

$$\left[\frac{1}{2}\underbrace{(k+1)}_{x} + \frac{1}{2}\underbrace{(k-1)}_{y}\right]^m$$

CONV.

$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$

c SE $k < m$, $\mathbb{P}[Y \le k] = 0$ E, IN PART.,

$$\mathbb{P}[Y = m] = \mathbb{P}[Y \le m] :$$

PER $k \ge m$, $\mathbb{P}[Y \le k] \overset{\text{IPER GEOM.}}{=} \dfrac{\binom{k}{m}\cdot\binom{n-k}{\cancel{m-m}}}{\binom{n}{m}}$ (con $\binom{n-k}{m-m} = 1$)

ESTRAZIONE SENZA REINS. DA $\{1, \dots, k\}$

$$= \frac{k!/(k-m)!}{n!/(n-m)!}$$

$$= \frac{k\cdot(k-1)\cdot \ldots \cdot(k-m+1)}{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-m+1)}$$

13

($\Rightarrow$) $\mathbb{P}[Y=m] = \mathbb{P}[Y \leq m] = \frac{1}{\binom{M}{m}}$, mentre $\forall k > m$

$\mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{P}[Y \leq k] - \mathbb{P}[Y \leq k-1] =$

$$= \frac{(k-1)\cdot \ldots \cdot (k-m+1)}{M(M-1)-(M-m+1)} \left[\underbrace{k-(k-m)}_{= m} \right].$$

Di nuovo, $\max_{k=1,\ldots,M} \mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{P}[Y=m]$. ☑

---

(3) $\forall \alpha > 0$ e $\forall \vartheta > 0$ (e $\cancel{\forall t \geq 0}$), $\quad \vartheta + t \geq \vartheta > 0$, $\alpha + 1 > 1$

$$f(t) := \frac{\alpha \vartheta^{\alpha}}{(\vartheta + t)^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

DENSITÀ $\left[\int_0^\infty f(t)dt = 1 \right]$ $\left(\frac{1}{(\vartheta+t)^{\alpha+1}} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\vartheta+t)^{\alpha}} \right) \leadsto \int_0^\infty \ldots = \right)$

$\boxed{a}$ $F(t) \doteq \int_{\cancel{-\infty}\,0}^{t} f(s)ds = \alpha \vartheta^{\alpha} \int_0^t \frac{ds}{(\vartheta+s)^{\alpha+1}}$

(F.D.R.)

$$= \vartheta^{\alpha} \left[-\frac{1}{(\vartheta+s)^{\alpha}} \right]_{s=0}^{s=t}$$

$$= 1 - \frac{\vartheta^{\alpha}}{(\vartheta+t)^{\alpha}}, \quad t \geq 0.$$

$\boxed{b}$ + $\boxed{c}$ TROVARE VALORI DI α e ϑ TALI CHE "LA" V.A.R. X DI DENSITÀ f ABBIA ($\mathbb{E}[X]$ e) $\mathrm{Var}[X]$ FINITE (A), E CALCOLARLA.

CALCOLIAMO: PER "$X \sim f$",

14

$$\mathbb{E}[X] \equiv \int_{\mathbb{R}} s f(s)\, ds = \alpha \vartheta^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{s}{(\vartheta + s)^{\alpha+1}} ds$$

$$\frac{1}{\frac{(\vartheta+s)^{\alpha+1}}{s}} \underset{s\to\infty}{\sim} s^{\alpha} \rightarrow \alpha > 1$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \alpha \vartheta^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{s^2}{(\vartheta+s)^{\alpha+1}} ds \longrightarrow \boxed{\alpha > 2}\ .$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{\alpha \vartheta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\ .$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\vartheta}{\alpha - 1}$$

(int. parti)

$\boxed{18.\ 6.\ 2019}$

(1) A := « LA PIANTA È VIVA » ($\mathbb{P}[A]$)

B := « IL VICINO BAGNA / HA BAGNATO LA PIANTA »

$$\mathbb{P}[B^c \mid A^c] \equiv \left(\frac{\mathbb{P}[B^c \cap A^c]}{\mathbb{P}[A^c]} = \frac{\mathbb{P}[A^c \mid B^c]\,\mathbb{P}[B^c]}{\mathbb{P}[A^c]} \right)$$

$$\overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}[A^c \mid B^c]\,\mathbb{P}[B^c]}{\underbrace{\mathbb{P}[A^c \mid B]}_{30\%}\underbrace{\mathbb{P}[B]}_{80\%} + \underbrace{\mathbb{P}[A^c \mid B^c]}_{90\%}\underbrace{\mathbb{P}[B^c]}_{20\%}}\ .$$

---

(2) " A voi "

---

(3) $(X_n)_{n\geq 1}$ SUCC. DI V.A.R. i.i.D. CON DENSITÀ (COMUNE A TUTTE)

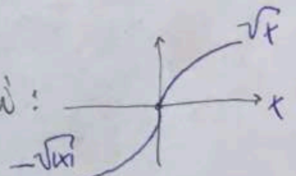
$$\rho(x) := e^{-2|x|}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

OSS. ρ È PARI E, IN EFFETTI, $\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2}$.

CONSIDERIAMO $(Z_n)_{n\geq 1}$ CON, $\forall n\geq 1$,

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sgn}(X_k)\cdot\sqrt{|X_k|/n} \quad . \leftarrow \frac{(\dots)}{\sqrt{n}}$$

Z_n CONVERGE IN DISTR.? SE SÌ, Z_n^2 CONV. A COSA?

PONIAMO $f:\mathbb{R}_x\to\mathbb{R}$, $f(x):=\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ (DISPARI: )

E SIA $\tilde{X}_n := f(X_n) = \mathrm{sgn}(X_n)\sqrt{|X_n|}$, $\forall n\geq 1$. INDIP. ISONOME (i.i.D.)

COSÌ: $\forall n\geq 1$, $$\boxed{Z_n = \frac{\tilde{X}_1+\dots+\tilde{X}_n}{\sqrt{n}}}.$$

PER USARE IL TLC, OCCORRONO $\mathbb{E}[\tilde{X}_1]$ E $Var[\tilde{X}_1]$!

* $\mathbb{E}[\tilde{X}_1] \equiv \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)\rho(x)}_{\text{dispari}}\,dx = 0$,

* $$Var[\tilde{X}_1] \equiv \mathbb{E}[\tilde{X}_1^2] = \mathbb{E}[f^2(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f^2(x)\rho(x)}_{\text{PARI}}\,dx$$
$$= 2\int_0^\infty f^2(x)\rho(x)\,dx$$
$$= 2\int_0^\infty x e^{-2x}\,dx$$

16

$$\equiv \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \boxed{2}^{2} x^{2-1} e^{-\boxed{2}x}\,dx}_{\Gamma(\alpha)=\Gamma(2)=1!=1} = \frac{1}{2}.$$

TLC

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{X}_1+\dots+\tilde{X}_n - \cancel{n\,\mathbb{E}[\tilde{X}_1]}}{\sqrt{n \operatorname{Var}[\tilde{X}_1]}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

$$\Updownarrow$$

$$Z_n \equiv \frac{\tilde{X}_1+\dots+\tilde{X}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0,\tfrac{1}{2}\right) \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} N(0,1).$$

$$(N(0,1))^2 \stackrel{d}{=} \Gamma\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \qquad \left(\chi^2(n) = \Gamma\left(\tfrac{n}{2},\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{d} \frac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) \stackrel{d}{=} \Gamma\left(\tfrac{1}{2},1\right). \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\lambda\Gamma(\alpha,\lambda) = \Gamma(\alpha,1)}$$

19.7.2019.

(2) $\rho(x) := \dfrac{2}{\pi(1+x^2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad \left[\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^\infty = \pi/2\right]$

"$X \sim \rho$" $\Rightarrow$ $X \geq 0$ q.c. - Consideriamo il polinomio "aleatorio"

$$p(z) := 2z^2 + (2X)z + \left(\frac{X}{2}+1\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Probab. radici reali, cioè "$\Delta \geq 0$".

$$\Delta/4 \equiv (b/2)^2 - ac = X^2 - X - 2$$
$$= (X-2)\underbrace{(X+1)}_{\geq 0\,!} \geq 0 \quad \text{imponiamo}$$

$\boxed{X \geq 2 \ (q.c.)}$:

$$\mathbb{P}[X \geq 2] = \frac{2}{\pi}\int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\left[\arctan x\right]_{x=2}^{x=\infty}$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan 2 \simeq 29.5\,\% .$$

---

(3) $\forall m = 1, \dots, 100$, $X_m :=$ « ore di "vita" della m-esima lampadina » (le X_m sono indip.!) di legge $\mathcal{E}(\lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{5}$ (media 5 ore) :

$$\mathbb{E}[X_m] \equiv \frac{1}{\lambda} = 5 \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}[X_m] \equiv \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{25} .$$

Definiamo $S := \sum_{m=1}^{100} X_m \equiv$ « ore di "vita" di tutta la scatola di lampadine ».

$\boxed{a}$
$$\mathbb{P}[S > 525] \equiv \mathbb{P}\left[\frac{S - 100\cdot 5}{\sqrt{100\cdot 25}} > \underbrace{\frac{525 - 100\cdot 5}{\sqrt{100\cdot 25}}}_{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\tfrac{1}{2}\right) \simeq 31\%$$

Φ: F.D.R. $N(0,1)$

$\boxed{b+c}$ $\forall m = 1, \dots, 99$,

$Y_m :=$ « tempo (in ore) per la sostituzione della lampadina m-esima con la $(m+1)$-esima ».

Per ipotesi, $(Y_m)_{m=1}^{99}$ è succ. di v.a.r. (≥ 0 q.c.) i.i.d. $\mathcal{U}[0, \frac{1}{2}]$

e ogni Y_m è indip. da ogni X_m.

NOTA! $\forall a<b$ in $\mathbb{R}$, LA LEGGE UNIFORME $\mathcal{U}[a,b]$, DI DENSITÀ

$$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

HA MEDIA $\dfrac{a+b}{2}$ E VARIANZA $\dfrac{(a-b)^2}{12}$.

$\Rightarrow$ $\forall n$, $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{4}$ E $Var[Y_n] = \frac{1}{48}$.

"IPOTESI SEMPLIFICATRICE": $X_{100} = 0$. (SI FULMINA SUBITO)
(?)

$$\mathbb{P}[T \le 550] = \mathbb{P}\Big[\frac{T-99\mu}{\sqrt{99\sigma^2}} \le \underbrace{\frac{550-99\mu}{\sqrt{99\sigma^2}}}_{\simeq 0.61}\Big]$$

DOVE $T := \sum_{n=1}^{99}(X_n+Y_n)$

$(X_n+Y_n)_{n=1}^{99}$ SUCC. DI V.A.R. i.i.d. CON $\mathbb{E}[X_n+Y_n] = \mathbb{E}[X_n]+\mathbb{E}[Y_n] = 5+\frac{1}{4} = 5.25 =: \mu$

E $Var[X_n+Y_n] = Var[X_n]+Var[Y_n] = 25+\frac{1}{48} \simeq 25.02 =: \sigma^2$ (INDIP.)

$\big((X_n+Y_n)_{n=1}^{99}, \cancel{X_{100}+}\big) Y_{100}$

$$\overset{TLC}{\simeq} \Phi(0.61) \simeq 73\%.$$

$\Rightarrow$ ESSENDO $X_{100} \ge 0$, $\mathbb{P}[T+X_{100} \le 550] \le \mathbb{P}[T\le 550] \approx 73\%$

$\boxed{6.12.2019}$ (9)

(3) CONVENIAMO D'INTENDERE $[0,1]$ COME L'INSIEME DELLE POSSIBILI "PORZIONI" DI UN'ORA $[0 = 0,\ 1 = 60 \text{ min } (60'),\ \frac{1}{2} = 30 \text{ min},\ \frac{1}{6} = 10 \text{ min}, \dots]$.

PONIAMO, PER $i = 1, 2$,

$X_i :=$ « L'ISTANTE DI ARRIVO, IN $[0,1]$ E RISPETTO ALLE ORE 18:00, DELL'i-ESIMO AMICO ».

ALLORA, PER HYP., X_1 E X_2 SONO INDIP. E $\mathcal{U}[0,1]$.

$\Rightarrow$ (X_1, X_2) È ASS. CONT. E HA DENSITÀ (SU $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$)

$$f_{(X_1,X_2)}(x,y) \overset{\text{PROP.}}{=} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y)$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y) .$$

CIOÈ $(X_1, X_2) \sim \text{Unif.}([0,1]^2)$. VOGLIAMO

$$\boxed{\mathbb{P}\left[|X_1 - X_2| \le \frac{1}{6}\right]} .$$

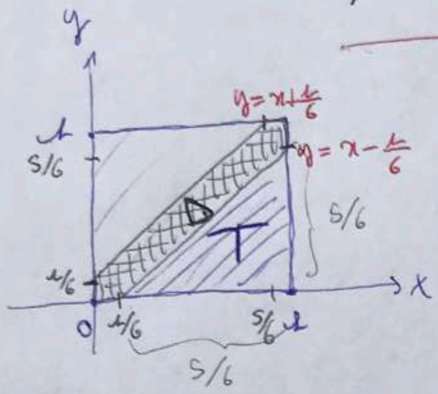
RICORDIAMO CHE, PER (X,Y) VETT. ALEAT. CON DENSITÀ $f_{(X,Y)}$, E $\forall \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ MIS., $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\boxed{\mathbb{P}[\psi(X,Y) \in I] = \iint_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x,y) \in I\}} f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy} .$$

ALLORA, FINALMENTE,

$$\mathbb{P}\left[|X_1 - X_2| \le \tfrac{1}{6}\right] = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-y| \le \frac{1}{6}\}} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \text{Aire}\Big(\underbrace{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid |x-y| \le \tfrac{1}{6}\}}_{D}\Big)$$



$$\text{Aire}(D) = 1 - 2\underbrace{\text{Aire}(T)}_{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}.$$

PROBABILITÀ E STATISTICA – TUTORAGGIO, VEN. 12.6.2020 (ULTIMA) (1)

SCRITTI D'ESAME.

6.12.2019 (CONTINUAZIONE.)

(1) H_0: 1 — A_1, A_2; H_1: 2 — A, O; H_2: 3 — O_1, O_2

("SCATOLA", "MONETA ESTRATTA")
$(H_0, A_1), (H_0, A_2)$
$(H_1, A), (H_1, O)$ 3
$(H_2, O_1), (H_2, O_2)$ 2

A := « LA MONETA ESTRATTA È D'ORO »

e PER $k=0,1,2$, H_k := « LA SCATOLA SCELTA CONTIENE k MONETE D'ORO »

$$P[H_2 \mid A] \overset{(def.)}{=} \frac{P[A\mid H_2]\,P[H_2]}{P[A]} \overset{Bayes}{=} \frac{P[A\mid H_2]\,P[H_2]}{\underbrace{P[A\mid H_0]}_{0}\underbrace{P[H_0]}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{P[A\mid H_1]}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P[H_1]}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{P[A\mid H_2]}_{1}\underbrace{P[H_2]}_{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3}}}{\cancel{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{2}+1\right]} = \frac{2}{3} \left(> \frac{1}{2}\ !\right).$$

(2) Sia $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, che denota il N° di lanci di una moneta equilibrata.
PROBAB. NO TESTE CONSECUTIVE. Sia

S_m := « N° SEQUENZE DI LUNGH. m DI ELEMENTI "T" E "C" DOVE NON CI SONO "T" CONSECUTIVE ».

$m=2$	∘ ∘	3
$m=3$	∘ ∘ ∘	4
$m=4$	∘ ∘ ∘ ∘	⋮

LA PROB. RICHIESTA È $S_m / 2^m$.

CAPIAMO FACILMENTE CHE IL NUMERO MASSIMO $k < m$ DI POSSIBILI TESTE T NELLA GENERICA SEQUENZA È $\frac{m}{2}$ PER m PARI E $\frac{m+1}{2}$ PER m DISPARI

$\Rightarrow$ $0 \leq k \leq \left[\frac{m+1}{2}\right]$ (PARTE INTERA). $\forall k$ DI QUESTI, AVERE k TESTE È EQUIV. AD AVERE $m-k$ CROCI:

$$\overbrace{\_C\_C\_C\_\dots\_C\_C\_}^{m}$$, $m-k$ → GLI SPAZI POSSIBILI SONO $m-k+1$

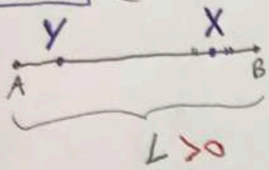
(2

$\Rightarrow$ $\forall k$, LE POSSIBILITÀ SONO $\binom{n-k+1}{k}$. IN DEFINITIVA,

$$S_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n-k+1}{k} \quad . \quad \blacksquare$$

10.3.2019 (SOLO "CAP. 3".)

(2)



X = « POSIZIONE (IN $[0,L]$) DELL'AMBULANZA AL MOMENTO DELL'INCIDENTE »

Y = « LUOGO (IN $[0,L]$) DELL'INCIDENTE »

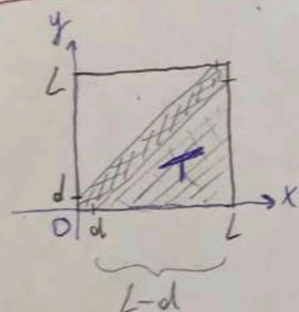
$\rightarrow$ INDIPENDENTI $Unif[0,L]$ $\xrightarrow{\text{DENSITÀ}}$ $\frac{1}{L}\mathbb{1}_{[0,L]}$ (SU $\mathbb{R}$)

DENSITÀ $D := |X-Y|$ (A VALORI IN $[0,L]$)

(X,Y) HA DENSITÀ $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{L^2}\mathbb{1}_{[0,L]^2}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ $\forall d \in [0,L]$,

$$F_D(d) := \mathbb{P}[D \le d] = \mathbb{P}[|X-Y| \le d]$$

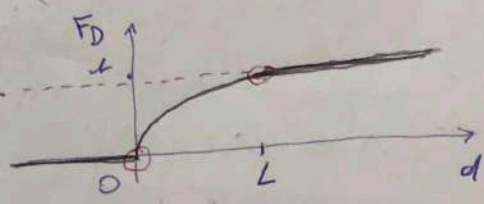


$$= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |x-y|\le d\}} \frac{1}{L^2}\mathbb{1}_{[0,L]^2}(x',y')\,dx'dy'$$

$$= \frac{1}{L^2}\text{Area}\left(\{(x,y)\in[0,L]^2 \,|\, |x-y|\le d\}\right)$$

$$= \frac{1}{L^2}\left[L^2 - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(L-d)^2\right]$$

$$= \frac{d(2L-d)}{L^2}$$



C^1 (C^∞ A TRATTI!) (FUORI DA 0)

$\Rightarrow$ D HA DENSITÀ $f_D(d) \overset{0<d<L}{=} F_D'(d) = 2\frac{L-d}{L^2}$. $\blacksquare$

29.10.2019

(1) Gioco 1: Carta (da 40) $\nearrow$ Asso $\rightarrow$ Moneta: T ; $\searrow$ Non Asso $\rightarrow$ Dado: $\underbrace{6}_{\text{vincita}}$

Gioco 2: Moneta $\nearrow$ T $\rightarrow$ Carta: Asso ; $\searrow$ C $\rightarrow$ Dado: $\underbrace{2 \text{ o } 6}_{\text{vincita}}$

Q Qual'è il gioco più "conveniente" (per il giocatore)?

Semplicemente, contiamo tutti i possibili casi:

Gioco 1: $(\text{Asso}, T), (\text{Asso}, C)$ $\rightsquigarrow$ tot 8 $\rightsquigarrow$ fav 4
(4, 4)

$(\underbrace{\text{"Non asso"}}_{36}, \{1,2,3,4,5,6\})$ $\rightsquigarrow$ tot $36 \times 6 = 216$ (6^3) $\rightsquigarrow$ fav 36

Probab. vincita $= \dfrac{40}{224} \simeq 0.178 \simeq 18\%$.

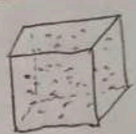
Gioco 2: $(T, \text{"carta"})$ $\rightsquigarrow$ tot 40 $\rightsquigarrow$ fav 4

$(C, \text{"dado"})$ $\rightsquigarrow$ tot 6 $\rightsquigarrow$ fav 2

Probab. vincita $= \dfrac{6}{46} \simeq 0.13 \simeq 13\%$.

Il gioco 1 è il più conv.

Inoltre, $P[N=n] = \lambda^n \dfrac{e^{-\lambda}}{n!} \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)$.

(2)  $1\,cm^3$

N = "N° cellule nel dato cm^3 di sospensione" (v.a.!) $\sim Pois(\lambda)$, $\lambda > 0$

$\forall i = 1, 2, \ldots, N$, X_i = "stato di sopravvivenza della i-esima cellula (all'istante di osservazione)"

Conveniamo che $X_i \in \{0,1\}$ e che $X_i = 1 \iff$ la i-esima cel. è viva. (colonia visibile)

14

$\Rightarrow$ PER IPOTESI, $\forall i$, $X_i \sim Be(p)$ $(p>0)$. $[\mathbb{P}[X_i=1]=p]$

OSS. CHE

N° TOTALE DI COLONIE VISITATE (ALL'IST. DI OSSERVAZ.) $\rightarrow$ $\boxed{X := \sum_{i=1}^{N} X_i}$ $\sim$ "$Bin(N,p)$" ("PER OGNI REALIZZAZIONE $N=n$")

$\uparrow$ X_i INDIP. (PER IPOTESI)

$\uparrow$ N FISSATO!

? DISTRIBUZ. DI X?

$\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X=k] \overset{\text{"PROP."}}{=} \sum_{\cancel{n=0}\ n=k}^{\infty} \mathbb{P}[X=k \mid N=n]\cdot\mathbb{P}[N=n]$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}[\overbrace{X_1+\dots+X_n}^{\sim Bin(n,p)}=k]}_{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}\cdot\underbrace{\mathbb{P}[N=n]}_{\lambda^n \frac{e^{-\lambda}}{n!}}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \quad \rightarrow \lambda^n = \lambda^{n-k}\cdot\lambda^k$$

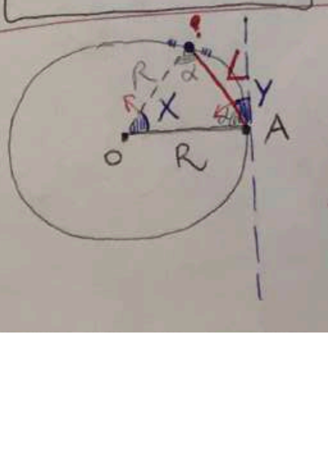
$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^m}{m!}}_{e^{\lambda(1-p)}} \qquad \left(e^x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!},\ x\in\mathbb{R}\right)$$

$$= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

$\rightarrow$ $\boxed{X \sim Pois(\lambda p)}$. $\square$

$\begin{cases}\pi = 2\alpha + X \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - Y\end{cases} \rightarrow X - 2Y = 0$ cioè $\boxed{X = 2Y}$

③



$\begin{cases} X \sim Unif[0,2\pi] \\ Y \sim Unif[0,\pi] \end{cases} \rightarrow Var[L] = ?$

OK

$\boxed{\text{TEM (DELLA CORDA)}}$ [TRIGONOMETRIA] $L = 2R\sin\frac{X}{2} \equiv 2R\sin Y$

DAL FATTO CHE $\frac{X}{2}=Y$ E $\underline{Y\sim Unif[0,\pi] \Leftrightarrow X\sim Unif[0,2\pi]}$, SI CAPISCE

CHE LE DUE DOMANDE (a) E (b) SONO EQUIVALENTI! E, ALLORA, FACCIAMO IL CALCOLO

b) $Var[L] \equiv E[L^2]-E[L]^2$ USANDO $L=2R\sin Y$, $Y\sim Unif[0,\pi]$

DENSITA' $\underbrace{\frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{[0,\pi]}}_{f_Y}$

[(*) IL VALORE ATTESO DIPENDE SOLO DALLA LEGGE!]

* $E[\sin Y] \overset{Y \text{ HA DENSITA' } f_Y}{=} \int_{\mathbb{R}} \sin(y) f_Y(y)\,dy$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin y\, dy = \frac{1}{\pi}[\cos y]_{y=\pi}^{y=0} = \frac{2}{\pi}$$

$\Rightarrow \boxed{E[L]=\frac{4R}{\pi}}$.

* $E[\sin^2 Y] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 y\,dy = \frac{1}{2\pi}[y-\sin y\cos y]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{d}{dy}(\sin y\cos y) = \underbrace{\cos^2 y}_{1-\sin^2 y} - \sin^2 y = 1-2\sin^2 y\right.$

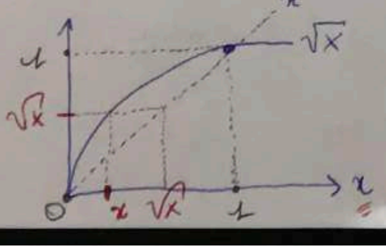
$\left.\Rightarrow \frac{d}{dy}(y-\sin y\cos y) = 1-(1-2\sin^2 y) = 2\sin^2 y\right)$

$\Rightarrow \boxed{E[L^2]=2R^2} \Rightarrow Var[L] = 2R^2\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)$,

---

4.2.2020 ("A RITROSO")

3



$X\sim Unif[0,1]$

$P[X=1]=P[\sqrt{X}=1]=0$

POSSIAMO SUPPORRE CHE

$x=0.\ldots$, cioè $\sqrt{x}=0.CK\ldots$

Sia X la v.a.r. $\mathrm{Unif}(0,1)$ la cui realizzazione è $x \in]0,1[$. $\forall$ possibile 1ª cifra decimale $c \in \{0,1,\dots,9\}$, la 2ª cifra decimale di $\sqrt{x}$ è k (dato) $\in \{0,\dots,9\}$ se e solo se

$$\frac{c}{10}+\frac{k}{100} \le \sqrt{x} \le \frac{c}{10}+\frac{k+1}{100}$$

$$\iff \boxed{\left(\frac{c}{10}+\frac{k}{100}\right)^2 \le x \le \left(\frac{c}{10}+\frac{k+1}{100}\right)^2}$$

$\Rightarrow$ $\forall c=0,1,\dots,9$, $\mathbb{P}[\sqrt{X}=0.ck\dots\dots] =$

$$=\mathbb{P}\left[\left(\frac{c}{10}+\frac{k}{100}\right)^2 \le X \le \left(\frac{c}{10}+\frac{k+1}{100}\right)^2\right]$$

$\forall a,b \in (0,1)$, $\mathbb{P}[a\le X\le b] =$
$= \mathbb{P}[X\le b]-\mathbb{P}[X<a]$
$= b-a$

$$\overset{X\sim \mathrm{Unif}(0,1)}{=} \underbrace{\left(\frac{c}{10}+\frac{k+1}{100}\right)^2}_{\left[\left(\frac{c}{10}+\frac{k}{100}\right)+\frac{1}{100}\right]^2} - \left(\frac{c}{10}+\frac{k}{100}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10.000}+\frac{c}{500}+\frac{k}{5000}.$$

$\Rightarrow$ La prob. che la 2ª cifra decimale di $\sqrt{x}$ sarà k è

$$\sum_{c=0}^{9}\left[\frac{1}{10.000}+\frac{c}{500}+\frac{k}{5000}\right] = \frac{1}{1.000}+\frac{45}{500}+\frac{k}{500}$$

$$= \frac{91+2k}{1000}.$$

---

(2) Il gioco consiste nel lancio di tre dadi classici.
[Possibili esiti: $6^3 = 216$.]
Fissiamo / scegliamo $N \in \{1,2,3,4,5,6\}$.
[che si può presentare o 0, o 1, o 2, o 3 volte]

SE N NON SI PRESENTA, PERDIAMO LA POSTA; SE N SI PRESENTA $k \in \{1,2,3\}$ VOLTE, VINCIAMO K VOLTE LA POSTA.

IL GIOCO È EQUO? IL GIOCO PAREBBE A VANTAGGIO DEL GIOCATORE...

$$\text{« VINCITA »} = \text{" } X \times \underbrace{\text{POSTA}}_{\text{costante} \neq 0} \text{ "}$$

$X :=$ « N° DI VOLTE CON CUI SI PRESENTA N. »

$$\mathbb{E}[X] = \cancel{0 \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X=0]}_{5^3/6^3}} + 1 \cdot \underbrace{\mathbb{P}[X=1]}_{\frac{3\times 5^2}{216} = \frac{75}{216}} + 2\, \underbrace{\mathbb{P}[X=2]}_{\frac{3\times 5}{216} = \frac{15}{216}} + 3\, \overbrace{\mathbb{P}[X=3]}^{\frac{1}{216}}$$

$$= \frac{75 + 30 + 3}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{"VINCITA"}] = \underbrace{\text{POSTA}}_{\neq 0} \cdot \mathbb{E}[X] \neq 0$ $\Rightarrow$ IL GIOCO NON È EQUO! (>0)

COMUNQUE, $\mathbb{E}[X - \frac{1}{2}] = 0$: PER RENDERE EQUO IL GIOCO, BASTA (ED OCCORRE) SOSTITUIRE k CON $k - \frac{1}{2}$. ☐

---

(1) "CENNI". VOGLIAMO DISTRIBUIRE $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$, PALL. BIANCHE E $r \in \mathbb{N}^*$ ROSSE IN DUE URNE U_1 E U_2 (NON VUOTE) IN MODO T.C. SIA MASSIMA $> \frac{1}{2}$ LA PROBAB. DI ESTRARRE UNA P. BIANCA COME RISULTATO FINALE DEL SEGUENTE "ESPERIMENTO":

« (1) SCEGLIERE A CASO UN'URNA; (2) SCEGLIERNE A CASO UNA PALLINA. »

IDEA: "ISOLARE LE BIANCHE"! SE DEFINIAMO

$b_1 =$ « N° BIANCHE IN U_1 » $\in \{0, \dots, b\}$, $r_1 =$ « N° ROSSE IN U_1 » $\in \{0, \dots, r\}$

$\left[\underbrace{b-b_1}_{b_2} = \text{«N° bianche in } U_2\text{»},\quad \underbrace{r-r_1}_{r_2} = \text{«N° rosse in } U_2\text{»}\right]$ 18

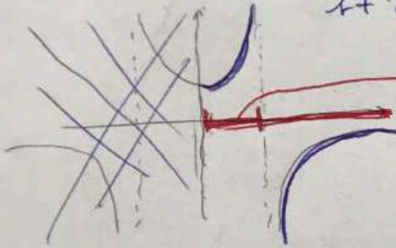
Allora $b+r > b_1+r_1 > 0$ e

$$P[\text{"Bianca"}] = \underbrace{P[\text{"Bianca"}\,|\,U_1]}_{\frac{b_1}{b_1+r_1}}\ \underbrace{P[U_1]}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P[\text{"Bianca"}\,|\,U_2]}_{\frac{b-b_1}{b+r-(b_1+r_1)}}\ \underbrace{P[U_2]}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left[\frac{b_1}{b_1+r_1} + \frac{b-b_1}{b+r-(b_1+r_1)}\right]}$$

Da massimizzare in (b_1, r_1)

$\forall b_1^*$ fissato, → è "tipo" $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$, $x = r_1$



→ è crescente!

Idea da sistemare

$\boxed{r_1 = r,\ 0 \le b_1 \le b-1}$

Se (b_1^*, r_1^*) è "ottima", allora è ottima (b_1^*, r) (non possiamo che aumentare)

Allora resta da max $\frac{b_1}{b_1+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{b_1}}$

MIN

MAX

→ $\boxed{b_1 = b-1,\ r_1 = r}$

$b_2 = 1,\ r_2 = 0$

1 bianca in un'urna, tutte le altre (rosse comprese) nell'altra

⇒ La prob. viene $\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\left[1 + \frac{b-1}{b+r-1}\right]}}_{(b\ge 2)\ >\ \frac{1}{2}}$ ← analoga a $r_1 = 0 \to b_1 = 1$ (perché $r_1 = r$)

1 BAYES.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ σ–ALGEBRA ; $B \in \mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}_B := \{A' \cap B \mid A' \in \mathcal{A}\}, \quad \underset{\in \mathcal{A},\ \text{risp. } \mathcal{A}_B}{P[A|B]} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}.$$

$P[\cdot|B]$ NUOVA PROBABILITÀ SU $\mathcal{A}$, RISP. $\mathcal{A}_B$.

	A	A^c	
B	$A\|B$	$A^c\|B$	$\to$ SOMMA 1 (IN PROB.)
B^c	$A\|B^c$	$A^c\|B^c$	$\to$ ″
	$\downarrow$ X	$\downarrow$ X	

AD ES., $P[A^c|B] = 1 - P[A|B]$.

---

(1) $P[A|B]P[B] = P[A \cap B] \left(= P[B \cap A]\right) = P[B|A]P[A]$

(2) $P[B] = P[A \cap B] + P[A^c \cap B]$

$$= P[B|A]P[A] + P[B|A^c]\underbrace{P[A^c]}_{1 - P[A]}$$

(3) $$P[A|B] \overset{(1)}{=} \frac{P[B|A]P[A]}{P[B]} \overset{(2)}{=} \frac{P[B|A]P[A]}{P[B|A]P[A] + P[B|A^c]\underbrace{P[A^c]}_{1-P[A]}}$$

$\boxed{1.23}$ $M = \{\text{i malati}\}$: $P[M] = 0.03$

$T = \{\text{test positivo}\}$: $P[T|M] = 0.95 \Leftrightarrow P[\boxed{T^c|M}] = 0.05$

$P[T^c|M^c] = 0.80 \Leftrightarrow P[T|M^c] = 0.20$

(ⓐ $P[T]$.)

ⓑ $P[M|T]$.

ⓒ $P[M|T^c]$.

ⓐ $P[T] = P[M \cap T] + P[M^c \cap T]$

$= P[T|M]P[M] + P[T|M^c]\underbrace{P[M^c]}_{1-P[M]}$. ✓

ⓑ $P[M|T] = \dfrac{P[T|M]P[M]}{P[T]}$.

ⓒ $P[M|T^c] = \dfrac{P[\boxed{T^c|M}]P[M]}{\underbrace{P[T^c]}_{1-P[T]}}$.

$\boxed{\text{II}}$ $\boxed{\text{V.A. DISCRETE}}$ $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{N}$ (o un numerabile, o un insieme finito)

IDEA: una V.A. X trasforma $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in $(X(\Omega), "X(\mathcal{A})", X(P))$ che è un'altra σ-algebra. In particolare, $X(P)$ è una probabilità, ed è detta la legge/distribuzione di X. Si chiede :

$\{X = n\} := X^{-1}(n) := X^{-1}(\{n\})$, $n \in \mathbb{N}$, STIANO IN $\mathcal{F}$. <u>LEGGE DI X</u>: DATA UNIVOC. DA $P[X = n]$.

<u>VALORE ATTESO DI X (QUANDO FINITO)</u>: "somma" "pesata" dei valori assunti da X, cioè

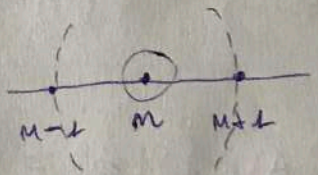
$$\mathbb{E}[X] \doteq \sum_{n=0}^{\infty} n \, P[X=n] .$$

<u>ANALOG.</u>, <u>MOMENTO SECONDO</u>:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \, P[X=n] .$$

$\Rightarrow$ $Var[X] \doteq \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ . ...

$\boxed{\text{OSS.}}$ $\underset{(n \geq 1)}{P[X=n]} = P[\underbrace{X > n-1}_{X \geq n}] - P[\overbrace{X > n}^{X \geq n+1}]$.



$\boxed{2.39}$ $K \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ LANCI <u>INDIPENDENTI</u> CHE POSSONO DARE TRE POSSIBILI RISULTATI: B, G, R (BIANCO, GIALLO, ROSSO), CON LA STESSA PROBABILITÀ ($\frac{1}{3}$).

ⓐ P[ZERO BIANCHE], P[TUTTE GIALLE].

ⓑ P[ZERO BIANCHE, o ZERO GIALLE, o ZERO ROSSE].

ⓒ T := N° LANCI $K (\geq 3)$ NECESSARI AFFINCHÉ TUTTI E TRE I COLORI SIANO "USCITI" ALMENO UNA VOLTA.

QUAL È LA LEGGE DI T? QUANTO VALE $\mathbb{E}[T]$?
$(\forall k \geq 3,\ P[T=k] = ?)$

(a) $\begin{cases} P[0 \text{ BIANCHE}] = \left(\frac{2}{3}\right)^k. & [\text{PER INDIPENDENZA}] \\ P[k \text{ GIALLE}] = \left(\frac{1}{3}\right)^k. \end{cases}$

(b) $P[0 \text{ BIANCHE}] + P[0 \text{ GIALLE}] + P[0 \text{ ROSSE}] -$

$- P[k \text{ ROSSE}] - P[k \text{ GIALLE}] - P[k \text{ BIANCHE}]$

$$= 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = \frac{1}{3^{k-1}}\left(2^k - 1\right).$$

(c) IL PUNTO (b) CI FA CAPIRE COME CALCOLARE $P[T > k]$.

USIAMO CHE $\underline{P[T=k]} = P[T > k-1] - P[T > k]$

$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{3^{k-2}}\left(2^{k-1} - 1\right) - \frac{1}{3^{k-1}}\left(2^k - 1\right)$$

$$= \dots = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}.$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{\substack{k=3 \\ (2)}}^{\infty} k\, P[T=k] = \sum_{k=\cancel{3}\,2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot k - 2 \sum_{k=\cancel{3}\,2}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

$\boxed{\text{OSS}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ CON $\underline{|x| < 1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1.$$

$\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}. \text{ POI, } \frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1} \dots \right]$

$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1 = 8$, ☒

... $\left[\mathbb{E}[T] = \frac{11}{2} \right]$

III V.A. ASSOLUTAM. CONTINUE (è VETT. ALEAT.). $\underset{(X_1,\dots,X_d)}{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ VETTORE (m^d)

ALEATORIO QUANDO È MISURABILE : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

$\left(X^{-1}(A) \doteq \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \}. \right)$

IN TAL CASO, LA LEGGE/DISTRIBUZIONE DI X È LA PROBAB. SU $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

DATA DA $P[X \in A] := P[X^{-1}(A)]$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

DI QUESTI, CI INTERESSANO QUELLI ASSOLUTAM. CONTINUI, CIOÈ

QUELLI CON LEGGE ASSOLUT. CONTINUA RISPETTO A LEBESGUE :

QUANDO X AMMETTE "DENSITÀ" f_X (rispetto a Lebesgue),

CIOÈ, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\boxed{P[X \in A] = \int_A f_X(x)\,dx} \;\; \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x) f_X(x)\,dx \right]$$

$\left(\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}, \; x \in \mathbb{R}^d \right)$

⚠ NON TUTTI I VETTORI ALEAT. HANNO DENSITÀ! (Ad es., se Z è una v.a. reale ~~non costante~~ con densità, allora il vett. aleat. (Z, Z) NON ha densità.)

NOTA. PROPRIETÀ DI DENSITÀ PER f_X: $f_X : \mathbb{R}^d \to [0,\infty[$ (basta che sia definita quasi-ovunque) CON $\int_{\mathbb{R}^d} f_X(x)dx = 1$.

OSS. Basta $\int_{\mathbb{R}^d} f_X(x)dx < \infty$ e poi "NORMALIZZARE".

OSS. $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = P[X^{-1}(A)] = P[X \in A]$.
$(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ $\quad \mathbb{1}_{X^{-1}(A)}$

Sia X VETT. ALEAT. CON DENSITÀ f_X.

PROP. $\forall \varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ MISURABILE LIMITATA,

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f_X(x) dx.$$

(CIÒ VALE $\forall \varphi$ t.c. L'INTEGRALE SOPRA SIA FINITO.)

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}^d} x f_X(x)dx$, $\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}^d} x^2 f_X(x)dx$, ...
(QUANDO OK)

PROP. Se X, Y V.A.R. ASS. CONT. CON DENSITÀ f_X, f_Y RISP., E SE SONO INDIPENDENTI, $\Rightarrow$ (X,Y) È (VETT. ALEAT.) ASSOLUT. CONT. CON DENSITÀ $f_{(X,Y)}$ DATA DA, $\forall x,y \in \mathbb{R}$,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

$\boxed{2}$ (X,Y) vett. aleat. ass. cont. con densità $f_{(X,Y)}$ $\Rightarrow$.

X, Y sono (v.a.r.) assolut. cont. con densità f_X, f_Y rispe-

date da

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \end{cases} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Teorema (cambio di variabile). Sia $A \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ un aperto $\neq \emptyset$ e

Sia (X,Y) un vett. aleat. con $P[(X,Y) \in A] = 1$.

Sia $B \subset \mathbb{R}^2_{(u,v)}$ aperto $\neq \emptyset$ e sia $\varphi : A \to B$ diffeo C^1

(φ C^1, biunivoca con φ^{-1} C^1).

$$\begin{tikzcd} \Omega_\omega \arrow[r, "(X,Y)"] \arrow[rr, bend left, "\varphi(X,Y)"] & A_{(x,y)} \arrow[r, "\varphi"] & B_{(u,v)} \arrow[l, bend left, "\varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ $P[\varphi(X,Y) \in B] = 1$.

Se (X,Y) è ass. cont. con densità $f_{(X,Y)}$, allora $\varphi(X,Y)$

è assolut. cont. e la sua densità è data, q.c.,

$$f_{\varphi(X,Y)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v)) \underbrace{\left| \frac{\partial \varphi^{-1}(u,v)}{\partial(u,v)} \right|}_{\substack{\text{modulo del determinante della} \\ \text{matrice jacobiana di } \varphi^{-1} \text{ (calc. in } (u,v))}} \mathbb{1}_B(u,v).$$

$\boxed{3.67.}$ X, Y V.A.R. <u>INDIPENDENTI</u> $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. $[\Gamma(1,\lambda)]$

$$\left(f_X(x) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(x) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \right)$$

ⓐ $\forall t \geq 0$, $P[|X-Y| > t]$..

ⓑ DENSITÀ $|X-Y|$.

ⓒ DENSITÀ $X-Y$.

ⓐ X, Y ASS. CONT. <u>INDIP.</u> $\Rightarrow$ (X,Y) ASS. CONT.

$$f_{(X,Y)}(x,y) = 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\, \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}.$$

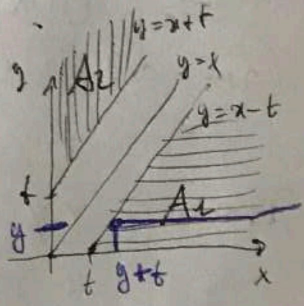
$\boxed{\text{OSS.}}$ $\forall f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mis., $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P[f(X,Y) \in I] = \iint_{f^{-1}(I)} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

$\uparrow$

dalla def.

$$\left(f(X,Y) \in I \Leftrightarrow (X,Y) \in f^{-1}(I) \right)$$



$$\rightarrow P[|X-Y| > t] = \iint_{\underbrace{\{x,y \geq 0 \mid |x-y| > t\}}_{A_1 \dot\cup A_2}} f_{(X,Y)}(x',y')\,dx'\,dy'$$

$$= 2 \iint_{A_1} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \ldots = e^{-\lambda t}$$

(b) $P[|X-Y| \le t] = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow |X-Y| \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(c) $\mathbb{R}^2_+ \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $\varphi(x,y) = \begin{cases} u = x-y \\ v = y \end{cases}$

$$\varphi^{-1}(u,v) = (u+v, v)^T \Rightarrow \left| \frac{\partial \varphi^{-1}(u,v)}{\partial (u,v)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

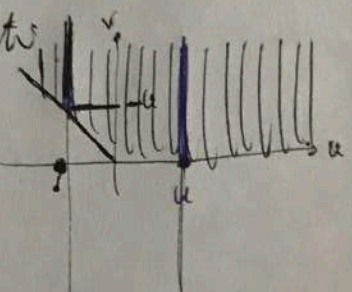
$\Rightarrow$ $\varphi(X,Y) = (X-Y, Y)$ È ASS. CONT. CON DENSITÀ

$$g(u,v) = f_{(X,Y)}(u+v, v). \quad \forall v>0, u \in \mathbb{R}$$

$(u+v>0 \to v>-u)$

$\Rightarrow$ VA CALCOLATA LA DENSITÀ DI $X-Y$ COME MARGINALE DI $(X-Y, Y)$.

$$g(u,v) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(2v+u)}, & v>0,\ v>-u \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



DENSITÀ $X-Y$ $\downarrow$

	CASO $u>0$	CASO $u<0$
$g_1(u) =$	$\int_0^\infty g(u,v)\,dv$	$\int_{-u}^\infty g(u,v)\,dv$

$\Rightarrow$ $g_1(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$. $\boxtimes$

(LAPLACE)

PROB. E STAT. – TUTORING. [13 MAGGIO 2024]

EXC. "per caso" (del Caravenna – Dai Pra). (← CALCOLO COMBINATORIO)

$N \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ PAIA DI GUANTI VENGONO MESCOLATI A CASO E DISTRIBUITI A N PERSONE DIVERSE (sempre a caso), LE QUALI QUINDI RICEVONO DUE GUANTI A TESTA.

[DUNQUE: O DUE "DESTRE", O DUE "SINISTRE", O "GIUSTE".]

QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE TUTTI LORO RICEVANO UNA "DESTRA" E UNA "SINISTRA" (OSSIA, "GIUSTE") ?

[RISPOSTA: $\dfrac{2^N \cdot (N!)^2}{(2N)!}$.]

– Hint per la formalizzazione e la risoluzione:

SI HANNO 2N GUANTI IN TOTALE E QUANTO VIENE RICHIESTO È IL RAPPORTO FRA IL NUMERO DI MESCOLAMENTI "GIUSTI" (immaginando ORDINATE le N persone) COL NUMERO TOTALE DI MESCOLAMENTI POSSIBILI.

$\boxed{2.36}$ UNA MONETA VIENE LANCIATA SUCCESSIVAMENTE PIÙ VOLTE.
[BALDI]

AD OGNI LANCIO, LA PROBABILITÀ DI OTTENERE T (TESTA) È UGUALE A $p \in]0,1[$ (assegnato). PER OGNI $i \in \mathbb{N}^*$, SIA

$X_i :=$ IL RISULTATO DEL LANCIO i-ESIMO.

[DUNQUE, $P[X_i = T] = p$, e $P[X_i = C] = 1-p$ (CROCE). INOLTRE, LE X_i SONO MUTUAMENTE <u>INDIPENDENTI</u>.]

INDICHIAMO ORA CON

$$\begin{cases} W_1 := \text{N° LANCI NECESSARI PER OTTENERE T LA PRIMA VOLTA} & (\leftarrow Geom(p)!) \\ W_2 := \text{N° LANCI } \underline{\text{ULTERIORI}} \text{ PER OTTENERE T DI NUOVO} \end{cases}$$

(a) PER $k, m \in \mathbb{N}^*$, ESPRIMERE L'EVENTO

$$\{W_1 = k, W_2 = m\}$$

IN TERMINI DELLE X_i E CALCOLARNE LA <u>PROBABILITÀ</u>.

(b) DIMOSTRARE CHE W_1 E W_2 SONO <u>INDIPENDENTI</u>.

(QUAL È LA LORO LEGGE?)

$\boxed{\text{NOTA}}$ "EASY", MA CI SERVIRÀ DOPO.

2.36 – SVOLG.

(c) $\forall\, k, m \in \mathbb{N}^*$,

$$\{W_1 = k,\ W_2 = m\} := \{W_1 = k\} \cap \{W_2 = m\}$$

$$= \{\underbrace{X_1 = C, \dots, X_{k-1} = C}_{(k-1)\text{ CROCI}},\ \underbrace{X_k = T}_{1\text{ TESTA}},\ \underbrace{X_{k+1} = C, \dots, X_{k+m-1} = C}_{(m-1)\text{ CROCI}},\ \underbrace{X_{k+m} = T}_{1\text{ TESTA}}\}$$

(indip. X_i)

$$\Rightarrow \quad P[W_1 = k, W_2 = m] = p^2 \cdot (1-p)^{(k-1)+(m-1)} = \underbrace{p \cdot (1-p)^{k-1}}_{\substack{\text{DENSITÀ DI } W_1 \\ \text{CALCOLATA IN } k}} \cdot \underbrace{p \cdot (1-p)^{m-1}}_{\substack{\text{DENSITÀ DI } W_2 \\ \text{CALCOLATA IN } m}}$$

$$\left(= p^2 \cdot (1-p)^{k+m-2} \right)$$

$$= P[W_1 = k] \cdot P[W_2 = m]$$

$\Rightarrow$ (b) (W_1, W_2 sono indip.). ■ (VEDI GIÙ)

RICHIAMI. PER UNA V.A. DISCRETA $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ (a valori in un numerabile) LA LEGGE/DISTRIBUZIONE DI X È DETERMINATA DAI VALORI

$$P[X = n], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

($\{X = n\} := X^{-1}(n)$). In effetti, LA FUNZIONE $p_X : \mathbb{N}^* \to [0,1]$

$$p_X(n) \overset{\text{def.}}{=} P[X = n], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

HA UN NOME ED È DENSITÀ (discreta) DI X. OSSERVIAMO CHE

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_X(n) = 1$$

E, PIÙ IN GENERALE, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ (sottoinsieme),

$$P[X \in A] = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}}^{\infty} p_X(n).$$

SIANO $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ DUE V.A. DI DENSITÀ p_X, p_Y RISP. ALLORA IL VETTORE "COPPIA" $(X,Y) : \Omega \to (\mathbb{N}^*)^2$ È ALEATORIO E LA SUA DENSITÀ $p_{(X,Y)}$ È DATA, $\forall\, k, m \in \mathbb{N}^*$, DA

$$p_{(X,Y)}(k,m) \overset{def}{=} P[X=k, Y=m]$$

$\left(\{X=k, Y=m\} := \{X=k\} \cap \{Y=m\} \right)$.

$\boxed{\text{PROP.}}$ IN QUESTA SITUAZIONE,

$$X, Y \text{ SONO } \underline{\text{INDIPENDENTI}} \iff \forall\, k, m \in \mathbb{N}^*, \ \underbrace{p_{(X,Y)}(k,m) = p_X(k) \cdot p_Y(m)}_{\left(\text{"}p_{(X,Y)} \doteq p_X \otimes p_Y\text{"}\right)}.$$

$\boxed{\text{PROP.}}$ X, Y SONO INDIPENDENTI $\Rightarrow$ $X+Y$ HA DENSITÀ p_{X+Y} DATA DA
(CONVOLUZIONE DISCRETA)

$$p_{X+Y}(m) = \sum_{k=1}^{m-1} p_X(k)\, p_Y(m-k) \quad , \quad m \in \mathbb{N}^*_{\geq 2}.$$

$$\left(= \sum_{h=1}^{m-1} p_X(m-h)\, p_Y(h) \right)$$

RESTA DEFINITA INOLTRE LA LEGGE CONDIZIONALE DI X DATO $Y=m$, $m \in \mathbb{N}^*$, DALLA DENSITÀ CONDIZIONALE DI X DATO $Y=m$, $m \in \mathbb{N}^*$, DATA DA

$p_{X|Y}(\cdot \mid m)$

$$\boxed{p_{X|Y}(k \mid m) \overset{def.}{=} \frac{p_{(X,Y)}(k,m)}{p_Y(m)}} \quad , \ k \in \mathbb{N}^*$$

$$= \frac{P[X=k, Y=m]}{P[Y=m]} \equiv P[X=k \mid Y=m]$$

2.37 (legato al precedente). SIANO X E Y DUE V.A. INDIPENDENTI **5**

(BALDI)

E GEOMETRICHE DI PARAMETRO $p \in]0,1[$ (uguale per entrambe).

(a) QUAL'È LA LEGGE DI $X+Y$?

(b) QUAL'È LA LEGGE CONDIZIONALE DI X DATO $X+Y=m$, $m \in \mathbb{N}^*$?
(sullo spazio $\{1, \dots, m-1\}$)

(c) UNA MONETA VIENE LANCIATA SUCCESSIVAMENTE PIÙ VOLTE. SIA

$Z :=$ N° LANCI NECESSARIO PER OTTENERE T (TESTA) PER LA SECONDA VOLTA.

PER $m \in \mathbb{N}^*$, SAPENDO CHE $Z = m$, QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE SIA STATO OTTENUTO T PER LA PRIMA VOLTA AL K-ESIMO LANCIO ($k \in \mathbb{N}^*$, $k < m$) ?

QUAL'È IL VALORE DI k PIÙ PROBABILE ?

RITROVEREMO I CONCETTI DI LEGGE E DI SPERANZA (valore atteso) CONDIZIONALE NELL'AMBITO DI V.A. ASSOLUT. CONT. -

2.37 – SVOLG. USIAMO DIRETTAMENTE IL RICHIAMO PREC.

(a) $X+Y$ HA DENSITÀ p_{X+Y} DATA, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, DA (per indipendenza di X, Y)

$$p_{X+Y}(m) = \sum_{\underset{m-1 \text{ ADDENDI}}{k=1}}^{m-1} \underbrace{p_X(k)}_{p(1-p)^{k-1}} \cdot \underbrace{p_Y(m-k)}_{p(1-p)^{m-k-1}} = (m-1)\, p^2 (1-p)^{m-2}. \quad \checkmark$$

$$p(1-p)^{k-1} \cdot p(1-p)^{m-k-1} = p^2 \cdot (1-p)^{m-2} \quad (\text{INDIP. DA } k!)$$

(b) $\forall k = 1, \dots, m-1$, LA LEGGE RICHIESTA È DATA DA

$$p_{X|X+Y}(k \mid m) \doteq \frac{p_{(X,X+Y)}(k,m)}{p_{X+Y}(m)}$$

$P[X=k, X+Y=m]$ $\parallel$ OK $P[X=k, Y=m-k]$ $\parallel$ INDIP. $p_X(k) \cdot p_Y(m-k)$

$$\overset{(a)}{=} \frac{\cancel{p_X(k) \times p_Y(m-k)}}{(m-1)\,\cancel{p^2 (1-p)^{m-2}}} \qquad p \cdot (1-p)^{k-1} \times p \cdot (1-p)^{m-k-1}$$

$$= 1/_{m-1}$$

CIOÈ, $p_{X|X+Y}(\cdot \mid m)$ È LA DENSITÀ DELLA V.A. DI LEGGE

UNIFORME su $\{1, \dots, m-1\}$. $\checkmark$

(c) NELLA SITUAZIONE (/ nelle notazioni) DELL'ESC. PRECEDENTE,

→ $Z = W_1 + W_2$;

→ $\forall k = 1, \dots, m-1$, VIENE RICHIESTA $P[W_1 = k \mid Z = m]$.

MA, ESSENDO W_1, W_2 DI LEGGE Geom(p) E INDIPENDENTI (VEDI ESC. PREC.),

" W_1 E W_2 SONO COME X E Y IN QUESTO ESERCIZIO " !

$$\Rightarrow \quad P[W_1 = k \mid Z = m] \equiv P[W_1 = k \mid W_1 + W_2 = m]$$

$$= P[X = k \mid X + Y = m]$$

$$\equiv p_{X|X+Y}(k|m)$$

$$= 1/_{m-1} \; .$$

$\boxed{\text{RICHIAMI.}}$ UNA V.A.R. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ AMMETTE "SEMPRE" LA (SUA) FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (F.D.R.) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ DATA DA

$$F_X(x) \doteq P[X \leq x] \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$\left(\{X \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) \right)$. UNA F.D.R. È NON DECRESCENTE, CONTINUA A DESTRA E TALE CHE $\underbrace{\lim_{x \downarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \uparrow \infty} F_X(x) = 1}_{(*)}$.

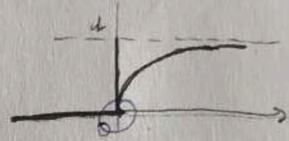
UN "KEY POINT" È CHE VALE IL VICEVERSA :

$\boxed{\text{THM}}$ UNA FUNZIONE $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ NON DECRESCENTE, CONT. A DESTRA E COI LIMITI TIPO (*), È LA F.D.R. DI UNA CERTA V.A.R. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\exists (\Omega, \mathcal{A}, P), \exists X$ t.c. ....$)$.

$\boxed{\text{THM}}$ UNA F.D.R. CARATTERIZZA LA LEGGE DI UNA V.A.R. .

THM Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.r. con f.d.r. F_X. Se F_X è "C^1 a tratti" (su $\mathbb{R}$), cioè è C^1 tranne al più in un numero finito di punti, allora X ammette densità f_X data, q.o., da

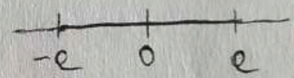
$$\boxed{f_X = \frac{d}{dx} F_X}.$$



OSS. Se X ha densità f_X, allora vale ($\forall x \in \mathbb{R}$)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z)\, dz .$$

OSS. Per ogni $e > 0$,



$$P[\,|X| \le e\,] = P[X \le e] - P[X \le -e]$$
$$= F_X(e) - F_X(-e).$$

DEF. Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a.r. aventi f.d.r. F_{X_n}, F_X risp.. La succ. $(X_n)_n$ converge in legge/distribuzione a X, in simbolo

$X_n \xrightarrow{d} X$ (per $n \to \infty$) se, per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ di continuità per F_X, si ha $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_X(x)$.

Ricordiamo il

$\boxed{\text{THM LIMITE CENTRALE (TLC)}}$ - Paul Lévy

SIA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ UNA SUCC. DI V.A. $\Omega\to\mathbb{R}$ **i.i.d.** in $L^2(\Omega;\mathbb{R})$, [(INDIPENDENTI ED IDENTICAMENTE DISTRIBUITE - stessa legge)] DI MEDIA $\mu\in\mathbb{R}$ E DI DEVIAZ. STANDARD $\sigma>0$ $(\neq 0)$. DENOTIAMO, $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} S_n := X_1+\dots+X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \\ \overline{X}_n := \dfrac{S_n}{n} \quad (\text{"MEDIA EMPIRICA"}). \end{cases}$$

ALLORA SI HA

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \equiv \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}}_{\text{"STANDARDIZZATA"}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

CIOÈ, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{P\left[\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sigma}\le x\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{N(0,1)}(x)}$$

DOVE

$$\Phi_{N(0,1)}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz \quad . \quad (\text{F.D.R. delle } N(0,1))$$

$\boxed{\text{NOTA}}$ Si RICORDI CHE LA $Var[\cdot]$ DI UNA SOMMA DI V.A.R. SCORRELATE (e.g., indipendenti) COINCIDE CON LA SOMMA delle RISPETTIVE $Var[\cdot]$.

$\boxed{4.34}$ SIA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ UNA SUCCESSIONE DI V.A.R. i.i.D.

[BALDI]

(indipendenti identicamente distribuite) DI LEGGE UNIFORME SU $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

[DUNQUE, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P[X_n = -\frac{1}{2}] = P[X_n = \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$.]

INDICHIAMO, PER $n\in\mathbb{N}^*$,

$$Y_n := \frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)^2 .$$

DIMOSTRARE CHE LA SUCC. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CONVERGE IN LEGGE E DETERMINARNE LA LEGGE LIMITE.

$(P[Y_n\le x]\dots)$

μ $\quad (-1/2)\underbrace{P[X_n=-\tfrac{1}{2}]}_{1/2}+\tfrac{1}{2}\underbrace{P[X_n=\tfrac{1}{2}]}_{1/2}=0$

4.34 – SVOLG. ANZITUTTO, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E[X_n]=0$ E (QUINDI)

$$Var[X_n] \equiv E[X_n^2] = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

σ

$$\overset{TLC}{\Rightarrow} \quad \frac{2S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

ORA, CONSIDERIAMO $Y_n \overset{(def.)}{=} \frac{S_n^2}{n}$ (≥ 0 P-q.c.). PER OGNI $t>0$, SI HA:

$$\begin{aligned}
P[Y_n\le t] &\equiv P\left[\frac{S_n^2}{n}\le t\right] \\
&= P\left[2\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\le 2\sqrt{t}\right] \\
&\overset{(oss)}{=} P\left[\frac{2S_n}{\sqrt{n}}\le 2\sqrt{t}\right] - P\left[\frac{2S_n}{\sqrt{n}}\le -2\sqrt{t}\right] \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{(TLC)} \Phi_{N(0,1)}(2\sqrt{t}) - \Phi_{N(0,1)}(-2\sqrt{t}) .
\end{aligned}$$

ORA, IL PUNTO È: ~~[illegible]~~ LA FUNZIONE F DATA, $\forall t \in \mathbb{R}$, DA

$$F(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \Phi_{N(0,1)}(2\sqrt{t}) - \Phi_{N(0,1)}(-2\sqrt{t}), & t > 0 \end{cases}$$

È UNA F.D.R. ? Sì ED È C^∞ FUORI DA 0

($F(\cdot) \in [0,1]$, non decr., cont. a destra, coi limiti ⊛)

$\Rightarrow$ $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ CONV. IN LEGGE AD UNA V.A.R. CHE HA DENSITÀ;

per $t \neq 0$, $(t \neq 0)$

$$F'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2\sqrt{t})^2/2}$$

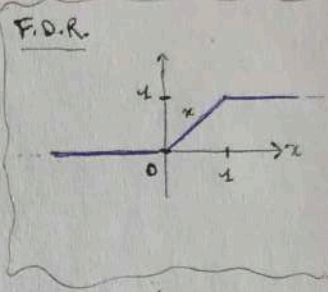
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{1/2} t^{1/2 - 1} e^{-2t} \rightarrow \text{DENSITÀ } \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, 2\right). \blacksquare$$

$\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2})$

(concentrata su $\mathbb{R}_+$, infatti)

$\boxed{\text{EXC. "per caso"}}$ – Se non riusciamo oggi (dal Caravenna – Dai Pra).

SIA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ UNA SUCC. DI V.A. i.i.D. CON $X_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ (LEGGE UNIFORME SU $]0,1[$) : $\forall x \in \mathbb{R}$,



$$P[X_n \underset{(<)}{\le} x] = (0 \vee x) \wedge 1 .$$

(a) PER $n \in \mathbb{N}^*$, PONIAMO

$$Y_n := -\log(X_n) \quad . \quad [>0 \ P\text{-q.c.}]$$

SPIEGARE PERCHÉ LE V.A. Y_n SONO MUTUAM. INDIPENDENTI E SE NE DETERMINI LA DISTRIBUZIONE.

(b) SI DETERMINI LA DISTRIBUZIONE DI $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$. {SOMMA}

(c) PER $n \in \mathbb{N}^*$, PONIAMO

[SENZA Y_n!]

$$\boxed{Z_n := X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} \quad . \quad [\in]0,1[\ P\text{-q.c.}] \ \{\text{PRODOTTO}\}$$

CALCOLARE LA F.D.R. DI Z_n, DEDURNE CHE È ASS. CONTINUA E TROVARNE LA DENSITÀ.

$\boxed{\text{OSS.}}$ $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = \exp(-S_n)$.

$$[\log(\alpha) + \log(\beta) = \log(\alpha \cdot \beta)]$$

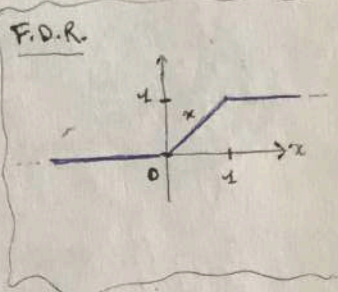
PROB. E STAT. - TUTORING. [20 MAGGIO 2021]

1

EXC. ~~"per casa"~~ - ~~Se non riusciamo oggi~~ (dal Caravenna - Dai Pra).

SIA $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ UNA SUCC. DI V.A. i.i.D. CON $X_n \sim \mathcal{U}(0,1)$ (LEGGE UNIFORME SU $]0,1[$) : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P[X_n \underset{(<)}{\leq} x] = (0 \vee x) \wedge 1 .$$



ⓐ PER $n \in \mathbb{N}^*$, PONIAMO

$$Y_n := -\log(X_n) . \quad [>0 \ P\text{-q.c.}]$$

SPIEGARE PERCHÉ LE V.A. Y_n SONO MUTUAM. INDIPENDENTI E SE NE DETERMINI LA DISTRIBUZIONE.

ⓑ SI DETERMINI LA DISTRIBUZIONE DI $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$. {SOMMA}

ⓒ PER $n \in \mathbb{N}^*$, PONIAMO

[SENZA Y_n!]

$$\boxed{Z_n := X_1 \cdot \ldots \cdot X_n} . \quad [\in]0,1[\ P\text{-q.c.}] \ \{\text{PRODOTTO}\}$$

CALCOLARE LA F.D.R. DI Z_n, DEDURNE CHE È ASS. CONTINUA E TROVARNE LA DENSITÀ.

[→ EXC. "MOLTO" SULLE F.D.R.]

$\boxed{\text{OSS.}}$ $X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = \exp(-S_n)$.

$$[\log(\alpha) + \log(\beta) = \log(\alpha \cdot \beta)]$$

SVOLGIMENTO.

(a) $\left[Y_n \doteq -\log X_n \right] \quad \forall y \overset{>0}{\cancel{\in \mathbb{R}}},$

$$Y_n \leq y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} -\log X_n \leq y \Leftrightarrow -y \leq \log X_n \Leftrightarrow X_n \geq e^{-y}$$

$$\Rightarrow \quad P[Y_n \leq y] = P[X_n \geq e^{-y}]$$

$$= 1 - \underbrace{P[X_n < \overbrace{e^{-y}}^{\in]0,1[}]}_{\text{F.D.R. di } X_n}$$

$$= 1 - e^{-y} \qquad \rightarrow \text{F.D.R. di } \mathcal{E}(1) \equiv \Gamma(1,1)$$

E QUINDI Y_n È ASS. CONT. CON DENSITÀ $f_{Y_n}(y) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, e^{-y}$. ✓

(b) $\begin{bmatrix} Y_n \text{ SONO INDIP.} \\ Y_n \sim \Gamma(1,1) \end{bmatrix} \Rightarrow S_n := Y_1 + \ldots + Y_n \sim \Gamma(n,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n$ È ASS. CONT. CON DENSITÀ $f_{S_n}(s) = \dfrac{s^{n-1} e^{-s}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s)$.

(c) $\left[Z_n := \prod_{i=1}^{n} X_i \right] \quad \forall z \in]0,1[,$

$$Z_n \leq z \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exp(-S_n) \leq z \Leftrightarrow -S_n \leq \log z \Leftrightarrow S_n \geq -\log z$$

$X_1 \cdot \ldots \cdot X_n = \exp(-S_n)$

$[\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)]$

$$\Rightarrow \quad P[Z_n \leq z] = P[S_n \geq -\log z]$$

$F_{Z_n}(z)$!! REGOLARE!

$$= 1 - \underbrace{P[S_n < -\log z]}_{\text{F.D.R. di } \Gamma(n,1)}$$

$$=: 1 - F_{S_n}(-\log z)$$

⇒ Z_n È ASS. CONT. CON DENSITÀ DATA, $\forall z \in]0,1[$,

(REGOLARITÀ F.D.R.)

$$f_{Z_n}(z) = F'_{Z_n}(z) = -\frac{d}{dz} F_{S_n}(-\log z)$$

$$= \frac{1}{z} f_{S_n}(-\log z)$$

$$= \frac{(-\log z)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \; . \; \blacksquare$$

BREVE RICHIAMO LEGGI $\Gamma(\alpha,\lambda)$. $[\alpha,\lambda>0]$ SI TRATTA DELLA LEGGE ASS. CONTINUA SU $\mathbb{R}$ DI DENSITÀ DATA DA

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

(FATTORE DI "NORMALIZZAZIONE")

PROPRIETÀ (ALCUNE): → MEDIA: α/λ → VARIANZA: α/λ^2

→ "$\underbrace{\Gamma(\alpha,\lambda) + \Gamma(\beta,\lambda)}_{\text{INDIPENDENTI}} = \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$"

→ $\Gamma(1,\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)$ → $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

→ $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ → $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

↦ "$\lambda \cdot \Gamma(\alpha,\lambda) = \lambda' \cdot \Gamma(\alpha,\lambda')$"

$$\left[\; \Gamma(\alpha,\lambda) = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \Gamma(\alpha,\lambda') \;\right]$$

→ $N(0,m)^2 = \Gamma(\frac{m}{2},\frac{1}{2}) \; (= \chi^2(m))$

EXC. 3.71 [BALDI].

SIANO X, Y V.A.R. DI DENSITÀ CONGIUNTA $f_{(X,Y)}$ DATA DA

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)}, & \text{SE } x>0 \text{ E } y>0 \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad . \; (*)$$

[dipendentemente da $\lambda>0$ deter.]

(a) CALCOLARE LE DENSITÀ DI X, Y.

(b) LE V.A.R. X E $X \cdot Y$ SONO INDIPENDENTI?

(c) LA V.A.R. $X \cdot Y$ AMMETTE DENSITÀ? SE SÌ, QUALE?

(d) CALCOLARE LA SPERANZA CONDIZIONALE $\mathbb{E}[X \mid Y=y]$, $y \in \mathbb{R}$.

[FAREMO UN RICHIAMO DIRETTAMENTE DURANTE LA RISOLUZIONE.]

(*) REMARK $f_{(X,Y)}$ È DAVVERO UNA DENSITÀ (SU $\mathbb{R}^2$), OSSIA:

È MISURABILE, È NON-NEGATIVA E HA $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$.

[INFATTI, $\int \frac{1}{(y+1)^2}dy = -\frac{1}{y+1} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{(y+1)^2}dy = 1$ MENTRE,

$\forall c>0$,

$$\boxed{\int x e^{-cx}dx = -\frac{e^{-cx}}{c}\left(x+\frac{1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x e^{-cx}dx = \frac{1}{c^2} \quad . \text{ PERTANTO,}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = \lambda^2 \int_0^\infty \Big[\underbrace{\int_0^\infty x e^{-\overbrace{\lambda(y+1)}^{c}x} dx}_{1/\lambda^2 (y+1)^2} \Big] dy = 1 \quad . \; \blacksquare \Big]$$

$\boxed{\text{NOTA.}}$ IN EFFETTI, RICONOSCIAMO CHE, $\forall y>0$,

$$\lambda^2 x e^{-\lambda x(y+1)} = \underbrace{\frac{1}{(y+1)^2}\cdot\underbrace{[\lambda(y+1)]^2\cdot x\cdot e^{-\lambda(y+1)\cdot x}}}_{\parallel}, \quad x>0.$$

$$\frac{1}{(y+1)^2}\cdot \text{densità } \Gamma(2,\lambda(y+1)) \ !$$

[RICORDIAMO CHE $\Gamma(2)=1$.]

SVOLGIMENTO (3.71). $\boxed{\text{"KEY POINT"}}$:

$\left[\begin{array}{l}(X,Y) \text{ VETT. ALEAT. ASS. CONT. in } A\subset\mathbb{R}^2 \text{ (aperto)} \\ \varphi \text{ DIFFEOM. } C^1 \text{ SU } A\end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\varphi(X,Y)=:(U,V)$ (VETT. ALEAT.) ASS. CONT. (in $\varphi(A)\subset\mathbb{R}^2$)

$\Rightarrow$ anche U e V sono ASS. CONT.
(le marginali o proiezioni)

[E SAPPIAMO CALCOLARE TUTTE LE DENSITÀ (A PARTIRE DA QUELLA DI (X,Y)).]

ANZITUTTO, SAPPIAMO CHE:

(X,Y) VETT. ALEAT. ASS. CONT. CON DENSITÀ $f_{(X,Y)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LE V.A.R. X,Y SONO ASS. CONT. CON DENSITÀ f_X, f_Y RISP. DATE DA

$$\begin{cases} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy, & x\in\mathbb{R} \\ f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

(a) $\forall x > 0$,

$$f_X(x) = \int_0^\infty \underbrace{f_{(X,Y)}(x,y)}_{\lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x(y+1)}} dy$$

$$= \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} \cdot \underbrace{\int_0^\infty e^{-(\lambda x) y} dy}_{\left[\frac{e^{-(\lambda x) y}}{(-\lambda x)}\right]_{y=0}^{"y=\infty"} = \frac{1}{\lambda x}}$$

$$= \boxed{\lambda e^{-\lambda x}}$$

$\Rightarrow$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. INVECE, $\forall y > 0$,

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x,y) dx$$

$$= \frac{1}{(y+1)^2} \cdot \underbrace{\int_0^\infty (\lambda \cdot (y+1))^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda(y+1) \cdot x} dx}_{\text{densità (in } x) \text{ di } \Gamma(2, \lambda(y+1))}$$ $[\Gamma(2) = 1]$

$$= \boxed{\frac{1}{(y+1)^2}}$$

($\leftarrow$ INDIP. DA λ.) ✓

(b) + (c) $[X \cdot Y]$ CONVIENE CALCOLARE LA DENSITÀ CONGIUNTA DI $(X, X \cdot Y)$:

$$\begin{array}{ccc} (X,Y) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(X,Y) =: (U,V) = (X, X \cdot Y) \\ ]0,\infty[_x \times]0,\infty[_y & \underset{\varphi^{-1}}{\rightleftarrows} &]0,\infty[_u \times]0,\infty[_v \end{array}$$

DOVE $\varphi(x,y) \doteq \begin{cases} u = x \\ v = x \cdot y \end{cases} \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v/u \end{cases}$ DIFFEO. C^1

$$\rightsquigarrow \left|\frac{\partial \varphi^{-1}(u,v)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u}\end{matrix}\right| = \frac{1}{u}$$

THM

$\Rightarrow$ $\varphi(X,Y) = (X, X\cdot Y)$ AMMETTE DENSITÀ

$$f_{(X,X\cdot Y)}(u,v) \overset{\text{THM}}{=} f_{(X,Y)}(\underbrace{\varphi^{-1}(u,v)}_{(u,\frac{v}{u})}) \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial\varphi^{-1}(u,v)}{\partial(u,v)}\right|}_{1/u} \cdot 1\!\!1_{\{u>0,v>0\}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{u}} \cdot \lambda^2 \cdot \cancel{u} \cdot e^{-\lambda u(\frac{v}{u}+1)} 1\!\!1_{\{u>0,v>0\}}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} 1\!\!1_{\{u>0,v>0\}}$$

$$= \underbrace{\left(\lambda e^{-\lambda u} \cdot 1\!\!1_{\{u>0\}}\right)}_{\text{densità di } X \sim \mathcal{E}(\lambda)} \cdot \left(\lambda e^{-\lambda v} \cdot 1\!\!1_{\{v>0\}}\right)$$

$\Rightarrow$ $X\cdot Y$ E X SONO INDIP. E $X\cdot Y$ HA DENSITÀ $\mathcal{E}(\lambda)$. ✓

d) $\boxed{\text{RICORDIAMO CHE :}}$ DATO (X,Y) VETT. ALEAT. ASS. CONT. CON DENSITÀ $f_{(X,Y)}$ (E PER IL QUALE X,Y HANNO DENSITÀ CHE INDICHIAMO f_X, f_Y RISP.),

" LA DENSITÀ CONDIZIONALE $f_{X|Y}(\cdot|y)$ DI X DATO/A $Y=y$, $y\in\mathbb{R}$ "

È DATA DA, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) \overset{\text{def.}}{=} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$$\left(\underset{(\text{idea})}{"="} P[X=x\,|\,Y=y]\right)$$

NELL'IPOTESI CHE SIA $f_Y(\cdot) \neq 0$ (CIOÈ >0).

DUNQUE, "LA SPERANZA CONDIZIONALE $\mathbb{E}[X|Y=y],\ y \in \mathbb{R}$" è il

VALORE ATTESO DELLA (LEGGE ASS. CONT. CHE CORRISPONDE ALLA) DENSITÀ

$f_{X|Y}(\cdot|y)$ APPENA DEFINITA.

NEL NOSTRO CASO, ABBIAMO LA DENSITÀ DI (X,Y) E QUELLA DI Y,

DA CUI, $\forall x,y>0$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x(y+1)}}{1/(y+1)^2}$$

$$= [\lambda(y+1)]^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x(y+1)}$$

$$\text{"="}\ \Gamma(2, \lambda(y+1))$$

CHE HA (VAL. ATTESO) $\dfrac{2}{\lambda(y+1)}$. ⊠

EXC. 1.24 [BALDI]. [Bayes]

(CALCOLARE "P[CAUSA | EFFETTO]" CONOSCENDO "P[EFFETTO | CAUSA]")

UNA SCATOLA CONTIENE 10 MONETE. DI QUESTE, 8 SONO "EQUILIBRATE", E 2 DANNO T (TESTA) CON PROBABILITÀ 2/3 E, CIOÈ, C (CROCE) CON PROBABILITÀ 1/3.

(a) SI SCELGA UNA MONETA A CASO E LA SI LANCI 3 VOLTE. QUAL'È LA PROBABILITÀ DI OTTENERE TTT?

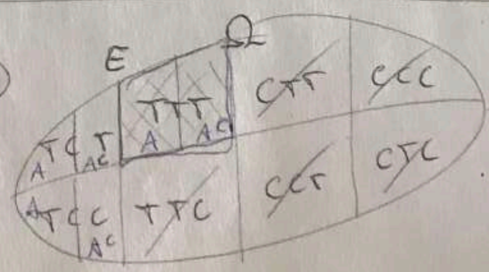
(b) UNA MONETA SCELTA A CASO VIENE LANCIATA 3 VOLTE E SI OTTIENE TTT.

(b1) È PIÙ PROBABILE CHE SIA EQUILIBRATA O NO?

(b2) QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE ANCHE UN QUARTO LANCIO DIA T?

(c) UNA MONETA SCELTA A CASO VIENE LANCIATA $m \in \mathbb{N}^*$ VOLTE. SAPENDO CHE QUESTI m LANCI HANNO SEMPRE DATO T, QUANTO GRANDE DEV'ESSERE m AFFINCHÉ LA PROBABILITÀ CHE LA MONETA SIA NON EQUILIBRATA SIA $\geq 50\%$ $(\geq \frac{1}{2})$?

SVOLGIMENTO (1.24). (a)



$A :=$ MONETA EQUILIBRATA

$E := \{TTT\}$

$$P[E] = P[E \cap A] + P[E \cap A^c]$$

$$= \underbrace{P[E|A]}_{1/8}\underbrace{P[A]}_{4/5} + \underbrace{P[E|A^c]}_{(2/3)^3}\underbrace{P[A^c]}_{1/5}$$

$$\simeq 0.16 \quad (16\%)$$

(b1) $P[A|E] \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P[E|A]\,P[A]}{P[E]}$

$$\simeq \frac{1/8 \cdot 4/5}{0.16}$$

$$\simeq 0.63 .$$

(b2) ANALOGAMENTE A PRIMA, LA PROBABILITÀ DI AVERE TTTT È

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \cdot \tfrac{4}{5} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \tfrac{1}{5} \simeq 0.09$$

DA CUI

$$\underbrace{P[\text{"}T \mid TTT\text{"}]}_{\text{ANCHE IL QUARTO LANCIO DÀ TESTA}} = \frac{P[TTTT]}{P[E]} \simeq \frac{0.09}{0.16} = 0.56 .$$

(c) SIA $E_n := \{\underbrace{TT\ldots T}_{n \text{ volte}}\}$. ALLORA

$$P[E_n] = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

E VOGLIAMO $n \in \mathbb{N}^*$ TALE CHE

$$P[A \mid E_n] \overset{\text{(Bayes)}}{=} \frac{P[E_n|A]P[A]}{P[E_n]} \le \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{5}{4} \cdot 2^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n}$$

VOGLIAMO n TALE CHE

$$1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4^n}{3^n} \ge 2 \iff \left(\frac{4}{3}\right)^n \ge 4 \iff n \ge \frac{\log 4}{\log \frac{4}{3}} \simeq 4.82$$

$\rightarrow n \ge 5$ (in $\mathbb{N}$) .

PROB. E STAT. - TUTORING. [27 MAGGIO 2021]

BREVE DIGRESSIONE: COVARIANZA. SIANO $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ V.A.R. DI QUADRATO INTEGRABILI, CIOÈ DOTATE DI MOMENTO SECONDO (IN SIMBOLI: $X, Y \in L^2(P)$). ALLORA NON SOLO X, Y SONO INTEGRABILI [sommabili] - AMMETTONO VALORE ATTESO FINITO (SI VEDA LA DISUG. DI JENSEN) -, BENSÌ ANCHE IL LORO PRODOTTO $X \cdot Y$ È INTEGRABILE (SI VEDA LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARTZ) E HA SENSO CONSIDERARE LA COVARIANZA DI/TRA X E Y:

$$\mathrm{Cov}[X, Y] \overset{def.}{=} \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])\right] \in \mathbb{R}.$$

OSS. SE X E Y SONO INDIPENDENTI, ALLORA SAPPIAMO CHE $X \cdot Y$ È INTEGRABILE ANCHE SE X, Y FOSSERO SOLO INTEGRABILI E NON DI QUADRATO INTEGRABILI, ED IN TAL CASO VARREBBE CHE $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ (E, QUINDI, $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$).

[$\to$ PER DEFINIRE $\mathrm{Cov}[X, Y]$, BASTA CHE $X \cdot Y$ SIA INTEGRABILE.]

PROPRIETÀ BASILARI [(0) "SIMMETRIA": $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$.]

(1) "GENERALIZZAZIONE VARIANZA": $\mathrm{Cov}[X, X] = \mathrm{Var}[X]$.

(2) "BILINEARITÀ": $\mathrm{Cov}[a_1 X_1 + a_2 X_2, Y] = a_1 \mathrm{Cov}[X_1, Y] + a_2 \mathrm{Cov}[X_2, Y]$.

(3) "CAUCHY-SCHWARTZ" [$X, Y \in L^2(P)$]: $\boxed{\left|\mathrm{Cov}[X, Y]\right| \leq \sqrt{\mathrm{Var}[X]} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}[Y]}}$ (*).

DEF. X E Y SI DICONO "SCORRELATE" QUANDO $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

ESEMPIO X, Y INDIPENDENTI $\Rightarrow$ X, Y SCORRELATE.

ESERCIZIO MOSTRARE CHE, IN GENERALE, NON VALE IL VICEVERSA.

PROP. X, Y SCORRELATE $\Rightarrow$ $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$.

DEF. IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE DI/TRA X E Y È DATO DA
[X,Y NON COSTANTI]

$$\rho_{X,Y} \overset{\text{def.}}{=} \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]} \cdot \sqrt{Var[Y]}} \in [-1,1]^{\circledast}.$$

["QUANTO/COME VARIANO X,Y CONGIUNTAMENTE [E "LINEARMENTE"] RISPETTO A QUANTO/COME VARIANO SINGOLARMENTE."]

IN BASE AL SEGNO DI $\rho_{X,Y}$, SI DICE:
(= segno di $Cov[X,Y]$)

$$\rho_{X,Y} \begin{cases} \in]0,1] & \rightarrow \text{POSITIVA CORRELAZIONE} \\ (= 0 & \rightarrow \text{SCORRELAZIONE}) \\ \in [-1,0[& \rightarrow \text{NEGATIVA CORRELAZIONE} \end{cases}.$$

DEF. IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA DI REGRESSIONE LINEARE DI Y RISPETTO A X
[X NON COSTANTE] È DATO DA

$$e^* := \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]}.$$

[$\rightarrow$ QUANTO PIÙ Y NON CO/CONTRO-VARIA LINEARMENTE RISPETTO A X, QUANTO PIÙ $e^* \approx 0$.]

[CI SERVIRÀ ANCHE QUESTO.]

EXC. 2.46 [BALDI]. SIA Z UNA V.A. DI LEGGE UNIFORME SU $\{-1,1\}$ E SIA X UNA V.A. DI LEGGE UNIFORME SU $\{k \in \mathbb{Z} \mid |k| \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ ASSEGNATO, OSSIA

$$\{-m, -(m-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m\}.$$

[DUNQUE, $P[Z=-1] = P[Z=1] = \frac{1}{2}$ MENTRE, $\forall k \in \mathbb{Z}$ CON $|k| \leq m$, $P[X=k] = \frac{1}{2m+1}$]

SUPPONIAMO CHE X E Z SIANO INDIPENDENTI E PONIAMO $Y := X^2 + Z$.

(a) PER OGNI $m \in \mathbb{N}^*$, CALCOLARE $\mathbb{E}[X^{2m+1}]$.

(b) CALCOLARE LA LEGGE CONDIZIONALE DI Y DATO $X = k$, $k = -m, \dots, m$, E POI LA MEDIA DI TALE LEGGE ($\rightarrow$ "SPERANZA CONDIZIONALE").

(c) CALCOLARE IL COEFFICIENTE ANGOLARE c^* DELLA RETTA DI REGRESSIONE LINEARE DI Y RISPETTO A X.

[OSS. TUTTE E TRE LE V.A.R. IN GIOCO SONO LIMITATE, QUINDI IN $L^2(P)$ ("ABBONDANTEMENTE").]

SVOLGIMENTO. (e) X^{2m+1} È "SIMMETRICA": CIOÈ, X^{2m+1} E $-X^{2m+1}$ HANNO LO STESSO CODOMINIO $\left(\{\underbrace{-m^{2m+1}, \dots, -1}, 0, 1, \dots, m^{2m+1}\}\right)$ E HANNO LA STESSA LEGGE, OSSIA $\forall k = -m^{2m+1}, \dots, m^{2m+1}$ ||

$$P[X^{2m+1} = k] = P[-X^{2m+1} = k] \left(= \frac{1}{2m+1}\right)$$

E CIÒ IMPLICA CHE ABBIANO LA STESSA SPERANZA E CHE SIA ZERO, POICHÉ

$$\underbrace{E[X^{2m+1}]} = E[-X^{2m+1}] \overset{\text{lin.}}{=} -\underbrace{E[X^{2m+1}]}$$

$\Rightarrow$ $E[X^{2m+1}] = 0$. ✓ [IN ALTERNATIVA, CALCOLO DIRETTO:

$$E[\underline{X^{2m+1}}] = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z},\\ |k| \le m}} k^{2m+1} \cdot \underbrace{\overset{P[X^{2m+1} = k^{2m+1}]}{\overset{\|}{P[X = k]}}}_{\overset{\|}{\frac{1}{2m+1}}} = \frac{1}{2m+1}\left\{-m^{2m+1} + \dots + -1 + 0 + 1 + \dots + m^{2m+1}\right\}$$

$$= 0. \quad ✓]$$

(b) PARTIAMO DALLA DENSITÀ CONGIUNTA DI/TRA X E Y: $\forall r \in \mathbb{N}, \forall k = -m, \dots, m,$

$$p_{(X,Y)}(k,r) := P[Y = r, X = k]$$

$$\overset{(\text{def.})}{=} P[X^2 + Z = r, X = k]$$

$$= P[Z = r - k^2, X = k]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} P[Z = \underbrace{r - k^2}_{\overset{\uparrow}{\in \{\pm 1\}?}}] \cdot \underbrace{P[X = k]}_{\frac{1}{2m+1}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m+1}, & \text{SE } r = k^2 \pm 1, \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ DENSITÀ CONDIZIONALE DI Y DATO $X = k$, $k = -m, \dots, m$:

$$p_{Y|X}(r|k) := \frac{p_{(X,Y)}(k,r)}{p_X(k)} = \begin{cases} 1/2, & \text{SE } r = k^2 \pm 1, \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$(r \in \mathbb{N})$

$$\left[= P[Y = r \mid X = k] \right]$$

$\Rightarrow$ $\forall k = -m, \dots, m$, QUESTA LEGGE/DENSITÀ HA VALORE ATTESO

$$(k^2 - 1) \cdot \frac{1}{2} + (k^2 + 1) \cdot \frac{1}{2} = k^2 \quad \| . \quad ✓$$

[OGNI V.A. U DI DENSITÀ $p_{Y|X}(\cdot|k)$ ASSUME VALORI $\{k^2 - 1, k^2 + 1\}$ CON $P[U = k^2 - 1] = P[U = k^2 + 1] = \frac{1}{2}$.]

$\Leftrightarrow$ LA LEGGE DI DENSITÀ $p_{Y|X}(\cdot|k)$ È UNIFORME SU $\{k^2 - 1, k^2 + 1\}$]

(c) IL COEFF. RICHIESTO È

$$e^* := \frac{Cov[X,Y]}{Var[X]} \overset{(E[X]=0)}{=} \frac{Cov[X,Y]}{E[X^2]},$$

"MA":

$$Cov[X,Y] \overset{(def.\ Y)}{=} Cov[X, X^2 + Z]$$

$$\overset{LIN.}{=} Cov[X, X^2] + \cancel{Cov[X, Z]} \quad {=}0 \ (X, Z \text{ INDIP.} \Rightarrow \text{SCORRELATE})$$

$$(E[X] = 0) \rightarrow \ = E[X^3]$$

$$\overset{(c)}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $e^* = 0$ $\quad$ (X, Y SCORRELATE). ∎

[IN EFFETTI, Y VARIA QUADRATICAMENTE RISPETTO A X, NON LINEARMENTE.]

5

$\boxed{\text{EXC. 4.42 [BALDI].}}$ SIA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ UNA SUCC. DI V.A.R. i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$

(DI LEGGE UNIFORME SU $(0,1)$) E PONIAMO, PER OGNI $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\boxed{Y_n := \min\{X_1,\dots,X_n\}}.$$

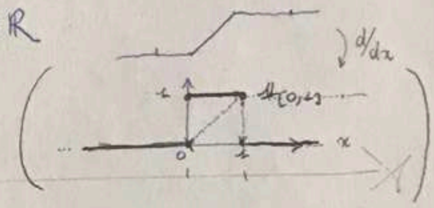
[DUNQUE, ANCHE $Y_n \in]0,1[$ P-q.c. .]

ⓐ LA SUCC. $(n\cdot Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CONVERGE IN LEGGE? SE SÌ, A "COSA"?

ⓑ COSA CAMBIEREBBE, INVECE, SE LE V.A. X_n AVESSERO DENSITÀ (COMUNE)

$$f(t) \doteq 2t\,\mathbb{1}_{(0,1)}(t), \quad t\in\mathbb{R}$$

(PIUTTOSTO CHE $\mathbb{1}_{(0,1)}(\cdot)$) ?



$\boxed{\text{NOTA}}$ LA FUNZIONE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ È DAVVERO UNA DENSITÀ, POICHÉ $\int 2t\,dt = t^2 + c$

E QUINDI

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = 1 \quad .$$

SVOLGIMENTO. [ANZITUTTO, RICORDIAMO CHE

$$\lim_{x\uparrow\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} \qquad \text{E} \qquad \lim_{x\uparrow\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x = 1 \quad .]$$

ⓐ $\forall\, t>0$, $\forall\, n \equiv n(t)$ "GRANDE" (rispetto a t),

$$\{nY_n \le t\} = \left\{Y_n \le \frac{t}{n}\right\}$$

$$= \left\{Y_n > \frac{t}{n}\right\}^c \qquad \text{(complementare)}$$

$$= \left\{X_1 > \frac{t}{n},\dots,X_n > \frac{t}{n}\right\}^c$$

(c) $P[nY_n \le t] = 1 - P[Y_n > \frac{t}{n}]$

$$\overset{\text{i.i.d.}}{=} 1 - \left(P[X_1 > \tfrac{t}{n}]\right)^n \qquad P[X_1 > \tfrac{t}{n}] = 1 - \underbrace{P[X_1 \le \tfrac{t}{n}]}$$

$$]0,1[\ni \frac{t}{n} \text{ per } n\uparrow\infty$$

F.D.R. $\mathcal{U}(0,1)$

$$\overset{\mathcal{U}(0,1)}{=} 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

$$= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{n/t}\right)^{n/t}\right]^t$$

$$\xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 1 - e^{-t}$$

$\Rightarrow$ c'è conv. in legge alla $\mathcal{E}(1)$. ✓

(b) È tutto analogo, tranne il fatto che, $\forall x \in]0,1[$

$$P[X_1 \le x] = \int_0^x 2t\,dt = x^2 \qquad (\text{non } x)$$

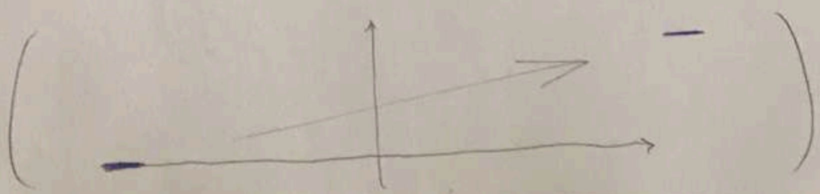
da cui

$$P[nY_n \le t] = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

$$= 1 - \left[\left(1 - \frac{1}{(n/t)^2}\right)^{n/t}\right]^t$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ $(nY_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ NON conv. in legge, perché una funzione costante NON è mai una F.D.R.



OSS. (PRELIMINARE PER IL PROSSIMO EXC.) : "SIMULAZIONE" DELLE LEGGI $\Gamma(\frac{N}{2},\lambda)$, $N\in\mathbb{N}^*$ e $\lambda>0$, A PARTIRE DALLA SIMULAZIONE DELLE LEGGI $\mathcal{U}(0,1)$ (UNIFORME) E $N(0,1)$ (GAUSSIANA STANDARD). [CHE DIAMO PER OK.]

STEP 1. SIMULAZIONE DELLA LEGGE $\mathcal{E}(\lambda)$ (ESPONENZIALE), OSSIA $\Gamma(1,\lambda)$:

$$X\sim\mathcal{U}(0,1) \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\log X \sim \mathcal{E}(\lambda) .$$

[GIÀ VISTO VOLTA SCORSA CON $\lambda=1$ E, COMUNQUE, SEMPLICE : $\forall x>0$, $-\frac{1}{\lambda}\log X\le x$ SE, E SOLO SE, $X\ge e^{-\lambda x}$ E QUINDI

$$P[-\tfrac{1}{\lambda}\log X\le x] = 1-P[X<e^{-\lambda x}] = 1-e^{-\lambda x} . \quad ✓]$$

STEP 2. CASO $\frac{N}{2}=:M\in\mathbb{N}^*$ (INTERO) : ["SEMI-INTERI"]

$$\Gamma(M,\lambda) \quad \sim \quad \text{SOMMA DI } M \text{ V.A. INDIPENDENTI DI LEGGE } \mathcal{E}(\lambda) .$$

STEP 3. CASO $N\in\mathbb{N}^*$ QUALSIASI (DISPARI) :

$$\Gamma(\tfrac{N}{2},\lambda) \quad \sim \quad \text{SOMMA DI } N \text{ V.A. INDIPENDENTI DI LEGGE } \Gamma(\tfrac{1}{2},\lambda)$$

E, COSÌ, BASTA SIMULARE LA LEGGE $\Gamma(\frac{1}{2},\lambda)$.

MA, RICORDANDO CHE $\boxed{\text{"}\Gamma(\alpha,\lambda) = \frac{\lambda'}{\lambda}\Gamma(\alpha,\lambda')\text{"}}$ $(\forall\lambda'>0)$, PER $\alpha=\lambda'=\frac{1}{2}$ OTTENIAMO

$$\Gamma(\tfrac{1}{2},\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \quad \longleftarrow \text{"}\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=(N(0,1))^2\text{"}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}(N(0,1))^2$$

$$\text{"}\sigma N(0,1)=N(0,\sigma^2)\text{"} \longrightarrow \quad = (N(0,\tfrac{1}{2\lambda}))^2 . \quad ✓$$

$\boxed{\text{EXC. 3.74 [BALDI]}}$. SIANO ($\alpha, \beta, \lambda > 0$ E) X, Y V.A.R. INDIPENDENTI DI LEGGE $\Gamma(\alpha, \lambda)$ E $\Gamma(\beta, \lambda)$ RISPETTIVAMENTE. **8**

ⓐ CALCOLARE LA LEGGE DELLA COPPIA $\left(\frac{X}{X+Y}, Y\right)$. $\left[\boxed{\text{NOTA}}\ \frac{X}{X+Y} \in]0,1[\ P\text{-q.c.}\right]$

ⓑ CALCOLARE LA LEGGE DI $\frac{X}{X+Y}$.

ⓒ QUAL'È LA LEGGE CONDIZIONALE DI Y DATO $\frac{X}{X+Y} = u$, $u \in]0,1[$?

ⓓ QUAL'È LA RETTA DI REGRESSIONE (LINEARE) DI Y RISPETTO A $\frac{X}{X+Y}$?

ⓔ COME POTER SIMULARE LA LEGGE $Beta(\alpha, \beta)$ (DI DENSITÀ SU $\mathbb{R}_u$ DATA DA,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_{Beta(\alpha,\beta)}(u) \doteq \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(u)\Big) ?$$

SVOLGIMENTO. [ANZITUTTO, RICORDIAMO CHE X HA DENSITÀ

$$f_X(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

E CHE, ANALOGAMENTE, Y HA DENSITÀ

$$f_Y(y) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \lambda^{\beta} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda y} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y), \quad y \in \mathbb{R}. \Big]$$

ⓐ PER INDIPENDENZA, (X,Y) È ASS. CONT. E HA DENSITÀ

$$f_{(X,Y)}(x,y) := \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta-1} \cdot e^{-\lambda(x+y)} \cdot \mathbb{1}_{]0,\infty[^2}(x,y).$$

USIAMO DUNQUE IL TEM DI CAMBIO DI VARIABILI :

↓

$$(X,Y) \xrightarrow{\ \varphi\ } \varphi(X,Y) = \left(\frac{X}{X+Y}, Y\right)$$

$$]0,\infty[_x \times]0,\infty[_y \ \underset{\varphi^{-1}}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}}\ ]0,1[_u \times]0,\infty[_v$$

$$\varphi(x,y) := \begin{cases} u = \dfrac{x}{x+y} \\ v = y \end{cases} \iff \varphi^{-1}(u,v) = \begin{cases} x = \dfrac{uv}{1-u} \\ y = v \end{cases}$$

DIFFEO. C^1

$$\left[(x,y) \overset{\varphi}{\longmapsto} \left(\frac{x}{x+y}, y\right) \overset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} \Bigg(\underbrace{\frac{\frac{x}{x+y}\cdot y}{1-\frac{x}{x+y}}}_{\frac{\frac{xy}{x+y}}{\frac{y}{x+y}} = x}, y \Bigg) . \quad \checkmark \right]$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{uv}{1-u}\right) = \frac{v}{(1-u)^2}\left\{(1-u) + u(+1)\right\} = \frac{v}{(1-u)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \varphi^{-1}(u,v)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{v}{(1-u)^2} & \dfrac{u}{1-u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{v}{(1-u)^2}$$

THM $\Rightarrow$ $\varphi(X,Y) = \left(\frac{X}{X+Y}, Y\right)$ È ASS. CONT. CON DENSITÀ $(0<u<1, v>0)$

$$f_{\left(\frac{X}{X+Y},Y\right)}(u,v) \overset{THM}{=} f_{(X,Y)}\Big(\underbrace{\varphi^{-1}(u,v)}_{\left(\frac{uv}{1-u},\, v\right)}\Big) \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial \varphi^{-1}(u,v)}{\partial(u,v)}\right|}_{\frac{v}{(1-u)^2}} \cdot \mathbb{1}_{]0<u<1,\, v>0[}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \left(\frac{uv}{1-u}\right)^{\alpha-1} \cdot v^{\beta-1} \cdot \exp\Big(-\lambda\overbrace{\left(\frac{uv}{1-u}+v\right)}^{\frac{v}{1-u}}\Big) \cdot \frac{v}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{u^{\alpha-1}\cdot v^{\alpha+\beta-1}}{(1-u)^{\alpha+1}} \cdot \exp\left(-\lambda\cdot\frac{v}{1-u}\right). \quad \checkmark$$

10

(b) SEGUE CHE $\frac{X}{X+Y}$ SIA ASS. CONT. CON DENSITÀ DATA DA,

$\forall\, 0<u<1$,

$$f_{\frac{X}{X+Y}}(u) \overset{\text{THM}}{=} \int_0^\infty f_{(\frac{X}{X+Y},Y)}(u,v)\,dv$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \frac{u^{\alpha-1}}{(1-u)^{\alpha+1}} \cdot (\dots) \cdot \boxed{\int_0^\infty (\dots) v^{(\alpha+\beta)-1} \exp\left(-\lambda \frac{v}{1-u}\right) dv}$$

$\left(\frac{1-u}{\lambda}\right)^{\alpha+\beta}$ $\qquad$ $\left(\frac{\lambda}{1-u}\right)^{\alpha+\beta}$

$\overset{\text{def.}}{=} \Gamma(\alpha+\beta)$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot u^{\alpha-1} \cdot (1-u)^{\beta-1}$$

$\Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)$. ✓

(c) $\forall u \in]0,1[,\ \forall v>0$,

$$f_{Y|\frac{X}{X+Y}}(v|u) \doteq \frac{f_{(\frac{X}{X+Y},Y)}(u,v)}{f_{\frac{X}{X+Y}}(u)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \left(\frac{\lambda}{1-u}\right)^{\alpha+\beta} \cdot v^{(\alpha+\beta)-1} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{1-u}\cdot v\right)$$

$\Rightarrow$ densità $\Gamma\left(\alpha+\beta, \frac{\lambda}{1-u}\right)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{HA SPERANZA } \frac{1}{\lambda}(\alpha+\beta)(1-u)}$. ✓

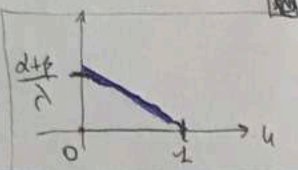
(c) DATO CHE, COME VISTO,

$$\begin{cases} X \sim \Gamma(\alpha,\lambda) \\ Y \sim \Gamma(\beta,\lambda) \\ X, Y \text{ indip.} \end{cases} \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$$

A NOI "TORNA BENE" SIMULARE UNA Beta(α,β) PER α,β SEMI-INTERI: $\alpha = \frac{N}{2}$, $\beta = \frac{M}{2}$ $(N, M \in \mathbb{N}^*)$. ✓

(d) LA SPER. COND. DI Y DATO $\frac{X}{X+Y} = u$ È LA "MIGLIORE" APPROSSIMAZIONE DI Y, SAPENDO $\frac{X}{X+Y} = u$, NEL SENSO DELLO SCARTO QUADRATICO MEDIO. INVECE, LA RETTA DI REGRESSIONE (LINEARE) DI Y RISPETTO A $\frac{X}{X+Y} = u$ È LA "MIGLIORE" APPROX. DI Y, SAPENDO $\frac{X}{X+Y} = u$, ~~NEL SENSO~~ CON UNA FUNZ. LINEARE AFFINE. PERTANTO, SE TALE SPER. CONDIZIONALE È LINEARE (AFFINE) [COME FUNZIONE IN u], ALLORA ESSA DEVE COINCIDERE CON LA RETTA DI REGRESSIONE, CHE QUINDI È

$$v = \frac{1}{\lambda}(\alpha+\beta)(1-u), \quad 0<u<1.$$



PROB. E STAT. – TUTORING. [3 GIUGNO 2021] 1

EXC. 2.47 [BALDI] SIA $\lambda > 0$ E SIANO X, Y, Z V.A. i.i.d. DI LEGGE $Pois(\lambda)$.

ⓐ CALCOLARE LA SPERANZA CONDIZIONALE DI X DATO $X+Y=m$, $m \in \mathbb{N}$.

ⓑ CALCOLARE IL COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $\rho_{X+Y, X+Z}$ DI/TRA $X+Y$ E $X+Z$.

ⓒ CALCOLARE $P[X+Y=2, X+Z=3]$.

NOTA PER $X \sim Pois(\lambda)$ SI HA CHE, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P[X=k] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $(0! := 1)$ ED INOLTRE X È DI QUADRATO INTEGRABILE CON $\mathbb{E}[X] = Var[X] = \lambda$.

SVOLGIMENTO. ⓐ $X, Y \sim Pois(\lambda)$ INDIP. $\Rightarrow X+Y \sim Pois(2\lambda)$ $(\lambda + \lambda = 2\lambda)$.

$\forall k, m \in \mathbb{N}$, CON $k \leq m$,

$$\left.\begin{aligned} P[X=k, X+Y=m] &= P[X=k, Y=m-k] \\ &\overset{\text{indip.}}{=} P[X=k] \cdot P[Y=m-k] \\ &= \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}\right) \cdot \left(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}\right) \\ &= e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{k!\,(m-k)!} \end{aligned}\right]$$

DENSITÀ CONGIUNTA (di $(X, X+Y)$)

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P[X=k \mid X+Y=m] &\doteq \frac{P[X=k, X+Y=m]}{P[X+Y=m]} \\ &= \left(e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{k!\,(m-k)!}\right) \Big/ \left(e^{-2\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^m}{m!}\right) \\ &= \binom{m}{k}\frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

$\left[\binom{m}{k} := \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}\right] \longrightarrow$

CIOÈ LA DENSITÀ CONDIZIONALE DI X DATO $X+Y=n$, $n \in \mathbb{N}$, È UNA/LA

$\mathrm{Bin}(n, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ SPERANZA (COND.) $\frac{n}{2}$. ✓

[DIGRESSIONE: $P_{\mathrm{Bin}(n,p)}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \le n$

→ VALORE ATTESO: np (E VARIANZA: $np(1-p)$).]

(b) $$\mathrm{Cov}[X+Y, X+Z] \overset{\text{BILIN.}}{=} \mathrm{Cov}[X,X] + \cancel{\mathrm{Cov}[X,Z]}^{\,0} + \cancel{\mathrm{Cov}[Y,X]}^{\,0} + \cancel{\mathrm{Cov}[Y,Z]}^{\,0}$$
$$\overset{\text{INDIP.}}{=} \mathrm{Cov}[X,X]$$
$$= \mathrm{Var}[X]$$
$$= \lambda .$$

INOLTRE, $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X+Z] = 2\lambda$. PERTANTO,

$$\rho_{X+Y,\,X+Z} \doteq \frac{\mathrm{Cov}[X+Y, X+Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X+Y]} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}[X+Z]}}$$
$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda} \cdot \sqrt{2\lambda}}$$
$$= \frac{1}{2} \quad (>0 \text{ E INDIP. DA } \lambda). \quad ✓$$

(c) $$P[\underbrace{X+Y=2}_{0 \le X \le 2}, X+Z=3] = P[X=0, X+Y=2, X+Z=3]$$
$$+ P[X=1, \,\text{''}\,, \,\text{''}\,]$$
$$+ P[X=2, \,\text{''}\,, \,\text{''}\,]$$
$$= P[X=0, Y=2, Z=3]$$
$$+ P[X=1, Y=1, Z=2]$$

$0 \le X \le 2$ ⇒ (O $X=0$, O $X=1$, O $X=2$)

$$+ P[X=2, Y=0, Z=1]$$

$$\overset{\text{indip.}}{=} e^{-3\lambda} \cdot \left(\overbrace{1 \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{\lambda^3}{6}}^{\lambda^5/12} \right) \qquad \left(1 = \frac{\lambda^0}{0!} \right)$$

$$+ e^{-3\lambda} \cdot \left(\underbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \frac{\lambda^2}{2}}_{\lambda^4/2} \right)$$

$$+ e^{-3\lambda} \cdot \left(\underbrace{\frac{\lambda^2}{2} \cdot 1 \cdot \lambda}_{\lambda^3/2} \right)$$

$$= e^{-3\lambda} \cdot \left\{ \frac{\lambda^3}{2} + \frac{\lambda^4}{2} + \frac{\lambda^5}{12} \right\}.$$

EXC. 3.75 [BALDI] SIANO $\alpha > 1$, $\beta > 0$ E CONSIDERIAMO DUE V.A. X, Y, NON NECESSARIAMENTE INDIP., TALI CHE $Y \sim Beta(\alpha, \beta)$ MENTRE LA LEGGE CONDIZIONALE DI X DATO $Y = y$, $y \in]0,1[$, (ESISTE ED) È $Geom(y)$, QUINDI DISCRETA. **4**

[DUNQUE, IL VETT. ALEAT. (X,Y) DEV'ESSERE ASS. CONT..]

CALCOLARE : (a) LA LEGGE DI X ; [DISCRETA!]

(b) $E[X]$;

(c) $E[Y \mid X = k]$, $k \in \mathbb{N}^*$. [SPERANZA CONDIZIONALE.]

NOTA DUNQUE, Y È ASS. CONT. CON DENSITÀ DATA DA, $\forall y \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(y) \doteq \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}}_{\text{COEFF. NORMALIZZAZIONE}} \cdot y^{\alpha-1} \cdot (1-y)^{\beta-1} \cdot 1_{]0,1[}(y)$$

(IN PARTICOLARE, $Y \in]0,1[$ P-q.c.), MENTRE LA DENSITÀ CONDIZIONALE DI X DATO $Y = y$, $y \in]0,1[$, (È DISCRETA ED) È DATA DA, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{X|Y}(k \mid y) \doteq y \cdot (1-y)^{k-1} .$$

SVOLGIMENTO. (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ E $\forall y \in]0,1[$,

$$y \cdot (1-y)^{k-1} = f_{X|Y}(k \mid y) \doteq \frac{f_{(X,Y)}(k,y)}{f_Y(y)}$$

$$\Rightarrow f_{(X,Y)}(k,y) = y \cdot (1-y)^{k-1} \cdot f_Y(y)$$ (DENSITÀ CONGIUNTA)

$$= \boxed{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot y^{\alpha} \cdot (1-y)^{\beta+k-2}}$$

(L'IMPORTANTE È CONSIDERARE TUTTI I POSSIBILI VALORI DELLA SECONDA VARIABILE (y)) $\leadsto \int_{Y(\Omega)} (\dots) dy$

$$\Rightarrow \underset{(\text{DISCRETA})}{f_X(k)} \equiv p_X(k) = \int_0^1 f_{(X,Y)}(k,y)\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \underbrace{\int_0^1 y^{\alpha}\cdot(1-y)^{\beta+k-2}\,dy}$$

= LA COSTANTE DI NORMALIZZAZIONE (INTEGRALE) DI UNA $Beta(\alpha+1, \beta+k-1)$

$[\Gamma(\gamma+1) = \gamma\,\Gamma(\gamma)]$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+k-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$$

$$= \frac{\alpha\cdot\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\beta+k-1)}{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+k)} \quad . \quad ✓$$

(b) POTREMMO CALCOLARE $\mathbb{E}[X]$ USANDO LA DEF. :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \underline{p_X(k)} \quad .$$

... CONVIENE USARE, INVECE, LA SEGUENTE FORMULA (NOTA) :

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \int_{Y(\Omega)} \underbrace{\mathbb{E}[X \mid Y=y]}\cdot f_Y(y)\,dy} \quad .$$

LA SPERANZA DELLA LEGGE COND. DI X DATO $Y=y$, CHE È $Geom(y) \Rightarrow \frac{1-y}{y}$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \underbrace{\int_0^1 y^{\alpha-2}\cdot(1-y)^{\beta}\,dy}$$

$$\overset{\text{(COME SU)}}{=} \frac{\Gamma(\alpha-1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
$\Gamma(\beta+1) = \beta\,\Gamma(\beta)$

$$= \frac{\beta}{\alpha-1} \quad . \quad ✓$$

(c) $f_{Y|X}(y|x) \doteq \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$

$$= \left(\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot y^{\alpha} \cdot (1-y)^{\beta+x-2} \right) \Big/ \frac{\alpha\,\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\beta+x-1)}{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+x)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+x)}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+x-1)} \cdot y^{\alpha}\cdot(1-y)^{\beta+x-2}$$

CHE È UNA DENSITÀ $\mathrm{Beta}(\alpha+1, \beta+x-1)$, LA QUALE HA SPERANZA

"$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$" $= \dfrac{\alpha+1}{\alpha+\beta+x}$. $\blacksquare$

EXC. 4.35 [BALDI] SIA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ UNA SUCC. DI V.A. i.i.d. DI LEGGE UNIFORME 7

SU $\{\frac{1}{2}, 2\}$: $P[X_n = \frac{1}{2}] = P[X_n = 2] = \frac{1}{2}$.

ⓐ CALCOLARE $E[\log(X_n)]$.

ⓑ STUDIARE LA CONV. IN PROBABILITÀ (*) DELLA SUCC. $Y_n := (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

ⓒ STUDIARE LA CONV. IN LEGGE DELLA SUCC. $W_n := (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

SVOLGIMENTO (CON RICHIAMI (*) DI TEORIA).

$\boxed{\text{DIGRESSIONE}}$. UNA SUCC. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ DI V.A.R. CONVERGE IN PROBABILITÀ AD UNA V.A.R. X SE, $\forall \varepsilon>0$,

$$(\exists) \qquad \lim_{n\to\infty} \underbrace{P[|X_n - X| > \varepsilon]}_{\text{PROBABILITÀ DI "DEVIAZIONE"}} = 0 .$$

IN SIMBOLI, $X_n \xrightarrow{P} X$. RICORDIAMO CHE

$$\xrightarrow{q.c.} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad \xrightarrow{P} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad \xrightarrow{d} .$$

TUTTAVIA, $\boxed{\text{EXC.}}$ DATA $c\in\mathbb{R}$, SONO EQUIVALENTI :

ⓐ $X_n \xrightarrow{P} c$;

$\Uparrow$

ⓑ $X_n \xrightarrow{d} c$.

$\boxed{\text{THM}}$ [LEGGE DEI GRANDI NUMERI.] (Limite medie empiriche.) SIANO $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ V.A.R. IN $L^2(P)$ AVENTI LO STESSO VALORE ATTESO $\mu := E[X_n]$ E VARIANZE EQUILIMITATE

$(\exists K>0 : \forall n\geq 1, Var[X_n] \leq K)$. PONIAMO $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. SE LE X_n SONO SCORRELATE, SI HA

$$\overline{X}_n := \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu . \qquad \left[\text{COME } O\left(\tfrac{1}{n}\right).\right]$$

PROP. SONO EQUIVALENTI:

(§) ⓔ $X_n \xrightarrow{P} X$;

$\Downarrow$

ⓑ $\forall f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUA, $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$.

ⓐ [ESC. 4.35] LA SUCC. $(\log(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ È DI V.A. i.i.d. DI LEGGE UNIFORME SU

$$\{-\log(2), \log(2)\} \Rightarrow \mathbb{E}[\log(X_n)] = -\log(2) \cdot \frac{1}{2} + \log(2) \cdot \frac{1}{2} = 0 =: \mu$$

($-c \quad 0 \quad c$) ✓ IN PART., $\mathrm{Var}[\log(X_n)] = \mathbb{E}[\log^2(X_n)]$

$$= (\log(2))^2 .$$

ⓑ [$Y_n \doteq (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/n}$] OSSERVIAMO CHE

$$\log(Y_n) \equiv \frac{1}{n} \log(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \frac{\log(X_1) + \dots + \log(X_n)}{n} .$$

ALLORA, PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI,

$$\log(Y_n) \xrightarrow{P} 0 .$$

SEGUE, DALLA PROP. (§),

$$Y_n \xrightarrow{P} e^0 = 1 . \quad ✓ \quad [\text{così, } Y_n \xrightarrow{d} 1 .]$$

ⓒ [$W_n \doteq (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$] PER IL TLC,

$$\log(W_n) \equiv \underbrace{\frac{\log(X_1) + \dots + \log(X_n)}{\sqrt{n}}}_{" = " \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, (\log 2)^2) .$$

OVVERO, $\forall\, t > 0$,

$$P[W_n \le t] \equiv P\Big[\underbrace{\frac{\log(X_1)+\dots+\log(X_n)}{\sqrt{n}}}_{\log(W_n)} \le \log(t)\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{\log(t)}{\log(2)}\right)$$

[RICORDIAMO CHE, $\forall\, \sigma>0$, $\underline{\Phi_{N(0,\sigma^2)}(\cdot)} = \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)$ (F.D.R.) .]

SIA DUNQUE

$$F(t) := \begin{cases} \Phi_{N(0,1)}\left(\frac{\log(t)}{\log(2)}\right), & \text{SE } t>0, \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \qquad \left[\Phi_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz\right] .$$

ALLORA $F(\cdot)$ È UNA F.D.R. $\mathcal{C}^1$ OVUNQUE TRANNE IN 0 E, QUINDI, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CONV. IN LEGGE ALLA V.A.R. DI DENSITÀ

$$f(t) := F'(t) \overset{(t>0)}{=} \frac{d}{dt}\Phi_{N(0,1)}\left(\frac{\log t}{\log 2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(\log 2)\cdot t}\exp\left\{-\frac{(\log t)^2}{2(\log 2)^2}\right\}$$

CHE È UNA DENSITÀ LOGNORMALE (DI PARAM. $\mu \doteq 0$ E $\sigma \doteq \log 2$) . ✓

[UNA V.A.R. X (>0 P-q.c.) È ASS. CONT. CON DENSITÀ LOGNORMALE DI PARAM. $\mu\in\mathbb{R}$ E $\sigma>0$ SE HA DENSITÀ

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, t}\exp\left\{-\frac{(\log(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathbb{1}_{]0,\infty[}(t) .$$

IN TAL CASO, $\log(X) \sim N(\mu,\sigma^2)$.]

■

PROB. E STAT. — TUTORING 7/6/'21 | 1

$\boxed{\text{SCRITTO 18/6/'19}}$

$\boxed{\text{EXC. 1}}$ A := « LA PIANTA È VIVA »

B := « IL VICINO HA BAGNATO LA PIANTA »

ⓐ+ⓑ: $$P[B^c|A^c] \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P[A^c|B^c]P[B^c]}{P[A^c]}$$

$$= \frac{P[A^c|B^c]P[B^c]}{\underbrace{P[A^c|B]}_{30\%}\underbrace{P[B]}_{80\%}+\underbrace{P[A^c|B^c]}_{90\%}\underbrace{P[B^c]}_{(20\%)}},$$

$P[A^c] \longrightarrow$

$\uparrow$

$P[A] = 1 - P[A^c]$

$\boxed{\text{EXC. 2}}$ METTIAMOCI DAL "PUNTO DI VISTA" DI UNO DEI DUE INDIVIDUI, ED IMMAGINIAMO COME $\boxed{\text{ROSSI}}$ GLI OGGETTI DA ESSO SCELTI (3 DI 10) E COME $\boxed{\text{BIANCHI}}$ GLI ALTRI (7 DI 10). CONSIDERIAMO QUINDI

X := « NUMERO DI OGGETTI <u>ROSSI</u> SCELTI (ANCHE) DALL'ALTRO INDIVIDUO »

CIOÈ, $X :=$ « N° OGGETTI SCELTI IN COMUNE ».

ALLORA, X È A VALORI IN $\{0,1,2,3\}$ E HA LEGGE IPERGEOMETRICA : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$P[X=k] = \frac{\binom{3}{k} \times \binom{7}{3-k}}{\binom{10}{3}} \mathbb{1}_{\{0,1,2,3\}}(k) .$$

[RICORDIAMO CHE LA LEGGE IPERGEOMETRICA DI PARAM. N, m, M $(m, M \leq N)$ È DATA, $\forall k \in \mathbb{N}$, DA

$$p(k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{m-k}}{\binom{N}{m}} \mathbb{1}_{\{0,1,\dots,M\}}(k)$$

E CHE HA VALORE ATTESO $\frac{mM}{N}$.]

ⓐ $E[X] = \frac{3 \cdot 3}{10} = \frac{9}{10} \to 1$ OGGETTO.

ⓑ $3-X :=$ « N° OGGETTI BIANCHI SCELTI DALL'ALTRO INDIVIDUO »

= « N° ROSSI NON SCELTI DAL SECONDO »

= « N° OGGETTI NON IN COMUNE COL PRIMO INDIVIDUO »

$\to$ II

$\longrightarrow \mathbb{E}[(3-X)+\underset{\uparrow}{7}] = 10 - \mathbb{E}[X] \simeq \underset{\text{OGGETTI}}{9}$. ✓

NON SCELTI "DA NOI"

(c)

ABBIAMO DETTO CHE

$3-X$ = « N° OGGETTI NON IN COMUNE COL PRIMO INDIVIDUO »,

PER SIMMETRIA, SI CHIEDE

$\mathbb{E}[2\cdot(3-X)] = 6 - 2\,\mathbb{E}[X] \approx \underset{\text{OGGETTI}}{4}$. ✓

(INDIPENDENZA)

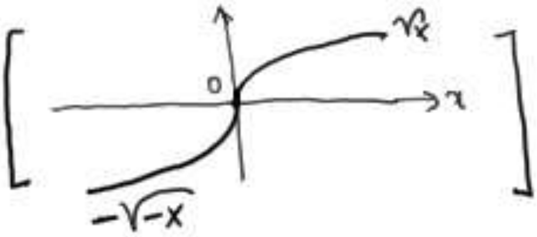
$\boxed{\text{EXC. 3}}$ $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ È SUCC. DI V.A.R. i.i.d. ASS. CONT. CON DENSITÀ (COMUNE) $\rho(x) \doteq e^{-2|x|}$, $x\in\mathbb{R}$.

($\boxed{\text{OSS}}$ ρ È PARI ($\rho(-x)=\rho(x)$) E, IN EFFETTI,

$$\int_0^\infty e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2}. \quad ✓)$$

PONIAMO $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \mathrm{sgn}(x)\cdot\sqrt{|x|}$

[È DISPARI E DELLA FORMA ]



Sia, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underline{\tilde{X}_n := f(X_n)} \left(= \mathrm{sgn}(X_n) \cdot \sqrt{|X_n|} \right)$$

in modo che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{Z_n = \frac{\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n}{\sqrt{n}}} \, .$$

Oss. che $(\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ resta una succ. di v.a. <u>i.i.d.</u> ed è facile vedere che ogni $\tilde{X}_n$ ammette momento di ogni ordine. Infatti, in particolare,

$$\mathbb{E}[\tilde{X}_1] \equiv \mathbb{E}[f(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{p(x)}_{} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathrm{sgn}(x) \sqrt{|x|} \cdot e^{-2|x|}}_{\text{dispari!}} dx$$

$$= 0$$

$(\to$ centrate!$)$

Inoltre

$$\mathrm{Var}[\tilde{X}_1] \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{E}[\tilde{X}_1]=0}}{\equiv} \mathbb{E}[\tilde{X}_1^2] = \mathbb{E}[f^2(X_1)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f^2(x)\rho(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|x| \cdot e^{-2|x|}}_{\text{PARI}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} x\, e^{-2x}\,dx$$

$$\equiv \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} 2^{\boxed{2}}\, x^{\boxed{2}-1}\, e^{-2x}\,dx}_{=\Gamma(2) = 1! = 1}$$

$$= \frac{1}{2} \quad . \quad \checkmark$$

TLC.

$$\Rightarrow \quad Z_n = \frac{\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, \tfrac{1}{2}\right) \overset{d}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} N(0,1)$$

Cioè $Z_n \xrightarrow{d} Z$ dove $Z \sim \frac{1}{\sqrt{2}} N(0,1)$. Ma, allora,

$$Z^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}} N(0,1)\right)^2 \overset{d}{=} \frac{1}{2}\left(N(0,1)\right)^2 \overset{d}{=} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \overset{d}{=} \Gamma\left(\frac{1}{2},1\right) \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda\Gamma(\alpha,\lambda) \overset{d}{=} \lambda'\Gamma(\alpha,\lambda') \overset{d}{=} \Gamma(\alpha,1). \\ \left(\lambda = \frac{1}{2}\right) \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{SCRITTO } 19/7/'19}$

$\boxed{\text{EXC. 1}}$ $\forall k=0,1,2,3$, (IL VERIFICARSI, O MENO, DI E_k CAMBIA LA PROPORZIONE DI PALLINE NUOVE/USATE)

$E_k :=$ « NELLE PRIME 3 ESTRAZIONI, VENGONO ESTRATTE k PALLINE USATE ».

SIA $A :=$ « NELLE SECONDE 3 ESTRAZIONI, VENGONO ESTRATTE TUTTE PALLINE NUOVE (3) ».

OSS. CHE, SE E_k SI VERIFICA, ALLORA IL N° DELLE PALLINE NUOVE (MAI USATE) DIVENTA $\boxed{6+k}$ (DA 9 CHE ERANO)

ALLORA $P[A] = \sum_{k=0}^{3} \underbrace{P[A|E_k] \cdot P[E_k]}_{P[A\cap E_k]}$

ED ORA TUTTI I TERMINI SI CALCOLANO USANDO LA LEGGE

IPERGEOMETRICA:

$$P[E_k] = \frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{9}{3-k}}{\binom{15}{3}} \quad \text{E, ANALOGO,}$$

$$P[A|E_k] = \frac{\binom{6+k}{3}\cdot\cancel{\binom{9-k}{0}}^{1}}{\binom{15}{3}} .$$

☒

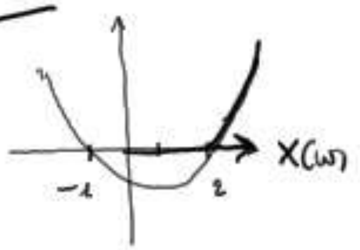
$\boxed{\text{EXC. 2.}}$ ANZITUTTO $\rho(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ È UNA "VERA" DENSITÀ:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2} .$$

ORA, DATO CHE $X \sim \rho(x)dx$, VALE $X \geq 0$ q.c..

LE RADICI DI $p(z) \doteq 2z^2 + (2X)z + (\frac{X}{2}+1)$, $z\in\mathbb{R}$, Sono entrambe reali (q.c.) se, e solo se,

$$\Delta/4 := \underbrace{x^2 - x - 2}_{= (x-2)(x+1)} \geq 0$$



$\boxed{\forall x<0,\ \rho(x)=0} \longrightarrow (X \geq 0 \ P\text{-q.c.})$

$\left(P[X \in I] \equiv \int_I \rho(x)\,dx \right)$

cioè $\boxed{X \geq 2}$. Dunque viene [illegible]

$$P[\underbrace{X \geq 2}_{X \in [2,\infty[}] = \frac{2}{\pi}\int_2^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\Big[\arctan(x)\Big]_{x=2}^{x=\infty}$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(2) \simeq 29.5\% \ .$$

$\boxed{\text{Exc. 3}}$ $\forall n = 1, \dots, 100$, sia

$X_n :=$ « ore di "vita" della n-esima lampadina ».

Per ipotesi, $(X_n)_{n=1}^{100}$ è una succ. di v.a.r. $(\geq 0 \text{ q.c.})$ i.i.d. di legge $\mathcal{E}(\lambda)$ con $\lambda := \frac{1}{5}$, perché per ipotesi $\mathbb{E}[X_n] = 5$.

[~~$\mathbb{E}$~~

[RICORDIAMO CHE $\begin{cases} \mathbb{E}[\text{"}\Gamma(\alpha,\lambda)\text{"}] = \dfrac{\alpha}{\lambda} \\ Var[\Gamma(\alpha,\lambda)] = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases}$ E CHE $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1,\lambda)$.]

QUINDI ESSENDO $X_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{5}$, $Var[X_n] = \frac{1}{\lambda^2} = 25 = (5)^2$.

PONIAMO $S := \sum_{n=1}^{100} X_n \equiv$ « ORE DI "VITA" DI TUTTA LA SCATOLA DI LAMPADINE ».

ⓐ $$P[S > 525] \equiv P\Big[\frac{S - 100\cdot 5}{5\cdot\sqrt{100}} > \underbrace{\frac{525 - 100\cdot 5}{5\cdot\sqrt{100}}}_{1/2}\Big]$$

$$\underset{(n \text{ "GRANDE"})}{\overset{TLC}{\simeq}} 1 - \Phi_{N(0,1)}\left(\tfrac{1}{2}\right) \simeq 31\%.$$

ⓑ $\forall n = 1, \dots, 99$, SIA

$Y_n :=$ « TEMPO (IN ORE) PER LA SOSTITUZIONE DELLA LAMPADINA n-ESIMA CON LA $(n+1)$-ESIMA ».

PER IPOTESI, $(Y_n)_{n=1}^{99}$ È UNA SUCC. DI V.A.R. (≥ 0 q.c.) i.i.d. DI LEGGE $\mathcal{U}(0, \frac{1}{2})$.

RICORDANDO CHE :

$\forall\ a<b$ in $\mathbb{R}$, la legge $\mathcal{U}[a,b]$, di densità (su $\mathbb{R}$)

$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ha media $\frac{a+b}{2}$ e

varianza $\frac{(a-b)^2}{12}$)

Abbiamo che $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{4}$ e $Var[Y_n] = \frac{1}{48}$.

Inoltre, ogni Y_n è indip. da ogni X_m.

$\boxed{\text{Ipotesi: } X_{100} = 0.}$ Allora applichiamo il T.L.C. a

$$T := \sum_{n=1}^{99} (X_n + Y_n).$$

Infatti, le $X_n + Y_n$ sono mutuam. indip. e in più

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_n+Y_n] \overset{\text{lin.}}{=} 5 + \frac{1}{4} = 5.25 =: \mu \\ Var[X_n+Y_n] \overset{\text{indip.}}{=} Var[X_n] + Var[Y_n] = 25 + \frac{1}{48} \simeq 25 =: \sigma^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P[T \leq 550] \equiv P\left[\frac{T - 99 \cdot \mu}{5\sqrt{99}} \leq \underbrace{\frac{550 - 99 \cdot \mu}{5 \cdot \sqrt{99}}}_{\simeq 0.61}\right]$$

$$\overset{\text{T.L.C.}}{\simeq} \Phi_{\text{Norm}}(0.61) \simeq 73\%.$$

(c) L'ipotesi $X_{100}=0$ permette di lavorare con

$\cancel{\sum_{n=1}^{99}(X_n+Y_n)}$ $(X_n+Y_n)_{n=1}^{99}$ "~~canonica~~" piuttosto che con $\left((X_n+Y_n)_{n=1}^{99}, X_{100}\right)$

[Non si può definire $Y_{100} := 0$, perché Y_{100} non sarebbe $\mathcal{U}(0, \frac{L}{2})$]

In ogni caso, essendo $X_{100} \geq 0$,

$$P[T + X_{100} \leq 550] \underset{(\text{"}\subseteq\text{"})}{\leq} P[T \leq 550] \overset{(b)}{\approx} 73\% . \quad \boxed{A}$$