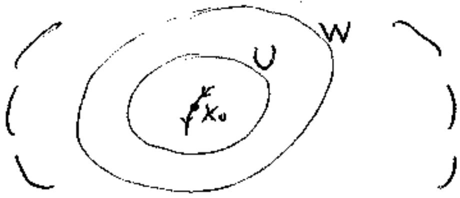
DEFINIZIONI BASILARI.

SISTEMA DINAMICO CONTINUO ("SDC") nell'aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ equazione differenziale ordinaria autonoma del (primo) ordine in W $\boxed{\dot{X} = F(X)}$ (*), dove $F \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ e l'incognita è la curva $X \in C^1(A, W)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto; X è una soluzione di (*) in A $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\forall t \in A$, $\dot{X}(t) = F(X(t))$; X è UN'ORBITA DI (*) se $A = \mathbb{R}$.

Poiché $F \in C^1 \Rightarrow F \in C^0$ e localmente lipschitziana (nella X), sussiste il teorema di esistenza e unicità (locali) di Cauchy–Lipschitz #:
$\forall X_0 \in W$, $\exists A \subseteq \mathbb{R}$ intorno di 0 e $U \subseteq W$ intorno di X_0 tale che $\exists!$ soluzione $X : A \to U$ di $\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$



, la quale può in teoria essere ottenuta col metodo delle approssimazioni successive grazie al teorema delle contrazioni: $X \in C^1(A, W)$ tale che $\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \iff$ $X \in C^0(A, W)$ tale che, $\forall t \in A$, $X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds$ ...

Inoltre vale il teorema di continuazione delle soluzioni #: $\exists$ "intervallo massimale" $J \subseteq A$ nel quale X è definita, e nell'intorno di ogni estremo finito di tale J la soluzione X "esce" da qualsiasi compatto $\subseteq W$ (tendendo a ∂W nel caso sia limitata); in particolare se X resta dentro un certo compatto $\forall t \geq 0$, allora è certamente definita $\forall t \geq 0$, cioè $[0, \infty) \subseteq J$!

Un SDC equivale ad un'equazione differenziale ordinaria autonoma di ordine ≥ 1, e anzi anche NON autonome: essendo

$\dot X = F(X,t)$, $Y := \begin{bmatrix} X \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \dot Y = \begin{bmatrix} \dot X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(Y) \\ 1 \end{bmatrix} =: G(Y)$,

SDC di una dimensione superiore; consideriamo infine, ad esempio, $\ddot x = f(x,\dot x)$, tale equivale a $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = f(x,y) \end{cases}$, cioè a $\dot X = F(X)$ se $X := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ f(x,y) \end{bmatrix}$, e in generale ordine $n \geq 1 \Leftrightarrow$ SDC in $\mathbb{R}^n$.

Inoltre naturalmente vale l'invarianza per traslazioni "temporali": con $a, t_0 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, $X(t)$ soluzione in $(-a,a)$ di $\begin{cases} \dot X = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ $\Rightarrow X(t-t_0)$ soluzione in $(-a+t_0, a+t_0)$ di $\begin{cases} \dot X = F(X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$, ossia si può sempre supporre $t_0 = 0$ per risolvere un SDC.

Sia $\dot X = F(X)$ un SDC tale che, $\forall X_0 \in W$, la corrispondente soluzione $X(t)$ tale che $X(0) = X_0$ sia in realtà un'orbita: è FLUSSO INTEGRALE (o "soluzione generale") del SDC in W la famiglia ad un parametro reale di applicazioni $W \to W$ $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ tale che, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi^t : W \to W$, $X_0 \mapsto \Phi^t(X_0) := X(t)$ (corrispondente soluzione). Il SDC è INTEGRABILE se il suo flusso integrale è calcolabile esplicitamente mediante le sue espressioni analitiche o se comunque resta definito da equazioni "normali" (FORMULE FINITE!) che può coinvolgere eventualmente funzioni implicite o quadrature o funzioni inverse. Per il teorema di differenziabilità del flusso, $\Phi^t \in C^1$ ($\forall t \in \mathbb{R}$).

$E : W \to \mathbb{R}$ è un INTEGRALE PRIMO per il SDC in W $\overset{d.}{\Leftrightarrow}$ $E \in C^1(W, \mathbb{R})$ ed è "costante lungo le soluzioni": $\forall X_0 \in W$, $E(X(t)) = E(X_0)$ $\forall t \in A$.

Un SDC in $\mathbb{R}^2$ è CONSERVATIVO $\overset{d.}{\Leftrightarrow}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conserva aree con orientazione, cioè $\det J_{\Phi^t} = +1$.

Un SDC è LINEARE / NONLINEARE $\Leftrightarrow$ F è compl. lineare / nonlineare. Il caso lineare è "relativamente semplice"; il caso nonlineare niente affatto, come si può evincere già in $n = 1$:

$\boxed{\dot{x} = f(x)}$, $f \in C^1(W, \mathbb{R})$; $x \equiv$ costante reale orbita $\Leftrightarrow$ $f(x) = 0$, mentre tutte le altre sono tali che

$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$, ossia $\forall t \in \mathbb{R}$ (o $A \subseteq \mathbb{R}$) $\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{f(x(s))} ds = t + \cancel{\text{costante}}$;

ma $\int_0^t \frac{\dot{x}(s) ds}{f(x(s))} \underset{\substack{\uparrow \\ (y := x(s) \\ \Rightarrow dy = \dot{x}(s) ds)}}{=} \int_{x_0 (= x(0))}^{x(t)} \frac{1}{f(y)} dy$, $= G(x(t)) - G(x_0)$ se

$G(x) := \int^x \frac{1}{f(y)} dy$ (che è anche invertibile in quanto ha effetto
(o comunque se G è una primitiva di $1/f$)
$G'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$ ovunque!), per cui $G(x(t)) = t + G(x_0)$, cioè $\boxed{x(t) = G^{-1}(t + G(x_0))}$, e allora in conclusione occorre quadrare $1/f$ ed invertirne la primitiva (operazioni in generale non fattibili in modo esplicito!), per cui tale SDC è comunque integrabile.

Le norme in $\mathbb{R}^n$ sono topologicamente equivalenti, dunque sia "$\|\cdot\|$" una tale norma per qualche motivo COMODA.

~~[CONVERGENZA IN NORMA]~~

$\forall (A_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}^n$, $\sum_{n\geq 0}^! \|A_n\| < \infty$ ($\overset{*}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0}^! A_n$ di Cauchy)

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0}^! A_n$ convergente e (infatti) $\|\sum_{n\geq 0}^! A_n\| \leq \sum_{n\geq 0}^! \|A_n\|$.

[DIM.] $\forall m' > m \geq 0$, $\|\sum_{n=m}^{m'} A_n\| \overset{D.T.}{\leq} \sum_{n=m}^{m'} \|A_n\| \overset{\text{CONT. }\|\cdot\|!}{\Rightarrow} \|\sum_{n\geq m}^! A_n\| \leq$

$\leq \sum_{n\geq m}^! \|A_n\|$, che è $(\forall \varepsilon > 0) \leq \varepsilon$ per m "adeguatamente grande"; per m fissato e $m=0$ si ha la stima conclusiva. (Dimostrare $\overset{*}{\Rightarrow}$): $\forall m' > m \geq 0$, $\|\sum_{n=m+1}^{m'} A_n\| \leq$

$\overset{D.T.}{\leq} \sum_{n=m+1}^{m'} \|A_n\| \leq \sum_{n\geq m+1}^! \|A_n\|$, "piccolo a piacere".) $\square$]

~~[CONVERGENZA DELL'ESPONENZIALE DI MATRICI]~~

(7) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, è effettivamente funzione CONTINUA

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ t &\longmapsto \exp(At) := \sum_{n\geq 0}^! \frac{A^n t^n}{n!} \end{aligned}$$

[•] $\forall t \in \mathbb{R}$, la serie è infatti convergente in $\|\cdot\|$ uniforme:

$\forall n \geq 0$, $\|\frac{A^n t^n}{n!}\| = \frac{\|A^n\| \, |t|^n}{n!} \overset{(\|A^n\|\leq \|A\|^n!)}{\leq} \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!}$ unito al fatto

che $\sum_{n\geq 0}^! \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!} = e^{\|A\||t|}$ $(<\infty)$ $\overset{(\text{CONFRONTO})}{\Rightarrow} \sum_{n\geq 0}^! \|\frac{A^n t^n}{n!}\| \leq e^{\|A\||t|} < \infty$

Dunque $\exp(At)$ è effettivamente una matrice $n\times n$.

[•] La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ perché lo è su ogni compatto $[-M, M] \subsetneq \mathbb{R}$: $\|\sum_{n\geq m}^! \frac{A^n t^n}{n!}\| \underset{\substack{D.T.+\\ \text{CONT.}\\ \|\cdot\|}}{\leq} \sum_{n\geq m}^! \|\frac{A^n t^n}{n!}\| \underset{\text{CONFR.}}{\leq} \sum_{n\geq m}^! \frac{\|A\|^n M^n}{n!}$

$\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ indipendentemente da $t \in [-M, M]$, dunque $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$ conv. unif. in $[-M, M]$; ma la serie è di funzioni continue! □]

[PRODOTTO SECONDO CAUCHY]

$\forall t \in \mathbb{R}$, $A(t) := \sum_{k\geq 0} A_k t^k$ e $B(t) := \sum_{k\geq 0} B_k t^k$ convergente in norma $\Rightarrow$ $C(t) := \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} A_j B_{k-j}\right) t^k$ convergente in norma $\forall t \in \mathbb{R}$, e $C(t) = A(t) \cdot B(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$(\dot{=} B(t) \cdot A(t))$

[SOMMA DEGLI ESPONENTI]

$AB = BA \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(At + Bt) = \exp(At)\exp(Bt)$.

(o viceversa)

[Ricordiamo anzitutto che, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(At) = \sum_{n\geq 0} \frac{A^n t^n}{n!}$ e $\exp(Bt) = \sum_{n\geq 0} \frac{B^n t^n}{n!}$ sono convergenti in norma; ora,

$AB = BA \overset{\text{NEWTON}}{\Rightarrow} \forall k \geq 0$, $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} =$

$= \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j}$, per cui $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(At + Bt) =$

$= \exp((A+B)t) = \sum_{n\geq 0} \frac{(A+B)^n t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \Big(\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\frac{A^j}{j!}}_{=: A_j} \underbrace{\frac{B^{n-j}}{(n-j)!}}_{=: B_{n-j}} \Big) t^n =$

CAUCHY!!

$= \left(\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!} t^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!} t^n\right) = \exp(At) \cdot \exp(Bt)$ □]

[DERIVAZIONE DELL'ESPONENZIALE]

$\Rightarrow$ $\exp(At)$ è in realtà $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ con, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} \exp(At) = A \cdot \exp(At) \quad , = \exp(At) \cdot A .$$

[È evidente che basta provare la derivabilità, con $l' =$, di $\exp(At)$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{\exp(At + Ah) - \exp(At)}{h} =$

$A(t)A(h) = (Ah)(At)$

$= \exp(At) \dfrac{\exp(Ah) - I}{h} = \exp(At)\left(A + \dfrac{O(h^2)}{h}\right)$; ma

$\exp(Ah) = I + Ah + O(h^2)$ (h piccolo!)

$\dfrac{O(h^2)}{h} = \dfrac{O(h^2)}{h^2} \cdot h \xrightarrow[h\to 0]{} \text{costante} \cdot 0 = 0 \quad \left(\text{o } \dfrac{O(h^2)}{h} = O(h)\right)$!

Infine, o uso gli stessi passaggi ma scrivendo $\exp(At)$ e A dentro, oppure: $\forall m \geq 0$, $A \cdot \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n t^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n t^n}{n!}\right) \cdot A$ passo al $\lim_{m\to\infty}$ perché il prodotto è CONTINUO! □

Essendo $\exp(0) = I$, $X(t)$ derivata tale che
$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ è esattamente $X(t) = \exp(At) \cdot X_0$, ossia il flusso integrale (o soluzione generale) è

$$\Phi^t(X_0) = \exp(At) \cdot X_0$$

In effetti avrei anche potuto ragionare così: con $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto dove $F \in C^1(W, W)$, $X(t) \in C^1(\mathbb{R}, W)$ tale che
$\begin{cases} \dot{X} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \iff X(t) \in C^0(\mathbb{R}, W)$ tale che $X(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds$; MA "sarebbe" che

$G : (C^0([-M, M], W), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow$ sé stesso,

$G(X(s))(t) := X_0 + \int_0^t F(X(s))\,ds$, è contrazione di uno spazio metrico completo, dunque [CONTRAZIONI] $\exists!$ punto fisso di G, cioè $X(t) \in C^0([-M, M], W)$ tale che $X(t) = G(X(s))(t) = X_0 + \int_0^t F(X(s))ds$, ossia soluzione in $[-M,M]$ del SDC, e inversamente "sarebbe"

$X(t) \overset{\|\cdot\|_\infty}{=} \lim_{m\to\infty} G^n(X_0)(t)$. Dunque, nel caso

$F(X) = A\cdot X$, $G(\overset{\text{costante e } X_0!}{X_0})(t) = X_0 + \underbrace{\int_0^t A\cdot X_0 ds}_{A\cdot X_0 t} = (I + At)X_0$,

$G^2(X_0)(t) = G(G(X_0)(s))(t) = X_0 + \underbrace{\int_0^t A(I+As)X_0 ds}_{AX_0 t + A^2\frac{t^2}{2}X_0} =$

$= \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2}\right)X_0$, e così si ottiene infine

$X(t) \overset{\|\cdot\|_\infty}{=} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{A^k t^k}{k!}\right)X_0$, che infatti sappiamo converge in $\|\cdot\|_\infty$ su ogni $[-M,M]$!

Dunque i SDC lineari sono integrabili, mentre un SDC qualsiasi (nonlineare) è in generale difficile "da risolvere".

Unica cosa: CALCOLARE $\exp(At)$!!

La difficoltà è ovviamente il calcolo delle potenze di A; ma se riduciamo A grazie a V ($\det V \neq 0$) nella sua forma canonica di Jordan (reale) $Q = V^{-1}AV$, cioè

$A = VQV^{-1}$, allora, $\forall k \geq 0$, $A^k = (VQV^{-1})^k =$

$= VQ^kV^{-1} \Rightarrow \exp(At) = \sum_{k\geq 0} \frac{VQ^kV^{-1}t^k}{k!} \overset{\text{continuità del } \times!}{=} V\left(\sum_{k\geq 0}\frac{Q^kt^k}{k!}\right)V^{-1}$

$= V\exp(Qt)V^{-1}$, e le potenze di una diagonale a blocchi come Q è la diagonale a blocchi delle potenze dei blocchi!!

SDC LINEARI. (A matrice $n\times n$ a coeff. reali)

$$\begin{cases} \dot X = AX \\ X(0)=X_0 \end{cases} \iff X(t) = \underbrace{\exp(At)}_{I + At + \frac{A^2t^2}{2}+\dots} X_0 \quad (\forall t\in\mathbb{R}).$$

Sia $\det A\neq 0$, cioè tale che l'unico punto d'eq. del sistema sia lo 0.

I) A DIAGONALIZZABILE

: $\exists$ base $\{v_1,\dots,v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ fatta di autovettori di A con autovalori REALI risp. $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ $(\neq 0)$ ~~...~~ Allora
(come questi non tutti distinti!)

$$V := \begin{bmatrix} v_1 & | & \dots & | & v_n \end{bmatrix}$$ è (invertibile e)

tale che $AV = V\operatorname{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$, cioè

$$\boxed{V^{-1}AV = \operatorname{diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]}.$$

Essendo $\underset{(=V^{-1}\exp(At)V)}{\exp(\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)t)} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t}]$,

$$X(t) = \exp(At)X_0 = V\exp(\underbrace{V^{-1}AV}_{\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} t)V^{-1}X_0 =$$

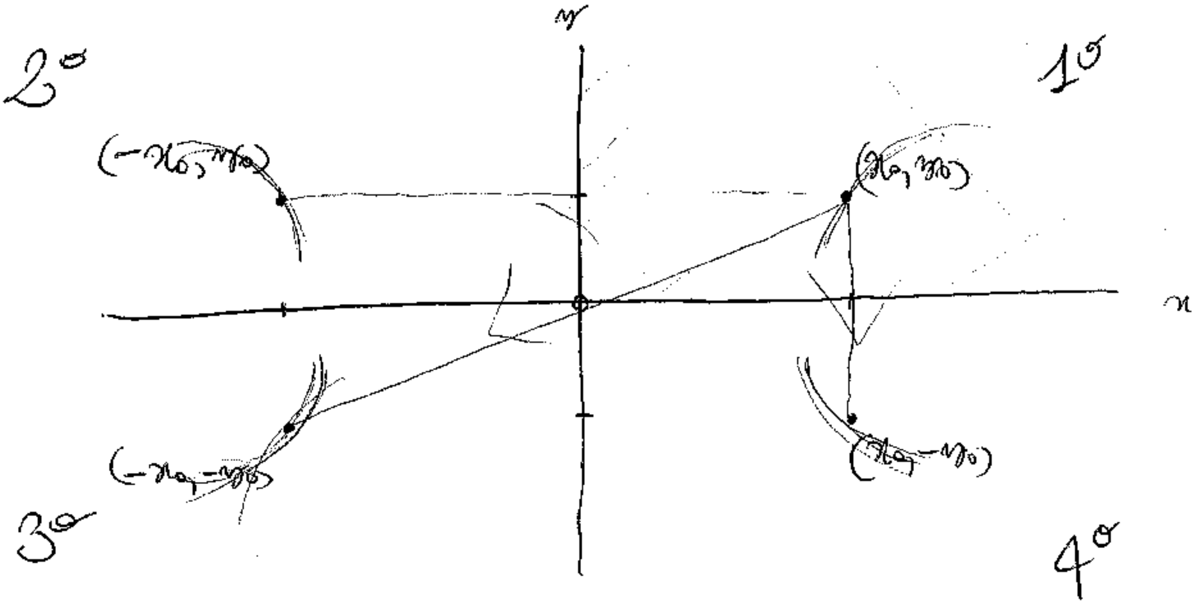
$$= \boxed{V\operatorname{diag}[e^{\lambda_1 t},\dots,e^{\lambda_n t}]V^{-1}X_0}.$$

In dimensione $n=2$ si possono anche tracciare facilmente le TRAIETTORIE delle soluzioni (in sistema di riferimento canonico!)

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} x_0 \\ e^{bt} y_0 \end{bmatrix},$$

(ORDINATI DAL PIÙ PICCOLO AL PIÙ GRANDE) $a < b$ $(a \neq 0)$. (CIOÈ $b-a>0$)

$\boxed{a < b < 0}$; anzitutto, è SEMPRE possibile ragionare solo per $(x_0, y_0) \in$ ad uno solo quadrante, diciamo il 1° (CIOÈ $x_0, y_0 \geq 0$): tracciando infatti le soluzioni $(x(t), y(t))$ corrispondenti a (x_0, y_0), quelle corrispondenti a $(x_0, -y_0)$ / $(-x_0, y_0)$ / $(-x_0, -y_0)$ è $(x(t), -y(t))$ / $(-x(t), y(t))$ / $(-x(t), -y(t))$.



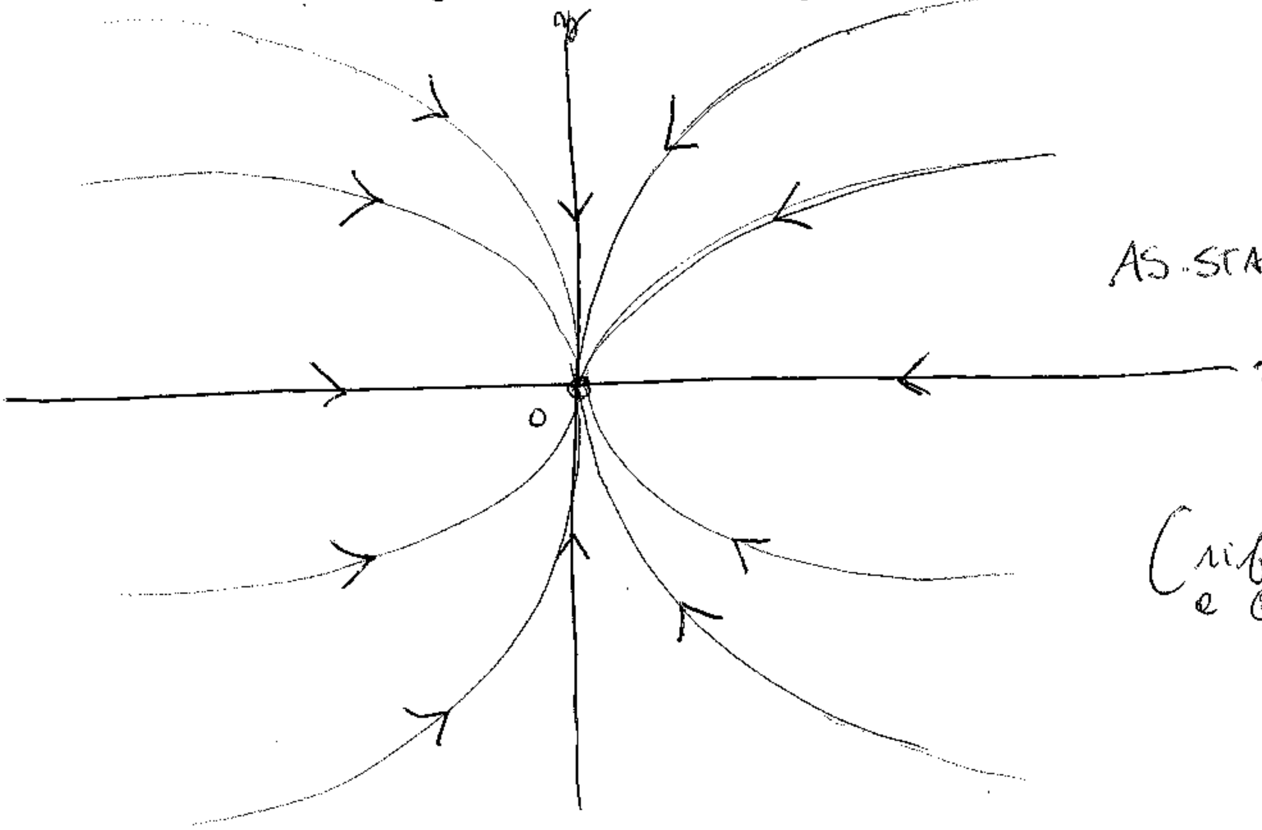
[AD ES.: $(x(t), -y(t))$, che ovviamente è tale che $(x(t), -y(t))|_{t=0} = (x_0, -y_0)$, in effetti risolve anche $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, cioè $\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(t) \\ \dot{y}(t) = b\,y(t) \end{cases}$; infatti $(-y(t))' = -\dot{y}(t) = -(b\,y(t)) = b(-(y(t)))$.]

Ebbene, $e^{at}x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ più velocemente di quanto fa $e^{bt}y_0$; inoltre, $\forall\, x_0 \neq 0$, "tan(SOLUZIONE(t))" $= \frac{y(t)}{x(t)} = \underbrace{\frac{y_0}{x_0}}_{\geq 0} e^{\overset{>0}{(b-a)}t}$

$$\begin{cases} = 0 \ \forall\, y_0 = 0, \text{ altrimenti } \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \\ \xrightarrow[t\to -\infty]{} 0 \end{cases}$$

, mentre per $x_0 = 0$ il discorso

NON è interessante perché la traiettoria è "l'asse y" $(y \geq 0)$; per $x_0 = 0$ in effetti la traiettoria è "l'asse x" $(x \geq 0)$. Dunque si ha il NODO (ATTRATTIVO)



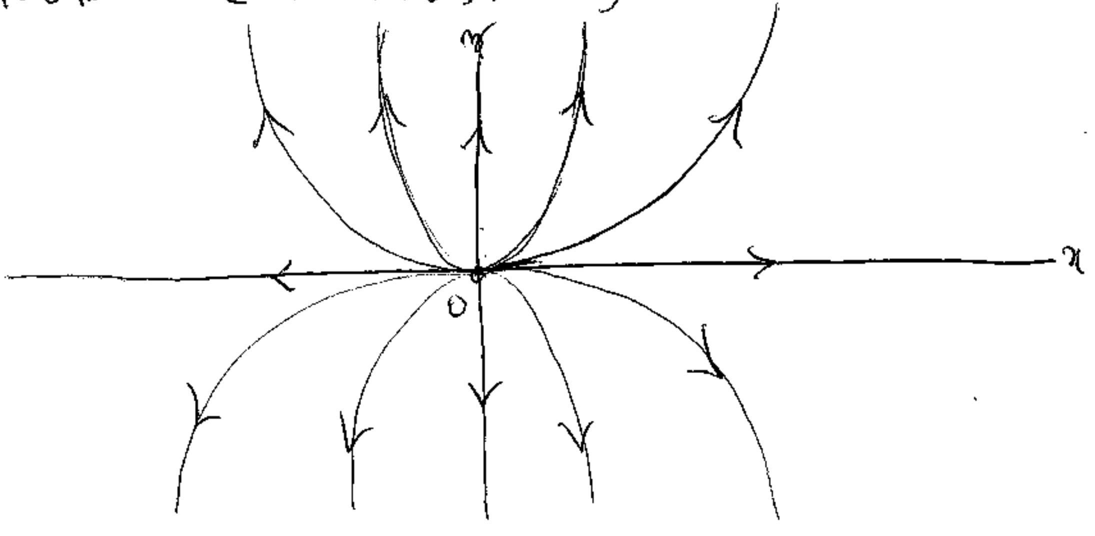
AS. STAB.

(riferimento a $(0,0)$)

$\boxed{0 < a < b}$ è analogo: $e^{at}x_0 \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ più lentamente di quanto fa $e^{bt}y_0$; inoltre $(x_0, y_0 \geq 0)$ "l'asse x" e "l'asse y" coincidono con delle traiettorie, mentre $\forall\, x_0, y_0 \gtrless 0$

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \underset{(>0)}{\frac{y_0}{x_0}}\, e^{(b-a)t} \begin{cases} \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0 \\ \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty \end{cases}$$

Dunque si ha il NODO (REPULSIVO)

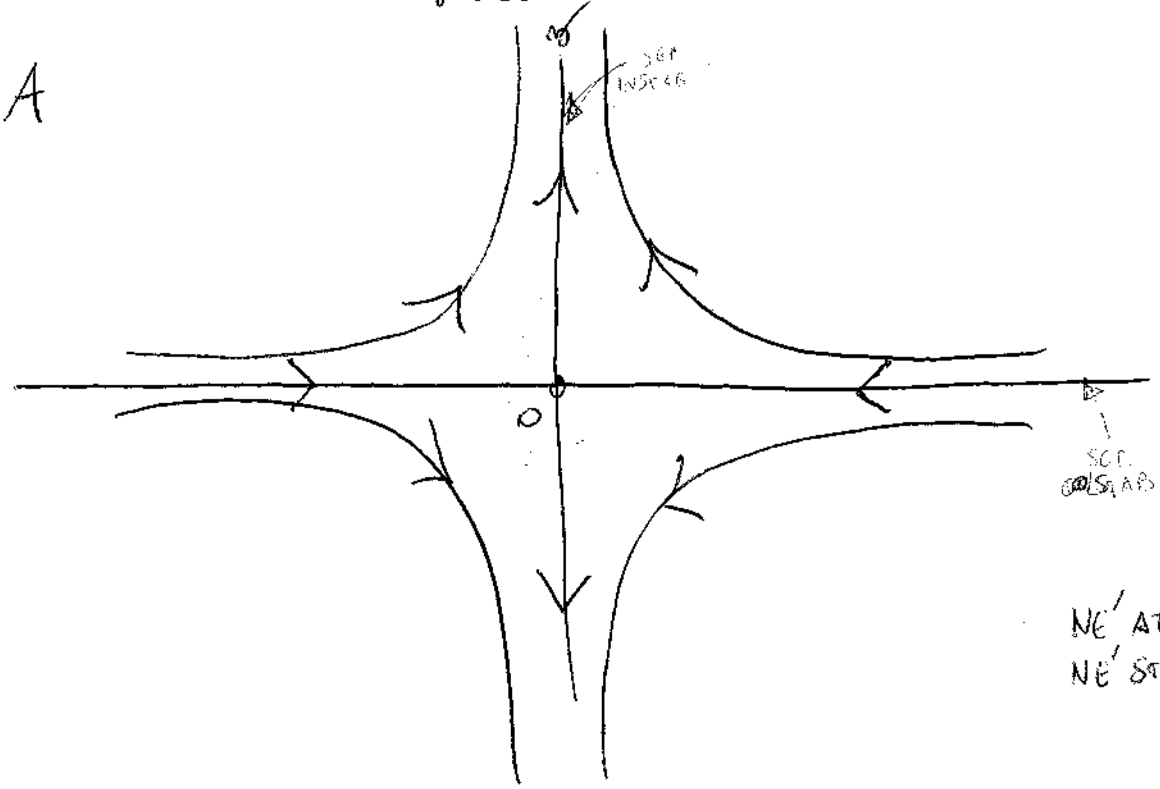


$\boxed{a<0<b}$: $e^{at}x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $e^{bt}y_0 \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$, ANZI

$e^{bt}y_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ a meno che $y_0=0$; in effetti le ascisse sono costituite con due traiettorie , mentre altrove

$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0} e^{(b-a)t} \begin{cases} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \\ \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \end{cases}$, dunque si ha la

SELLA



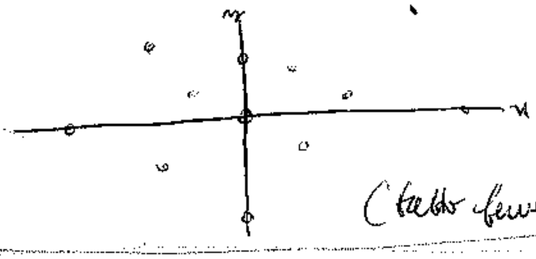
NÉ ATTR.
NÉ STAB.

ALTRI CASI "COLLEGATI" :

$\boxed{a=b<0}$ AD ES.

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$:

STAB. MA NON ATTR.

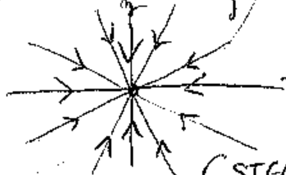


(tutto fermo!)

$A=\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}$, AD ES. $a<0$: AS. STAB. e

$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{at}x_0\\e^{at}y_0\end{bmatrix} \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,0)$ "alla stessa velocità" ,

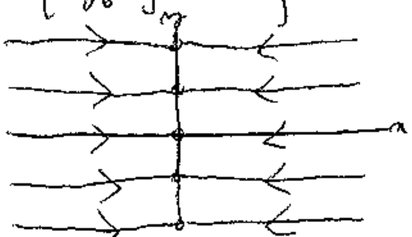
$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0}{x_0}$ $(x_0, x_0 \neq 0)$:



(STELLA ATTRATTIVA)

$A=\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}$, $a<0$:

$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{at}x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\\y_0\end{bmatrix}$,

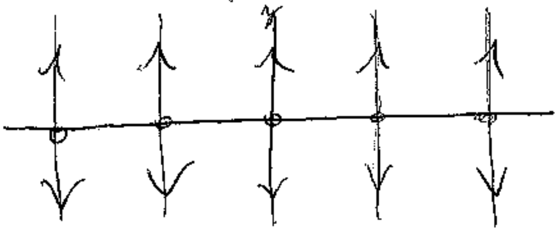


STAB. MA NON ATTR.

(sembra neve...)

$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&b\end{bmatrix}$, $b>0$:

$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_0\\e^{bt}y_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty\end{bmatrix}$



Sia A 2×2 REALE (cioè $A=\overline{A}$), $\Rightarrow$ 2×2 complessa, per cui la si può considerare come operatore lineare su $\mathbb{C}^2$;

$\boxed{A \text{ ha autovalori } a\pm ib,\ b\neq 0 \ \underset{(\text{si può supporre pure } b>0)}{}}$ $\Rightarrow$ A ha autovettori, ($\det A\neq 0$)

corrispondenti risp. a $a+ib$, $a-ib$, W e Z in $\mathbb{C}^2$, con Z che può essere supposto $Z=\overline{W}$:

$$A\overline{W} \overset{A=\overline{A}}{=} \overline{AW} = \overline{(a+ib)W} = (a-ib)\overline{W}$$

$\Big[a+ib \overset{(b\neq0)}{\neq} a-ib \Rightarrow W, \overline{W}=Z$ sono LIN. INDIP. (su $\mathbb{C}$)! ($\Leftrightarrow \{W,\overline{W}\}$ è BASE DI $\mathbb{C}^2$) (e effettivamente $\operatorname{Im}(W)\neq 0$)$\Big]$

Ora,
$$\begin{cases} Y := \operatorname{Re}(W) = \frac{1}{2}(W+\overline{W}) \in \mathbb{R}^2 \\ X := \operatorname{Im}(W) = \frac{1}{2i}(W-\overline{W}) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$
risultano LIN. INDIP. (su $\mathbb{C}$) $\Big[W,\overline{W}$ lin. indip. $\Rightarrow W+\overline{W}, W-\overline{W}$ lin. indip., $\Rightarrow$ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\alpha(W+\overline{W}), \beta(W-\overline{W})$ lin. indip.$\Big]$,

cioè $\{X,Y\}$ è base di $\mathbb{R}^2$, e sono tali che

$$AW = (a+ib)W = (a+ib)(Y+iX) = (aY-bX) + i(bY+aX)$$
$$\| $$
$$A(Y+iX) = AY + iAX$$
,

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = aX + bY \\ AY = -bX + aY \end{cases}$$
, cioè $\mathcal{M}^{\{X,Y\}}_{\{X,Y\}}(A) = Q \doteq$ (come operatore su $\mathbb{R}^2$!)

$$\doteq \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}\right)$$

(nel senso che, $\forall c,d\in\mathbb{R}$, $A(cX+dY) = c'X+d'Y$ con $\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} c \\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd \\ bc+ad \end{bmatrix}$), cioè $V := [X \,|\, Y]$ è tale che naturalmente

$$\boxed{V^{-1} A V = Q}\quad , \qquad \text{cioè}$$

$$A = V Q V^{-1} \; , \Rightarrow \; \underset{(\forall t \in \mathbb{R})}{\exp(At)} \overset{\text{CONT.}}{=} V \exp(Qt) V^{-1} .$$

Ora, se $I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, allora ovviamente $IJ = JI = J$, $\Rightarrow$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, essendo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = aI + bJ$ (CON APPUNTO aI e bJ CHE COMMUTANO)

$$\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} t\right) = \exp(aIt + bJt) = \exp(aIt) \cdot \exp(bJt) =$$

$$= \underbrace{\exp\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} t\right)}_{= \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}} \cdot \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} t\right) = e^{at} \underbrace{\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} t\right)}_{= ???} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ma ($J^0 = I$, $J^1 = J$,) $\boxed{J^2 = -I}$ $\Rightarrow J^3 = -J$ e $J^4 = I$ (quindi "si ricomincia"!), $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = bJ$ ha ($(bJ)^0 = I$, $(bJ)^1 = bJ$,) $\boxed{(bJ)^2 = -b^2 I}$,

$$\Rightarrow (bJ)^{2k} = ((bJ)^2)^k = (-1)^k b^{2k} I \quad \forall k \geq 0 ,$$

$$\Rightarrow (bJ)^{2k+1} = (bJ)^{2k} (bJ) = (-1)^k b^{2k+1} J \quad \forall k \geq 0 , \Rightarrow$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \exp\left(\begin{bmatrix}0 & -b\\ b & 0\end{bmatrix}t\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(bJ)^k t^k}{k!}\overset{(\text{= SOMME PARZ.})}{=}\sum_{k\geq 0}\left[\frac{(-1)^k(bt)^{2k}}{(2k)!}I+\right.$$ (4)

$$\left.+\frac{(-1)^k(bt)^{2k+1}}{(2k+1)!}J\right]\overset{\text{CONV. ASSOLUTA!}}{=}\cos(bt)I+\operatorname{sen}(bt)J=\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt)\\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad \exp\left(\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}t\right)=e^{at}\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt)\\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix}}\quad(\forall a,b\in\mathbb{R}!),$$

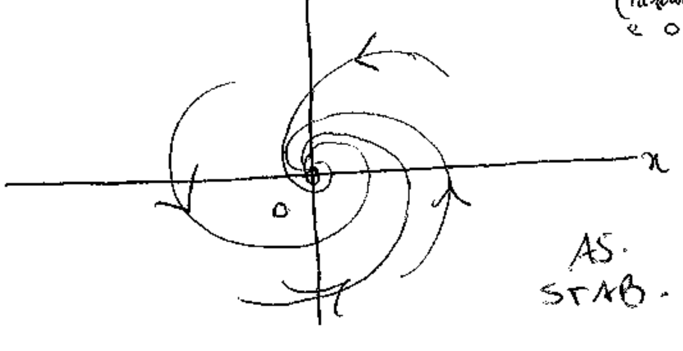
Da cui $\begin{cases}\dot X=AX\\ X(0)=X_0\end{cases}\Leftrightarrow X(t)=\exp(At)X_0=V\,e^{at}\begin{bmatrix}\cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt)\\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt)\end{bmatrix}V^{-1}X_0,$

$V=\big[\operatorname{Im}(W)\,\big|\,\operatorname{Re}(W)\big]$ con W autovettore (in $\mathbb{C}^2$) relativo a $a+ib$ $(b>0)$.

A questo punto è anche facile tracciare le TRAIETTORIE delle soluzioni $\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{at}\cos(bt) & -e^{at}\operatorname{sen}(bt)\\ e^{at}\operatorname{sen}(bt) & e^{at}\cos(bt)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$ a seconda del valore di a $(b>0$, invece$)$:

$\boxed{a<0}$:

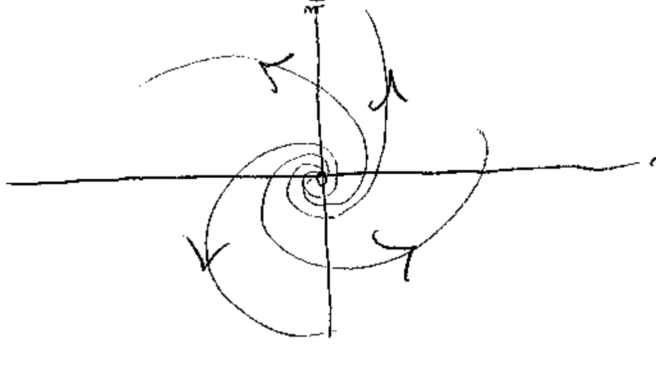
$\forall \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}\neq 0$, le traiettorie $\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ "ruotando in senso antiorario": si ha così il FUOCO (ATTRATTIVO) (riferimento a 0)



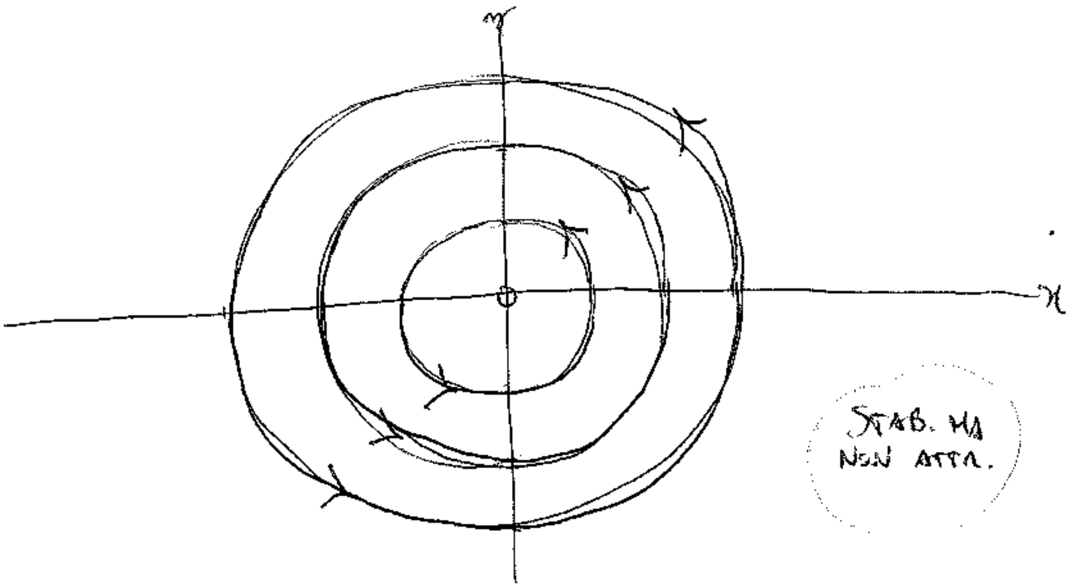
AS. STAB.

$\boxed{a>0}$:

$\forall \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}\neq 0$, le traiettorie $\xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ "ruotando in senso antiorario": si ha così il FUOCO (REPULSIVO)


;

$\boxed{a=0}$: $\forall \binom{x_0}{y_0} \neq 0$, le traiettorie percorrono all'infinito le circonferenze di centro O e raggio $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ in senso antiorario: si ha così il CENTRO



Per la precisione, infatti,

$$\begin{cases} r := \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta := \arctan\frac{y}{x} \end{cases} \text{(in } t\text{) FUORI DA O} \implies \begin{cases} \dot r = \frac{x}{r}\dot x + \frac{y}{r}\dot y \\ \dot\vartheta = \frac{x}{r^2}\dot y - \frac{y}{r^2}\dot x \end{cases}$$

(ben definite, fuori da O!), cioè

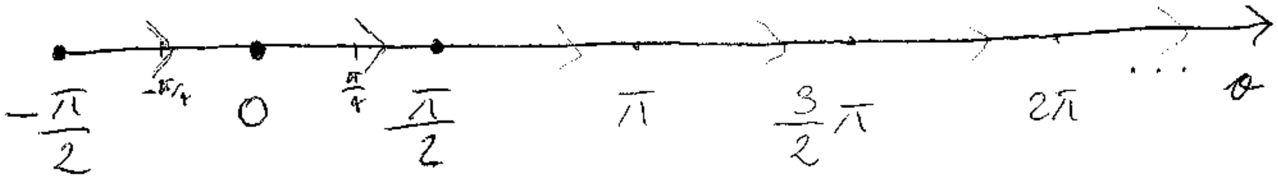
$$\begin{cases} \dot x = ax - by \\ \dot y = bx + ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot r = \frac{x}{r}(ax-by) + \frac{y}{r}(bx+ay) \\ \dot\vartheta = \frac{x}{r^2}(bx+ay) - \frac{y}{r^2}(ax-by) \end{cases},$$

$$\iff \begin{cases} \dot r = \frac{a(x^2+y^2)}{r} = ar \\ \dot\vartheta = \frac{b(x^2+y^2)}{r^2} = b \end{cases}, \quad \text{CIOÈ}$$

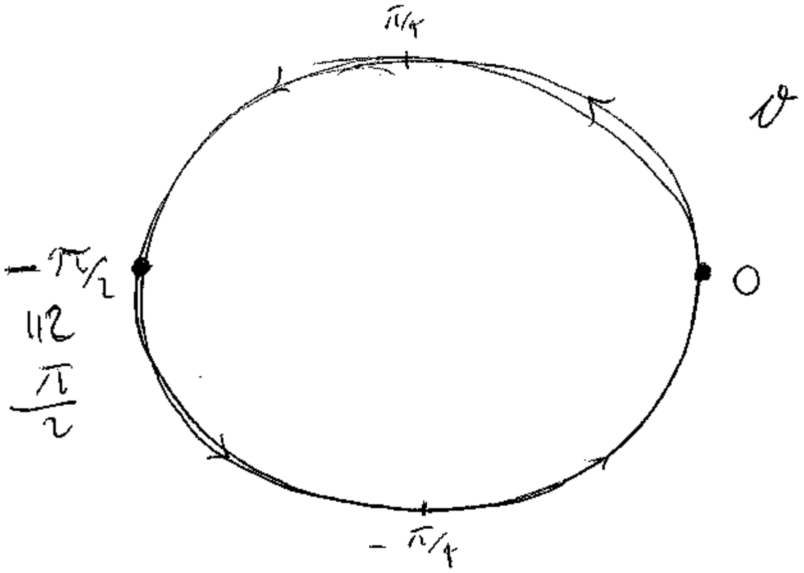
$$\begin{cases} r(t) = r(0)e^{at} \quad (r(0) = \sqrt{x(0)^2+y(0)^2}) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{se } a<0 \\ \equiv r(0) & \text{se } a=0 \\ +\infty & \text{se } a>0 \end{cases} \\ \vartheta(t) = bt + \vartheta(0) \quad (\vartheta(0) = \arctan\left(\frac{y(0)}{x(0)}\right)) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \\ (b>0) \end{cases}$$

⚠ Stiamo convenendo di "girare" in senso ANTIORARIO, di "partire" da $-\frac{\pi}{2}$, e di "tenere conto dei giri", CIOÈ consideriamo le simmetrie



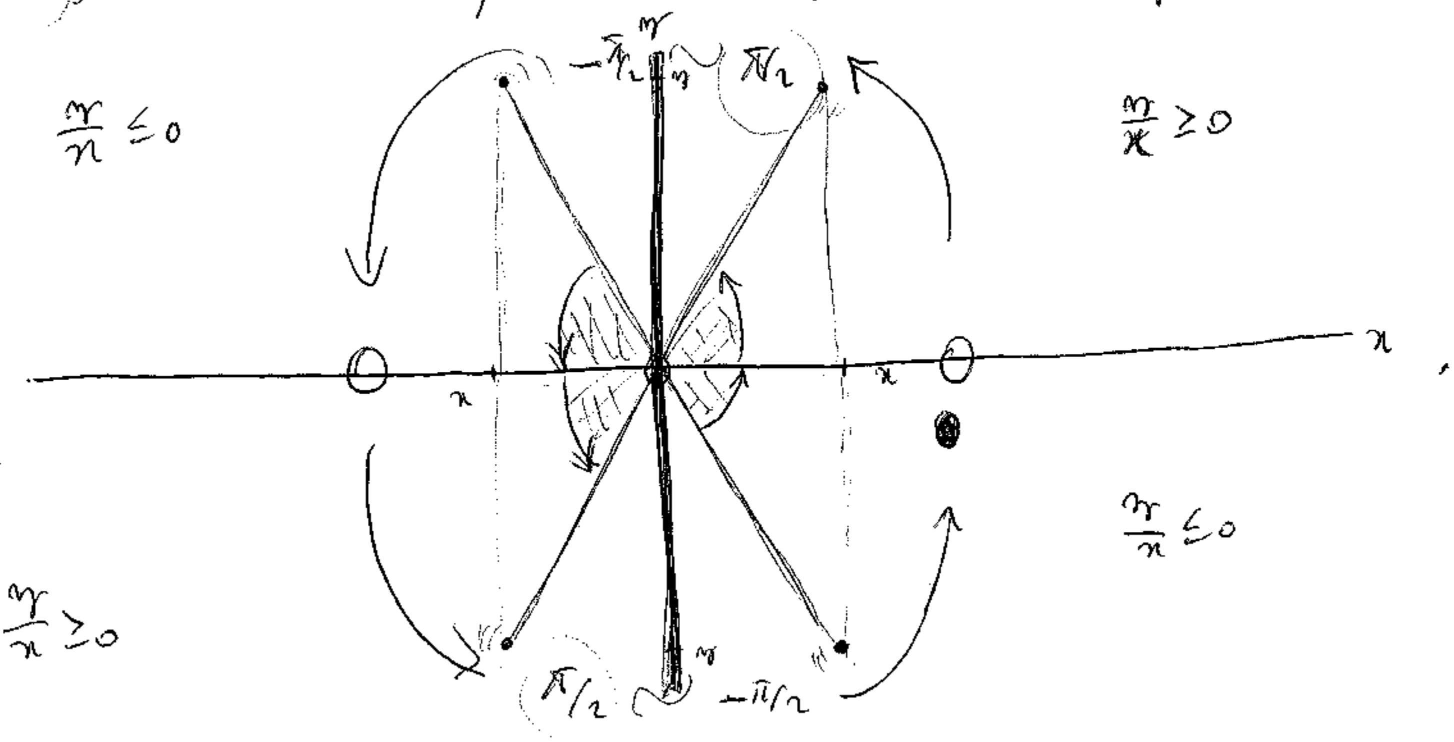
j

ora, se identifichiamo i multipli di 2π, nel senso che $x \cong y \overset{def}{\Leftrightarrow} x - y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, e prendiamo come rappresentante $[-\pi/2, \pi/2)$, allora stiamo considerando tale semiretta "allacciata all'infinito" sulla S^1



j

allora in effetti, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $\arctan \frac{y}{x} \in$ in tale S^1, anche se $x = 0$, come si capisce dalla figura



In ogni caso se $n=0$ ci si ferma "poche volte", e finalmente con s, $\forall \binom{x_0}{y_0}$ nel 4° quadrante, che che eppure $\vartheta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, CIOÈ fino su S^1 all'infinito compresi qui esempio (che anche per $n=0$ HA SENSO).

ALLORA[*]

II) A SEMISEMPLICE : $\exists$ base $\{V_1, \dots, V_n\}$

di $\mathbb{C}^n$ di autovettori di A, diciamo

$$\begin{cases} V_1, \dots, V_s \in \mathbb{R}^n \text{ relativi risp. a } c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ W_{s+1}, \overline{W_{s+1}}, \dots, W_{s+r}, \overline{W_{s+r}} \in \mathbb{C}^n \text{ relativi risp. a} \\ a_1 \pm ib_1, \dots, a_r \pm ib_r \quad (\forall 1\leq j\leq r,\ b_j\neq 0) \end{cases}, \text{ con}$$

naturalmente s, r interi ≥ 0 tali che $s+2r=n$.

Allora
$$V := \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} V_1 & \dots & V_s & \mathrm{Im}(W_{s+1}) & \mathrm{Re}(W_{s+1}) & \dots & \mathrm{Im}(W_{s+r}) & \mathrm{Re}(W_{s+r}) \\ & & & \| & \| & & \| & \| \\ & & & X_1 & Y_1 & & X_r & Y_r \end{array}\right] \end{array}$$

è (invertibile e) tale che $\boxed{V^{-1}AV = Q} :=$
DIAGONALE A BLOCCHI$\left[c_1, \dots, c_s, \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_r & -b_r \\ b_r & a_r \end{bmatrix}\right]$, $\Rightarrow$

$\exp(At)X_0 = V\exp(Qt)V^{-1}X_0 \overset{(*)}{=} V$ DIAGONALE A BLOCCHI$\Big[e^{c_1t}, \dots, e^{c_st}, e^{a_1t}\begin{bmatrix} \cos(b_1t) & -\sin(b_1t) \\ \sin(b_1t) & \cos(b_1t) \end{bmatrix}, \dots, e^{a_rt}\begin{bmatrix} \cos(b_rt) & -\sin(b_rt) \\ \sin(b_rt) & \cos(b_rt) \end{bmatrix}\Big]V^{-1}X_0$

(Cioè, $\forall 1\leq i\leq n$, $\underset{AV^{(i)}}{\underset{\|}{AVe^{(i)}}} = \underset{VQ^{(i)}}{\underset{\|}{VQe^{(i)}}}$; infatti, per $1\leq i\leq s$,

$AV^{(i)} = \underset{c_i V_i}{AV_i}$, mentre $VQ^{(i)} = V(c_i e^{(i)}) = c_i V^{(i)} = c_i V_i$;

se invece $s+1 \le i \le m$, diciamo $i = s+1$: $\begin{cases} AV^{(s+1)} = AX_1 = a X_1 + bY_1 \\ AV^{(s+2)} = AY_1 = -bX_1 + aY_1 \end{cases}$,

mentre $VQ^{(s+1)} = V(a_1 e^{(s+1)} + b_1 e^{(s+2)}) = a_1 X_1 + b_1 Y_1$

$VQ^{(s+2)} = V(-b_1 e^{(s+1)} + a_1 e^{(s+2)}) = -b_1 X_1 + a_1 Y_1$. ✓]

MA ricordiamo il teorema della decomposizione "$S+N$" :

$\boxed{\text{A è } m\times m \text{ reale} \Rightarrow \exists!\, S, N \; m\times m \text{ reali tali che } S \text{ è semisemplice, } N \text{ è nilpotente, } SN = NS \text{ e } A = S+N.}$

$$\Rightarrow \exp(At)X_0 = \exp(St + Nt)X_0 \overset{SN=NS}{=} \underbrace{\exp(St)}_{\text{NOTO!}} \underbrace{\exp(Nt)}_{???} X_0 .$$

Ricordiamo che N $m\times m$ reale (m≥2, altrimenti $N=0$!) è NILPOTENTE $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, k \ge 1$: $N^k = 0$ $(N^0 = I \neq 0$, se $N \neq 0$!) ; il minimo $s \ge 1$ di tali k è l'ordine del nilpotente N, ed è tale che

$$N^s = 0 \Leftrightarrow N^{s+t} = 0 \text{ per tutti e soli i } t \ge 0 \text{ (interi)}.$$

Notiamo che "in generale" $s \ge 2$, giacché $s = 1 \Leftrightarrow N = 0$.

(diciamo $N \neq 0$)

$\boxed{N \text{ è nilpotente} \Leftrightarrow \text{l'unico autovalore di } N \text{ è } \lambda = 0.}$

[$\Rightarrow$) : intanto $N^s = 0 \Rightarrow 0 = \det(N^s) \overset{\text{BINET}}{=} \det(N)^s$, cioè $\det(N) = 0$, cioè N ha almeno l'autovalore $\lambda = 0$. Per
($0 = \det(N) = \det(N - 0I)$)

ogni altro autovalore μ di N, $N0=\mu 0$, mentre per $X\neq 0$ $(X\neq 0)$

$NX=\mu X \Rightarrow 0=N^n X=\mu^n X$, $\Rightarrow \mu=0$. ✓

$\Leftarrow$): $\det(N)=\det(N-0I)=0$, $\Rightarrow N$ non è invertibile, cioè non è suriettiva, $\Rightarrow \dim(N(\mathbb{R}^n))<n$; essendo ovviamente che $N_{|N(\mathbb{R}^n)}$ resta NON invertibile, anche $\dim(N(N(\mathbb{R}^n)))$ $=\dim(N^2(\mathbb{R}^n))<\dim(N(\mathbb{R}^n)), <n$; è chiaro che $\exists\ 2\leq k\leq n$ tale che $\dim(N^k(\mathbb{R}^n))=0$, CIOÈ

$N^k=0$. □

$\Rightarrow$ $\boxed{N_{n\times n} \text{ nilp.} \neq 0 \Rightarrow 2\leq s\leq n}$, in particolare

·) $N^n=0$ certamente;

·) $n=2 \Rightarrow s=2$.

ESTENSIONE: A ammette come unico autovalore $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ A si scrive come $A=\lambda I+N$ con N nilpotente

(che è anche la decomposizione $S+N$ di A!).

$\Rightarrow$): $N:=A-\lambda I$ è tale che $0=\det(N-\mu I)=$
$=\det(A-(\lambda+\mu)I) \overset{\text{ip. } A}{\Leftrightarrow} \lambda+\mu=\lambda, \Leftrightarrow \mu=0,$
cioè è tale che tutti e soli i suoi autovalori sono lo 0. ✓

$\Leftarrow$): A è tale che $0=\det(A-\mu I)=\det(N-(\mu-\lambda)I)$,
$\overset{\text{ip. } N}{\Leftrightarrow} \mu-\lambda=0$, cioè $\mu=\lambda$. □

Se s = ordine di N, allora chiaramente, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(Nt)=\sum_{k\ge 0}\frac{(Nt)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{(Nt)^k}{k!}=I+Nt+\dots+\frac{N^{s-1}t^{s-1}}{(s-1)!};$$

in particolare $A=\lambda I+N$ con $\lambda\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow \forall t\in\mathbb{R}$, $\exp(At)=$

$$= \exp(\lambda I t)\exp(Nt) = e^{\lambda t}\left[I+Nt+\dots+N^{s-1}\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\right],$$

dove sottolineiamo che $s-1$ è $1\le s-1<n$ (per $N=0$ otteniamo così più ristretto!).

$\Rightarrow$ per $\boxed{n=2}$, $\exp((\lambda I_2+N)t)=e^{\lambda t}[I_2+Nt]$ $\forall t\in\mathbb{R}$,

formula però NON semplice da esaminare dal punto di vista QUALITATIVO.

FORMA CANONICA DEL NILPOTENTE: N $(\neq 0)$ $n\times n$ reale nilpotente

$\Rightarrow$ $\exists V$ $n\times n$ reale invertibile tale che $V^{-1}NV =$

= DIAGONALE A BLOCCHI $[N_1,\dots,N_s]$, dove,

$\forall 1\le j\le s$, N_j è $p_j\times p_j$ reale nilpotente della forma $\left(\sum_{j=1}^{s}p_j=n\right)$

$$N_j=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & 0 & \\ & 1 & 0 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(di ordine p_j (≥ 1): ogni volta che $\times N_j$ gli 1 scendono in più di 1!)

(si può supporre $p_1\ge p_2\ge\dots$ almeno fino a quando si trovano i "blocchetti" 1×1 $\boxed{0}$, che supponiamo esser tutti in "basso a destra".)

$$\Rightarrow \exp(Nt)=V\ \text{DIAGONALE A BLOCCHI}\,[\exp(N_1t),\dots,\exp(N_st)]\,V^{-1},$$

dove, $\forall\ 1 \leq i \leq s$,

$$\exp(N_i t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t & 1 & & & \\ t^2/2 & t & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!} & \cdots & t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix}$$
$$\parallel$$
$$\left(I + N_i t + \ldots + N_i^{p_i-1}\frac{t^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\right)$$

Per $\underline{n=2}$ e $N \neq 0 = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} \end{bmatrix}$, necessariamente $V^{-1}NV = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

per $\underline{n=3}$ (e $N \neq 0$), $V^{-1}NV$ è o $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ o $= \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

per $\underline{n=4}$ (e $N \neq 0$), $V^{-1}NV$ è o $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, o $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

o $\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right]$; e così via. Notiamo di ottenere,

incluso $N = 0$, esattamente n possibili forme canoniche del nilpotente, ciascuna per ogni possibile ordine da 1 a n.

Torniamo dunque a $\boxed{n=2}$ e $N \neq 0$ nilpotente 2×2, $\forall t \in \mathbb{R}$

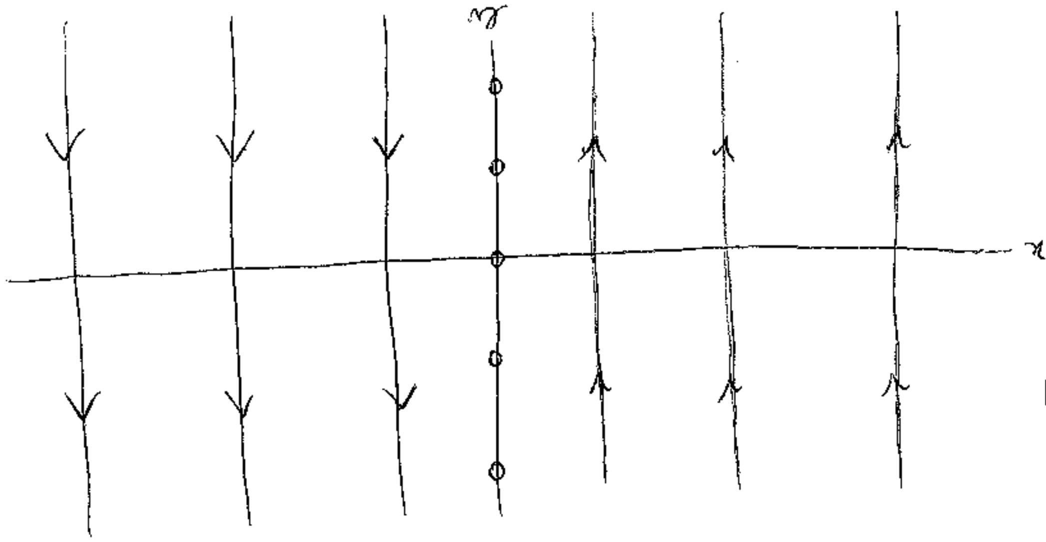
$$\exp((\lambda I_2 + N)t) = V e^{\lambda t} \underbrace{\exp(Nt)}_{= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}} V^{-1} = V \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ e^{\lambda t} t & e^{\lambda t} \end{bmatrix} V^{-1} \quad !$$

INDAGINE QUALITATIVA : $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} x_0 \\ t e^{\lambda t} x_0 + e^{\lambda t} y_0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\lambda = 0}$ (cioè $\det(A)=0$) : $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ t x_0 + y_0 \end{bmatrix}$; $\begin{cases} x(t) \equiv 0 \\ y(t) \equiv y_0 \end{cases}$ sono soluzioni $\forall y_0 \in \mathbb{R}$,

mentre, $\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\begin{cases} x(t) \equiv x_0 \\ y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } x_0 > 0 \\ -\infty & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \end{cases}$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$:

otteniamo che $\Phi^t(\cdot)$ è uno SCORRIMENTO



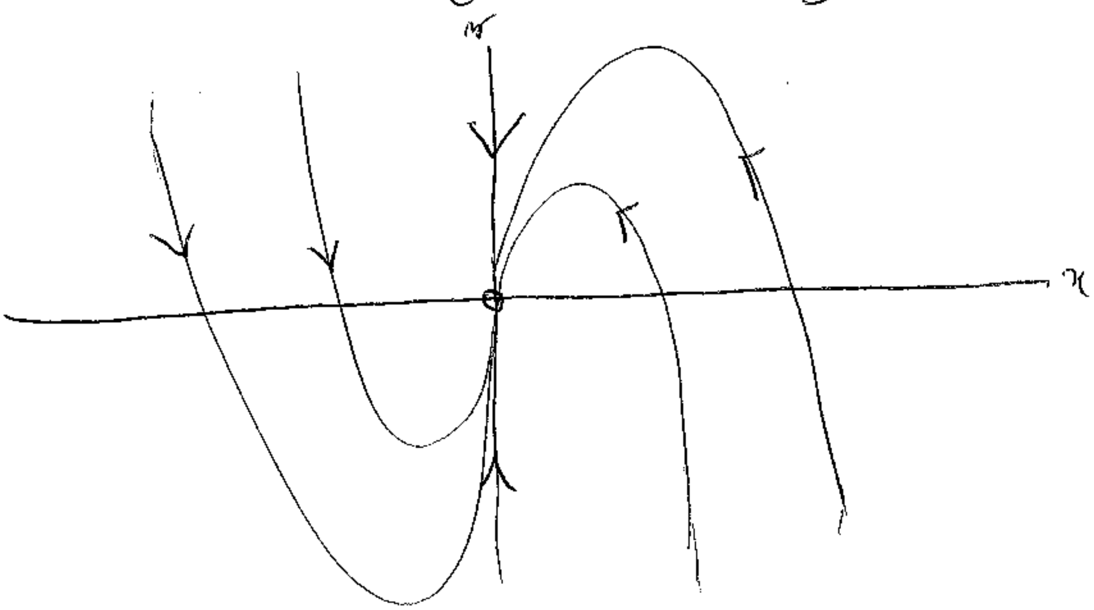
NÉ STAB.
NÉ ATTR.

$\boxed{\lambda<0}$: $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda t}x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $te^{\lambda t}x_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, $e^{\lambda t}y_0 \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$,

ma inoltre $\begin{cases} x(t) \equiv 0 \\ y(t) = e^{\lambda t} y_0 \end{cases}$ è soluzione, mentre per $x_0 \neq 0$

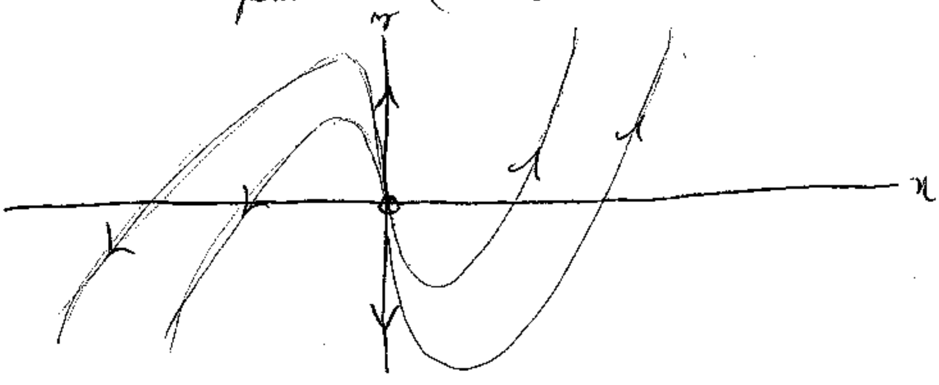
$$\frac{y(t)}{x(t)} = t + \frac{y_0}{x_0} \quad \begin{cases} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \\ \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty \end{cases}$$: si ha così (in 0) il

NODO IMPROPRIO (ATTRATTIVO)



AS. STAB.

$\boxed{\lambda>0}$: otteniamo analogamente (in 0) il NODO IMPROPRIO (REPULSIVO)



Dim. FORMA CANONICA NILPOTENTE ($N \neq 0$, altrimenti è già in forma canonica!)

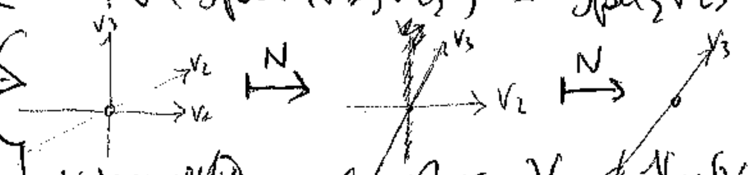
$N \neq 0 \Rightarrow \exists\, v_1 \neq 0$ tale che $v_2 := Nv_1 \neq 0$; notiamo subito che v_1 e v_2 sono lin. indip.$_{(\text{su } \mathbb{R})}$ ($av_1 + bNv_1 = 0$, e $b \neq 0$ (assurdo) $\Rightarrow$ $Nv_1 = -\frac{a}{b} v_1 \overset{N \text{ nilp.}}{\Rightarrow} a = 0$, $\Rightarrow b = 0$ in quanto $Nv_1 \neq 0$) .
$\left(\underset{v_1 \neq 0}{\Rightarrow} a = 0\right)$

$\boxed{n=2}$: $Nv_2 = N^2 v_1 = 0$ necessariamente, inoltre $\{v_1, v_2\}$ è base di $\mathbb{R}^2$, ed essendo
$$\begin{cases} Nv_1 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \\ Nv_2 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \end{cases}$$

$$V := [v_1 \,|\, v_2] \text{ è tale che } V^{-1} N V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

$\boxed{n=3}$: se anche $v_3 := \underset{(=N^2 v_1)}{Nv_2} \neq 0$, allora v_1, v_2 e v_3 sono lin. indip. (v_1 e v_2 lo sono certamente, ma ANALOGAMENTE lo sono v_2 e $Nv_2 = v_3$, per cui $av_1 + bNv_1 + cN^2 v_1 = 0 \overset{\text{applico } N}{\Rightarrow}$ $a\underbrace{Nv_1}_{v_2} + b\underbrace{N^2 v_1}_{v_3} = 0$, cioè $a = b = 0$, $\overset{v_3 \neq 0}{\Rightarrow} c = 0$), cioè sono una base di $\mathbb{R}^3$, ed è evidente che $V := [v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3]$
$$\Rightarrow V^{-1} N V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(\text{ordine } 3)} \quad (Nv_3 = N^3 v_1 = 0 \,!) .$$

SE INVECE, $\forall\, v_1 \neq 0$ tale che $v_2 := Nv_1 \neq 0$, però $Nv_2 = 0$ sempre, allora in realtà N ha ordine 2: v_1 e v_2 sono sempre lin. indip. e $N(\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}) = \mathrm{Span}\{v_2\} \Rightarrow$ $N^2(\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}) = \{0\} \Rightarrow$



: $N^2 v_3 = \lambda v_3 \overset{N^2 \text{ nilp.}}{\Rightarrow} \lambda = 0$; necessariamente, comunque $v_3 \notin \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$ ed ho $av_1 + bv_2 + cv_3 \xmapsto{N} av_2 + cNv_3 \xmapsto{N} cN^2 v_3$; ora,

$V_3 \neq 0$, quindi $NV_3 = 0$ effettivamente ho finito; se $NV_3 \neq 0$, però $N(NV_3) = N^2 V_3 = 0$ per ipotesi, dunque in ogni caso $N^2 = 0$). Completando allora $\{V_1, V_2\}$ con $V_3 \notin \mathrm{Span}\{V_1, V_2\}$,

(in realtà basta oss. che $N^2 V_1 = 0 \ \forall V_1 \neq 0$!)

e osservando che necessariamente $NV_3 = 0$ ($NV_3 = aV_1 + bNV_1 + cV_3 \overset{\text{applico } N}{\Rightarrow} 0 = aNV_1 + cNV_3$, e se fosse $c \neq 0$ allora $NV_3 = -\frac{a}{c}NV_1$, da cui $aV_1 + (\frac{a}{c} + b)\underbrace{NV_1}_{V_2} + cV_3 = 0 \overset{\text{lin. indip.}}{\Rightarrow} a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow c = 0$ }; allora $c = 0$, $\Rightarrow a = 0$, ossia $NV_3 = b\underbrace{NV_1}_{V_2}$;

ma anche V_1 e $V_2 \overset{N}{\longmapsto} \mathrm{Span}\{V_2\}$:

$$\underbrace{\dim(\ker(N))}_{\dim(\ker(N - 0I))} + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(N))}_{=1} = 3, \quad \text{cioè}$$

$\dim(\ker(N - 0I)) = 2$; allora V_3 deve essere autovettore di N (insieme a V_2), cioè appunto $NV_3 = 0V_3 = 0$: altrimenti il generico autovettore $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$, con $\gamma \neq 0$ (che insieme a V_2 genera V_0) ($0 = N(\alpha V_1 + \beta V_2) = \alpha N(V_1) \Leftrightarrow \alpha = 0$, ma il generico autovettore nel ker è βV_2!), se fosse $\alpha \neq 0$ allora sarebbe autovettore anche $V_1 + \frac{\beta}{\alpha}V_2 + \frac{\gamma}{\alpha}V_3$ (uno dei quali); ma $NV_3 \neq 0 \Rightarrow$ posso supporre $NV_3 = \frac{\alpha}{\gamma}\underset{(NV_1)}{V_2}$, $\Rightarrow$
$0 = N(V_1 + \frac{\beta}{\alpha}V_2 + \frac{\gamma}{\alpha}V_3) = NV_1 + NV_1 = 2NV_1$, che è assurdo, $\Rightarrow \alpha = 0$; ma allora
$0 = N(\beta V_2 + \gamma V_3) = \gamma NV_3 \Rightarrow NV_3 = 0$)

$$V := \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} \Rightarrow V^{-1}NV = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{n \geq 4}$: si procede analogamente! □

Dunque $\underset{\text{(del teorema!)}}{A = S + N} \Rightarrow \exp(At)x_0 = \exp(St)\exp(Nt)x_0 =$

$= \underbrace{\exp(St)}_{\text{comb. lineari esponenziali e esponenziali} \times \text{seni/coseni}} V \underbrace{\text{DIAGONALE A BLOCCHI}[\exp(N_1 t), \dots, \exp(N_s t)]}_{\text{comb. lineari di potenze di } t\text{, cioè polinomi}} V^{-1} x_0$ con

$\exp(N;t)$ come sopra), per cui IN CONCLUSIONE tutte le orbite di $\dot{X}=AX$ [SOLUZIONI DI UN SDC LINEARE] sono esprimibili mediante combinazioni lineari di: esponenziali $e^{\lambda t}$ con λ autovalore reale di A, $e^{at}\cos(bt)$ e $e^{at}\sin(bt)$ con $a \pm ib$ autovalori complessi coniugati di A, $e^{\lambda t}\cdot P(t)$ con $P(t)$ polinomio in t, e $e^{at}\cos(bt)Q(t)$, $e^{at}\sin(bt)R(t)$ con $Q(t), R(t)$ polinomi in t.

In realtà $\deg(P) <$ molteplicità algebrica di λ, e $\deg(Q)$ e $\deg(R) <$ molteplicità algebrica di $a+ib$ (che è la stessa di $a-ib$).

(in effetti, tanto più N è vicina a essere 0 ① tanto più A è vicina ad essere semisemplice, ② tanto più le potenze di t sono basse).

[Secondo infatti il TEOREMA DELLA FORMA CANONICA DI JORDAN REALE (che forse S+N?) A $n\times n$ reale $\Rightarrow \exists V$ $n\times n$ reale invertibile tale che

$$V^{-1}AV = \underset{\text{(di Jordan)}}{\text{DIAGONALE A BLOCCHI}}[C_1,\dots,C_s, D_1,\dots,D_r]$$

dove i C_j sono $m_j\times m_j$ e i D_j sono $n_j\times n_j$ (CON $\sum_{j=1}^{s} m_j+\sum_{j=1}^{r} n_j = n$), e tali che: [1] $\boxed{C_j = \lambda_j I_{m_j} + N_j}$ con $\lambda_j\in\mathbb{R}$ autovalore di A di molteplicità ALG. $= m_j$, e con N_j NILPOTENTE DI ORDINE (IN FORMA CANONICA) ~~[illegible]~~ banalmente $\gamma\le m_j$ ($\Leftarrow N_j^{m_j}=0$);

[2] $\boxed{D_j = \text{DIAGONALE A BLOCCHI}[Z_j,\dots,Z_j] + M_j}$ con $Z_j=\begin{pmatrix} a_j & -b_j\\ b_j & a_j\end{pmatrix}$, per cui in realtà n_j è PARI, e anzi $\frac{n_j}{2} =$ molteplicità ALG. di a_j+ib_j, e con M_j NILPOTENTE DI ORDINE $\le n_j/2$ ~~[illegible]~~ perché (precisamente è tutta di 0 eccetto o nelle 2-sottodiag., o nelle 4-sottodiag., ecc. DOVE è di 1).

Dunque $\exp(At)X_0 = V\,\text{DIAG.A BL.}[\exp(C_1t),\dots,\exp(D_rt)]\,V^{-1}X_0$, CON

$\odot \; \exp(C_j t) = e^{\lambda_j t} \underbrace{\exp(N_j t)}_{I + N_j t + \dots + \frac{N_j^{m_j-1} t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}}$ completo = comb. lin. di potenze t^k con $k < m_j$

$\odot \; \exp(D_j t) = e^{a_j t} \, \mathrm{DIAG.\,A\,BL}\left[\begin{bmatrix} \cos(b_j) & -\sin(b_j) \\ \sin(b_j) & \cos(b_j) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \cos(b_j) & -\sin(b_j) \\ \sin(b_j) & \cos(b_j) \end{bmatrix}\right] \exp(M_j t)$

completo = potenze di t < $\frac{m_j}{2}$

(NOTA: per λ_j REALE,

$\| \text{molteplic. GEO di } \lambda_j = m_j + 1 - \text{ordine}(N_j) \| \; (\leq m_j)$;

(e in effetti $\dim(\mathrm{Ker} N) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im} N)}_{O(N_j)-1} = m_j$)

(cioè $O(N_j) = m_j - g_j + 1$)

per $a_j + i b_j$ COMPLESSO,

$\| \text{molteplic. GEO di } a_j + i b_j = m_j + \underbrace{2 - 2\,\text{ordine}(M_j)}_{-2(\text{ordine}(M_j) - 1)} \| \; (\leq m_j)$)

(PARI !! (come sappiamo...))

(cioè $O(M_j) = \frac{m_j - g_j}{2} + 1$)

Dunque si calcolano gli autovalori di A, da cui le loro molteplic. algebriche, e i rispettivi autovettori, da cui le molteplic. geometriche di tali autovalori, e allora avremo sia la forma canonica di Jordan reale di A, Q, sia "quasi" V invertibile tale che $A = V Q V^{-1}$, e allora $\exp(At) = V \exp(Qt) V^{-1}$; ma $\exp(Qt) =$ = diagonale a blocchi degli exp dei blocchi, e l'exp

Di tali blocchi è elementare (utilizzando anche il teorema "somma degli esponenti"!), e questo finito.

$\boxed{\dot{X} = F(X)}$ SDC in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO. (1)
$(F \in C^1(W))$

[TEOREMA DELLE ORBITE COSTANTI]
$X(t) \equiv$ costante $=: X_0$ soluzione $\Leftrightarrow F(X_0) = 0$, cioè X_0 punto di equilibrio.

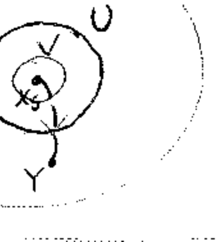
[$\Rightarrow$: $\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dot{X}_0} = F(X_0)$; $\Leftarrow$: $\dot{X}_0 = 0 = F(X_0)$. □]

[TEOREMA DEL PUNTO LIMITE] (FUTURO!)
$X(t)$ soluzione tale che $\exists \lim_{t\to\infty} X(t) = X_S \in W$ PUNTO LIMITE
$\Rightarrow X_S$ è punto di equilibrio.

[$X_S \in W$, quindi consideriamo la soluzione che parte da X_S: sia $Y(t)$, $Y(0) = X_S$; tale esiste per t in un "eferturo", diciamo per $0 \le t < h$ $(h>0)$, in corrisp. di quei però $Y(t) = \underbrace{\Phi^t(X_S)}_{\forall t \in R!} = \Phi^t(\lim_{s\to\infty} X(s)) \overset{\text{CONT. } \Phi^t(\cdot)}{=} \lim_{s\to\infty} \Phi^t(X(s)) = \lim_{s\to\infty} X(s+t) = X_S$. □]

[STABILE $\Rightarrow$ "FERMO"]
X_S STABILE ("MARGINE") (ASS. per $t\to\infty$) $\Rightarrow X_S$ punto di equilibrio.

[Intanto, X_S stabile (ASS.) (per $t\to\infty$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ cond. iniziale "adeguatamente" vicina a X_S, la corrisp. soluzione resta "arbitrariamente" vicina a X_S (PER $t\geq 0$), CIOÈ $\forall$ intorno U di X_S $(\subseteq W)$, $\exists$ intorno $V \subseteq U$ di X_S tale che, $\forall$ cond. iniziale in V, la corrisp. soluzione resta in U per $t \geq 0$; (cioè $\forall B(X_S, \delta)$!)



allora X_S NON fosse d'eq. $\Rightarrow$ la soluzione $Y(t)$ che fosse da X_S, e che esiste almeno per "$h>0$ secondi" dopo esser stata in X_S, fosse da $Y := Y(h)$ tale che $\exists$

intorno U di X_S che NON contiene Y stesso; allora, $\forall V \subseteq U$ ulteriore intorno di X_S, X_S ha da cond. iniziale tale per cui la corrisp. soluzione ($Y(t)$) ESCE DA U per qualche $t>0$. □]

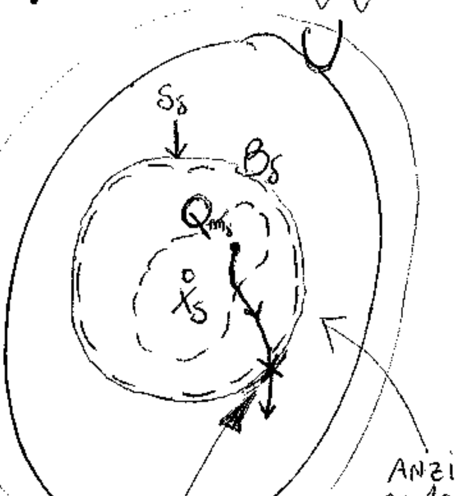
[TEOREMA DI STABILITÀ DI LYAPOUNOV]

X_S (punto d'equilibrio) che ammette, in un suo intorno U ($\subseteq W$)) funzione di Lyapounov $\Rightarrow$ X_S è STABILE PER $t \to \infty$.

[V f. di L. di X_S in U $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ tale che

(I) $\dot V(X) \le 0 \quad \forall X \in U$ (il valore di V NON CRESCE (per $t\to\infty$!) lungo le soluzioni in U); (è "stretta" se $\dot V(X)<0 \ \forall X\in U\setminus\{X_S\}$)

(II) $V(X_S)=0$ e $V(X)>0 \quad \forall X \in U\setminus\{X_S\}$ (V ha un MINIMO FORTE in X_S, ed è 0).



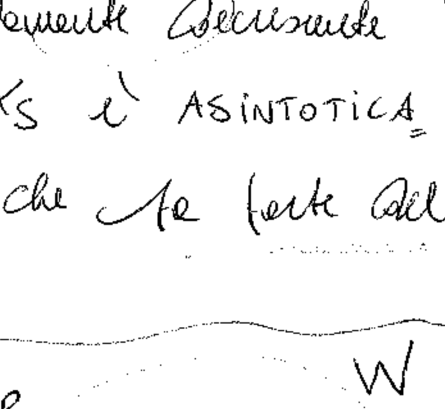
Allora X_S è stabile: infatti $\forall$ palla $B_\delta := \{X \in U \mid \|X - X_S\| < \delta\}$ con $\delta>0$ tale che $B_\delta \subseteq U$, considero il suo bordo $\partial B_\delta =: S_\delta = \{X\in U \mid \|X-X_S\| = \delta\}$, che è COMPATTO (chiuso e limitato): V ammette valore minimo m_δ su S_δ, ed è $m_\delta > 0$ (II). (V vale $\ge m_\delta$!)

Allora $Q_{m_\delta} := \{X \in B_\delta \mid V(X) < m_\delta\}$ è intorno di X_S ($V(X_S) = 0 < m_\delta$) tale che, $\forall$ cond. iniziale in Q_{m_δ}, la corrisp. soluzione NON LASCIA B_δ per $t \ge 0$: infatti, PER NON CRESCENZA DI V (lungo le soluzioni in U), V "parte" $< m_\delta \Rightarrow$ resta $< m_\delta$ (in U, per $t\to\infty$), mentre su S_δ $V \ge m_\delta$ (e per lasciare B_δ bisogna passare da S_δ (continuità soluzione da X_S)!). □]

[TEOREMA DELLA FUNZIONE DI LYAPOUNOV DECRESCENTE] (2)

X_S stabile (per $t \to +\infty$) con funzione di Lyapounov V su tutto W tale che $\exists\ \underline{P} \subsetneq W$ intorno di X_S compatto e positivamente invariante dove V è strettamente decrescente su ogni semiorbita in $\underline{P} \setminus \{X_S\}$ $\Rightarrow$ X_S è ASINTOTICAMENTE stabile (per $t \to +\infty$) CON $\underline{P}$ che fa parte del suo bacino d'attrazione.

[$\underline{P}$ pos. invar. $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall$ condizione iniziale $x_0 \in \underline{P}$, la corrispondente soluzione esiste $\forall\, t \geq 0$ ed è "contenuta" in $\underline{P}$; ossia esiste la corrispondente semiorbita $X(t)$, $t \geq 0$, tutta contenuta in $\underline{P}$.



Ma $\underline{P}$ è compatto, quindi tale semiorbita ammette almeno un valore limite Y_0: $\exists\ (t_m)_{m \geq 0} \uparrow \infty$ tale che $\lim_{m \to \infty} X(t_m) = Y_0$; $\Rightarrow$

$V(X(t_m)) \downarrow V(Y_0)$ (continuità + stretta decrescenza).

Ora, se per assurdo fosse $Y_0 \neq X_S$, allora Y_0 non può essere di equilibrio (sarebbe semiorbita costante!) e pertanto fa da condizione iniziale per una semiorbita $Y(t)$ tutta contenuta in $\underline{P}$ e tale che, $\forall\, s > 0$, $V(Y(s)) < V(Y_0)$ (stretta decrescenza). Ma, per m abbastanza grande, $X(t_m)$ è abbastanza vicino a Y_0 affinché (continuità $\Phi(X_0)$) $X(t_m + s)$ sia abbastanza vicino a $Y(s)$ affinché $V(X(t_m+s)) < V(Y_0)$, e così l'assurdo che da punto in poi $X(t)$ NON può riapprossimarsi arbitrariamente vicino a Y_0. □]

(Precisamente: $\forall\, s > 0$, $\overbrace{\Phi^s(Y_0)}^{Y(s)} = \Phi^s\big(\lim_{m \to \infty} \overbrace{X(t_m)}^{\Phi^{t_m}(X_0)}\big) \overset{\text{cont. }\Phi}{=} \lim_{m \to \infty} \overbrace{\Phi^{t_m+s}(X_0)}^{X(t_m+s)}$ $\Rightarrow$ $V(Y_0) > V(Y(s)) \overset{\text{cont. } V}{=} \lim_{m \to \infty} V(X(t_m+s))$, che è assurdo!)

$F(X) = AX$ lineare, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

~~[TEOREMA DEL POZZO LINEARE]~~

$\underline{O}$ è pozzo per il SDC lineare $\iff \exists\, k, b > 0$ tali che $|\mathrm{exp}(At)X_0| \leq k e^{-tb} |X_0|$ $\forall t \geq 0$ $(\forall X_0)$. Dunque $\underline{O}$ è asintoticamente stabile.

[Dato che per $\dot{X} = F(X)$ che abbia punto d'equilibrio X_S e $A := J_F(X_S)$, le parti reali degli autovalori di A sono gli ESPONENTI DI LYAPUNOV del SDC, e X_S è pozzo per il SDC $\overset{?}{\iff}$ tali esponenti sono < 0 (SORGENTE se sono > 0). Allora, per $F(X) = AX$, è proprio $J_F(O)) = A$; ma per il teorema delle soluzioni di un SDC lineare tutte le componenti dell'orbita passante del punto X_0 sono della forma $x_i(t) =$ combinazione lineare di funzioni del tipo $e^{\chi t} \cdot Q(t)$, con χ un esponente di Lyapunov di A e $Q(t)$ che, per $t \to +\infty$, cresce più lentamente di ogni esponenziale, cioè $\forall \alpha > 0$ $\lim_{t \to +\infty} \frac{Q(t)}{e^{\alpha t}} = 0$.

$\Rightarrow$): sia $b > 0$ tale che ogni χ di Lyapunov sia $\chi < -b$; allora $\frac{e^{\chi t} Q(t)}{e^{-bt}} = \frac{Q(t)}{e^{\underset{>0}{(-b-\chi)}t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ è come dire che $x_i(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ più rapidamente di e^{-bt}, per cui definitivamente $|x_i(t)| \leq e^{-bt}$, diciamo per $t \geq t_0 \geq 0$.

D'altra parte su $[0, t_0]$ è chiaro valga la stessa $\leq$ a patto di moltiplicare per una costante > 0, e allora in conclusione

$|x_i(t)| \leq k_i e^{-bt} |x_i(0)|$ $\forall t \geq 0$, $\leq K e^{-bt} |x_i(0)|$ se $K := \max_{i \in \{1,\dots,m\}} k_i$ (>0),

da cui chiaramente $|X(t)| \leq K e^{-bt} |X_0|$; l'ovviamente stabilità dell'origine: $\forall$ intorno U di $\underline{O}$, prendo $V \subseteq U$ altro intorno di $\underline{O}$, dove essendo le soluzioni corrispondenti ad una condizione iniziale in V resta in V.

$\Leftarrow$): se per assurdo fosse $\exists \chi \geq 0$, allora $e^{\chi t} Q(t)$ NON tenderebbe a 0 per $t \to +\infty$ (chiamate "le altre" $e^{\chi t} Q(t)$ quasi), ossia una componente di $X(t)$ NON lo fa, che contraddice l'ipotesi. □

(NOTA: se anzi $\exists \chi > 0$, allora $e^{\chi t} Q(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ e allora certamente $\underline{O}$ è instabile!)

[Analogamente: $\underline{O}$ SORGENTE per il SDC lineare $\Leftrightarrow$ $\exists\, K, b > 0$ tale che, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall t \geq 0$,
$$|\exp(At) X_0| \geq K e^{tb} |X_0|.$$]

[NORMA ADATTATA]

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, $\forall$ autovalore λ di A, $\alpha < \mathrm{Re}(\lambda) < \beta$ $\Rightarrow$ $\exists$ base $V := \{V_1, \dots, V_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, se $X = \sum_{h=1}^{n} x_h V_h$ e $Y = \sum_{h=1}^{n} y_h V_h$ allora $\langle X ; Y \rangle_V := \sum_{h=1}^{n} x_h y_h$ è un PRODOTTO SCALARE su $\mathbb{R}^n$ tale che $\boxed{\alpha \|X\|_V^2 \leq \langle AX ; X \rangle_V \leq \beta \|X\|_V^2}$, dove ovviamente $\|X\|_V := \sqrt{\langle X ; X \rangle_V}$ è "la norma adattata" ad A e ai suoi autospazi.

[EQUIVALENZA DELLE NORME]
Se $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_V$ sono due norme su $\mathbb{R}^n$, allora $\exists\, \alpha, \beta > 0$ tali che, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\alpha\|X\| \le \|X\|_V \le \beta\|X\|}$.

$\Downarrow$

~~[TEOREMA DEL POZZO NONLINEARE]~~

X_S POZZO per $\dot{X} = F(X)$, con precisamente $c>0$ tale che ogni esponente di Lyapunov χ del SDC sia $\chi < -c$, $\Rightarrow$ $\exists$ intorno $U \subseteq W$ di X_S tale che $\Phi^t(X_0)$ è definito $\forall X_0 \in U$ e $\forall t \geq 0$, ed inoltre $\exists\, B > 0$ tale che, per tali X_0 e t, $|\Phi^t(X_0) - X_S| \le B e^{-ct} |X_0 - X_S|$, $\Rightarrow$ X_S è asintoticamente stabile.

[Posso supporre $X_S = \underline{0}$ (nel caso generale considero $F(X+X_S)$!). Se $b>0$ è tale che $\chi < -b < -c$ $\forall \chi$ esp. di L., allora (per la NORMA ADATTATA) $\exists$ prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ $\|\cdot\|_V$ tale che, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX ; X\rangle_V \overset{(1)}{\le} -b\|X\|_V^2$ $(A := J_F(X_S))$; d'altra parte

$F \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow F(X) = \cancel{F(X_S)}^{0} + A(X - X_S) + o_{X\to X_S}(|X - X_S|)$, cioè $(X_S = 0)$ $\dfrac{|F(X) - AX|}{|X|} \xrightarrow[X\to 0]{} 0$, cioè (per l'EQUIVALENZA DELLE NORME) $\dfrac{\|F(X) - AX\|_V}{\|X\|_V} \xrightarrow[X\to 0]{} 0$ $(*)$; ma, per SCHWARZ,

$\langle F(X) - AX ; X\rangle_V \le \|F(X) - AX\|_V \|X\|_V$, $\overset{(*)}{\Rightarrow}$

$$\frac{\langle F(X) - AX ; X\rangle_V}{\|X\|_V^2} \le \frac{\|F(X) - AX\|_V}{\|X\|_V} \le \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ arbitrario})$$

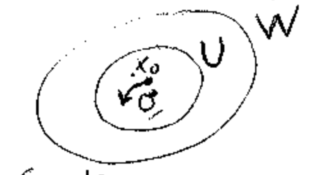
$\forall X \in U := U_\varepsilon \subseteq W$ intorno di $\underline{0}$ "adeguatamente piccolo", cioè

$\langle F(X) - AX ; X\rangle_V \overset{(2)}{\le} \varepsilon\|X\|_V^2$ $\forall X \in U$ ($\varepsilon > 0$ scelto), e allora

$\langle F(X) ; X\rangle_V \overset{\text{lin.}}{=} \langle F(X) - AX ; X\rangle_V + \langle AX ; X\rangle_V \overset{(1)+(2)!}{\le} (\varepsilon - b)\|X\|_V^2$

$\forall X \in U$ ($\varepsilon>0$ scelto); in particolare $\langle F(X); X\rangle_V \le -c\|X\|_V^2$ in U.

Ora, $\forall X_0 \in U$, $\exists\, t_1>0$ tale che $\exists !\, X:[0,t_1)\to U$ che sia la soluzione corrispondente a X_0 (W



) e

per $t\in[0,t_1)$ è $\frac{\partial}{\partial t}\overset{(\sqrt{\langle X;X\rangle})}{\|X\|_V} = \frac{2\langle \overset{(F(X))}{\dot X}; X\rangle_V}{2\|X\|_V} \overset{(X\in U!)}{\le} -c\|X\|_V$, cioè,

posto $m(t):=\|X(t)\|_V$, $\dot m(t)\le -c\cdot m(t)$: essendo $m(t)\ne 0$ sempre se $X_0\ne 0$, allora $\frac{\dot m(t)}{m(t)}\le -c \overset{(\int_0^t)}{\Rightarrow} \log(m(t))\le -ct+\log(m(0))$, cioè $m(t)\le m(0)e^{-ct}$, cioè $\|X\|_V\le\|X_0\|_V e^{-ct}$ (tutto ciò sempre per $t\in[0,t_1)$) ; ma so $\exists\,\alpha,\beta>0$ tali che $\alpha|X|\le\|X\|_V\le\beta|X|$ $\forall X\in\mathbb{R}^n$ (come EQUIVALENZA DELLE NORME) :
$\alpha|X|\le\|X\|_V \overset{\text{in } U}{\le} \|X_0\|_V e^{-ct}\le\beta|X_0|e^{-ct}$, $\Rightarrow |X| \overset{\text{in } U}{\le} \underbrace{(\beta/\alpha)}_{=:B>0} e^{-ct}|X_0|$. ✓ In realtà tutto questo vale $\forall t\ge 0$:

se $U=\{X\in W \mid \|X\|_V<\delta\}$ ($\delta>0$), allora $\forall X_0\in U$ la corrispondente soluzione $X(t):[0,t_1)\to U$ soddisfa $\|X(t)\|_V\le\|X_0\|_V e^{-ct}$, $\Rightarrow \forall t>0$ ($<t_1$), $\|X(t)\|_V<\delta-\eta$ ($\eta>0$) ; considerato allora il compatto $K:=\{X\in U \mid \|X\|_V\le\delta-\eta\}$ (e ricordando che le soluzioni può essere continuate), essendo $X(t)$ destinata a restare in K deve allora esistere $\forall t \gtrsim 0$. □

(NOTA : $V(X):=\|X-X_S\|_V$ è una funzione di Lyapunov di X_S (in U), e soddisfacendo $\frac{\partial}{\partial t}\|X-X_S\|_V\le \underset{<0}{-c}\|X-X_S\|_V$ è anche STRETTA !)

[Analogamente : X_S SORGENTE per $\dot X=F(X)$, con $c>0$ tale che ogni aut. di $L\cdot X > c$, $\Rightarrow \exists$ intorno $U\subseteq W$

ad X_S tale che $\Phi^t(X_0)$ è definito $\forall X_0 \in U$ e $\forall t \leq 0$, ed inoltre $\exists\, B > 0$ tale che, per tali X_0 e t, sia $|\Phi^t(X_0) - X_S| \leq B e^{ct} |X_0 - X_S|$. ⌟

[~~TEOREMA DI INVARIANZA DEGLI INSIEMI LIMITE~~]

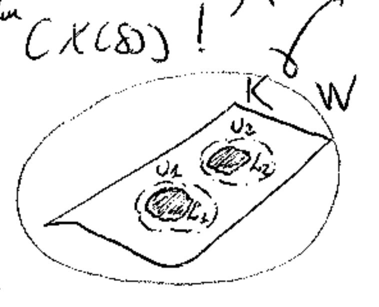
$\mathcal{L}$ ω-limite (risp. α-limite) di un'orbita $X(t)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ è CHIUSO ($\not\subseteq \mathcal{L} \subseteq \overline{W}$) e $\mathcal{L} \cap W$ è INVARIANTE; se inoltre $X(t)$ è contenuto $\forall t \geq 0$ (risp. ≤ 0) in un compatto $K \subsetneq W$, allora $\mathcal{L}$ è CONNESSO.

(⚠ : NON sussistono i viceversa!)

ω/α-limite di $X(t) \overset{\text{def}}{=}$ {i valori limite di $X(t)$ per $t \to +\infty/-\infty$}; $\mathcal{L}$ INVARIANTE $\Leftrightarrow$ $\forall X_0 \in \mathcal{L}$, $\Phi^t(X_0)$ esiste $\forall t \in \mathbb{R}$ ed è contenuto in $\mathcal{L}$.

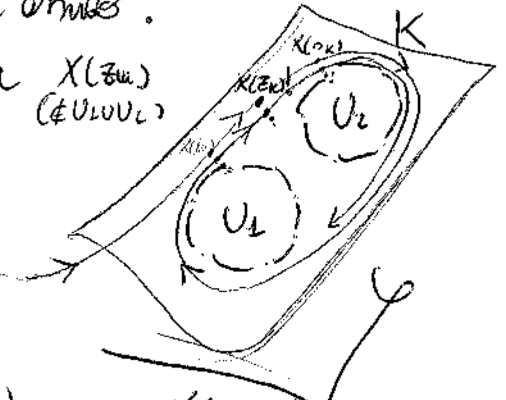
⊙ $\forall (Y_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{L}$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(\mathbb{R}^n)} Y \Rightarrow Y \in \mathcal{L}$: infatti, $\forall n \geq 1$, $\exists\, (t_m^{(n)})_{m \geq 1} \uparrow \infty$ tale che $X(t_m^{(n)}) \xrightarrow[m\to+\infty]{} Y_n$; dunque, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \bar{n} \geq 1$ tale che $|Y_{\bar{n}} - Y| \leq \varepsilon/2$, e poi $\exists\, \bar{m} \geq 1$ tale che $m \geq \bar{m} \Rightarrow |X_{t_m^{(\bar{n})}} - Y_{\bar{n}}| \leq \varepsilon/2$: di conseguenza $|X(t_m^{(\bar{n})}) - Y| \overset{\text{dis. tr.}}{\leq} \varepsilon$, ossia Y è valore limite per $t \to +\infty$ per $X(t)$. γ

⊙ $\forall Y_0 \in \mathcal{L} \cap W$, diciamo $Y_0 = \lim_{m\to\infty} X(t_m) = \lim_{m\to\infty} \Phi^{t_m}(X_0)$ ($(t_m)_{m\geq 1} \uparrow \infty$), sia $Y(t) = \Phi^t(Y_0)$ la corrispondente soluzione (in W!); $\forall \delta \in \mathbb{R}$ tale che $\Phi^\delta(Y_0)$ sia definita, è $Y(\delta) = \Phi^\delta(Y_0) = \Phi^\delta(\lim_{m\to+\infty} \Phi^{t_m}(X_0)) \overset{\text{continuità } \Phi^\delta(\cdot)}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{\Phi^\delta(\Phi^{t_m}(X_0))}_{= \Phi^{\delta + t_m} = \Phi^{t_m} \circ \Phi^\delta} = \lim_{m\to\infty} \Phi^{t_m}(\Phi^\delta(X_0)) = \lim_{m\to+\infty} \Phi^{t_m}(X(\delta))$ $\Rightarrow$ anche $Y(\delta) \in \mathcal{L} \cap W$! Per gli stessi passaggi $Y(t)$ è in realtà ORBITA, perché lo è $X(t)$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}$, è ben definito $\lim_{m\to+\infty} \Phi^{t_m}(X(\delta))$! γ



⊙ Sia per assurdo che $\exists$ aperti $U_1, U_2 \subseteq W$ DISGIUNTI tali che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ con $\underset{(\neq\emptyset!)}{\mathcal{L}_i} = \mathcal{L} \cap U_i$; so $\exists\, (t_m)_{m\geq 1}$ e $(s_m)_{m \geq 1} \uparrow \infty$ tali che $X(t_m)$ sta

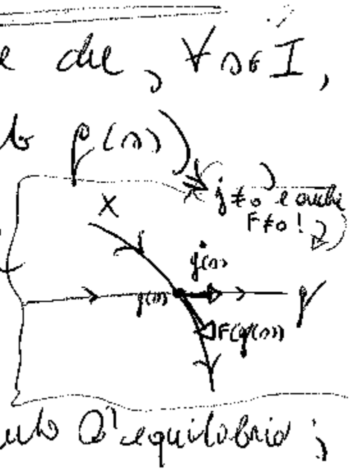
definitivamente in U_1, mentre $X(s_m)$ sta definitivamente in U_2, ⑤
e posso supporre che, $\forall m \geq 1$, $t_m < s_m$ (altrimenti passo a sottosuccessioni: prendo t_1, poi $s_i =: s_1$ tale che $t_1 < s_1$, poi t_2 e quindi $s_i =: s_2 > t_2$, ecc. ...). Ecco l'assurdo:
$\exists (z_m)_{m \geq 1} \uparrow \infty$, $t_m < z_m < s_m$, tale che $X(z_m)$ ($\notin U_1 \cup U_2$) che un punto limite che $\notin U_1 \cup U_2 \supseteq L$! $\square$



Sia $X(t)$ orbita $\neq$ un punto di equilibrio; $X(t)$ è un'ORBITA PERIODICA $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\, P > 0$ tale che, $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t+P) = X(t)$; il più piccolo di tali P è IL PERIODO dell'orbita periodica [che esiste per continuità di X: $A := \{P > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R},\ X(t+P) = X(t)\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists (!)\ P := \inf A$, che in realtà è minimo di A perché $(P_m)_{m \geq 1}$ in A tale che $P_m \downarrow P \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ si ha, $\underbrace{X(t+P_m)}_{= X(t)!} \overset{\text{continuità!}}{\downarrow} X(t+P)$ ✓].

Le traiettorie di X coincidono esattamente coi propri insiemi limite: $\forall t \in \mathbb{R}$, $(t+mP)_{m \in \mathbb{Z}} \to \pm\infty$ è tale che $X(\underbrace{t+mP}_{= X(t)}) \xrightarrow[m \to \pm\infty]{} X(t)$!
Tale traiettoria può anche fungere da insieme limite per orbite diverse; in questo caso parleremo di CICLO LIMITE.

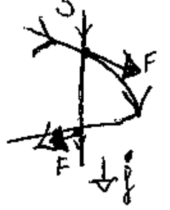
Sia $\dot{X} = F(X)$ un SDC in $W \subseteq \mathbb{R}^2$: una SEZIONE LOCALE del SDC è una curva C^1 $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to W$ tale che, $\forall s \in I$, $\frac{d\gamma}{ds}$ è linearmente indipendente da F (in quel punto $\gamma(s)$), ossia γ "attraversa trasversalmente" (γ', F non paralleli!) ($\gamma' \neq 0$) tutte le soluzioni del SDC che incontra.



È evidente che (1) una sezione locale non contiene punti di equilibrio;

(2) $\forall X_0 \in W$, che non sia d'eq., fare una sezione locale (ad esempio una $\perp$ a F resta trasversale almeno in un intorno di X_0 (F è continuo!));

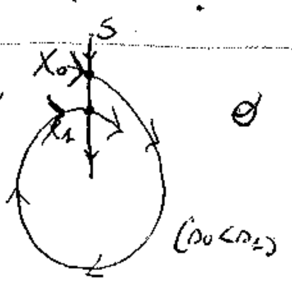
(3) posto $S := \rho(I)$, $\exists$ intorno U "di S" tale che tutte le soluzioni passanti dentro U incontrano anche S: è l'intorno dove F resta e ρ' lin. indip.! Abbiamo e proposto che le soluzioni che attraversano S lo devono fare sempre nello stesso senso: infatti una situazione tipo



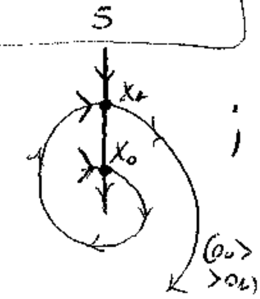
$\Rightarrow$ F è portato ad essere $\downarrow F$, che contraddice la indip. lineare con $\downarrow \rho'$!

[LEMMA DELLA SEQUENZA MONOTONA]
$\forall m \geq 1$, $X_0, X_1, \dots, X_m \in W$ che siano punti di S (quindi non d'eq.) ma anche della medesima traiettoria, sia di $X(t)$ tale che $X_k = X(t_k)$ con $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ $(0 \leq k \leq m)$, $\Rightarrow$ lungo S i punti X_k formano una "sequenza monotona": $X_k = \rho(s_k)$ con o $s_0 < s_1 < \dots < s_m$ o $s_0 > s_1 > \dots > s_m$.

[Come detto, per X_0 e X_1 devo essere o



o



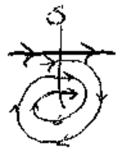
;

nel primo caso non può che essere X_2 "sotto" X_1 $(s_2 > s_1 > s_0)$, mentre nel secondo caso non può che essere X_2 "sopra" X_1 $(s_2 < s_1 < s_0)$, e così via. ∎]

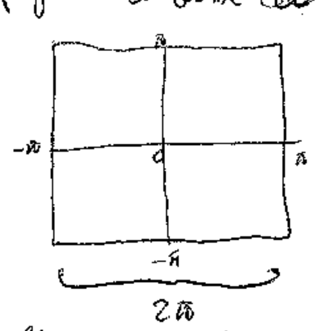
[TEOREMA DI POINCARÉ-BENDIXSON]
In $\mathbb{R}^2$, gli insiemi limite che siano $\neq \emptyset$ e compatti o contengono punti d'equilibrio o sono orbite periodiche (cioè cicli limite).
[SENZA DIMOSTRAZIONE...]

[TEOREMA DEL PUNTO FISSO] (6)

$X(t)$ orbita (periodica) che ha traiettoria una curva C chiusa tale che il "suo interno" D sia $D \subsetneq W \Rightarrow$ in D c'è un punto d'eq. o un'orbita periodica (in realtà certamente c'è un eq. ...).

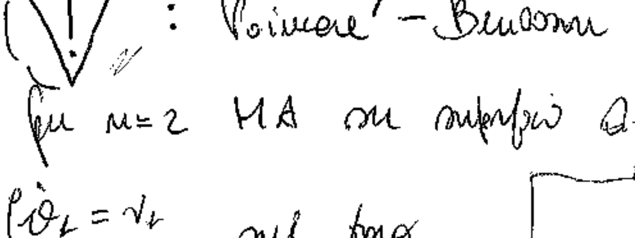
[$D \cup C$ $(\neq \emptyset)$ è compatto, dunque, $\forall X_0 \in D$, $\Phi^t(X_0)$ è in realtà definita $\forall t \in \mathbb{R}$, e non solo: stesso effetto in un compatto ha insiemi limite $\neq \emptyset$ e compatti (non sempre chiusi!), per cui (POINCARÉ-BENDIXON) o contiene un eq. o non ciclo limite; se anche un suo insieme limite fosse C, però non può essere né ω- né α-limite (per la SEZIONE MONOTONA: o  o  !) ! □]

⚠ : Poincaré-Bendixon non vale per $n>2$ e, in generale, neanche per $n=2$ MA su superfici diverse dal piano! Scelte infatti $\nu_1, \nu_2 > 0$,

$\begin{cases} \dot\theta_1 = \nu_1 \\ \dot\theta_2 = \nu_2 \end{cases}$ sul toro  (i lati paralleli sono identificati!)

(NON ha eq.!)

Ma tutte orbite periodiche se $\nu_1/\nu_2 \in \mathbb{Q}$, altrimenti una sola orbita che è tutto il toro se $\frac{\nu_1}{\nu_2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, caso in cui ω-limite $=$ $= \alpha$-limite $=$ tutta la superficie!

[ $\forall\ \frac{\pi}{e} = \frac{2\pi}{2e} \in \begin{cases} \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2e \text{ sta un n° finito di volte in } 2\pi \\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Leftrightarrow 2e \text{ sta un n° infinito di volte in } 2\pi \end{cases}$.]

X_S pt. di eq. per $\dot X = F(X) \overset{F \in C^1}{\Rightarrow} \dot X = F(X) = \cancel{F(X_S)} + \underbrace{J_F(X_S)}_{=:A}(X - X_S) +$

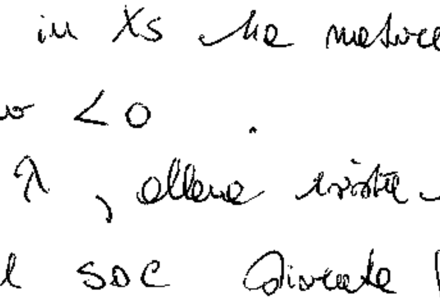
$+ \underset{X\to X_S}{o}(|X-X_S|)$; nel caso $X_S=\underline{0}$, che si può sempre supporre [illegible] Condurre uno studio qualitativo del SDC, è allora $\dot X = AX + \underbrace{\underset{X\to 0}{o}(|X|)}_{(=o(X))}$. In $n=2$ è, se $A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,

$$\begin{cases}\dot x = ax+by+f(x,y)\\ \dot y = cx+dy+g(x,y)\end{cases}, \text{ con } f,g \ \underset{(x,y)\to \underline{0}}{o}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$ (infatti:

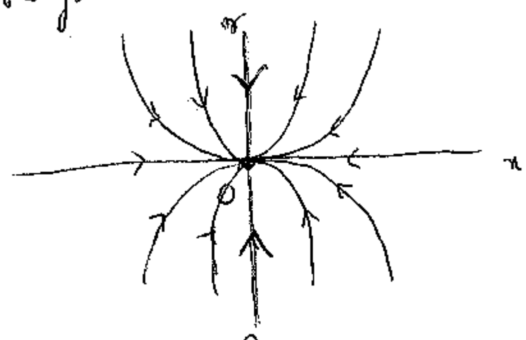
$$0\le \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{f(x,y)^2+g(x,y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$) ; se la matrice A del linearizzato può avere $\det A>0 \underset{\text{(autov. se reali ne complessi)}}{\Rightarrow} \begin{cases} \operatorname{tr}A<0 \Leftrightarrow \underline{0} \text{ POZZO}\\ \operatorname{tr}A>0 \Leftrightarrow \underline{0} \text{ SORGENTE}\end{cases}$;

$\det A<0$ implica invece che gli autovalori sono necessariamente REALI e DISCORDI: diciamo in generale che X_S è una SELLA NONLINEARE per il SDC $\Leftrightarrow$ il linearizzato del SDC in X_S ha matrice $A = J_F(X_S)$ con un aut. di A. >0 e uno <0.

Comunque, se tali autovalori sono $\mu<0<\lambda$, allora esiste base $V=[V_1|V_2]$ di $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale il SDC diventa più semplicemente $\begin{cases}\dot x = \lambda x + f(x,y)\\ \dot y = \mu y + g(x,y)\end{cases}$, che ha linearizzato di matrice

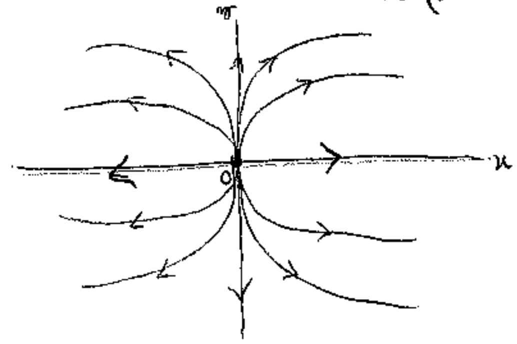
$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}x_0\\ e^{\mu t}y_0\end{bmatrix}$, "ossia" .

Una CURVA ECCEZIONALE è una curva il cui sostegno contiene orbite tali che, rispetto ad altre orbite "arbitrariamente vicine", hanno o limite diverso o anche lo stesso limite ma vi arrivano con verso o tangente differente, per $t\to+\infty$ o $t\to-\infty$. (Guardando sopra, le curve con sostegno verde/rosso sono eccezionali "per orbite" del limite diverso (0, o verso differente contro "∞") per $t\to+\infty$ / $t\to-\infty$ rispettivamente! Un esempio invece di tangente comune è dato dal nodo attrattivo o anche repulsivo :



$(\mu < \lambda < 0)$

o



$(0 < \mu < \lambda)$

[TEOREMA DI ESISTENZA DELLE CURVE ECCEZIONALI]

Uno dei nodi nonlineari ha sempre delle orbite che tendono a tale punto sia per $t \to +\infty$ sia per $t \to -\infty$; le loro traiettorie formano due insiemi B_+ e B_- agg. $\neq \emptyset$, localmente chiusi "attorno" al punto ed aventi per frontiere delle curve eccezionali.

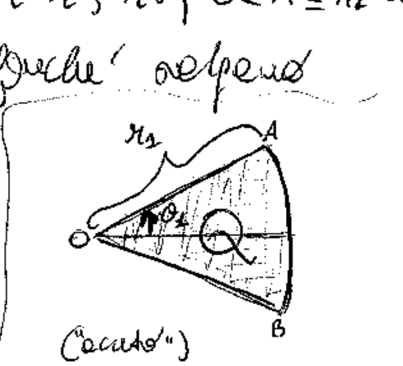
[Possiamo supporre $x_s = 0$, e $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + f(x,y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x,y) \end{cases}$ come forma; ora,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ \text{(VAR. ANGOLO!)} \end{cases} \quad (\text{cioè } x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \frac{x}{r}\dot{x} + \frac{y}{r}\dot{y} = \\ \dot{\theta} = \frac{x}{r^2}\dot{y} - \frac{y}{r^2}\dot{x} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \cancel{\frac{1}{r}}[\cancel{r}\cos(\theta)(\lambda r\cos(\theta) + o(r)) + \cancel{r}\sin(\theta)(\mu r\sin(\theta) + o(r))] \\ = \frac{1}{r^{\cancel{2}}}[\cancel{r}\cos(\theta)(\mu r\sin(\theta) + o(r)) - \cancel{r}\sin(\theta)(\lambda r\cos(\theta) + o(r))] \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = [\lambda\cos^2(\theta) + \mu\sin^2(\theta)]\, r + o(r) \\ r\dot{\theta} = \underbrace{(\mu-\lambda)}_{<0}\cos(\theta)\sin(\theta)\, r + o(r) \end{cases}$$

; per le basi in B_- (per B_+ sarà analogo), considero il settore $Q := \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi/2, \pi/2] \mid 0 < r \leq r_1 \text{ e } |\theta| \leq \theta_1\}$ dove $r_1, \theta_1 > 0$ sono "abb. piccoli" affinché valgano

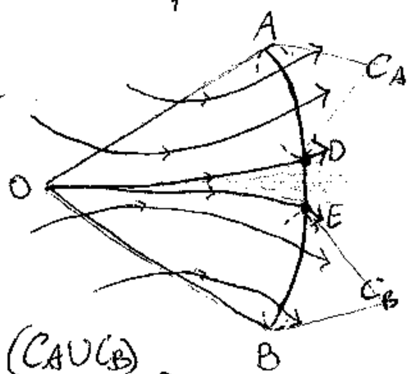


(1) $\cos(\theta) > 0$ $(\theta_1 < \pi/2)$ e $\lambda\cos^2(\theta) + \mu\sin^2(\theta) > 0$
$\left(\Leftrightarrow \mu\sin^2(\theta) > -\lambda\cos^2(\theta) \underset{(\mu<0!)}{\overset{\theta\neq 0}{\Leftrightarrow}} \tan^2(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} < \frac{-\lambda}{\mu}\right.$, cioè $|\tan(\theta)| < \sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}}$; per $\theta = 0$ in effetti $\lambda > 0$!) ;

(2) $\dot{r} > 0$ come $\lambda\cos^2(\theta) + \mu\sin^2(\theta)$, cioè r_1 abb. piccolo affinché $o(r)$ non renda $\dot{r} \leq 0$ ($(\lambda\cos^2(\theta) + \mu\sin^2(\theta))\, r$ che, per $r > 0$ e $|\theta| \leq \theta_1$, ha minimo > 0, e $o(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$! Dunque, anche se $o(r) < 0$, può esser piccolo) ;

(3) per $\lambda \le \lambda_1$, $\dot\theta<0$ per $\theta=\theta_1$ e $\dot\theta>0$ per $\theta=-\theta_1$ (per $\theta=\theta_1$, $g(\underset{\wedge 0}{\mu-\lambda})\underset{0}{\cos(\theta_1)}\underset{0}{\sin(\theta_1)}<0$: λ_1 obb. [scelto affinché $\theta(\lambda)$ non resti $\dot\theta\geq 0$]! Per $\theta=-\theta_1$, $g(\mu-\lambda)\cos(\theta_1)\sin(-\theta_1)>0$: $\theta(\lambda)$ "fuoco repulsivo"!).

Allora le orbite che passano da Q, essendo qui $\dot\lambda>0$, non possono che intersecare $\overline{OA}$ o da $\overline{OB}$ per poi uscire da $\widehat{AB}$ [Osservare ancora "da sinistra verso destra" e, ad esempio, se si entra da $\overline{OA}$ NON si può riuscire da $\overline{OA}$ stesso ($\dot\theta<0$:  !), e allora per simmetria neanche da $\overline{OB}$ (altrimenti avremmo una "collisione":  !)]; siano dunque C_A e C_B quelle parti di $\widehat{AB}$ dalle quali escono le orbite che entrano rispettivamente da $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ ($\neq\emptyset$!) : C_A, C_B sono aperti e con $C_A \cap C_B = \emptyset$ (per evitare collisioni!),

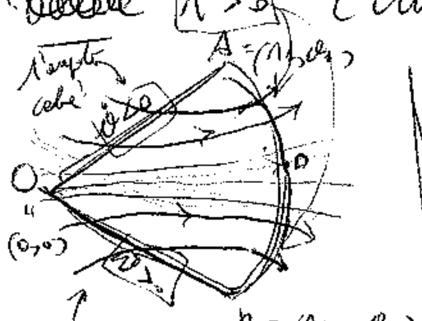


$\Rightarrow$ $\exists$ punto $D\in\widehat{AB}$ "separatore", cioè $D\in\widehat{AB}\setminus(C_A\cup C_B)$, anzi arco chiuso $\widehat{DE}\subseteq\widehat{AB}\setminus(C_A\cup C_B)$; comunque per sua definizione dovremo $\lim_{t\to-\infty}\Phi^t(D)=\underline{O}$ (cioè "provenire" da O), e lo stesso per gli altri punti in $\widehat{DE}$: allora $B_-\neq\emptyset$ e le orbite per D e per E sono curve eccezionali per definizione del $\lim_{t\to-\infty}$ di orbita orbit. asint.! □

(NOTA: abbiamo usato solo che $\lambda>0$ e $\boxed{\mu-\lambda<0}$ (non $\mu<0$), per cui vale tutto rimesso anche se $\underset{\text{(caso degenere)}}{\mu=0}$, o $\underset{\text{(nodo!)}}{0<\mu<\lambda}$ quando può le curve sono eccezionali per via delle tangenti!)

$\Rightarrow$ Una delle soluzioni è INSTABILE, per entrambi $t\to\pm\infty$

Allora $\lambda>0$ ("curve") ; ~~[illegible]~~ ok,



le soluzioni (punti) per Q devono uscire o da $\overline{OA}$ o da $\overline{OB}$ o uscire necessariamente da $\widehat{AB}$; se C_A = punti di $\widehat{AB}$ dove escono le soluzioni che entrano da $\overline{OA}$ e C_B = punti di $\widehat{AB}$ dove escono le soluzioni che entrano da $\overline{OB}$, allora sono APERTI e con $C_A \cap C_B = \emptyset$ (altrimenti si incrociano!), ma $\widehat{AB}$ è CONNESSO.

$\exists$ elemento separatore $D \in \widehat{AB} \setminus (C_A \cup C_B)$, il cui … per una potenza deve "provenire" da O, cioè $\lim_{t\to-\infty}\Phi^t(D)=O$, per per unicità … da Q punto per O ! Dunque $\exists B_- \neq \emptyset$, e può essere un solo punto D o anche un arco CHIUSO $\widehat{DE}$;

per cui per D e per E non necessariamente … tutte le orbite uscenti … che tendono a O per $t\to-\infty$; analogo per B_+.

(ii) : dato $\lambda>0$ e $\mu-\lambda\le 0$, non $\mu<0$! Dunque $\exists B_-$ anche se $\lambda>0$ e $\mu=0$, e simmetricamente $\exists B_+$ anche se $\lambda=0$ e $\mu<0$. Inoltre va bene anche il caso $0<\mu<\lambda$ … nodo, ma si trova un esempio per cui sulle traiettorie!

Una curva Σ in $\mathbb{R}^n$ è UNA SEPARATRICE del SDE … il suo … che (1) tutte le orbite con condizioni iniziali in C ~~[illegible]~~ hanno per $t\to+\infty$ lo stesso punto limite x_0, o all'altro per $t\to-\infty$;

(2) $\forall$ punto $P \in C$, $\exists$ intorno $V \in W \cap I$ tale che le orbite con punto iniziale in $V \setminus C$ non hanno ~~che punti limite~~ le sue parti limite per $t \to \pm\infty$ risp.

$\Rightarrow$ (3) ~~Ora effetti non esiste punto~~ se esiste un'orbita in C tutta contenuta in C; ciò contro C è isolato.

(Es.: $x=0, y=0$ risp. nelle stesse proprietà)

ESISTENZA E UNICITÀ: una delle varietà di tipo esattamente ~~(analogo per i nodi)~~ una separatrice, che consiste di (almeno) un'orbita / una separatrice di $\circledast$, delle risp. stab. stabile / instabile. Le sue rette all'tangente in S all'autospazio relativo a $\mu<0$; quella relativa all'tangente in S all'autospazio di λ.

(analogo per i nodi!)

$\Rightarrow$ da notare $D = E$!

$$\boxed{S=0}: \begin{cases} \dot{x} = \lambda x + f(x,y) \\ \dot{y} = \mu y + g(x,y) \end{cases} ; \quad \tilde{\Phi}^t(x_0,y_0) = (e^{\lambda t}x_0, e^{\mu t}y_0) \text{ per il linearizzato}$$

" $o(1)$ "

DIFFEOMORFISMO FLUSSO

$$\Rightarrow \Phi^t(x_0,y_0) = \left(e^{\lambda t}x_0 + F^t(x_0,y_0),\ e^{\mu t}y_0 + G^t(x_0,y_0)\right) \text{ per il SDC}$$

vicino a 0, con $(F^t, G^t) = \Phi^t - \tilde{\Phi}^t$; 0 è punto fisso iperbolico per Φ^t "discreto", "a t fisso" ($e^{\lambda t} > 1$, $e^{\mu t} < 1$), però effettuando il teorema delle varietà stabile e instabile del caso discreto! Resta solo da mostrare che non invarianti $\forall t > 0$; ma infatti $\exists$ tali curve $\forall t > 0$ per il teorema delle curve invarianti, e devono coincidere con le ~~...~~ per non violare l'unicità delle separatrici di Φ^t. ∎

SISTEMI NEWTONIANI CONSERVATIVI

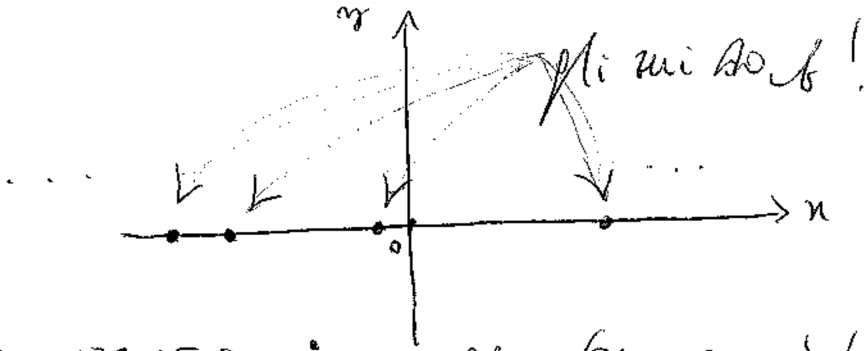
$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(x)}$ in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}, \quad \text{con } f \in C^1((a,b)).$$

(SDC in $(a,b)\times\mathbb{R}$ $(\subsetneq \mathbb{R}^2)$)

("lineare" $\triangleq$ f lineare in x)

① PUNTI D'EQUILIBRIO : $F(x,y) = (y, f(x)) =$
$= (0,0) \iff \boxed{y = 0 \text{ e } x \text{ tale che } f(x) = 0}$.



② LINEARIZZATO : se $(x_0, 0)$ è tale che $f(x_0)=0$,

allora è
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x - x_0) = y \\ \dfrac{d}{dt} y = f'(x_0)(x - x_0) \end{cases}$$

infatti $J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & 0 \end{bmatrix}$; e

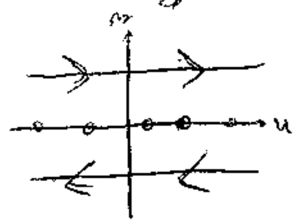
$J_F(x_0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & 0 \end{bmatrix}$ ha eq. caratt.

$$\lambda^2 - f'(x_0) = 0 \quad , \quad \text{cioè } \lambda^2 = f'(x_0) :$$

$\boxed{f'(x_0) \geq 0}$:

$\lambda_\pm = \pm\sqrt{f'(x_0)}$, $\Rightarrow$

⊙ $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ TIPO ~~Nodo~~ SELLA ;

⊙ $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$ TIPO  ;

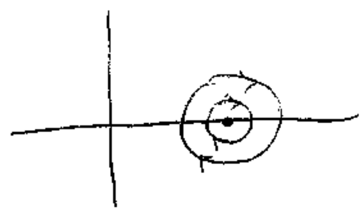
$\boxed{f'(x_0) < 0}$:

$\lambda_\pm = \pm i\sqrt{-f'(x_0)}$

complessi coniugati PURI

$\Downarrow$

|| TIPO "CENTRO" "ORARIO" ||



(3) FUNZIONE DI LYAPOUNOV : (in $(x_0,0)$)

$$E(x,y) := T(y) + V(x) = \boxed{\frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

è

C^2 in $(a,b)\times\mathbb{R}$ ed è costante lungo le soluzioni,

cioè è un INTEGRALE PRIMO :

$$\dot{E}(x,y) = \langle \nabla E(x,y) ; (\dot{x},\dot{y}) \rangle = -f(x)\underbrace{\dot{x}}_{y} + y\underbrace{\dot{y}}_{f(x)} = 0 \; ;$$

SE x_0 è DI MINIMO LOCALE FORTE per $V(x)$, (2)

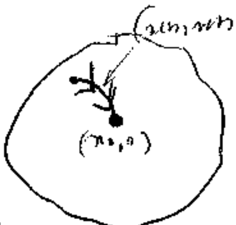
allora $(x_0,0)$ è punto d'eq. STABILE (ma NON attrattivo)

(perché E è di Lyapunov per $(x_0,0)$:

$$E(x_0,0) = 0 \quad \text{mentre} \quad E(x,v) \geq V(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(in un intorno di } (x_0,0))}}{>} V(x_0) = 0 \; ;)$$

E VARREBBE CHE x_0 NON DI MINIMO $\Rightarrow$ INSTABILE ...... (Četaev)

(NON è attrattivo: se $\exists\, U :=$ intorno di $(x_0,0)$ tale che per ogni condizione iniziale in U la soluzione converge per $t\to\infty$ a $(x_0,0)$, allora



$$(x(t), v(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} (x_0,0) \overset{\text{CONT.}}{\Rightarrow} E(x(t),v(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} E(x_0,0)=0;$$

ma è assurdo perché $E(x(t),v(t)) \equiv c > 0$!)

: i punti stazionari di V sono esattamente x_0 tali che $f(x_0)=0$, e x_0 DI MINIMO $\Leftrightarrow V''(x_0) = -f'(x_0) > 0$, cioè $f'(x_0) < 0$.

$\Rightarrow$ le traiettorie sono esattamente le CURVE DI LIVELLO DI E. Ora,

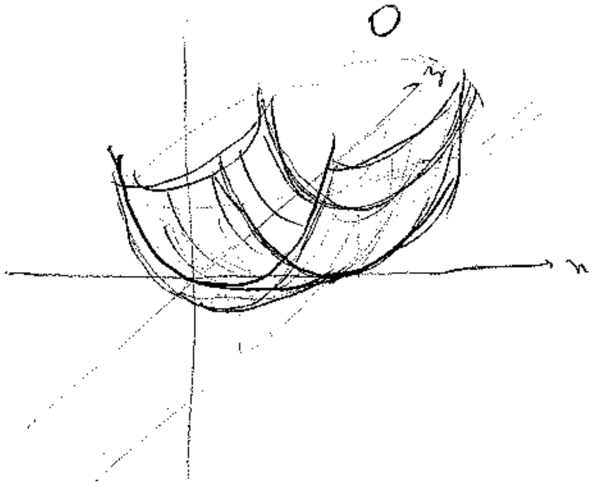
essendo E int. primo (ed essendo in $\mathbb{R}^2$)

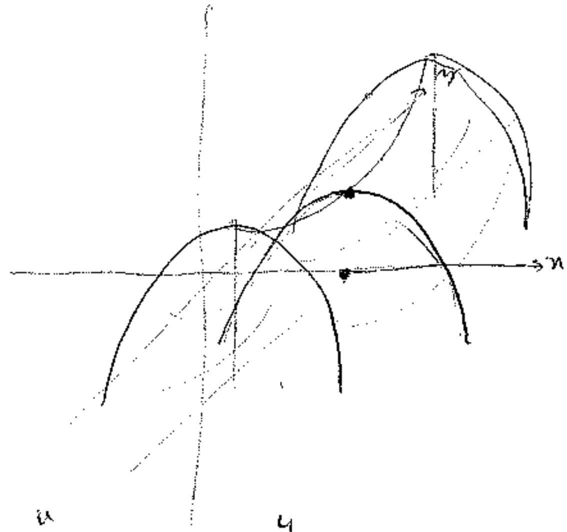
$$\begin{cases} \nabla E(x,v) = (-f(x), v) \\ H_E(x,v) = \begin{bmatrix} -f'(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

E ha esatt. punti stazionari i punti d'eq. $(x_0,0)$ tali che $f(x_0)=0$, e QUI $f'(x_0) < 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (x_0,0)$ DI MINIMO LOC. FORTE per E (in effetti per V), mentre $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ DI SELLA (di massimo per V).

MA INFATTI

$$E(x,y) = \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\geq 0} + V(x)$$, dunque in $(x,0)$





Disegno $V(x)$, e per $y>0$ "la alzo" in maniera quadratica, per poi avere lo stesso per $y<0$ in modo simmetrico rispetto all'asse x;

Ora, se $f'(x_0) = -V''(x_0) \neq 0$, allora

$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) \underset{\substack{\text{Via Taylor} \\ \text{(con PEANO)}}}{=} \frac{y^2}{2} + V(x_0) + \cancel{V'(x_0)(x-x_0)} +$$

$$+ \frac{1}{2} V''(x_0)(x-x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}((x-x_0)^2) = \frac{y^2}{2} + V(x_0) - \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

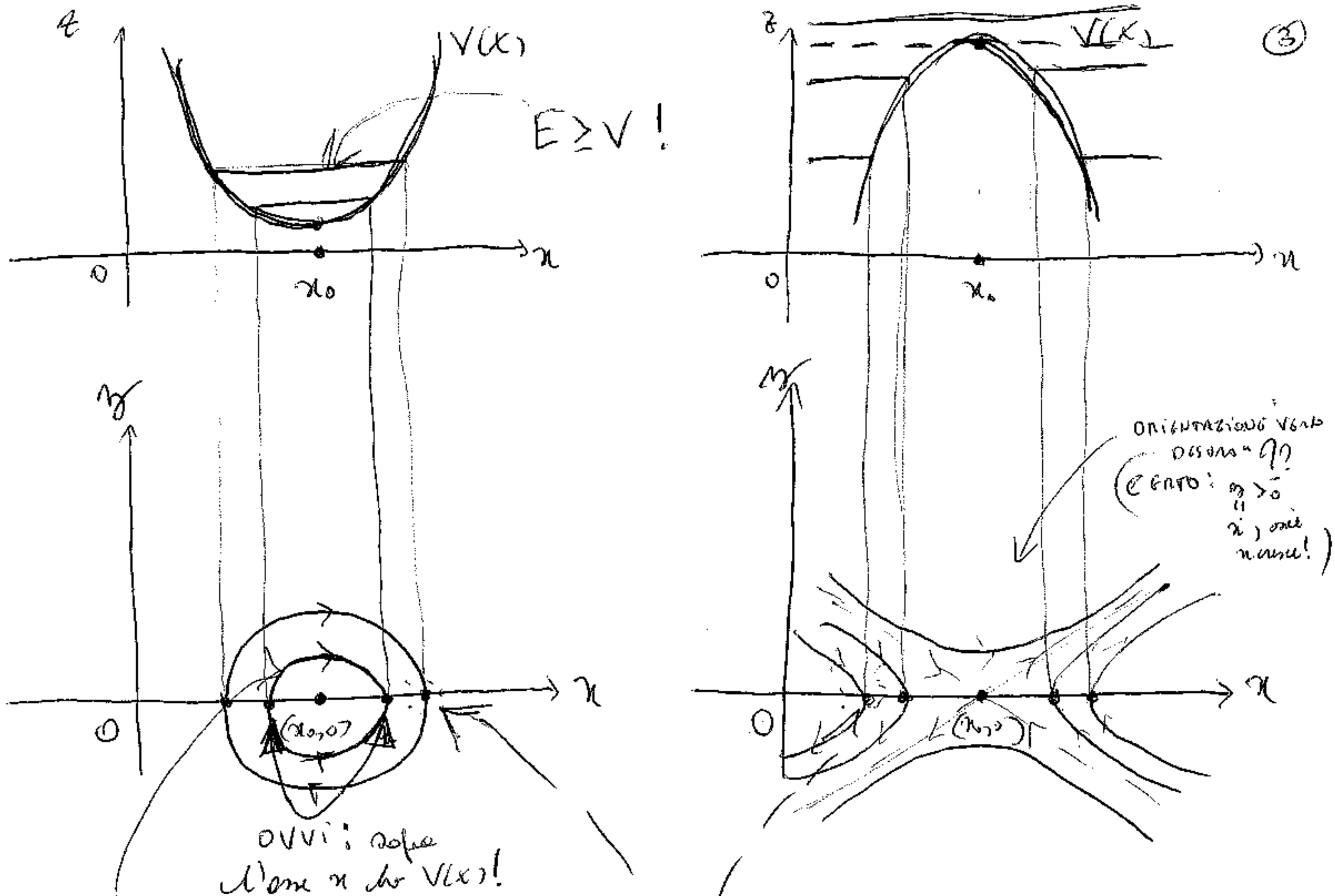
$\dots$, dunque $\{(x,y) \mid E(x,y) = \text{cost}\} \simeq$

$$\boxed{-f'(x_0)(x-x_0)^2 + y^2 = \text{cost}'}$$

→ ellisse per $f'(x_0) < 0$ (MIN)

→ iperbole per $f'(x_0) > 0$ (MAX).

Allora diviene ovvio il disegno



Il cilindro non appare stato disegnato! È come il cilindro.

Il tangente delle curve di livello sono $\perp$ all'asse x DOVE $f(x_1)\neq 0$, perché curve di livello di E $\perp$ grad E $= (-f(x_1), \underset{0}{\underset{\parallel}{y}})$ in $(x_1, 0)$

Se $f'(x_0)=0$, e se f è C^n con $n\geq 2$, sviluppo ulteriormente V per ottenere "risultati simili".

APPLICAZIONE al PENDOLO NONLINEARE CONSERVATIVO.

Con $g, l > 0$, $\boxed{\ddot\vartheta = \underbrace{-\frac{g}{l}\sin(\vartheta)}_{f(\vartheta)\in C^\infty(\mathbb{R})\ \text{NONLINEARE}}}$ su $\mathbb{R}$,

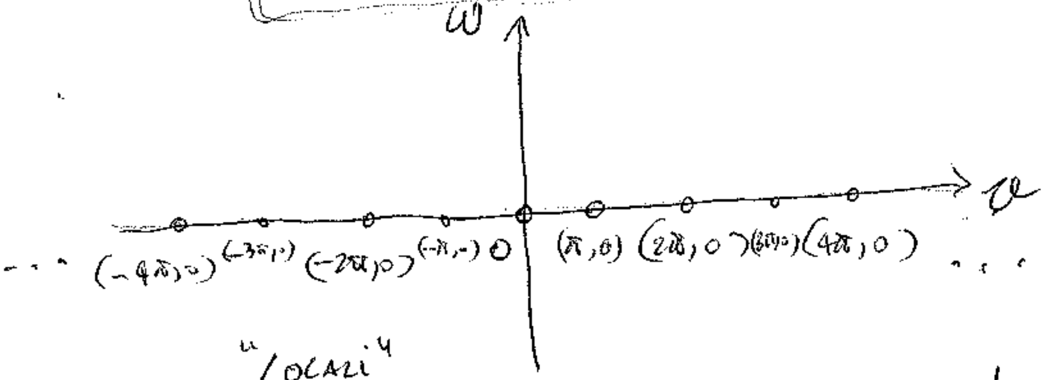
Ossia

$$\begin{cases}\dot\vartheta=\omega\\ \dot\omega=-\frac{g}{l}\sin(\vartheta)\end{cases}$$ su $\mathbb{R}^2$ (C^∞ NONLINEARE).

(1) PUNTI D'EQ.: tutti e soli gli $(\vartheta_0,0)$ con

$f(\vartheta_0) = -\frac{g}{l}\sin(\vartheta_0) = 0$, CIOÈ

$$\boxed{(\vartheta_0,0)=(k\pi,0)\quad \forall k\in\mathbb{Z}}$$



(2) DEDUZIONI "LOCALI" DAL LINEARIZZATO: $f'(\vartheta) =$

$= -\frac{g}{l}\cos(\vartheta) \Rightarrow \begin{cases} f'((2m+1)\pi) = g/l > 0 & \text{(TIPO SELLA)} \quad \forall m\in\mathbb{Z} \\ f'(2m\pi) = -g/l < 0 & \text{(TIPO CENTRO "ORARIO")}\end{cases}$

(3) DEDUZIONI "GLOBALI" DALL'INTEGRALE PRIMO DELL'ENERGIA:

$E(\vartheta,\omega) = \frac{\omega^2}{2} + V(\vartheta)$, $V(\vartheta) = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \underbrace{f(t)}_{-\frac{g}{l}\sin(t)}\,dt =$

$= -\left[\frac{g}{l}\cos(t)\right]_{\vartheta_0}^{\vartheta} = -\frac{g}{l}\cos(\vartheta) + \frac{g}{l}\cos(\vartheta_0)$, onde

$$\boxed{E(\vartheta,\omega) = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{g}{l}\cos\vartheta_0}$$ è DI LYAPUNOV

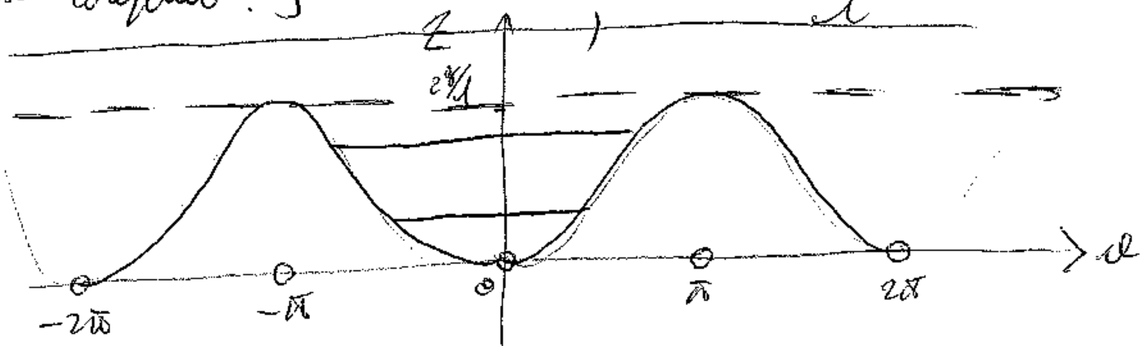
per $(\vartheta_0,0)$ le cui curve di livello sono solamente le traiettorie del SDC. Non solo: queste le ricavo dal grafico di $V(\vartheta)$! Ecco

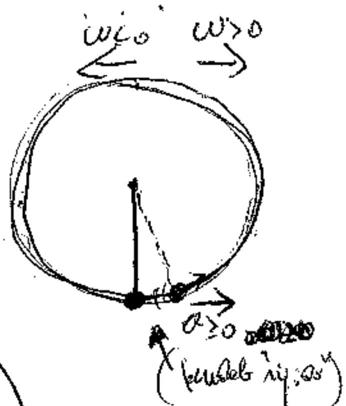
$$V''(\vartheta_0) = -f'(\vartheta_0) \begin{cases} <0 & \text{se } \vartheta_0 = (2n+1)\pi \\ >0 & \text{se } \vartheta_0 = 2n\pi \end{cases}$$

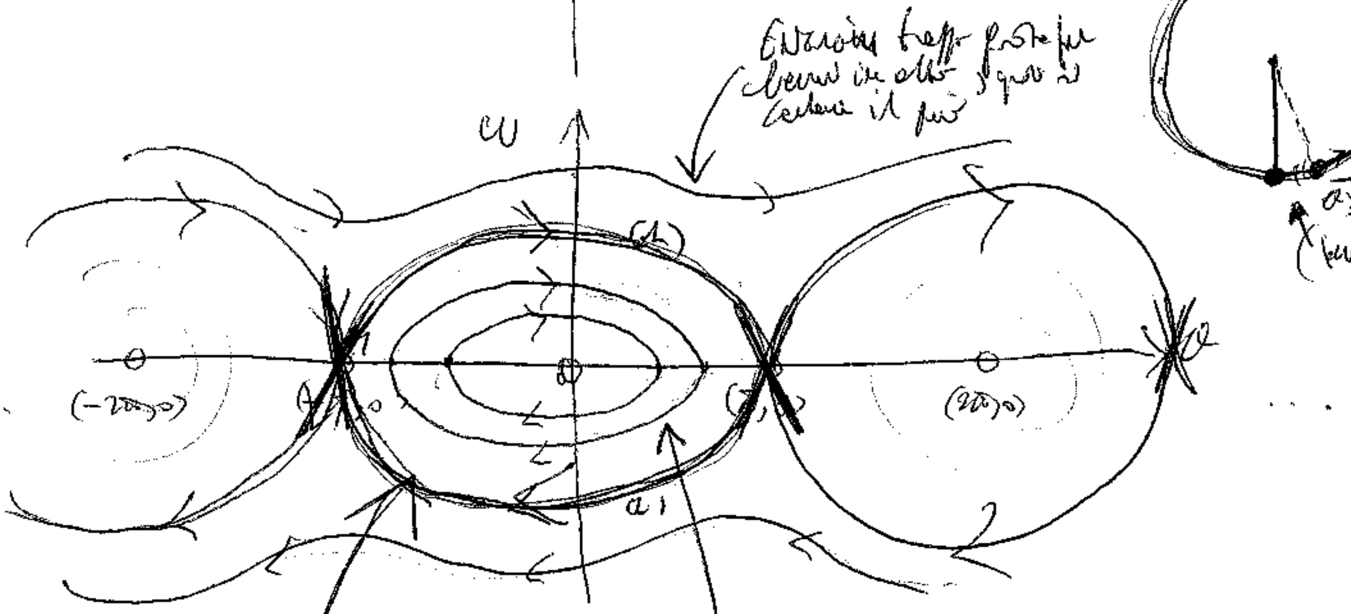
(4)

$(\forall n \in \mathbb{Z})$ → MAX LOC PUNTO $(2g/l)$
→ MIN LOC. PUNTO (0)

(NON completo!)

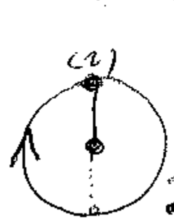






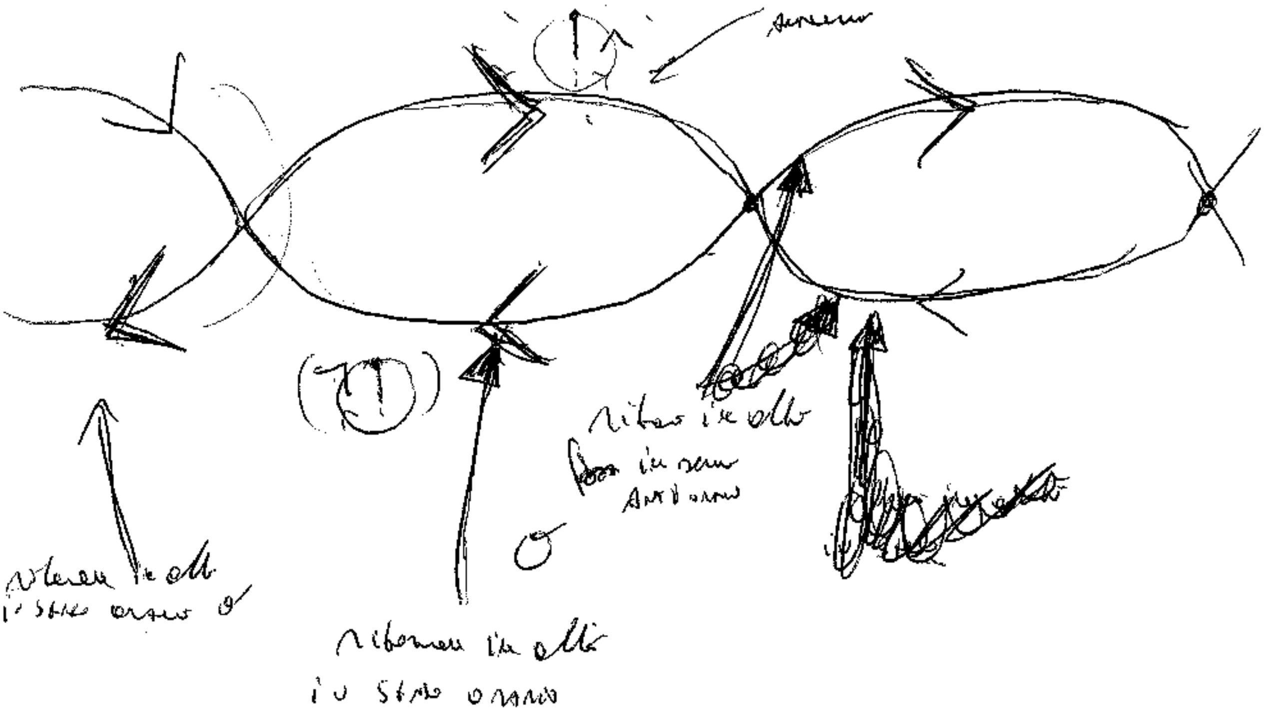
Esattamente l'energia che serve per venire "in alto" (caso "equilibrio")

Energia, sia cinetica sia potenziale, INSUFFICIENTE sia per venire "in alto" sia per ritornare un giro



• NOTIAMO CHE IN ETERNO continuo a far giri $(E > 2g/l)$, più o meno "violentemente", o in eterno continuo a oscillare attorno al suo, più o meno "violentemente" (ma non troppo! $E < \frac{2g}{l}$);

• NEI PUNTI DI SELLA, può accadere



Se ci fosse dissipazione (cioè nel caso reale!), avremo <u>sempre</u> tornare ad un punto d'equilibrio di quello

$(2n\pi, 0)$ (V_{min}) ......

SISTEMI NEWTONIANI DISSIPATIVI (1)

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \gamma\frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{\gamma>0}$$

in $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$, dove f è C^1;

CIOÈ

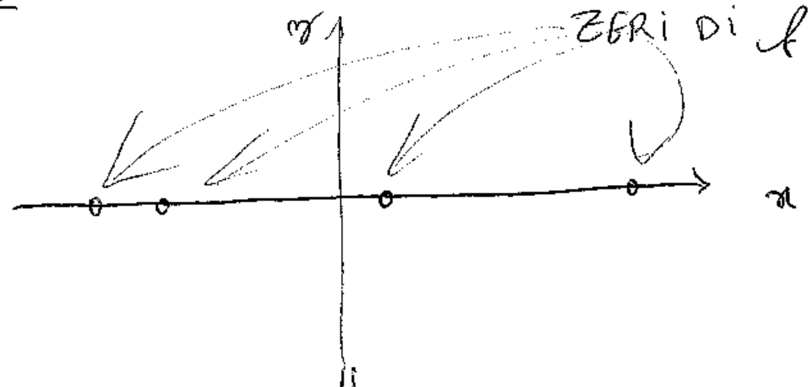
$$\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = f(x)-\gamma y\end{cases}$$

(SDC in $(a,b)\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$, "lineare" $\Leftrightarrow$ f è lineare in x).

(1) PUNTI D'EQUILIBRIO: $\underbrace{(y,\ f(x)-\gamma y)}_{F(x,y)} = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\boxed{(x,y)=(x_0,0) \quad \text{CON } f(x_0)=0}$$

, cioè sono gli stessi del caso $\gamma=0$.



(2) ANALISI NELLE VICINANZE DI UN PUNTO D'EQ. TRAMITE IL LINEARIZZATO:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix}0&1\\f'(x)&-\gamma\end{bmatrix}$$

$\left(J_F(x_0,0)=\begin{bmatrix}0&1\\f'(x_0)&-\gamma\end{bmatrix}\right)$ ha eq. caratteristica

$$\boxed{\lambda^2+\gamma\lambda-f'(x_0)=0}, \Leftrightarrow \lambda_\pm = \frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+4f'(x_0)}}{2} =$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+f'(x_0)}$$

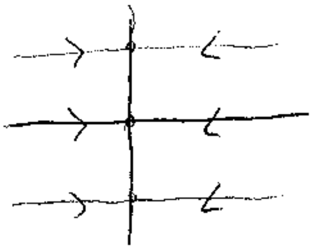
; essendo $f'(x_0)>0 \not\Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+f'(x_0)} > \frac{\gamma}{2}$, e allora

$$\begin{cases} f'(x_0)>0 \Rightarrow (x_0,0) \text{ DI SELLA} \\ f'(x_0)<0 \Rightarrow (x_0,0) \text{ POZZO} \end{cases}$$

, perché o $\lambda_\pm$ sono entrambi reali <0 (NODO) o $\lambda_\pm$ sono complessi coniugati con parte reale $-\gamma/2<0$ (FUOCO) (come quando γ è "piccolo" rispetto a f), in particolare (LOC.)

ASINTOTICAMENTE STABILE;

($\boxed{f'(x_0)=0}$: $\begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ (LOC.!) TIPO  .)

(3) ANALISI "GLOBALE" MEDIANTE LYAPUNOV:

$\forall (x_0,0)$ d'eq., $E^{(x_0)}(x,y) = \frac{y^2}{2} + V^{(x_0)}(x) := \frac{y^2}{2} - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

è almeno C^2 in $(a,b)\times\mathbb{R}$, $E(x_0,0)=0$,

$E(x,y) \geq V(x) > V(x_0) = 0$ nell'intorno di un MINIMO LOCALE FORTE DI V ($f'(x_0) \lneq 0$!),

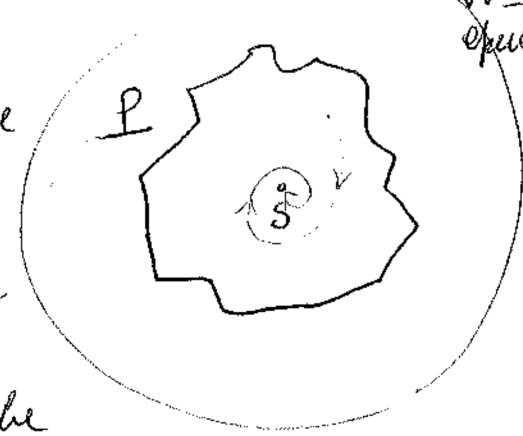
e $\dot{E}(x,y) = \langle \nabla E(x,y); (\dot{x},\dot{y}) \rangle = -f(x)\cdot \underbrace{\dot{x}}_{y} + y \cdot \underbrace{\dot{y}}_{f(x)-\gamma y} =$

$= -\gamma y^2 \leq 0$, dunque

$\boxed{E(x,y) = \frac{y^2}{2} \underbrace{- \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}_{V(x)}}$ è di Lyapunov per $(x_0,0)$ con x_0 DI MINIMO FORTE per $V(x)$, Dunque, anche se x_0 è degenere, però è STABILE.

In realtà comunque $(x_0, 0)$ DI MINIMO LOC. FORTE per $V(x)$ $\Longrightarrow$ $(x_0, 0)$ ASINTOTICAMENTE STABILE.

Vogliamo usare il teorema delle funzioni di Lyapunov DECRESCENTE:



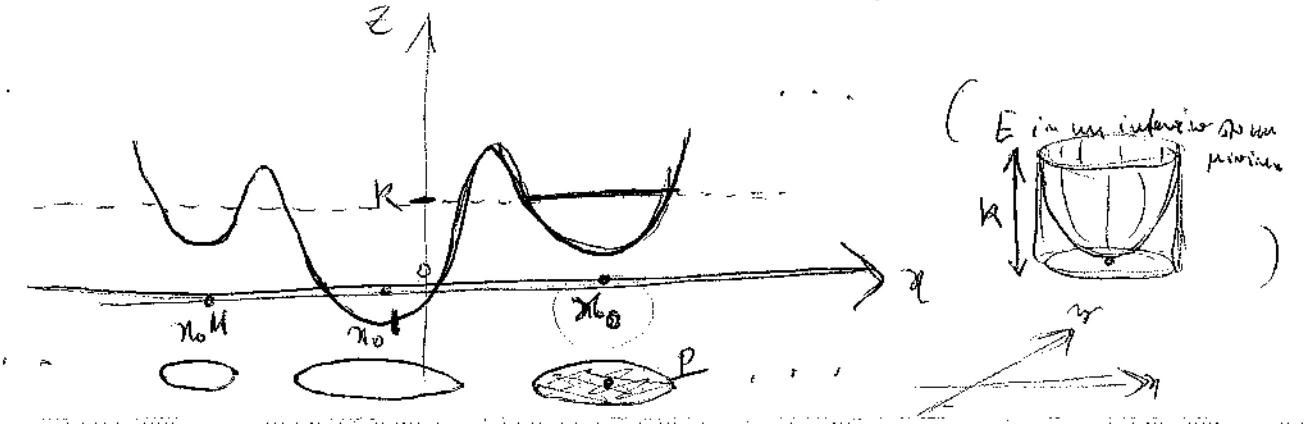
se S è punto d'eq. (per un SDC su W) e se ammette funzione di Lyapunov definita su tutto W ($\Rightarrow S$ stabile), allora

se $\exists\, P \subsetneq W$ INTORNO DI S tale che

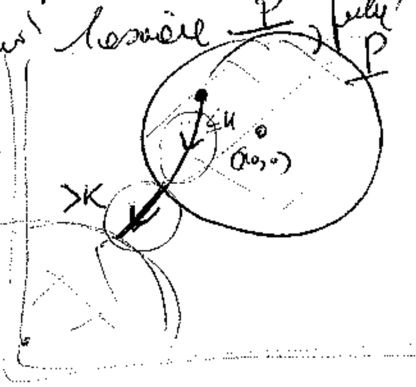
(1) P è compatto, (2) è POSITIVAMENTE INVARIANTE, e (3) V è strett. decrescente su ogni soluzione in P (salvo che su S!), allora $\Longrightarrow$ S è asintoticamente stabile $(t \to \infty)$ e

P è contenuto nel bacino di attrazione di S.

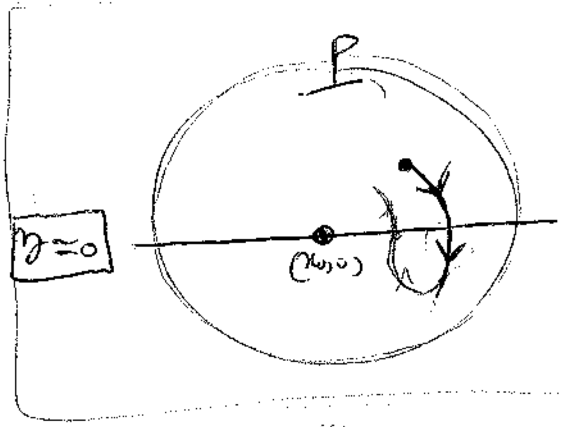
Allora, $\forall (x_0, 0)$ di eq. tale che x_0 sia di minimo per V (FORTE), intanto $E(x,v)$ è effettivamente di L. SU TUTTO $(a,b) \times \mathbb{R}$; ora, $(x_0, 0)$ è ancora di minimo (forte) per $E(x,v)$, dunque per K

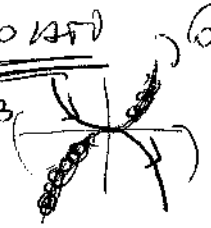


"estremo" $> E(x_0,0)$ la compatto contiene $(x_0,0)$ nell'interno (chiaro) $Q_K := \{(x,v) \in (a,b)\times\mathbb{R} \mid E(x,v) \le K\}$ è il $\underline{P}$ che cerchiamo: infatti $(x_0,0) \in \underline{P}$; è compatto ed è "allora" POS. INVARIANTE: infatti, per ogni cond. iniziale (al tempo 0!), la corrisp. soluzione NON può lasciare $\underline{P}$, perché E è decrescente lungo le soluzioni; ma il fatto che la soluzione NON esce da un compatto $\Rightarrow$ è definita $\forall\, t \underset{(-)}{\geq} 0$



Dunque, $t \mapsto E(x(t),v(t))$ è STRETT. DECRESC. lungo tali semiorbite: infatti (I) $\forall$ cond. iniz., la soluz. corrisp. NON si ferma nell'asse $y=0$, (perché $\forall\, x \neq x_0$ in $\underline{P}$ è $\dot{y} = f(x) - \gamma \cdot 0 = f(x) \neq 0$ (NON ci sono ALTRI punti d'eq. in $\underline{P}$!!!)), e



(II) $\dot{E}(x,v) = -\gamma y^2 = 0 \iff y=0$, per cui $t \mapsto E(x(t),v(t))$ ha derivata che si annulla SOLO per t isolati, dunque è strett. decresc. (come $t \mapsto -t^3$  !).

$\Rightarrow$ $(x_0,0)$ è asint. stabile, ma non solo: $\underline{P}$ fa parte del bacino (d'attrazione) di $(x_0,0)$!

XI

APPLICAZIONE AL

PENDOLO NONLINEARE DISSIPATIVO (3),

cioè è $l\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}+\gamma l\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+g\sin(\vartheta)=0$, con $\gamma, l, g>0$,

cioè

$$\boxed{\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\underbrace{-\frac{g}{l}\sin(\vartheta)}_{=:f(\vartheta)}-\gamma\frac{\partial\vartheta}{\partial t}}$$

), cioè

($C^\infty(\mathbb{R})$, NONLINEARE)

$$\begin{cases}\dot\vartheta=\omega\\ \dot\omega=-\frac{g}{l}\sin(\vartheta)-\gamma\omega\end{cases}\quad(\text{in tutto } \mathbb{R}^2)$$

(1) PUNTI D'EQ. : $(\vartheta,\omega)=(\vartheta_0^{(k)},0)$ con $\vartheta_0^{(k)}=k\pi$ $\forall k\in\mathbb{Z}$;

(2) ANALISI "LOCALE" TRAMITE LINEARIZZATO : $f'(\vartheta)=-\frac{g}{l}\cos(\vartheta)$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(\vartheta_0^{(2k+1)})=\frac{g}{l}>0 \longrightarrow \text{SELLA};\\ f'(\vartheta_0^{(2k)})=-\frac{g}{l}<0 \longrightarrow \text{POZZO, dunque asint. stabile}\end{cases}\quad(\forall k\in\mathbb{Z})$$

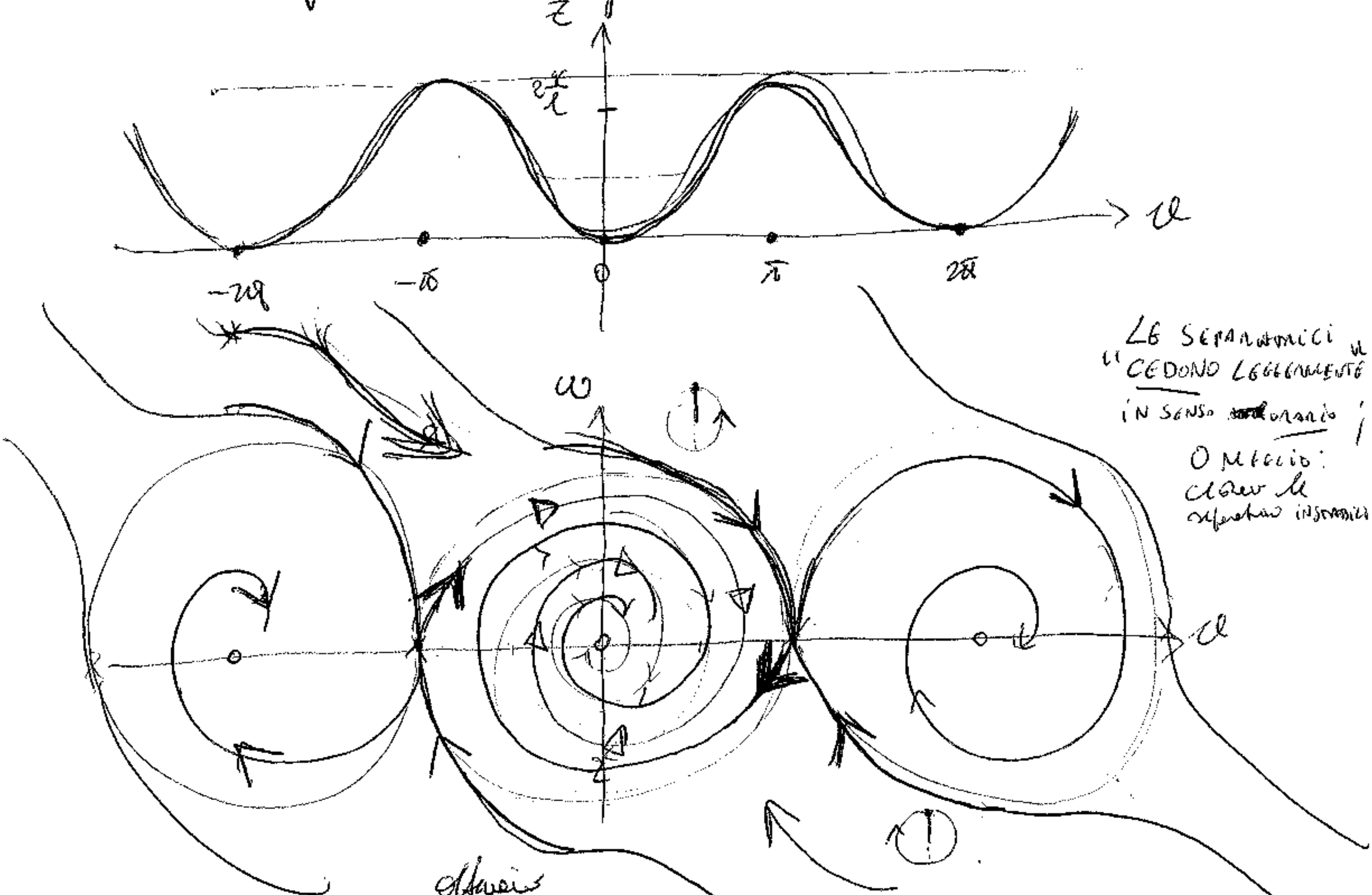
(FUOCO: γ piccolo rispetto a g/l!)

(3) ANALISI "GLOBALE" TRAMITE LYAPUNOV :

$$E(\vartheta,\omega)=\frac{\omega^2}{2}+V(\vartheta)=\frac{\omega^2}{2}-\frac{g}{l}\cos(\vartheta)+\frac{g}{l}\cos(\vartheta_0^{(k)})$$

è di L. (globale) per $(\vartheta_0^{(2k)},0)$ $(k\in\mathbb{Z})$, in questo ($\forall k\in\mathbb{Z}$) $(\vartheta_0^{(2k)},0)$ è DI MINIMO LOC. FORTE (NON dunque, anche) di $V(\vartheta)$ $\left(V'(\vartheta)=-f(\vartheta),\ V''(\vartheta)=-f'(\vartheta),\ >0 \text{ in } \vartheta_0^{(2k)}\ \forall k\in\mathbb{Z}\right)$;

E NON è più un integrale primo che "regola" le traiettorie, MA respiro quello nelle valle e quello fosso, e ottiene anche capito chi sono gli insiemi pos. INVARIANTI, fra cui che corrisp. sotto il grafico di $V(\alpha)$:



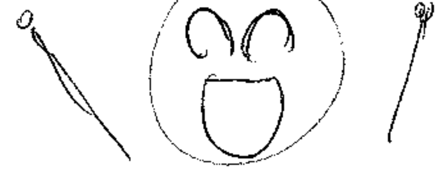
"LE SEPARATRICI "CEDONO LEGGERMENTE" IN SENSO orario; O MEGLIO: CEDONO LE SEPARATRICI INSTABILI

⊙ $\forall$ $0 < K < 2\frac{g}{l}$, dato il $\mathcal{P}$ (sì fine!) da un pozzo, che dunque è pos. invariante e bacino di tale fosso;

⊙ Per $\boxed{K = 2\frac{g}{l}}$ accade "in alto", ma i due casi si possono confrontare;

⊙ Per $K > 2g/l$, ci sono nuovi pozzi, e allora il BACINO è quello delimitato dalle separatrici.

(L'interpret. dovrebbe essere immediata!)



SISTEMI GRADIENTE! ①

("O NEWTONIANI TOTALMENTE DISSIPATIVI")
(PER $m=2$!)

$$\boxed{\dot{X} = F(X) = -\nabla U(X) \;,\; U \in C^2(W)} \;,$$

cioè F è conservativo; ricordiamo che condizione necessaria affinché F sia conservativo è che sia "CHIUSO" (confrontando con le forme differenziali esatte), e tale condizione è SUFFICIENTE su un semplicemente connesso A.

qui avere curve e chiuse in A può essere "ridotta ad un punto" senza mai uscire da A

per ogni coppia di punti, $\exists$ arco di curva continua che li congiunge, tutto in A

① PUNTI D'EQUILIBRIO: sono esattamente i punti stazionari di U (cioè X_0 tali che $\nabla U(X_0) = 0$).

② ANALISI LOCALE MEDIANTE "LINEARIZZATO":

$J_F(X) = -H_U(X)$ (ha solo autovalori reali, perché $U \in C^2 \Rightarrow H_U(X)$ simmetrica!) $\Rightarrow$ un X_0 di eq. è

POZZO $\Leftrightarrow -H_U(X_0)$ è def. NEG. $\Leftrightarrow H_U(X_0)$ è def. POS., cioè X_0 DI MINIMO (LOC.) NON DEGENERE per U (ASINTOT. STABILE!)

SORGENTE $\Leftrightarrow X_0$ DI MASSIMO (LOC.) NON DEGENERE per U;

NON DEFINITA, ossia almeno un autovalore <0 e uno >0 $\Rightarrow$

SELLA (instabile!).

(B) ANALISI GLOBALE MEDIANTE "LYAPOUNOV": per x_0 d'eq.,

ANZI DI MINIMO NON DEGENERE

$$\boxed{L(x) := U(x) - U(x_0)}$$ è

funzione di Lyapunov STRETTA e stabile; infatti

$U(x) \in C^2(W) \Rightarrow$ tale è $L(x)$, in un intorno di x_0 è

$L(x) = \underbrace{U(x)}_{> U(x_0)} - U(x_0) > 0$ mentre $L(x_0) = 0$, e

$$\dot{L}(x) = \dot{U}(x) = \langle \nabla U(x); \underbrace{\dot{x}}_{-\nabla U(x)} \rangle = -\|\nabla U(x)\|^2 < 0 \text{ in}$$

un intorno di x_0 (ECCETTO x_0), infatti x_0 non singolare $\Rightarrow$

isolato.

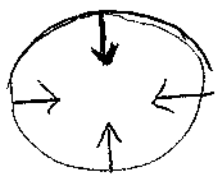
In realtà è facile anche esibire intorno di x_0 che facciano parte del suo bacino (di attrazione): $\forall \varepsilon > 0$, $Q_\varepsilon := \{x \in W \mid U(x_0) \leq U(x) \leq U(x_0) + \varepsilon\}$ (chiuso!) contiene x_0 (e sta in W), e per $\varepsilon > 0$ "abbastanza piccolo" la componente connessa Z di x_0 in Q_ε NON CONTIENE altri punti d'eq. (eccetto x_0); ma Z è COMPATTA e POS. INVARIANTE (è ovvio che, $\forall$ cond. iniz. in Z, la corrisp. soluzione NON può lasciare Z PER DECRESC. di L (tranne x_0); ma non lascia un compatto $\Rightarrow$ è definita $\forall t \geq 0$),

d'altra parte L è STRETT. decr. nelle soluzioni in $Z \setminus \{x_0\}$ (non ci sono altri punti d'eq.!): allora (TEOREMA L. DECRESC.)

(X_0 è asint. stabile $(t\to\infty)$ e) Σ fa parte del bacino attrattivo di X_0.

È chiaro che facendo tale costruzione per $E\uparrow$ fino all'altro ad un massimo o una sella.

NOTA: $F(X) = -\nabla U(X) \perp$ alle linee di livello $U(X)=\text{cost}$:



; nel caso di un sist. Newtoniano,

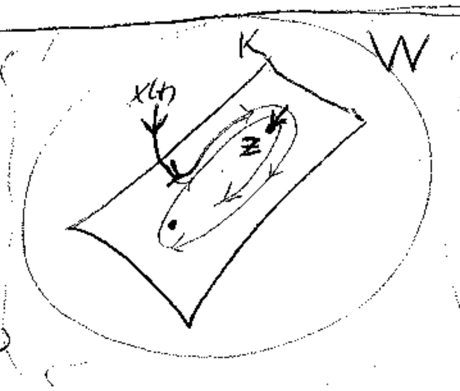
$\gamma=0 \Rightarrow F(X)$ è tangente alle linee di livello $E=\text{cost}$. (sono loro stesse le traiettorie, ossia le LINEE DI CAMPO!)

$\gamma>0$ (piccolo) $\Rightarrow F(X)$ è "poco meno" che tangente alle linee di livello di $E=\text{cost}$: ; è come se allora un sistema gradiente fosse uno "newtoniano con γ enorme"!

In realtà

se una soluzione $X(t)$ di $\dot X = -\nabla U(X)$ è tale da mantenersi definitivamente in un COMPATTO $K \subsetneq W$, e se i punti staz. di U sono ISOLATI, allora $\exists \lim_{t\to\infty} X(t)$ ed è $=$ un punto stazionario di U (in K).

$X(t)$ si mantiene def. $\forall t\ge\bar t$ in un compatto $\Rightarrow X(t)$ è definita $\forall t\ge \bar t$, per cui ha senso parlare di $\lim_{t\to\infty}$; d'altra parte K compatto $\Rightarrow$ ogni successione di suoi punti



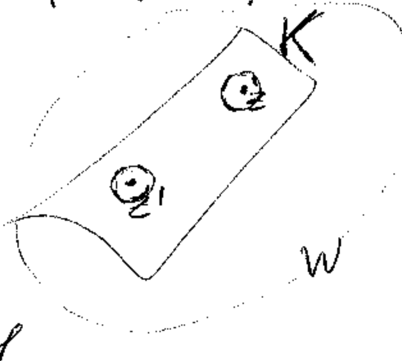
ammette valore limite in K, ossia si può estrarre sottosucc. conv. in K; $\exists$ dunque $(t_m)_{m\ge 1} \uparrow \infty$ ($t_m \ge \bar{t}$ $\forall m \ge 1$) tale che

$X(t_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} Z \in K$, $\overset{\text{CONT.}}{\Rightarrow} U(X(t_m)) \xrightarrow[m\to\infty]{} U(Z)$.

Ora, sia $Y(t)$ la solu. corrisp. alla cond. iniziale $Y(0)=Z$; essendo in questo caso $\dot{U}(X) = -\|\nabla U(X)\|^2 \le 0$, $\forall s \ge 0$ è $U(Y(s)) \le U(Z)$; se $\exists\, s>0$ tale che $U(Y(s)) < U(Z)$, allora poiché, per m "adeguatamente" grande, ~~…~~ $X(t_m)$ "abbast." vicino a $Z = Y(0)$ affinché $X(t_m+s)$ sia "abbast." vicino a $Y(s)$ (CONTINUITÀ DEL FLUSSO!), $\overset{\text{CONT.-}U}{\Rightarrow}$

~~…~~ $U(X(t_m+s))$ è abbast. vicino a $U(Y(s))$ per $m \to \infty$, che è ASSURDO perché $U(X(t_m+s)) \xrightarrow[m\to\infty]{} U(Z) > U(Y(s))$.

Dunque, $\forall s \ge 0$, $U(Y(s)) = U(Z) \Rightarrow$ ~~quindi~~ Z è DI EQUILIBRIO (altrimenti $U(Z) > U(Y(s))$ o abb. picc.!). È chiaro allora che Z è l'unico valore limite possibile: i punti d'eq. sono ISOLATI per ipotesi, dunque se ce ne fosse un altro allora sconnetterebbe l'ω-limite di $X(t)$ (È INVECE CONNESSO perché $X(t)$ sta definitivamente in un compatto!!).



proprietà COMPATTI + di U + "intersezione"!

ESERCIZIO: $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$, A $m \times m$ reale (1)

(SISTEMI LINEARI)

$\Phi^t(X_0)$ è definito $\forall X_0 \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ed è esattamente

(TEOREMA DI CONVERGENZA DI $\exp(At)$)

$$\boxed{\Phi^t(X_0) = \exp(At)X_0}$$, dove $\exp(At) =$

$$= \sum_{k \geq 0} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + \dots$$

Risolvere un SDC definito dal campo F È precisamente trovare le sue LINEE DI CAMPO; se F è lineare come in questo caso, allora è ovvio che anche avendo trovato gli $\boxed{\text{autovalori di } A}$, dopo di che' bisognerà ancora saper calcolare $\exp(At)$ dalla $\boxed{\text{forma canonica}}$ di Jordan (reale) di A.

Sottolineiamo che $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ il solo punto di equilibrio di tale sistema è lo $\boxed{0}$ (altrimenti ce ne sono infiniti!). □

ESERCIZIO: $\ddot{x} = f(x)$, $f \in C^1((a,b))$, CIOÈ

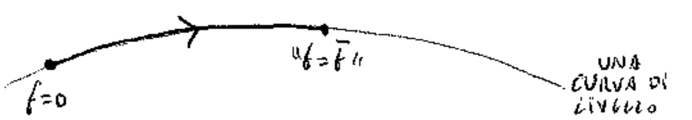
(SISTEMI NEWTONIANI CONSERVATIVI)

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \in C^1((a,b) \times \mathbb{R})$. Le traiettorie delle soluzioni sono esattamente le $\boxed{\text{curve di livello}}$ dell'integrale primo

$$E(x,y) = T(y) + V(x) := \frac{y^2}{2} + \left(-\int f(x)dx\right) \quad \in C^2((a,b) \times \mathbb{R})$$

(magari le soluzioni non sono definite per t finito, ma comunque "occupa tutta la curva di livello" per il TEO. DI CONTINUAZIONE DELLE SOLUZIONI:

$t \to \bar{t} \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ esce da qualsiasi compatto contenuto in $(a,b)\times\mathbb{R}$, dunque NON è possibile che



(su tratto [illegible]), le quali si ricavano facilmente ragionando sul grafico di V $z=V(x)=$
$=E(x,0)$.

Osserviamo che $\nabla E(x,y)=\begin{bmatrix} -f(x) \\ y \end{bmatrix}$, $\Rightarrow H_E(x,y)=\begin{bmatrix} -f'(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ora, tutti e soli i P. D'EQ. sono $\boxed{\text{gli } (x_0,0) \text{ con } f(x_0)=0}$, cioè i punti stazionari di V (cioè di E), e della matrice del linearizzato $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x) & 0 \end{bmatrix}$, che ha eq. caratt. $\lambda^2=f'(x)$,

deduciamo che [1] $f'(x_0)>0 \Rightarrow (x_0,0)$ è SELLA NONLINEARE,
(cioè x_0 di MAX. per V, cioè $(x_0,0)$ di SELLA per E)

TEO. DI ESISTENZA DELLE CURVE ECCEZIONALI
$\Rightarrow$ INSTABILE, e tale che anzi $\exists!$ DUE SEPARATRICI, una stabile e una instabile; [2] $f'(x_0)<0 \Rightarrow (x_0,0)$ è loc. di
(cioè x_0 di MIN. per V, cioè $(x_0,0)$ di MIN. per E)

tipo CENTRO; la sua stabilità è dovuta al fatto che

$E(x,y)=\frac{y^2}{2}+\left(-\int_{x_0}^{x} f(s)ds\right)$ è di Lyapunov per $(x_0,0)$

(anche se x_0 fosse di minimo degenere), ma E integrale

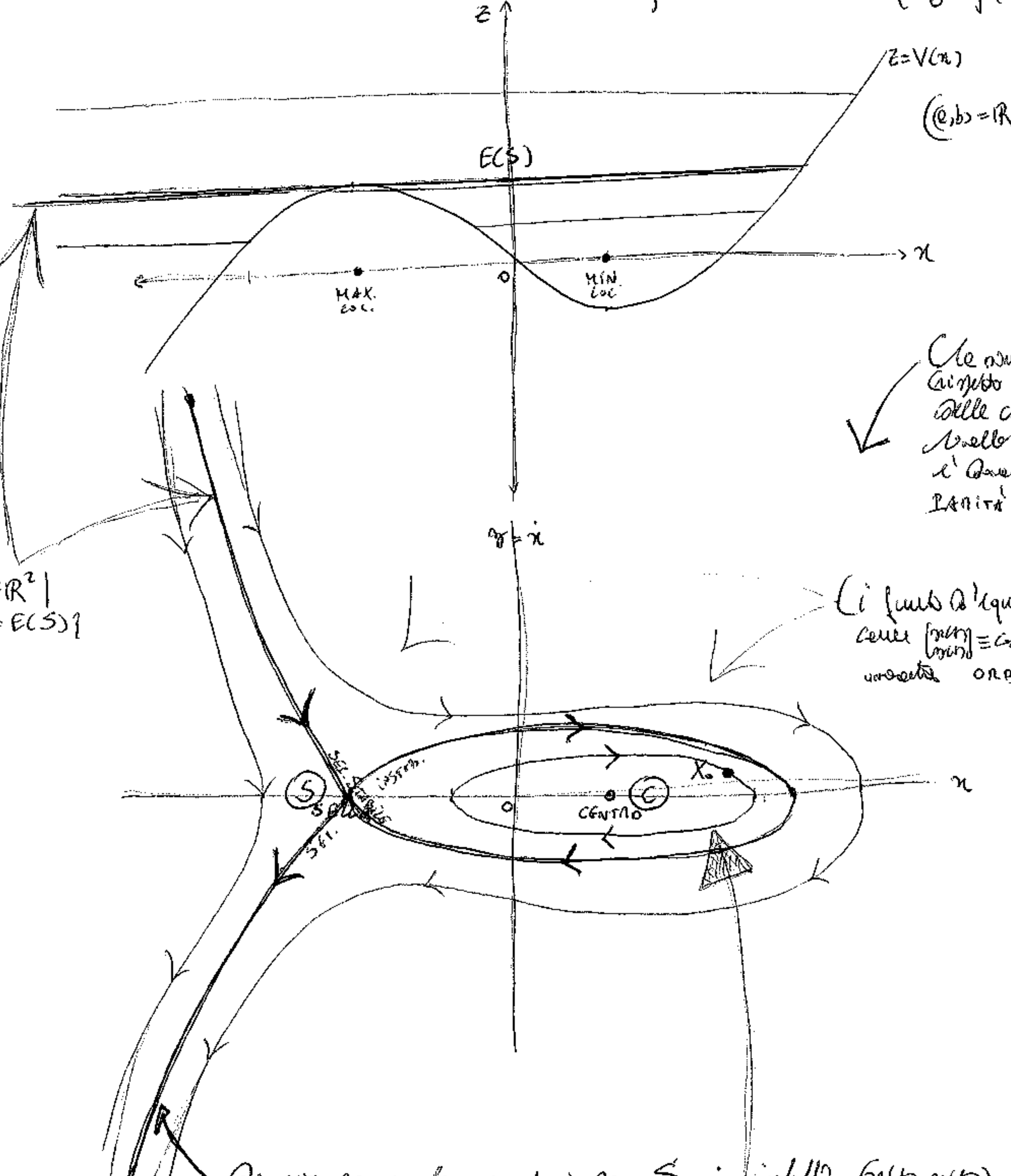
(primo (contorno)) $\Rightarrow (x_0,0)$ NON è attrattore.

(È anzi vero che $(x_0,0)$ stabile $\overset{\text{CETAEV}}{\Leftrightarrow}$ x_0 di minimo (loc.) per V ...
(cioè per E))

Il verso di percorrenza delle curve è sempre ORARIO, perché $y>0$
$\Rightarrow \dot{x}>0$ mentre $y<0 \Rightarrow \dot{x}<0$, inoltre per $y=0$ è $\dot{x}=0$
MA $\dot{y}=f(x)\neq 0$ FUORI DAI P. D'EQ. (e tale $(x,y)=(x,0)$, $f(x)$
$\neq 0$, si attraversa con tangente "verticale": $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}_{\neq 0}$, e anche perché

$\nabla E(x,y) \perp$ alle sue curve di livello in (x,y), e $\nabla E(x,0)=\begin{bmatrix}-f(x)\\0\end{bmatrix}\neq 0$).

2



(le simmetrie (rispetto a $y=0$) delle curve di livello di E è dovuta alla PARITÀ di $y\mapsto\frac{y^2}{2}$)

(i punti di equilibrio (ossia con $\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}\equiv$ costante) sono ancora ORBITE)

Devono essere le separatrici di S: infatti $(x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} S \Rightarrow$ E cost. INT. PRIMO

(inoltre sono UNICHE) $E(x(t),y(t))\equiv E(S)$. Allora sappiamo anche che sono INVARIANTI, in particolare corrispondono a traiettorie complete e soluzioni DEFINITE $\forall t\in\mathbb{R}$, cioè AD ORBITE.

In realtà sono ORBITE anche le soluzioni corrispondenti a condizioni iniziali x_0 all'interno delle curve chiuse "incerchiate", cioè ORBITE PERIODICHE (coerentemente col TEO. DEL PUNTO FISSO, come le avevamo (tipo qui di C) : infatti le traiettorie corrispondenti a x_0 è esattamente la corrispondente

comincia da X_0 nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid E(x,y)=E(X_0)\}$, che è COMPATTA;
la soluzione corrispondente a X_0 NON lascia dunque un compatto, per cui
è definita $\forall t\in\mathbb{R}$; ed essendo che NON contiene punti di
equilibrio, tale soluzione NON può avere limite per $t\to\pm\infty$,
per cui non può che essere PERIODICA (dunque le sue traiettorie =
ai suoi ω-e α-limiti).

Per quanto riguarda le ALTRE traiettorie, entrambe essendo che
le separatrici inverse $\Rightarrow$ entrambe le regioni "dentro" sono "invariate",
per cui certamente NON possono tendere ($t\to\infty$ ...) a C; ma NEANCHE a S, ($t\to\infty$ ...)
per unicità delle separatrici già individuate. Non possono essere
orbite periodiche (se non altro perché $\nexists$ altro punto d'eq.), e
tutto questo è sempre valido se NON fossero definite $\forall t\in\mathbb{R}$.
Comunque in ogni caso ESCONO DA OGNI COMPATTO, anche per
motivi di segno di $\dot{x}$ rispetto a y ($t\in(-\infty,\infty)$)

NON è escluso che le soluzioni esistano solo per un tempo FINITO,
ma allora necessariamente la velocità di percorrenza delle traiettorie
dovrebbe tendere all'infinito; allora per provare che ogni un'ORBITA
basta provare che $\boxed{t\longmapsto y(t) \text{ è LIMITATA}}$, cioè $\dot{x}$ lo è,
per cui in un tempo finito si percorre un tratto $\Rightarrow \dot{y}=f(x)$
pure è limitata (f continua su un chiuso).

In ogni caso, per provare invece che $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\xrightarrow[t\to\infty]{}$ "∞", potremmo
provare che le tangenti $\frac{y(t)}{x(t)}\xrightarrow[t\to\infty]{}$ LIMITE DEFINITO. □

Si tengono presenti i vettori $\nabla E(x,y)=\begin{bmatrix}-f(x)\\y\end{bmatrix}$!!

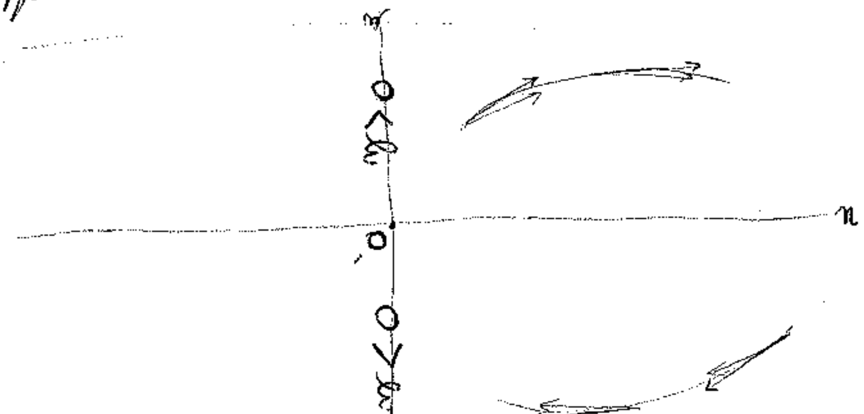
ESERCIZIO: $\ddot{x} = f(x) - \gamma \dot{x}$, $f \in C^1((a,b))$, (3)

(SISTEMI NEWTONIANI DISSIPATIVI) $\boxed{\gamma \underset{(=)}{>} 0}$, CIOÈ

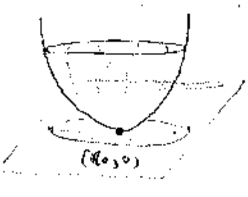
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) - \gamma y \end{cases} \in C^1((a,b)\times\mathbb{R}).$$

I) P. D'EQ. restano $\boxed{\text{gli } (x_0,0) \text{ con } f(x_0)=0}$, e dalla matrice del linearizzato $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f'(x_0) & -\gamma \end{bmatrix}$ d'eq. caratteristica $\lambda^2 + \gamma\lambda - f'(x_0) = 0$, ossia di radici (in $\mathbb{C}$) $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4f'(x_0)}\right) = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + f'(x_0)}$, deduciamo che $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ $(x_0,0)$ è SELLA NONLINEARE $\overset{\text{TEO. CURVE ECCEZIONALI}}{\Rightarrow}$ instabile), mentre $f'(x_0) < 0 \Rightarrow (x_0,0)$ è POZZO (di tipo FUOCO, in generale: γ è "piccolino"!), $\overset{\text{TEO. DEL POZZO NONLINEARE}}{\Rightarrow}$ ASINTOTICAMENTE STABILE.

In realtà discende tutto dal caso "conservativo" con $\gamma = 0$, perché i "centri di forza", e dunque le conche di fase, subiscono un "leggero cedimento in senso orario":

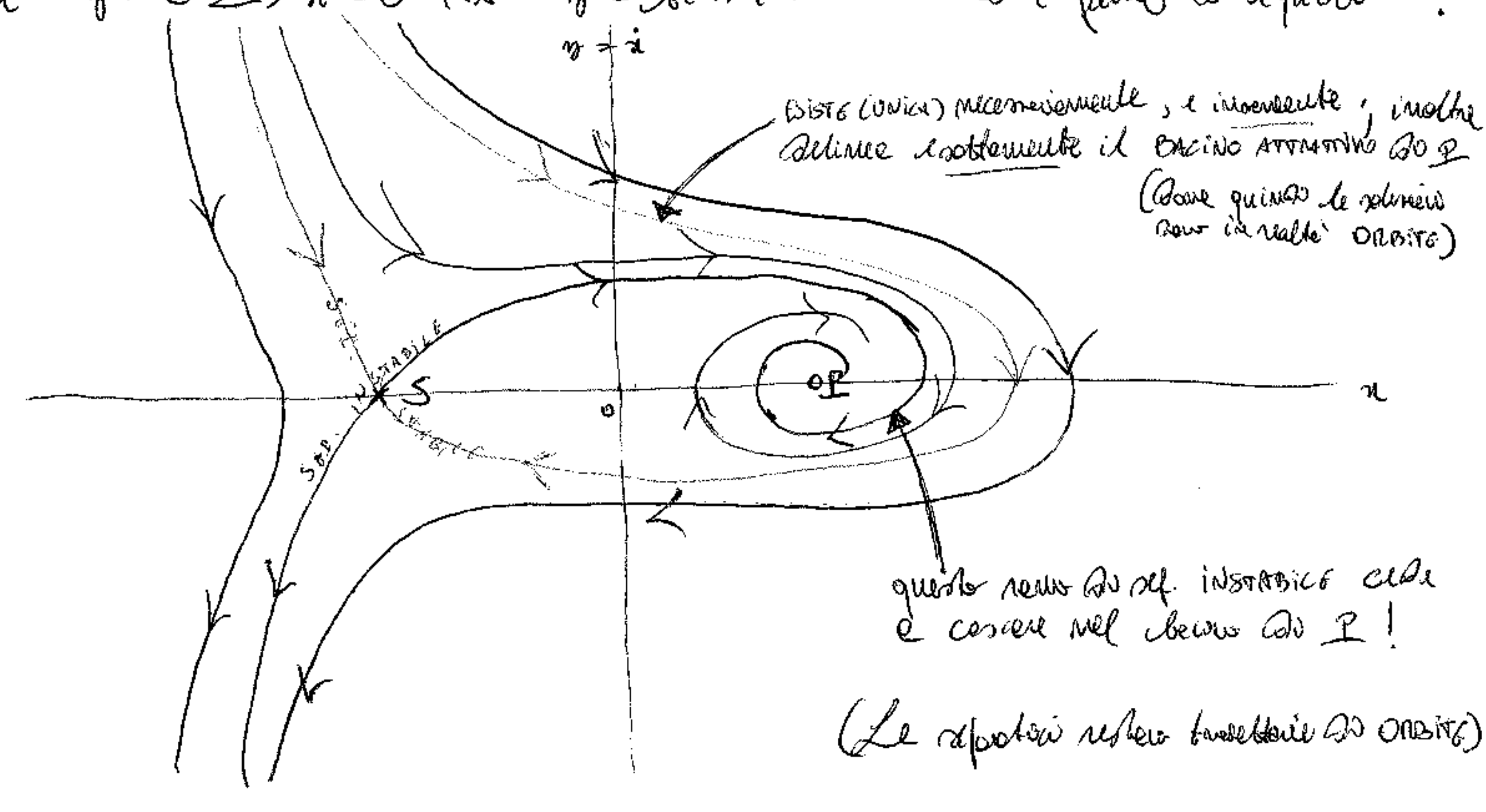


Dunque $E(x,y) = \frac{y^2}{2} + \left(-\int f(x)\,dx\right)$, che NON è più un integrale primo in quanto (infatti) $\dot{E}(x,y) = -\gamma y^2$, permette comunque di traiettorie localmente le traiettorie, e cioè una funzione di Lyapunov per qui $(x_0,0)$ con x_0 di MINIMO per V (con la scelta $-\int f(x)dx = -\int_{x_0}^{x} f(t)dt$), anche si deduce; non solo: permette di dimostrare che in quel caso $(x_0,0)$ è anche attrattivo, quindi ASINTOTICAMENTE STABILE. Infatti E è definita e C^2 su tutto $(a,b)\times\mathbb{R}$, e la componente connessa di $(x_0,0)$ in $\{(x,y)\in(a,b)\times\mathbb{R} \mid E(x_0,0)\leq E(x,y)\leq E(x_0,0)+\varepsilon\}$ con $\varepsilon>0$ "abbastanza piccolo" contiene come P. D'EQ. solo $(x_0,0)$, è COMPATTA e POS. INVARIANTE (decrescenza di E!), ed E resta STRETT. DECRESC. su gli insiemi dentro (al massimo $\dot{E}=0$ su $y=0$, dove però $\dot{y}\neq 0$ in quanto $x\neq x_0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ (in tale intorno), per cui $\dot{E}=0$ per valori ISOLATI di t).

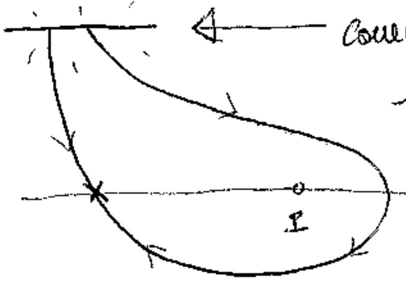


Al di fuori di questo non è altro però che un intorno di $(x_0,0)$ che faccia parte del suo bacino attrattivo.

Restano valide le osservazioni $y>0 \Leftrightarrow \dot{x}>0$, $y<0\Leftrightarrow \dot{x}<0$, e $y=0 \Leftrightarrow \dot{x}=0$ MA $\dot{y}=f(x)\neq 0$ FUORI dei punti d'equilibrio.



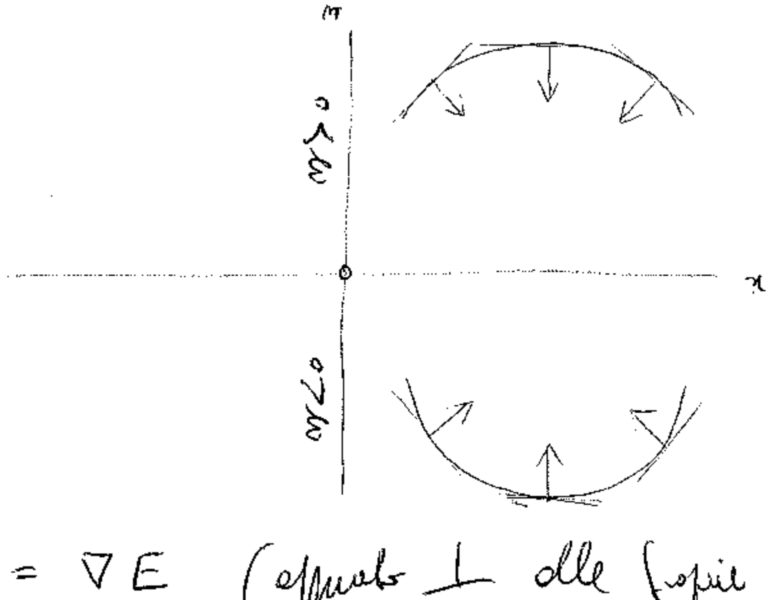
← comunque "chiuso", ho un intorno ($\neq \emptyset$) di P compatto e dove E resta STRETT. DECRESC. (fuori da P) in quanto $\dot{E} = -\gamma y^2 = 0$ solo per t isolato (più dimostrato!) ; inoltre è POS. INV. per moto con $y > 0 \Leftrightarrow \dot{x} > 0$.



D'altra parte è possibile che le soluzioni corrispondenti a condizioni iniziali "buone" da tale regione NON possano raggiungere P (ma S!).

Tali soluzioni possono NON essere limitate, però in ogni caso NON tendono ad un limite finito e NON sono ciclo periodico (perché i punti d'eq. sono "esterni"!) . Restano solo le strategie per mostrare che sono limitate o che hanno "limite infinito" . □

Osserviamo che per γ "grande" $(\to \infty)$ i vettori di forza del campo "cedono" a tal punto in senso orario rispetto alle curve di livello di E da divenire PERPENDICOLARI (e così oltre per le linee di forza):



È come se $F = \nabla E$ (appunto $\perp$ alle famiglie curve di livello),

ANZI $F = -\nabla E$.

ESERCIZIO: $\begin{cases}\dot X = F(X) = -\nabla U(X) \\ X(0) = X_0\end{cases}$, $U \in C^2(W)$;

(SISTEMI GRADIENTI)

F è dunque conservativo, $\Rightarrow$ "chiuso"; se W è semplicemente connesso, vale anche il viceversa.

1) I p. d'EQ. sono esattamente $\boxed{\text{gli } X_0 \text{ tali che } \nabla U(X_0) = 0}$, cioè i punti stazionari di U, e dalla matrice del linearizzato

$J_F(X) = -H_U(X)$ (che ha solo autovalori REALI per sua simmetria ($U \in C^2$!)) deduciamo immediatamente che

$\begin{cases} X_0 \text{ di sella per } U \Rightarrow X_0 \text{ È SELLA NONLINEARE } (\Rightarrow \text{instabile}); \\ X_0 \text{ di max non degenere per } U \Rightarrow X_0 \text{ È SORGENTE } (\Rightarrow \text{instabile per } t \to +\infty); \\ X_0 \text{ di MIN. non degenere per } U \Rightarrow X_0 \text{ È POZZO}, \Rightarrow \text{È ASINTOT. STABILE} \end{cases}$

2) In effetti $L(X) := U(X) - U(X_0)$ $(\in C^2(W))$, con X_0 di MIN. NON DEGENERE, ($\Rightarrow$ isolato) è di Lyapunov STRETTA per X_0, con precisamente $\dot L(X) = \dot U(X) = -\|\nabla U(X)\|^2$ (<0 fuori degli equilibri!), per cui fa parte del suo bacino attrattore la sua componente connessa in $\{X \in W \mid U(X_0) \le U(X) \le U(X_0) + \varepsilon\}$ con ε "opportuno" > 0.

In realtà, nel caso "usuale" di punti stazionari ISOLATI, vale che $X(t)$ soluzione che per $t \ge 0$ sta dentro un compatto $\xRightarrow{\text{TEO. DEI PUNTI LIMITE DI UN SD GRADIENTE}}$ $\exists$ FINITO $\lim_{t\to\infty} X(t)$ ed è un punto stazionario di U. In particolare $\nexists$ orbite periodiche!!

$E(x,y) = \frac{y^2}{2} + \underbrace{x^4 - x^2}_{V(x)}$: caso $\gamma=0$, $\gamma>0$ piccolo, $\gamma=\infty$ (5)

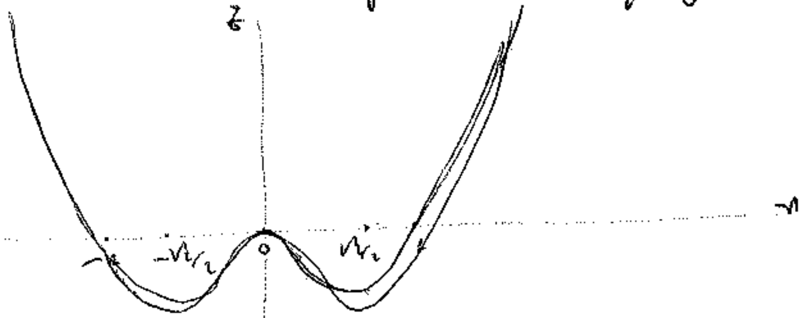
Ex

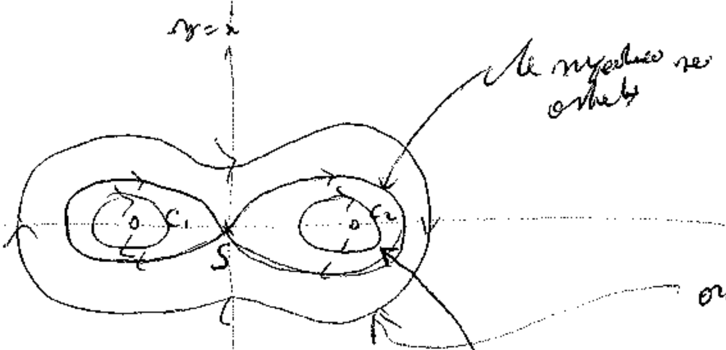
$\boxed{\gamma=0}$: $V(x) = -\int f(x)\,dx \Rightarrow f(x) = -V'(x) = 2x-4x^3$, per cui ho $\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = 2x-4x^3\end{cases}$. I p.ti d'eq. sono $(x_0,0)$ con $f(x_0)=0$: $f(x) = 2x(1-2x^2)=0$ per $x\in\{0,\pm\frac{\sqrt2}{2}\}$; inoltre $f'(x)=2-12x^2 \Rightarrow$

$\begin{cases} f'(0)=2>0 \Rightarrow (0,0) \text{ è SELLA NONLINEARE } (\Rightarrow \text{instabile}) \\ f'(\pm\frac{\sqrt2}{2}) = 2-6=-4<0 \Rightarrow (\pm\frac{\sqrt2}{2},0) \text{ sono di tipo CENTRO} \end{cases}$;

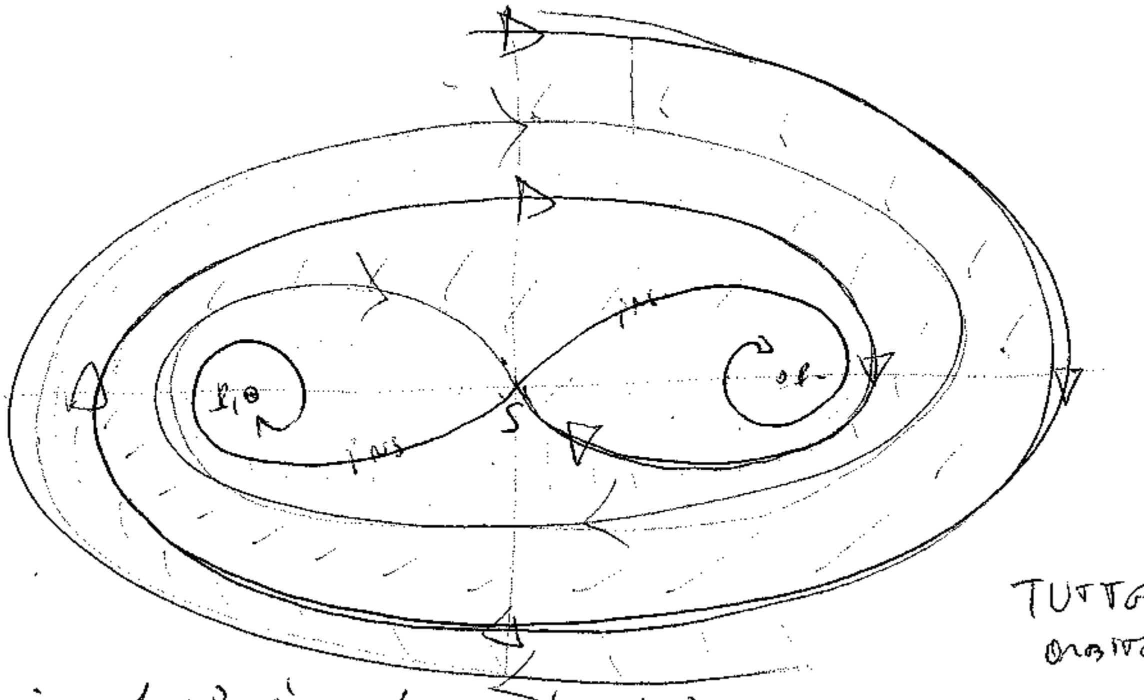
sono stabili, ma non asintotic., perché E (con $V(x) = -\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $x_0\in\{\pm\frac{\sqrt2}{2}\}$) è per loro funz. di L. ma anche integrale primo. Le traiettorie sono a posteriori esplicitate le curve di livello di E, formulato in modo evidente a partire dal graf. di V :

$V(x) = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$ è pari





$\boxed{\gamma>0}$ ("piccolo") : stesso punto d'eq. e stessa sella in 0, perché i minimo sono solo AS. STABILI (di eq. e fuochi), e belle cose attrattori in un ovale, che potremmo assumere i resto di eq. instabili ... e i fuochi; che rispettano stabile ∃! "infatti" e si ... ma è ... i ... di ... :



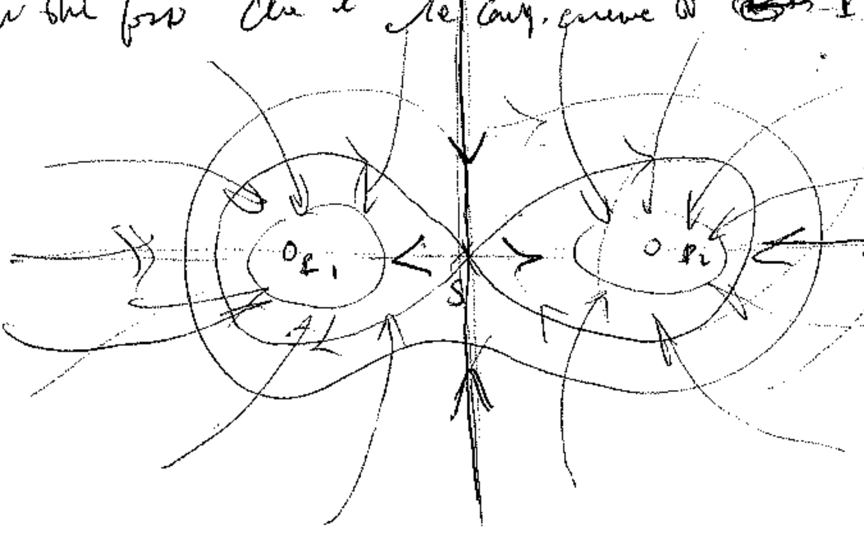
TUTTE ORBITE

(Che ... è ... e più!)

"$\boxed{\gamma = \infty}$", ossia $\begin{cases} \dot x = -E_x = 2x - 4x^3 \\ \dot y = -E_y = -y \end{cases}$; i punti stazionari sono ancora gli stessi, e anche

le biforcazioni ((0,0) sella, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ fuoco) ; inoltre

$x = 0 \Rightarrow \dot x = 0$ mentre $\dot y = -y$ la porta in 0, dunque $x=0$ è la var. stabile di S (∃ U nodo, di cui è instabile o unicamente!) ; ne segue $y = 0 \Rightarrow \dot y = 0$, e la parte della var. di $\dot x = 2x - 4x^3$ la regola in 0 ; $y = 0$ è quella instabile. ∀ altro (x_0, y_0), ... $2x(1-2x^2)$ ... in un cerchio intorno e ... che è la conv. ... in $\{(x,y) \mid U(P_i) \ni U(x,y)\}$



DOVE U è cerchio delle ... ; invece il ... e "il resto"

TUTTE ORBITE!

$$\ddot{x} = f(x) \iff \begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = f(x)\end{cases};\quad E(x,y)=\frac{y^2}{2}+V(x),$$ (1)

(CONSERVATIVO!) SIST. HAMILTONIANI

$V(x) = -\int f(x)\,dx$, per cui $\begin{cases}\dot x = \partial_y E\\ \dot y = -\partial_x E\end{cases}$

FORMA HAMILTONIANA DELLE EQ. (AD UN GRADO DI LIBERTÀ): Con $H(p,q)\in C^1_{\mathbb{R}}(W)$, APERTO DI $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}\dot p = -\partial_q H\\ \dot q = \partial_p H\end{cases}$$

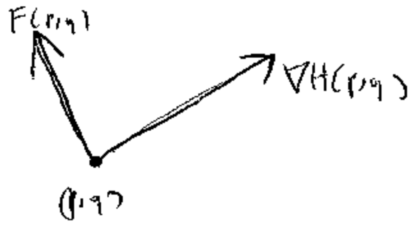
(nel caso di prima, $H(x,y) = -E(x,y)$!)

(cioè $F(p,q) = (-\partial_q H, \partial_p H)$)

$\left(t \xmapsto{(p,q)} (p(t),q(t)) \xmapsto{H} H(p(t),q(t))\right)$

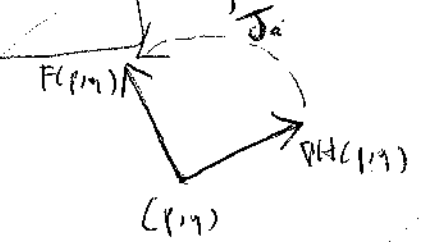
⊙ È UN INTEGRALE PRIMO: $\dot H(p,q) = \nabla H\cdot(\dot p,\dot q)^T =$

$= \partial_p H \underbrace{\dot p}_{-\partial_q H} + \partial_q H \underbrace{\dot q}_{\partial_p H} = 0$ ✓. Naturalmente andrebbe bene anche $-H$...! Cioè $F(p,q)=(\dot p,\dot q)^T$ e $\nabla H(p,q)$ sono ORTOGONALI:



! Inoltre è ovvio che hanno lo stesso modulo, e che $F(p,q) =$

$\boxed{=(\dot p,\dot q)^T = \underset{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}{J}\,\nabla H(p,q)}$ cioè si ha che F ruota di $\frac{\pi}{2}$ (in senso antiorario).



A proposito, $(\dot p,\dot q)^T = J\cdot\nabla H(p,q) \Rightarrow \dot H(p,q) = (\nabla H(p,q))^T J\, \nabla H(p,q)$ $= 0$ (J è ANTISIMMETRICA!); in effetti in generale

$\dot G(p,q) = (\nabla G(p,q))^T\cdot J\cdot \nabla H(p,q) =: \{G,H\}$ ("parentesi di Poisson"), per cui $\boxed{\{H,G\} = -\{G,H\}}$ più lineare

~~[illegible]~~ $\to \Big[(\nabla G^T J \cdot \nabla H)^T = (\nabla H)^T \underbrace{J^T}_{-J\,!} \nabla G = -(\nabla H)^T J \nabla G$;

è un reale! $\longrightarrow \; = \nabla G^T J \nabla H$

La linearità perché $\nabla(H_1+H_2) = \nabla H_1 + \nabla H_2$ e $(\nabla(G_1+G_2))^T = (\nabla G_1 + \nabla G_2)^T =$
$= (\nabla G_1)^T + (\nabla G_2)^T$! ✓

ES. 1 $H(p,q) = \frac{\omega(p^2+q^2)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dot p = -\omega q \\ \dot q = \omega p \end{cases} = \omega J \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, ossia

$\dot z = \omega J z$ $\big(z = p + iq$: $z(t) = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$
(ASSUMENDO che $\omega > 0$) $\big)$, ossia $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}(t) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}(t)\right) =$
$= \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$. ✓

ES. 2 $H(p,q) = T(p) \Rightarrow \begin{cases} \dot p = 0 \\ \dot q = \partial_p T(p) \end{cases}$, cioè

$\Phi^t(p_0, q_0) = \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 + \partial_p T(p_0)\, t \end{bmatrix}$; ovvero

$H(p,q) = V(q) \Rightarrow \begin{cases} \dot p = -\partial_q V(q) \\ \dot q = 0 \end{cases}$, cioè

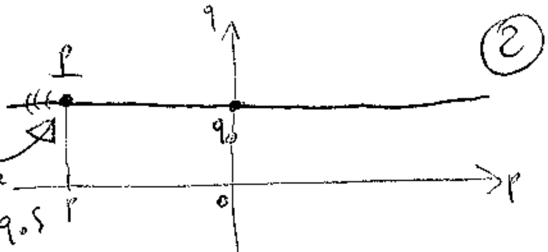
$\Phi^t(p_0, q_0) = \begin{bmatrix} p_0 - \partial_q V(q_0)\, t \\ q_0 \end{bmatrix}$. ✓

ES. 3 $H(p,q) = \frac{p^2}{2(1+q^2)} + \frac{k q^2}{2}$ ma $\partial_q H(p,q) =$
$= -\frac{p^2}{\cancel{2}(1+q^2)} \cancel{2} q + \frac{\cancel{2} k q}{\cancel{2}}$, mentre $\partial_p H(p,q) = \frac{\cancel{2} p}{\cancel{2}(1+q^2)}$, $\Rightarrow$

$\begin{cases} \dot p = -k q + \frac{q p^2}{1+q^2} \\ \dot q = \frac{p}{1+q^2} \end{cases}$ (NON meccanico!) ✓

(2)

(ES. 4) ~~...~~ ℓ che m. lineare



$T(p) \equiv \frac{1}{2} m (\dot q)^2$, e se ha en. potenziale $V(q)$ allora ~~...~~

$$H(p,q) = \boxed{\underbrace{\frac{1}{2m}p^2}_{\text{EN. CINETICA}} + \underbrace{V(q)}_{\text{EN. POTENZIALE}}} \Rightarrow \begin{cases} \dot p = -\partial_q V(q) \\ \dot q = \frac{p}{m} \end{cases}$$

cioè $p = m \cdot \dot q$ ("quantità di moto", o "momento"), cioè

$$\begin{cases} \dot p = -\partial_q V(q) =: f(q) \\ m\dot q = p \end{cases}$$

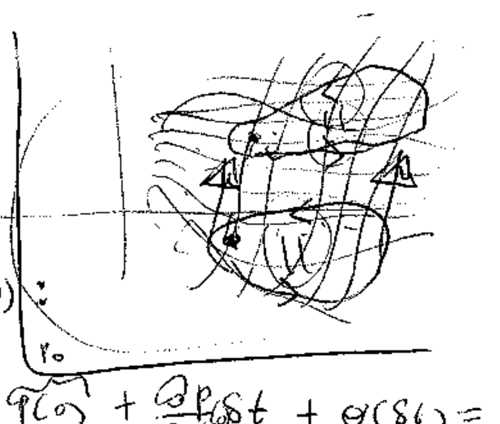
$\simeq$ newtoniano, ma con cambio di scala $\dot q \mapsto m\dot q$ e di orientazione, perché ha (p,q) e non (q,p)

[ed es.:  !] ; comunque si risolve grazie ad H int. primo di bella forma. ✓

TEOREMA DI LIOUVILLE : $H(p,q) \in C^2(W)$

$\Rightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (che ha senso), $\Phi^t : (p_0,q_0) \mapsto (p(t), q(t))$ conserva AREA e ORIENTAZIONE (cioè $\det J_{\Phi^t} = +1$).

[DIM: $\forall \delta t \in \mathbb{R}$ finito, "se immaginiamo come a 0", proviamo che sia (istantaneamente) $\det J_{\Phi^{\delta t}} = 1$, "cioè"



$$\det \frac{\partial (p(\delta t), q(\delta t))}{\partial (p_0, q_0)} = 1$$; sia $(p_1, q_1) := (p(\delta t), q(\delta t))$:

per TAYLOR CON PEANO (basta C^1) $p_1 = \overbrace{p(0)}^{p_0} + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}(0)}\,\delta t + o(\delta t)_{\delta t \to 0} =$

$$\boxed{\begin{aligned} &= p_0 - \partial_q H|_{(p_0,q_0)}\, \delta t + o(\delta t), \\ &= q_0 + \partial_p H|_{(p_0,q_0)}\, \delta t + o(\delta t) \end{aligned}}$$

e analog. $q_1 = q_0 + \frac{\partial q}{\partial t}(0)\, \delta t + o(\delta t) =$

$\Longrightarrow$ possiamo ottenere J ?

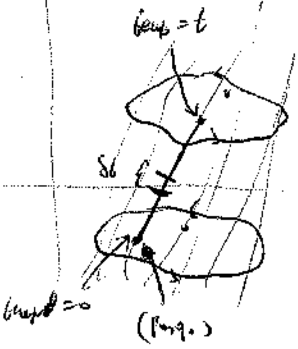
$$J = \begin{bmatrix} 1 - \delta t \dfrac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(p_0,q_0) & -\delta t \dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2}(p_0,q_0) \\ \delta t \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2} & 1 + \delta t \dfrac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}(p_0,q_0) \end{bmatrix} + \underset{\delta t \to 0}{\mathcal{O}}(\delta t)$$

= perché H è C^2!

mancato! ($\mathcal{O}$ ∂_p ... (è o) o ... $= \mathcal{O}(\delta t)$)

$$\Rightarrow \det(J) = 1 + (\delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}(p_0,q_0)\right)^2 + \underbrace{(\delta t)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(p_0,q_0) \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(p_0,q_0)}_{\mathcal{O}(\delta t)!_{\delta t \to 0}} + \underset{\delta t \to 0}{\mathcal{O}}(\delta t)$$

(det è continua!) $= \boxed{1 + \underset{\delta t \to 0}{\mathcal{O}}(\delta t)}$. Ora, dispongo le "propagazioni" da 0 e t come rimettere di una sequenza di N (≥ 1 intero) propagazioni di durata $\frac{t}{N} =: \delta t$ ($\delta := \delta_N$), ossia $\frac{1}{N} = \delta$, so che $\Phi^t(p_0,q_0) = \Phi^{\overbrace{\delta t + \dots + \delta t}^{N \text{ volte}}}(p_0,q_0) =$



$= \Phi^{\delta t}(\dots(\Phi^{\delta t}(\underset{\neq (p_0,q_0)!}{\Phi^{\delta t}(p_0,q_0)}))\dots) \Rightarrow$ la jacobiana

il prodotto delle jacobiane, dunque det il prodotto dei det (BINET) $:$ $(1 + \underset{N\to\infty}{\mathcal{O}(\delta t)}) \dots (1 + \mathcal{O}(\delta t))$ (NOTA) $= \underbrace{(1+\mathcal{O}(\tfrac{1}{N})) \dots (1+\mathcal{O}(\tfrac{1}{N}))}_{N \text{ volte}} =$

$$= (1 + \mathcal{O}(\tfrac{1}{N}))^N = \underset{1}{\binom{N}{0}} + \underset{\mathcal{O}(N)}{\binom{N}{1}}\mathcal{O}(\tfrac{1}{N}) + \underset{\mathcal{O}(N^2)}{\binom{N}{2}}\mathcal{O}^2(\tfrac{1}{N}) + \dots + \underset{\mathcal{O}(N)}{\binom{N}{N-1}}\mathcal{O}^{N-1}(\tfrac{1}{N}) + \binom{N}{N}\mathcal{O}^N(\tfrac{1}{N})$$

; ora, se N lo immagino che $\to \infty$, allora

$$\det J_{\Phi^t} = 1 + \mathcal{O}(N)\mathcal{O}(\tfrac{1}{N}) + \mathcal{O}(N^2)\mathcal{O}^2(\tfrac{1}{N}) + \mathcal{O}(N^3)\mathcal{O}^3(\tfrac{1}{N}) + (\dots\dots)$$

MA $\forall k \geq 1$ $\mathcal{O}^k(\tfrac{1}{N}) = \mathcal{O}(\tfrac{1}{N^k})$ (Tipo: $\dfrac{\mathcal{O}^2(\frac{1}{N})}{\frac{1}{N^2}} = \dfrac{\mathcal{O}(\frac{1}{N})\mathcal{O}(\frac{1}{N})}{1/N \cdot 1/N}$),

e $\boxed{\mathcal{O}(N^k)\mathcal{O}(\tfrac{1}{N^k}) = \mathcal{O}(1)}$ (Tipo: $\mathcal{O}(N)\mathcal{O}(\frac{1}{N}) = \underset{\to \text{cost.}}{\dfrac{\mathcal{O}(N)}{N}} \underset{\to 0}{(N\mathcal{O}(\tfrac{1}{N}))} \to 0$),

dunque in effetti $\det J_{\Phi^t} = 1 + \underset{N\to\infty}{\mathcal{O}}(1)$. $\square$

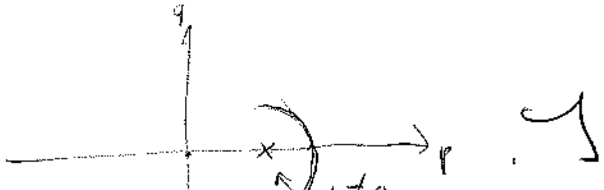
Riprendiamo $H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$ (C^2) $\Rightarrow$ (INTEGRABILITÀ) (3)

$$\begin{cases} \dot p = -\partial_q V(q) \\ \dot q = \frac{p}{m} \quad (\text{cioè } m\dot q = p) \end{cases}$$

; ora, $H(p,q) = E$ (UNA CURVA DI LIVELLO) vale [?] $\iff \frac{1}{2m}p^2 + V(q) = E$ ($V(q)\le E$!), cioè ad esempio

$$p = \pm\sqrt{2m(E - V(q))} \quad (+ \iff p>0) \qquad \left(\text{o } q = V^{-1}\left(E - \frac{1}{2m}p^2\right)\dots\right)$$

[NOTA: per esprimere p come $p = p(q)$ (localmente) DEVE ESSERE $\partial_p H \neq 0$, ma infatti $\partial_p H = \frac{p}{m} \neq 0 \iff p \neq 0$; $(V(q) < E)$



$$\Rightarrow \dot q = \frac{p}{m} = \pm\sqrt{\frac{2[E - V(q)]}{m}} \quad (p \gtrless 0)$$

; ma tale è eq. a var. separabili: $\dot q = f(q)$ che ammette $q \equiv$ zero di f (in questo caso q tale che $V(q) = E$), altrimenti $\frac{\dot q}{f(q)} = 1$, cioè

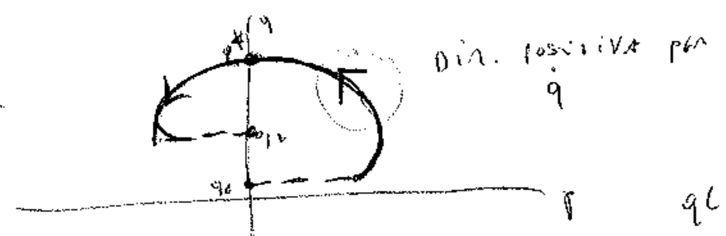
$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot q}{f(q)}\,dt = \int_{q(t_1)=:q_1}^{q(t_2)=:q_2} \frac{1}{f(q)}\,dq$$

(ora integro non in t ma in $q(t)$!) ; nel nostro caso $f(q) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(q)}$, dunque

$$\boxed{t_2 - t_1 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}} \qquad \left(t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_0}^{q}\frac{dq'}{\sqrt{E - V(q')}}\right)$$

, e in conclusione

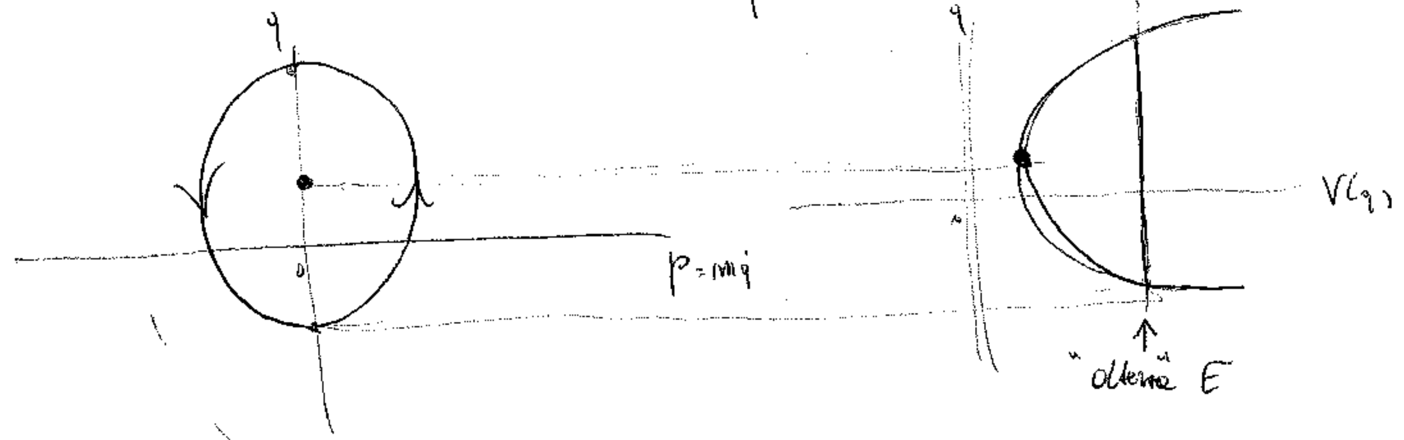
p si ottiene da q come "funzione implicita", q risolto e t si ottiene mediante quadratura e necessaria inversione (di $t(q)$). ORA, per avere $q(t)$ dobbiamo $t(q)$ INVERTIBILE, ossia MONOTONA, cioè $\partial_q t(q) = t(q)'\dot q$, cioè $\dot q$ non cambia segno; ma $\dot q = \frac{p}{m}$, dunque si può procedere separatamente in $p \gtrless 0$;

$p<0$: AD ES., per 

, si ha $q(t)$ da

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q_1}^{q^*} \frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{q^*}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}}$$

NOTA:



per $p=0$, $V(q)=E$; se $E_1 = V(q_1)$, allora

$$V(q) = \underbrace{V(q_1)}_{E_1} + V'(q_1)(q-q_1) + o((q-q_1)^2) \quad (V \in C^2),$$

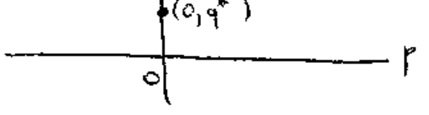
ossia $E_1 - V(q) = -V'(q_1)(q-q_1) + o((q-q_1)^2)$, $\Rightarrow$

$(E_1 - V(q))^{-1/2} \simeq (q-q_1)^{-1/2}$ INTEGR. TRA q_1 e q_2, dunque il tempo per andare da q_1 a q_2 è eff. FINITO! Questo NO se q_1 è punto stazionario .....

[~~NOTA: il periodo del~~ $t_2 - t_1$ ~~è~~ $T = \sqrt{2m} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}}$!]

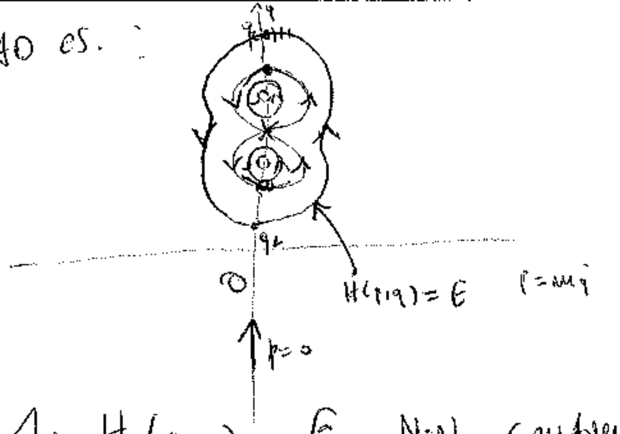
---

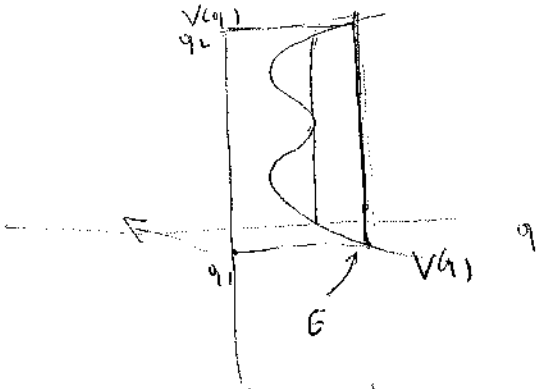
i PUNTI D'EQ. = i punti stazionari di H, che nel caso $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ non possono che essere $(p,q) = (0, q^*)$ dove $V'(q^*) = 0$ (punto staz. di V)!



(VEDI SOPRA!).

AD ES.:





Se $H(p,q)=E$ NON contiene punti d'eq., allora sì che per $p=0$ è $\dot q = \frac{p}{m} = 0$ (in effetto, per simm., passano solo in orizzontale!), MA $\dot p \neq 0$ (altrimenti avrei un punto d'eq.); se q_1 e q_2 sono tali che $V(q_1)=V(q_2)=E$ e con $q_1<q<q_2 \Rightarrow V(q)<E$, allora $\forall\, q_1<q<q_2$

$$\begin{cases} p_+(q) = \sqrt{2m(E-V(q))} \\ p_-(q) = -\sqrt{2m(E-V(q))} \end{cases}$$

determinano la traiettoria delle soluzioni che parte da $(0,q_1)$ (o $(0,q_2)$), che è ORBITA PERIODICA: è limitata in quanto H è integrale primo (in $\mathbb{R}^2$), ed è chiusa perché necessariamente è def. $\forall t$ (NON ci sono eq. su $\{H=E\}$!); poi ovviamente il tempo per arrivare a $(0,q_2)$ dopo esser partiti da $(0,q_1)$ è $2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}} =$

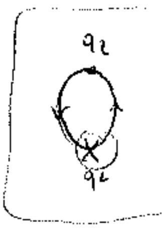
$$= \sqrt{2m}\int_{q_1}^{q_2}\frac{dq}{\sqrt{E-V(q)}}$$

, che è IMPROPRIO in entrambi gli estremi, ma comunque finito se $V'(q_{1/2}) \neq 0$: $\forall q$ vicino a q_1 (AD ES.)

$$V(q) = \underbrace{V(q_1)}_{E} + V'(q_1)(q-q_1) + \underset{(q\to q_1)}{O}(q-q_1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{E-V(q)}} =$$

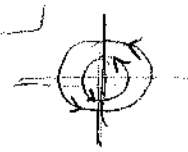
$$= \frac{1}{\sqrt{-V'(q_1)(q-q_1)} + O(\sqrt{q-q_1})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{q-q_1}}\right)$$

INTEGR.; invece è chiaro che, ad es., $V'(q_1)=0 \Rightarrow$ PERIODO INFINITO, ovvero q_1 è eq. instabile.

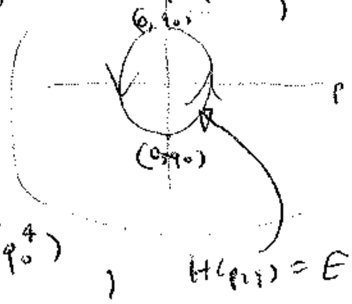


ES. Sia "vicino a 0" $V(q) = \frac{q^2}{2} + O(q^4)$ PARI, e $m=1$ (semplicità)

$\Rightarrow H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \boxed{\frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + O(q^4)}$; è chiaro

che senza $O(q^4)$ avremmo un oscillatore armonico  , e

dunque ogni orbita ($\neq (0,0)$) avrebbe periodo 2π ; in realtà, per q_0 abb. piccolo so che un'orbita periodica di periodo $T_q(q_0)$, ed è il $\lim_{q_0 \to 0} T(q_0) = 2\pi$. Infatti



$$T(q_0) = \sqrt{2} \int_{-q_0}^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{E - V(q)}}, \quad E = H(0,q_0) = \frac{q_0^2}{2} + O(q_0^4), \quad H(p,q) = E$$

$$\Rightarrow E - V(q) = \frac{q_0^2}{2} + O(q_0^4) - \frac{q^2}{2} - O(q^4) = \frac{1}{2}\left(q_0^2 - q^2 + O(q_0^4) - O(q^4)\right)$$

$$\Rightarrow T(q_0) = 2 \int_{-q_0}^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2 + O(q_0^4) - \cancel{O(q^4)}}} \quad |q| \leq |q_0|$$

$$= 2 \int_{-q_0}^{q_0} \frac{dq}{q_0 \sqrt{1 - \left(\frac{q}{q_0}\right)^2 + O(q_0^4)}}$$

che però va $\times q_0^2$!

$\frac{q}{q_0} = \mathrm{sen}(\theta)$, $dq = q_0 \cos(\theta) d\theta$, e più avanti su $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$$= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{q_0 \cos(\theta) d\theta}{q_0 \sqrt{\cos^2(\theta) + O(q_0^4)}} = 2 \left(\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta}_{\pi} + O(q_0^2) \right) =$$

$\approx \boxed{\cos(\theta) + O(q_0^2)}$

$= 2\pi + O(q_0^2)$

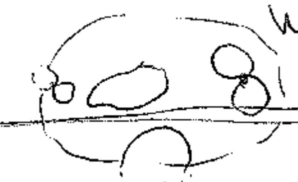
$\left(\frac{1}{1+x} \approx (\text{taylor})\ 1 - x \right)$

$\sqrt{(\cos^2(\theta) + O(q_0^2))}$

$\left(\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta) + O(q_0^2)} \right)$

TEOREMA DELLE CURVE DI LIVELLO DELLA HAMILTONIANA

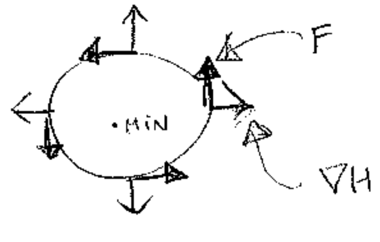
$H \in \mathcal{C}^2(W)$: (I) Comp. connessa C di $H(p,q)=E \neq \emptyset$, compatta e senza punti stazionari $\Rightarrow$ $C \equiv$ traiettoria di un'orbita periodica; (II) C contenente dei punti staz. ISOLATI $\Rightarrow$ ogni comp. connessa di C SENZA TALI PUNTI è una traiettoria la cui soluzione o esce da ogni compatto o ha limite proprio uno di tali punti.



[I] : $\nabla H \neq 0$ su $C \Rightarrow C$ è una curva regolare, e se è compatta (limitata) necessariamente è la traiettoria DI UN'ORBITA; se non ha punti staz., necessariamente è orbita periodica (IN EFFETTI deve essere ω-limite (la sol. è def. $\forall t$ e sta in un compatto!), che necessariamente è orbita periodica (Poincaré-Bendixson); ma C è CONNESSA, quindi è la stessa). γ

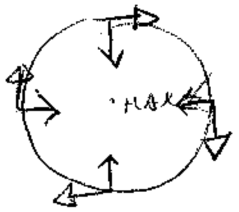
[II] : $B := C \setminus \{$i punti staz. isolati$\}$ è loc. curva regolare, quindi ogni sua comp. connessa contiene solo punti che stanno in una sola traiettoria (No!), e se non esce da ogni compatto C (cioè sta in un compatto) allora è un'orbita e ha anche limite finito. ∎

Ora, attorno ad un MINIMO (loc.) di H, è chiaramente

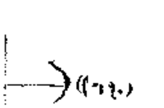


, dunque "si fa" in senso antiorario;

Al contrario otteniamo un massimo (-bc):



! Possiamo anche generalizzare i ragionamenti nelle LEGGI ORARIE: $H(p,q) \in C^2(W)$ con



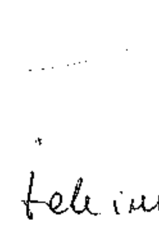
$\frac{\partial H}{\partial p}(p_0,q_0) \neq 0 \Rightarrow$ "vicino a (p_0,q_0)" è $p=p(q)$, che resta definita implicitamente da $H(p(q),q)=E$, con $E=H(p_0,q_0)$; tutto si riconduce allora a q: MA

$$\dot q = \frac{p}{m} = \frac{p(q)}{m} = \partial_p H(p(q),q) \Leftrightarrow t(q) = \int_{q_0}^{q} \left(\partial_p(H)(p(q'),q')\right)^{-1} dq',$$

reciproco

da cui $q(t)$ (almeno dove $\dot q$ NON cambia segno)

Se invece $\frac{\partial H}{\partial p}(p_0,q_0)=0$, cioè $\dot q = 0$, allora tale integrale si perde in due"; NOTA: tal caso si ha in particolare per calcolare il PERIODO di un'orbita periodica, visto che $q(t)$ in tale modellizzazione (comunque) ha massimo ma anche minimo (chiaramente dove $\dot q = 0$, infatti!) (cioè dove non c'è più evidentemente verticale!)



$\nabla F(p,q) = (-\partial_q H, \partial_p H)$

$\begin{cases} \dot p = -\partial_q H \\ \dot q = \partial_p H \end{cases}$

PROPRIETÀ QUALITATIVE.

Sia $H(p,q) \in C^2$: i punti di eq. SONO i suoi punti stazionari, e la matrice del linearizzato è la jacobiana (in uno di tali punti) A di $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \nabla H$, cioè $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H_H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \partial_p^2 H & \partial_p\partial_q H \\ \partial_p\partial_q H & \partial_q^2 H \end{bmatrix}}_{\text{hessiana!}} =$

$$= \begin{bmatrix} -\partial_p\partial_q H & -\partial_q^2 H \\ \partial_p^2 H & \partial_p\partial_q H \end{bmatrix},$$ che ha TRACCIA 0 e DET $=$ Det H_H)

Dunque: autovalori sono discordi ma = in modulo (a, $-a$) / autov. in $\mathbb{C}$ sono in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ($\pm ib$)

DET $H_H > 0$ (cioè no MAX che MIN forti) $\overset{Tr=0}{\Rightarrow}$ A ha autovalori complessi coniugati PURI (cioè centri) $\neq 0$, ma determinare comunque le loro STABILITÀ grazie alla funzione di Lyapunov (globale!) (è ind. fun!) $\underset{MAX}{\overset{MIN}{\pm}} H + cost$! (NON ATTRATTIVI!)

DET $H_H < 0$ (SEMPRE PER H) $\overset{Tr=0}{\Rightarrow}$ ~~autovalori complessi coniugati con parte reale opposta~~ autovalori reali OPPOSTI, ossia è punto di sella non lineare (che sappiamo essere INSTABILE, e a proposito può tenere le sue SEPARATRICI il campo quelle orarie!).

ORA, sapere quando $H = E$ è COMPATTO permette di usare il TGU. Delle curve di livello di H: infatti

(I) NON ci sono su lei punti staz. $\Rightarrow$ l'insieme di comp. connesse COINCIDONO con orbite periodiche!

(II) Ci sono punti staz. su lei $\Rightarrow$ sono esatt. i punti limite delle soluz. = totalmente = comp. connesse;

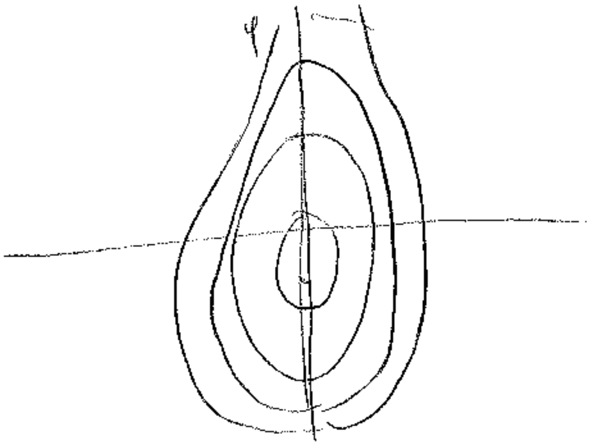
altrimenti $H = E$ è illimitato, $\Rightarrow$ almeno una sua comp. connessa è una curva aperta (cioè $= \gamma((a,b))$ APERTO, altro ...) ha min e max in $[a,b]$!

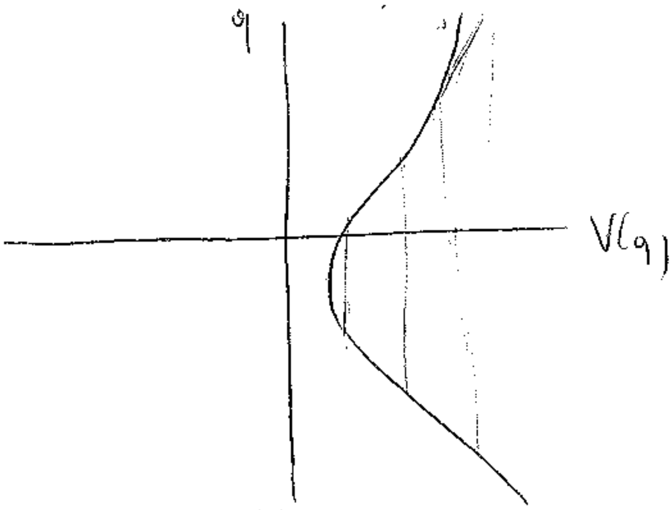
$\boxed{ES.}$ $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, $V \in C^1((a,b))$ TALE CHE

$\lim_{q \to a} V(q) = \lim_{q \to b} V(q) = \infty$, ~~[illegible]~~ allora è

vero che tutte le $H = E$ sono COMPATTE, quindi o sono composte da orbite periodiche o orbite con punti stazionari.

Come insieme risulta . Ad es.:

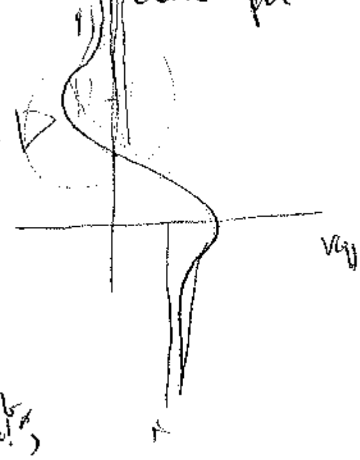




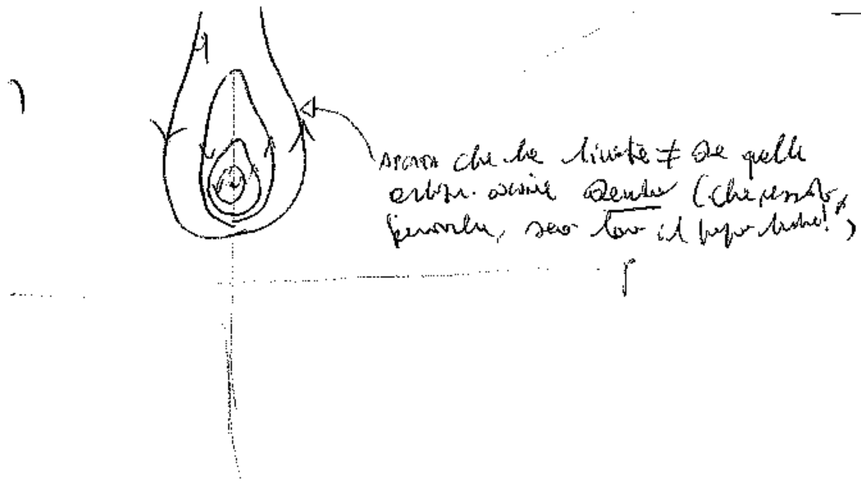
SE INVECE $\lim_{q\to a} V(q) = M$ $(\neq \pm\infty)$ e $\lim_{q\to b} V(q) = L$ $(\neq \pm\infty)$,

allora possiamo solo dire che $H=E$ è limitata se $E < \min(M, L)$; notiamo che sono curve eccezionali quelle $H=M$ o $H=L$

come per



(ad es. ,



)

EX. SIST. HAMILTONIANI

$\boxed{EX}$ Studiare $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, $V(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Caso $\boxed{a \neq 0}$: $\exists\, w \in \mathbb{R}$ tale che $V(q-w)$ ha $b=0$;
[infatti $a\underbrace{(q-w)^3}_{q^3-3q^2w+3qw^2-w^3} + b\underbrace{(q-w)^2}_{q^2+w^2-2qw} + c(q-w) + d$ ha termine quadratico $-3aw + b$, per cui scelgo $w = \frac{b}{3a}$] ; ma è ~~[illegible]~~ evidente che una tale traslazione lascia invariato le stesse qualità!

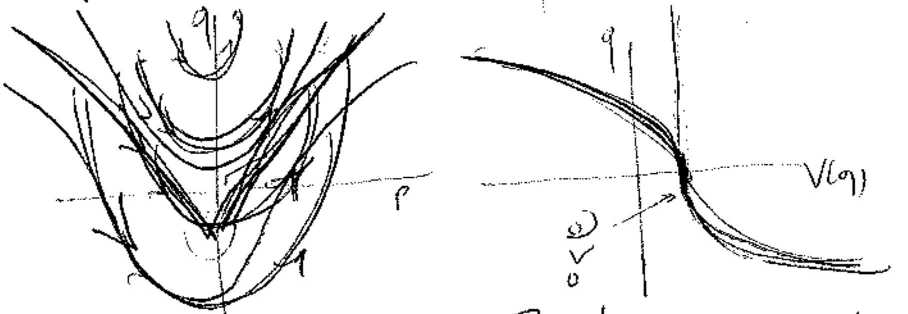
Suppongo allora direttamente $b=0$, per cui il sistema è

$$\begin{cases} \dot{p} = -\partial_q H = -3aq^2 - C \\ \dot{q} = \partial_p H = \frac{p}{m} \end{cases}$$

; per la stabilità è evidente che posso supporre $a = \pm 1$ (dividendo per $|a|$), AD ES. $a=1$,

per cui $V'(q) = 3q^2 + c = 0 \Leftrightarrow q = \pm\sqrt{-\frac{c}{3}}$ (suppongo $c<0$!)

per $c=0$ ho

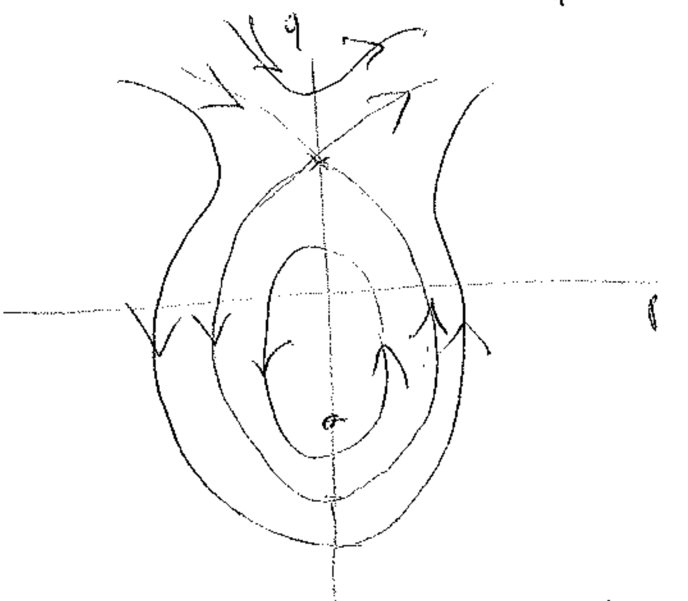


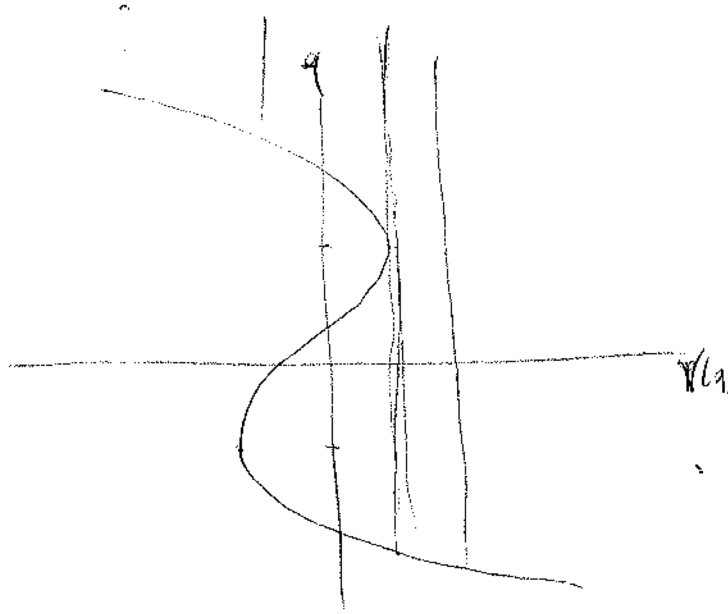
Ed essendo $V''(q) = 6q$ è chiaro che $\sqrt{-\frac{c}{3}}$ è di minimo, mentre $-\sqrt{-\frac{c}{3}}$ è di MAX. ; D'altra parte (infatti) H ha punti stazionari [redacted] $(0, \pm\sqrt{-\frac{c}{3}})$, dove l'hessiana

$$\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 6q \end{bmatrix} \text{ è } \begin{cases} \to \text{DEF. POS. in } \sqrt{-c/3} \\ \to \text{INDEF. in } -\sqrt{-c/3} \end{cases}$$

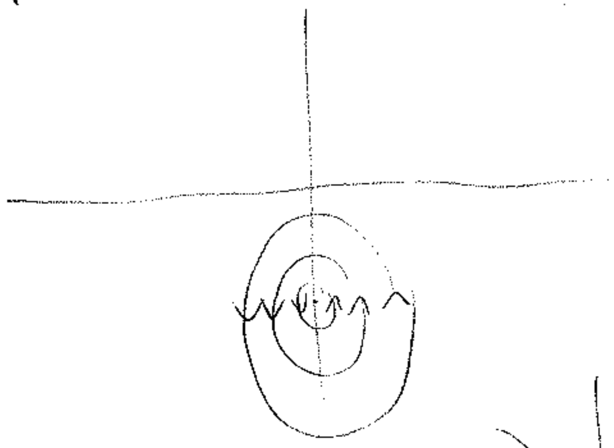
), cioè $(0, \sqrt{-\frac{c}{3}})$ è di minimo (STAB.) mentre $(0, -\sqrt{-\frac{c}{3}})$ di sella

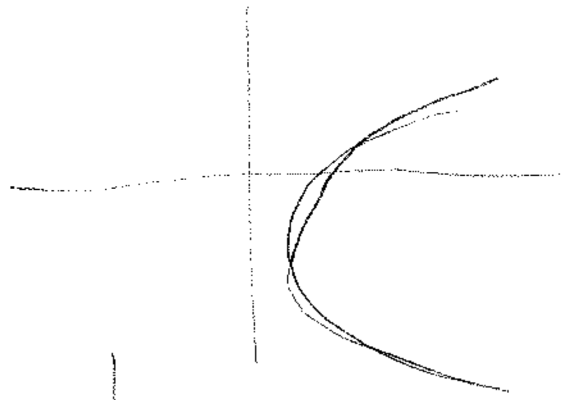
$\nexists$ instab.) ; inoltre dovrebbero essere complete solo le curve di livello sopra il MAX, ed es.: $\left(V(q) \xrightarrow[q \to \pm\infty]{} \pm\infty \right)$



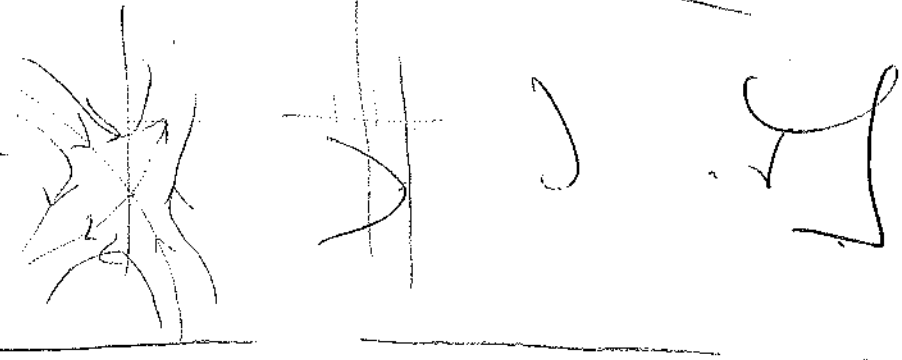


Caso $\boxed{a=0}$: $V(q) = q^2 + cq + d$ che $V'(q) = 2q + c$, $= 0 \iff$ $q = -\frac{c}{2}$, certamente di min. ($V''(q) = 2$) :





(se invece $b<0$, allora



)

$\boxed{EX}$ $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$, studiare qualitativamente $\ddot{q} = \dfrac{aq^2+bq+c}{q^4}$.

[$V(q) = -\displaystyle\int \frac{aq^2+bq+c}{q^4}\,dq = \frac{a}{q} + \frac{b}{2q^2} + \frac{c}{3q^3}$; essendo il dominio $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$, è chiaro che il comportamento presso

0 e all'∞ è "simmetrico" in q, perché per $q \to 0$ "DOMINA" $\frac{c}{3q^3}$, per $q \to \pm\infty$ "DOMINA" $\frac{a}{q}$, entrambi DISPARI; allora: (2)

$$\lim_{q\to 0^+} V(q) = \underset{\left(\frac{c}{|c|}\right)}{\text{segno}(c)} \cdot \infty, \quad \lim_{q\to+\infty} V(q) = 0^{\pm} \leftarrow \pm = \text{segno}(a)$$; analogo

Discorso per le tangenti: $V'(q) = -\left(\frac{a}{q^2} + \frac{b}{q^3} + \frac{c}{q^4}\right)$ che $\lim_{q\to 0^+} V'(q) = -\text{segno}(c)\cdot\infty$ e $\lim_{q\to+\infty} V'(q) = 0^{\mp} \leftarrow \mp = -\text{segno}(a)$; per gli zeri ~~in $q \neq 0$~~ di $V'(q)$ conta anche il segno di b e di b^2-4ac.

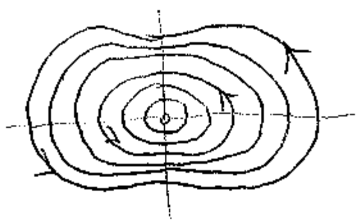
$\boxed{EX}$ Studiare $H(p,q) = \frac{p^2}{2(1+q^2)} + \frac{g q^2}{2}$ $(g>0)$. $(\in C^2(\mathbb{R}^2))$

$$\nabla H(p,q) = \left(\frac{p}{1+q^2},\ gq - \frac{p^2 q}{(1+q^2)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}_H(p,q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+q^2} & \frac{-2pq}{(1+q^2)^2} \\ \frac{-2pq}{(1+q^2)^2} & g + \frac{p^2(3q^2-1)}{(1+q^2)^3} \end{bmatrix}$$; ora, $\nabla H(p,q) = 0$

$\iff (p,q) = (0,0)$, DOVE $\mathcal{H}_H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$ è def. pos.,

cioè H ha MINIMO FORTE IN $(0,0)$, che è anche stabile, per cui il sistema di HAMILTON ha punto d'eq. STABILE di tipo centro; NON SOLO: le curve di livello sono COMPATTE ("cioè" limitate), perché "stanno dentro" un'ellisse $\left(\frac{p^2}{2(1+q^2)} \leq \frac{p^2}{2}\right)$; inoltre il disegno è simmetrico in p e in q, pertanto:



TRASF. DI LEGENDRE (1)

Per $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$, da cui $\begin{cases}\dot p = -V'(q)\\ \dot q = \frac{p}{m}\end{cases}$)

descriviamo il SDC tracciando le traiettorie (= curve di livello di H) SUL PIANO ($p = m\dot q$, q); ora, è ovvio che possiamo cambiare coordinate in $\boxed{(q,\dot q)}$ (cambio scala delle p ($1/m$) e scambio gli assi!), ma ... in generale ??
("EQUIVALENZA" Newton/Hamilton) $\begin{cases} q=q\\ \dot q = \partial_p H(p,q)\end{cases}$

$\dot q = \partial_p H(p,q)$, e voglio che $(p,q)\mapsto(q,\dot q)$ sia un diffeomorfismo (biezione C^1 con inversa C^1), $\Rightarrow$ det jacobiano $\boxed{\neq 0}$, e vale il viceversa per avere l'inv. LOCALE:

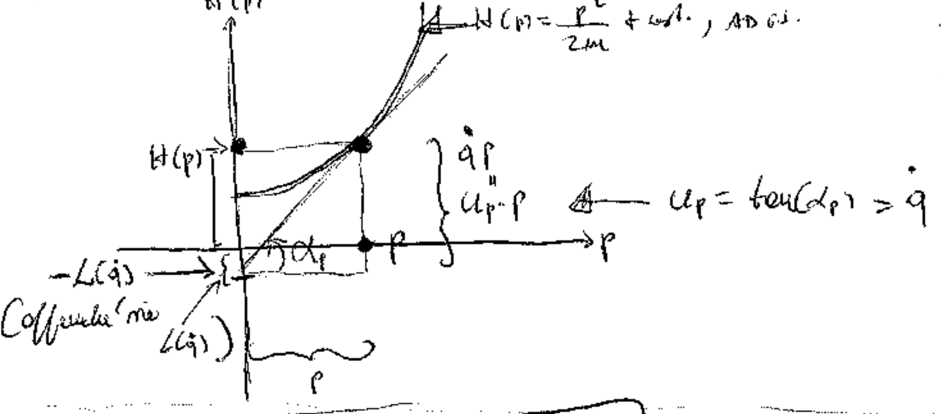
$$\det J_{((p,q))} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \partial_p^2 H & \partial_q\partial_p H\end{bmatrix} = -\partial_p^2 H \neq 0 \Leftrightarrow \partial_p^2 H(p,q)\neq 0;$$

se $\partial_p^2 H(p,q) = \frac{\partial \dot q}{\partial p} > 0$, allora $\boxed{p\mapsto \dot q}$ è strett. crescente (cioè $H|_p$ è strett. convessa), dunque è chiara l'invertibilità globale: con $H(p,q)\in C^2$,
(oltre il fatto che è più "maneggevole")

se $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial \dot q}{\partial p} > 0$, allora $(p,q)\mapsto(q,\dot q)$ è DIFFEOMORFISMO detto TRASFORMAZIONE DI LEGENDRE; se allora esiste $f\in C^1$ tale che $p = f(q,\dot q)$ e tale che $(q,\dot q)\mapsto (\underbrace{f(q,\dot q)}_{=p}, q)$ è l'inversa del diffeo. sopra, detta TRASFORMAZIONE INVERSA DI LEGENDRE. Sia $\dot q = g(p,q)$.
(Cioè $(p,q)\mapsto (q, \dot q = g(p,q))$ ("$\frac{\partial H}{\partial p}(p,q)$"), mentre $(q,\dot q)\mapsto (p = f(q,\dot q), q)$)

?? Come trasformare le eq. $\begin{cases}\dot p = -\partial_q H(p,q)\\ \dot q = \partial_p H(p,q)\end{cases}$ DAL piano (p,q) AL piano $(q,\dot q)$ "mantenendo le stesse dinamiche" ??

Il punto è occuparsi di $p \mapsto \dot q = \partial_p(H(p,q))$ ad es. q FISSATO :



$$\forall \dot q,\ H(p) = p\dot q - L(\dot q)\ ,$$

Cioè

$\partial_p H = \dot q$ e "simmetricamente" $\partial_{\dot q} L = p$! (VEDI DOPO)

$$\boxed{H(p,q) = p\dot q - L(q,\dot q)}\ ;$$

definendo allora

$$L(q,\dot q) := \text{"}p\dot q - H(p,q)\text{"} = f(q,\dot q)\dot q - H(f(q,\dot q),q)$$

(LA TRASFORMATA DI LEGENDRE $(H \mapsto L)$), nell'ipotesi di convessità H in (p,q), le dinamiche sarebbero equivalenti ; NOTA : se al contrario avessimo L in $(q,\dot q)$ (TIPICO DIN MECCANICA!), allora $H(p,q) := \text{"}p\dot q - L(q,\dot q)\text{"} =$

$$= p\cdot\varphi(p,q) - L(q, \varphi(p,q))\ !$$

(TRASFORMATA INVERSA DI LEGENDRE $(L \mapsto H)$) $\quad$ ($\Leftrightarrow$ TRASFORMAZIONE DI PUNTI / TRASFORMATA DI FUNZIONI)

$\boxed{\text{ES.}}$ $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ $(\in C^2)$, $\dot q = \partial_p H(p,q) = \frac{p}{m}$

$$\Rightarrow\ p\dot q - H(p,q) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} - V(q) = \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\frac{m}{2}\dot q^2} - V(q) \Rightarrow$$

$$L(q,\dot q) = \frac{m}{2}\dot q^2 - V(q)$$

(in effetti $p = m\dot q \Rightarrow p\dot q - H(p,q) =$
$= m\dot q^2 - \underbrace{\frac{(m\dot q)^2}{2m}}_{\frac{m\dot q^2}{2}} - V(q) = \frac{m}{2}\dot q^2 - V(q)$) . ✓

Mentre $H(p,q)$ è detta "hamiltoniana", $L(q,\dot q)$ è detta **lagrangiana**.

Come cambiano le equazioni ? $L(q,\dot q) = f(q,\dot q)\,\dot q - H(f(q,\dot q),q)$ (E)

($f(q,\dot q)=p$) $\Rightarrow$ $\partial_q L = \partial_q f \cdot \underbrace{\dot q}_{\sim \partial_p H} - \partial_p H(\underbrace{f(q,\dot q)}_{p},q)\,\partial_q f - \partial_q H$ $= 0$

$\left((q,\dot q) \xrightarrow{J} (f(q,\dot q),q) \xrightarrow{H(p,q)} H(f(q,\dot q),q) \right)$, cioè

$J = \begin{bmatrix} \partial_q f & \partial_{\dot q} f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \nabla H(p,q) = (\partial_p H, \partial_q H)^T$

$$\boxed{\partial_q L(q,\dot q) = \underbrace{- \partial_q H(\underbrace{f(q,\dot q)}_{=p},q)}_{\dot p}}$$

; analogamente $\partial_{\dot q} L =$

$= \partial_{\dot q} f \cdot \underbrace{\dot q}_{\sim \partial_p H} + f(q,\dot q) - \partial_{\dot q} f\, \partial_p H = \underbrace{f(q,\dot q)}_{p}$, cioè $\boxed{\partial_{\dot q} L(q,\dot q) = \underbrace{f(q,\dot q)}_{p}}$

Ora, $\dot p = -\partial_q H(p,q) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$, cioè

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

("EQUAZIONE DI LAGRANGE").

($\dot p + \partial_q H = 0$)

(Si hanno dimostrato equivalenti, nel senso che soluzioni hamiltoniane $\mapsto$ soluzioni lagrangiane, purché abbia ottenuto l'altra eq. sfruttando $\begin{cases} \dot p = -\partial_q H \\ \dot q = \partial_p H \end{cases}$!

(IL BELLO E' CHE IL SIS HAMILTONIANO SI STUDIA "BENE"!))

Ora, $\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q,\dot q) = f(q,\dot q)$ ma

$\frac{d}{dt} = \dot q\, \partial_q f + \ddot q\, \partial_{\dot q} f$; $\left(t \xrightarrow{(\dot q, \ddot q)} (q(t),\dot q(t)) \xrightarrow{f} f(q(t),\dot q(t)) \right)$ $\quad (\partial_q f, \partial_{\dot q} f)$

ma (se $\partial_{\dot q} L = f$) $\begin{cases} \partial_q f = \partial_q \partial_{\dot q} L \\ \partial_{\dot q} f = \partial^2_{\dot q^2} L \end{cases}$, dunque l'eq. di L. è

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}(q,\dot q)\cdot \ddot q + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot q}(q,\dot q)\,\dot q - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

, DOVE

$\left(\frac{\partial p}{\partial \dot q} = \left(\frac{\partial \dot q}{\partial p}\right)^{-1}\right)$

$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2} = \frac{\partial f(q,\dot q)}{\partial \dot q} \cancel{=} \frac{\partial g(p,q)}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0 \right\|$ $\Rightarrow$ non solo l'eq. è

Effettivamente al secondo posto, ma effettuo L strett. convessa rispetto a $\dot q$ $\Leftrightarrow$ H strett. convessa rispetto a p !

ES Per $L(q,\dot q)=\frac{m\dot q^2}{2}-V(q)$, $p=\partial_{\dot q}L=m\dot q$ e $\dot p=\partial_q L=-V'(q)$ (che in effetti sarebbe $m\frac{d}{dt}\dot q=m\ddot q$, poiché $\dot q=\frac{p}{m}\Rightarrow\ddot q=\frac{\dot p}{m}=\frac{-V'(q)}{m}$), ossia $\boxed{m\ddot q=-V'(q)}$,

FORZA CONS. DA UN EN. POTENZIALE V

Da cui q e quindi p.
(NEWTON → HAMILTON → LAGRANGE → NEWTON!)

$\left((p,q)\ \cancel{(q,\dot q)}\ \cancel{(x,\dot x)}\right)$

Naturalmente possiamo a questo punto "cambiare" q in $\boxed{x=x(q)}$, $x(q)$ DIFFEOMORFISMO ($\Leftarrow \frac{\partial x}{\partial q}\neq 0$), e

$$\dot x=\frac{\partial x}{\partial q}\dot q \quad \left(\text{da cui } \dot q=\frac{\dot x}{\frac{\partial x}{\partial q}}\ \left(=\dot x\frac{\partial q}{\partial x}\ldots!\right)\right).$$

Sia "$\mathcal L(x,\dot x)=L(q,\dot q)$", cioè $\mathcal L(x(q),\dot x(q,\dot q))=L(q,\dot q)$.

TEOREMA DI COVARIANZA DELL'EQ. DI LAGRANGE: $x=x(q)$

$\in C^2 \Rightarrow$ le dinamiche in q o in x sono EQUIVALENTI, infatti

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\right)=\frac{\partial \mathcal L}{\partial x}.$$

$x\in C^2$!

[$x=x(q)\Rightarrow \dot x=\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\dot q \Rightarrow \frac{\partial \dot x}{\partial \dot q}=\frac{\partial x}{\partial q}$ e $\frac{\partial \dot x}{\partial q}=\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot q$)

Allora $p=\frac{\partial L}{\partial \dot q}=\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\frac{\partial \dot x}{\partial \dot q}=\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\frac{\partial x}{\partial q} \Rightarrow \dot p=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\right)\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\cdot\dot q$; poi

$$(q,\dot q)\mapsto(x(q),\dot x(q,\dot q))\mapsto\mathcal L(x(q),\dot x(q,\dot q)) \qquad L \qquad L(q,\dot q)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q} & 0\\ \frac{\partial \dot x}{\partial q} & \frac{\partial \dot x}{\partial \dot q}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial \dot x}{\partial q}=\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot q,\quad \frac{\partial \dot x}{\partial \dot q}=\frac{\partial x}{\partial q} \qquad \left(\frac{\partial \mathcal L}{\partial x},\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot x}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot x}\underbrace{\frac{\partial \dot x}{\partial q}}_{\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot q} \quad , \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)}_{\dot p} - \frac{\partial L}{\partial q} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\frac{\partial x}{\partial q} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot q} - \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot x}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\dot q} =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\right]\underbrace{\frac{\partial x}{\partial q}}_{\neq 0!} \quad . \quad \square$$

$\boxed{\text{MOTI VINCOLATI}}$ (AD UN GRADO DI LIBERTÀ). Corpo "puntiforme" =: "punto" :=

Corpo la cui energia cinetica è supponibile come ENERGIA CINETICA DI TRASLAZIONE ; sia di massa $m > 0$.

Moto libero: $\boxed{m\ddot x = F(x, \dot x, t)}$, se $t \mapsto x(t)$ ($I \mapsto \mathbb{R}^3$) è la curva che descrive il moto in $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^n$) del punto, mentre F è assegnata.

(le forze che stanno facendo muovere il punto all'istante t dipende da x (dove sia), $\dot x$ (velocità che abbia) e t "secondo F" !)

(anche questa è $G(t)$!)

Moto vincolato: $\boxed{m\ddot x = F(x, \dot x, t) + R(t)}$, con $R(t)$ = le reazioni vincolari del vincolo (che è una curva), [illegible] L'ATTRITO ; se il punto P "si muove lungo" $X = X(q)$ (di classe $\mathcal{C}$, REGOLARE, su $I \subseteq \mathbb{R}$), quindi (X(q(t)) è la legge oraria! Ma qui non è nota...) con velocità $|\dot X| = \left|\frac{\partial X}{\partial q}\right| |\dot q|$ $(\neq 0!)$, allora la energia cinetica

$T := T(q, \dot q) = \frac{m}{2}|\dot X|^2 = \frac{m}{2}\left|\frac{\partial X}{\partial q}\right|^2 \dot q^2$, e inoltre supponiamo che il vincolo sia LISCIO : $R \cdot \dot X = 0$, cioè

$R \cdot \frac{\partial X}{\partial q}(q) = 0$ (← l'attrito non influisce!) . Allora

$$m\ddot{X} - F(X, \dot{X}, t) - R(t) = 0 \Rightarrow \left[m\ddot{X} - F(X, \dot{X}, t)\right]\frac{\partial X}{\partial q}(q(t)) = 0$$

Allora, se F è CONSERVATIVO, ossia $-F = \nabla W$ (ossia W ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) è l'energia potenziale delle forze esterne che danno il movimento!), allora le forze nelle curve $X(q)$ sono date dal potenziale $\boxed{W(X(q)) =: V(q)}$, tale che poi $\frac{\partial V}{\partial q}(q) =$

$= \nabla W(X(q)) \cdot \frac{\partial X}{\partial q}(q)$; dunque "la lagrangiana" (come se $H(q,\dot{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$!)

$\boxed{L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)}$ ci permette di descrivere il moto: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) + \left(-\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial q}\right|^2}_{\frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial X}{\partial q}}\dot{q}\right) + \nabla W(X(q))\frac{\partial X}{\partial q}(q) - \frac{m}{2}\dot{q}^2\frac{\partial}{\partial q}\underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial q}\right|^2}_{\frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial X}{\partial q}}$

$$\cancel{= \left[\frac{d}{dt}\left(m\frac{\partial X}{\partial q}(q)\dot{q}\right) + \nabla W(X(q)) - \frac{m}{2}\dot{q}^2\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial X}{\partial q}\right]\cdot\frac{\partial X}{\partial q} =}$$

$$\cancel{= \left[\frac{m}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial q^2}(q)\dot{q}^2 + m\frac{\partial X}{\partial q}(q)\ddot{q} + \nabla W(X(q)) - \frac{m}{2}\dot{q}^2\frac{\partial^2 X}{\partial q^2}\right]\frac{\partial X}{\partial q}};$$

ma, AD ES., $X(q) = \begin{pmatrix} x(q) \\ y(q) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial X}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial q}(q) \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{\partial X}{\partial q}\right|^2 = \frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial X}{\partial q} = \left(\frac{\partial x}{\partial q}(q)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}(q)\right)^2$, che ha $\partial_q = 2\left(\frac{\partial x}{\partial q}(q)\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}(q) + \frac{\partial y}{\partial q}(q)\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}(q)\right) = 2\frac{\partial X}{\partial q}(q)\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial q^2}(q)$, mentre che

$\boxed{\frac{d}{dt}} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial q}(q)\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}(q)\dot{q} + \frac{\partial y}{\partial q}(q)\frac{\partial^2 y}{\partial q^2}(q)\dot{q}\right) = 2\dot{q}\frac{\partial X}{\partial q}(q)\frac{\partial^2 X}{\partial q^2}(q)$,

per cui l'eq. è (CALCOLI INVECE EVIDENTI!)

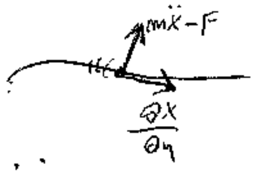
$$= \left[m \frac{\partial X}{\partial q}\ddot q + \cancel{2} m \dot q^2 \underbrace{\frac{\partial^2 X}{\partial q^2}(q)} + \nabla W(X(q)) - \underbrace{m \dot q^2 \frac{\partial^2 X}{\partial q^2}(q)} \right] \cdot \frac{\partial X}{\partial q} = \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(m \dot q \underbrace{\frac{\partial X}{\partial q}}_{\dot X}\Big), = m\ddot X$$

Cioè otteniamo le stesse equazioni senza "usare" la L! [illegible]

$$= \Big[m\ddot X + \underbrace{\nabla W}_{-F} \Big] \cdot \frac{\partial X}{\partial q} = 0 \quad \text{“}=0\text{ !”}$$

, e quindi (ciò significa equivalentemente che l'accelerazione $m\ddot X$ di P è conforme a F SOLO per le componenti nella direzione tangente alla curva di vincolo :

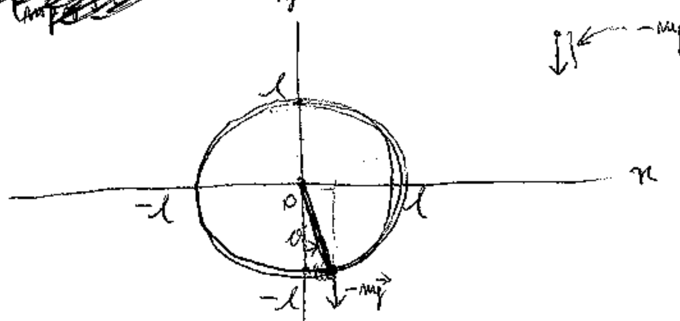


). Notazione del

$$m\ddot X + \nabla W = m\ddot X - F = R \; !$$

Applicazione ai pendoli ("rigidi") nonlineari (oscillazioni "totali") circolari (senza attrito!) , = punto P di massa $m\ (>0)$ VINCOLATO in $\mathbb{R}^2$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = l^2$ (di raggio $l > 0$) e sottoposto al solo campo di forze $F(x,y)$ di energia potenziale $W(x,y) = W(y) := mgy$, CIOÈ $F(x,y) = \cancel{F(y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$.

$\downarrow\downarrow \leftarrow -mg$ ovunque



. Dunque

VINCOLO $= X(\theta) = \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin\theta \\ -l\cos\theta \end{bmatrix}$ (parte da $(0,-l)$ e gira in senso ANTIORARIO)

$$\Rightarrow \dot X(\theta) = \frac{\partial X}{\partial \theta}\dot\theta \Rightarrow T(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2} m \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial \theta}\right|^2}_{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = l^2} \dot\theta^2 = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 ,$$

mentre

$V(\theta) = mg\,"y(\theta)" = -mgl\cos(\theta)$, $\Rightarrow$ la lagrangiana è
$\uparrow$ $-l\cos(\theta)$!

$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T(\theta,\dot\theta) - V(\theta) = \boxed{\frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 + mgl\cos(\theta)}$ (notiamo che potremmo considerare $\frac{\mathcal{L}}{ml}$ (invece che $\mathcal{L}$), perché' non influisce sull'EQ. di Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$, "innocuamente" per contesto) :

$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta$, che ha derivata totale $ml^2\ddot\theta$, e

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mgl\sin(\theta) \Rightarrow$ l'EQ. è $\boxed{ml^2\ddot\theta = -mgl\sin(\theta)}$, cioè

$\boxed{\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin(\theta)}$, come già avevamo visto !!! Volendo invece
NEWTONIANA!

riscrivere con l'Hamiltoniana, $H(p,\theta) = "p\underbrace{\dot\theta}_{\frac{p}{ml^2}} - \mathcal{L}(\theta,\underbrace{\dot\theta}_{\frac{p}{ml^2}})" =$

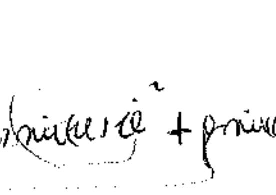
$= \frac{p^2}{ml^2} - \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos(\theta) = \boxed{\frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos(\theta)}$.

Proviamo infine a calcolare la reazione vincolare : $\frac{dX}{dt}(\theta) =$

$= \frac{\partial X}{\partial\theta}\cdot\dot\theta = l\dot\theta\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\ddot X(\theta,\dot\theta)}{\ddot X(\theta)} = l\ddot\theta\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix} + l\dot\theta\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\dot\theta\\ \cos(\theta)\dot\theta\end{bmatrix} =$

$= l\begin{bmatrix}\cos(\theta)\ddot\theta - \sin(\theta)\dot\theta^2\\ \sin(\theta)\ddot\theta + \cos(\theta)\dot\theta^2\end{bmatrix}$; Ma $R(\theta,\dot\theta) = R = m\ddot X(\theta,\dot\theta) -$

$F(\theta,\dot\theta) = m\ddot X + \underbrace{\nabla W(\theta,\dot\theta)}_{\begin{bmatrix}0\\ mg\end{bmatrix}} = m\left(\ddot X + \begin{bmatrix}0\\ g\end{bmatrix}\right) =$



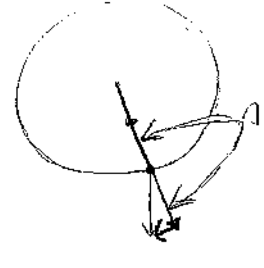
$= m\begin{bmatrix}l\cos(\theta)\ddot\theta - l\sin(\theta)\dot\theta^2\\ l\sin(\theta)\ddot\theta + l\cos(\theta)\dot\theta^2 + g\end{bmatrix}$ (in effetti $R\cdot l\begin{bmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix} =$

$= ml\left(l\cos^2(\theta)\ddot\theta - l\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\theta^2 + l\sin^2(\theta)\ddot\theta + l\cos(\theta)\sin(\theta)\dot\theta^2 + g\sin(\theta)\right)$

$l\underbrace{\ddot\theta}_{=-\frac{g}{l}\sin(\theta)} + g\sin(\theta) = 0$!) ; ora,

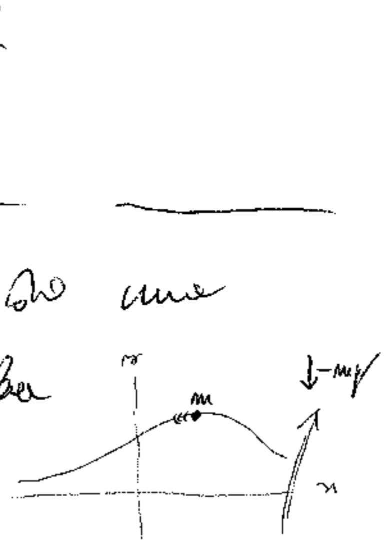
$N = \begin{bmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\cdot N = -x\frac{y}{l} + y\frac{x}{l} = 0$, ( )

per cui $0 = N\cdot R = m(l\dot\theta^2 + g\cos(\theta))$, come "giustamente" è forza centripeta + componente radiale di $-mg\vec{}$ = 0 !



!

Moti vincolati a "profili": se $\mathcal{C}$ è del tipo $y = f(x)$ o C^2, cioè a $\begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$ $(\partial/\partial x = [f'(x)])$, allora



$T(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\,[1 + (f'(x))^2]\,\dot{x}^2$ $\Rightarrow$ $V(x) = mgy$

$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m\,[1+(f'(x))^2]\,\dot{x}^2 - mg f(x)$, $(W(x) = \frac{V(x)}{mg})$

$\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,[1+(f'(x))^2]\,\dot{x} \Rightarrow \dot{p} = m\,[1+(f'(x))^2]\,\ddot{x} +$

$+ 2m\dot{x}^2 f'(x)$, mentre $\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}^2 f'(x) f''(x) -$

$- mg f'(x)$, da cui l'Eq. di Lagrange; invece la hamiltoniana è $H(p,x) = $ "$p\dot{x} - L(x,\dot{x})$" $= \frac{p^2}{2m\,[1+(f'(x))^2]} + mg f(x)$;

Notiamo che se s è "parametro arco" di $\begin{bmatrix} x(s) \\ f(x(s)) \end{bmatrix}$, cioè tale che

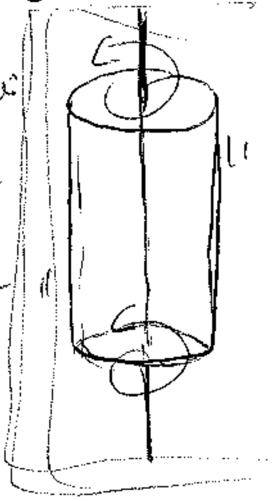
~~lo spazio percorso da t_0 a "s" è proprio s (velocità 1!), cioè~~ ~~$s(t)-s(t_0) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial X}{\partial x}(x')\right| dx'$ DA CUI $t(s)$, allora $\dot{s}^2 =$~~ ~~$= \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^2 = (1+(f'(x))^2)$, da cui $L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s} - mg f(x(s))$~~ ~~($x(s)$ ha $\dot{x}(s) = 1$!)~~

cioè tale che $|\dot{X}(x(s))| = 1$, allora chiaramente resta solo "$\dot{s}$": $L(s,\dot{s}) = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - mg\,h(s)$, $h(s) := f(x(s))$ ✓

DIAGRAMMI DI BIFORCAZIONE →

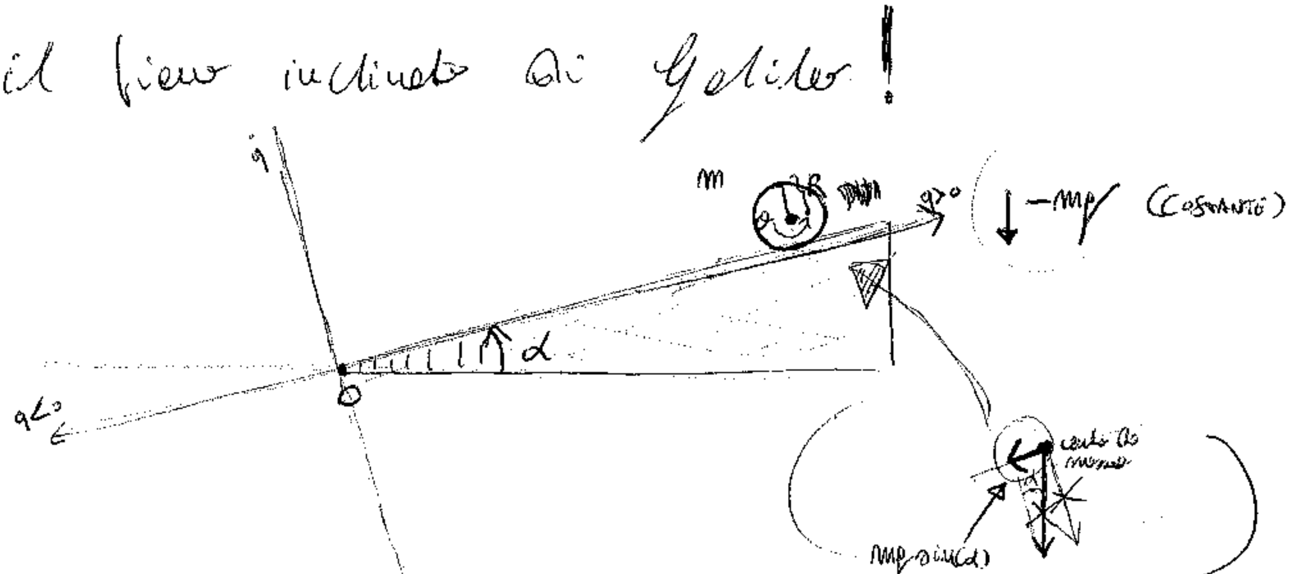
ES Sia P punto di massa m (>0) vincolato a muoversi in $\mathbb{R}^2_{(q,\dot q)}$ sul profilo di $f(q) = 1 - e^{-\frac{q^2}{2}}$ . . . Dopo!

CORPI NON PUNTIFORMI: l'energia cinetica è quella di TRASL. + quella di ROTAZIONE, nell'ipotesi che il corpo ruoti solo attorno ad un asse con direzione fissa, e che ruoti d'angolo θ, allora l'energia cinetica di rotazione è $\boxed{\frac{1}{2} I \dot\theta^2}$ (rispetto all'asse fisso) → MOMENTO D'INERZIA relativo all'unico asse di rotazione.

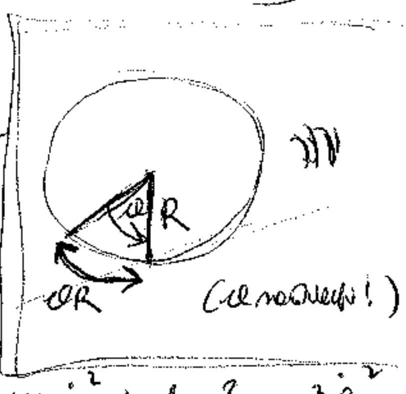


Ad es., per  è $\frac{1}{2}mR^2$, per  è $\frac{2}{5}mR^2$ ("piena").

ES: il piano inclinato di Galileo!



La pallina NON STRISCIA, ossia ruota solamente, pertanto "a ritroso di θ" $q = -R\theta$ (il "−" indica che stiamo andando in opposizione ai $q>0$! Viceversa se spingo la pallina dal basso verso l'alto: vado a crescere di $q>0$, e in effetti la rotazione è oraria (negativa));



allora $T(q,\dot q) = \frac{1}{2} m\dot q^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} mR^2\dot\theta^2$ (ma $\dot\theta = \left(-\frac{q}{R}\right)^{\cdot} = -\frac{\dot q}{R}$) $= \frac{1}{2} m\dot q^2 + \frac{1}{5} m\dot q^2 = \frac{7}{10}m\dot q^2$, mentre

$V(q) = mg\sin(\alpha)\,q$ (cosicché appunto $-V'(q) = -mg\sin(\alpha)$!) $\Rightarrow$

$L(q,\dot q) = \frac{7}{10} m\dot q^2 - mg\sin(\alpha)\,q$ INDIPENDENTE DA $R(>0)$;

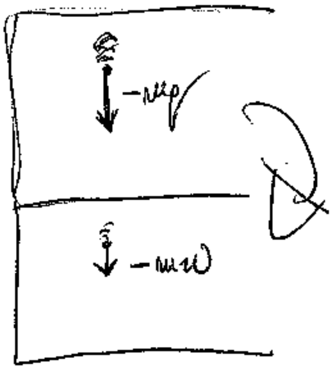
da cui $\frac{\partial L}{\partial q} = -mg\sin(\alpha)$, $\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{7}{5} m\dot q$ $\Rightarrow$ l'eq. di Lagr.

è $\frac{7}{5} m\ddot q = -mg\sin(\alpha)$, cioè $\boxed{\ddot q = -\frac{5}{7} g\sin(\alpha)}$ (q è un polinomio di secondo grado!); ANALOG., se avessimo un cilindro: $T(q,\dot q) = \frac{1}{2} m\dot q^2 + \frac{1}{2}\overset{\frac{1}{2}mR^2}{I}\,\underbrace{\dot\theta^2}_{\frac{\dot q^2}{R^2}} = \frac{1}{2} m\dot q^2 + \frac{1}{4} m\dot q^2 = \frac{3}{4} m\dot q^2$,

$\Rightarrow L(q,\dot q) = \frac{3}{4} m\dot q^2 - mg\sin(\alpha)\,q$, da cui l'EQ. è

$\boxed{\ddot q = -\frac{2}{3} g\sin(\alpha)}$. Se invece consideriamo un PUNTO, allora $L(q,\dot q) = \frac{1}{2} m\dot q^2 - mg\sin(\alpha)\,q$ $\Rightarrow$

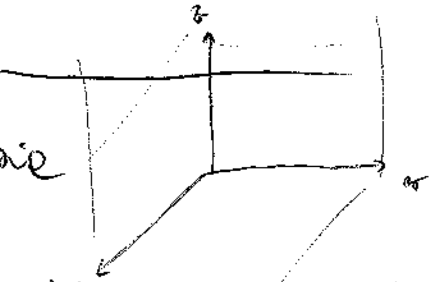
$\ddot q = -g\sin(\alpha)$; invece, per il solito punto MA in caduta libera, è $L(z,\dot z) = \frac{1}{2} m\dot z^2 - mgz$; se allora $w := g\frac{5}{7}\sin(\alpha)$ $(\leq g)$ invece che g, è



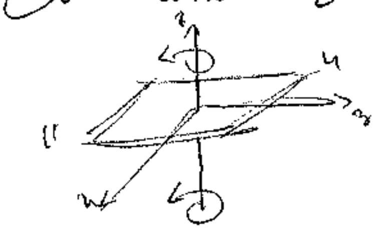
$L(z,\dot z) = \frac{1}{2} m\dot z^2 - mwz$ che ha EQ.

$\boxed{\ddot z = -w = -\frac{5}{7} g\sin(\alpha)}$, = a quella della sfera su piano inclinato (di α)!! ["MORALE FISICA": si può studiare il moto unif. accelerato SU PIANO INCLINATO, anziché in caduta libera, purché esso è equivalente MA CON ACC. GRAVIT. anche molto minore, il che è comodo!]

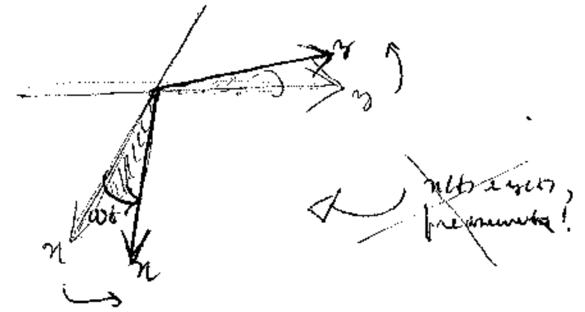
SISTEMI ROTANTI (di $\mathbb{R}^3$): sia



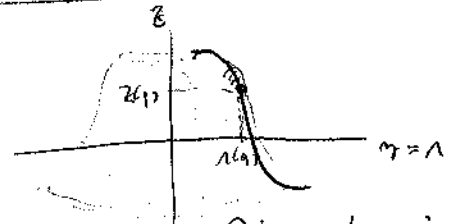
NON inerziale (per cui NON c'è conservazione dell'energia meccanica) in questo capisce su uno dove esterno che lo fa RUOTARE attorno all'asse z :



Se la velocità angolare ω è costante, allora se 0 e t il sistema che ruota di $\omega \cdot t$ radianti :



Precisamente, sia P il relativo (punto di massa m (>0)) vincolato nel piano ($y =: r$, z) alla curva $\begin{bmatrix} r(q) \\ z(q) \end{bmatrix} \in C^2$ REGOLARE :



; è evidente allora che la superficie-vincolo di rotazione è C^2, in $\mathbb{R}^3$,
(anche se il punto percorre in questo caso una curva!)

$$\begin{cases} x(q,t) = r(q)\cos(\omega t) \\ y(q,t) = r(q)\sin(\omega t) \\ z(q,t) = z(q) \end{cases}$$

, che dà derivate totali

$$\begin{cases} \dot{x} = r'(q)\cos(\omega t)\dot{q} - \omega r(q)\sin(\omega t) \\ \dot{y} = r'(q)\sin(\omega t)\dot{q} + \omega r(q)\cos(\omega t) \\ \dot{z} = z'(q)\dot{q} \end{cases} \Rightarrow T(q,\dot{q}) =$$

$$= \frac{1}{2}m|\dot{X}|^2 = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right\} = \frac{m}{2}\left\{(r'(q))^2\dot{q}^2 + (r(q))^2\omega^2 + \right.$$

$$\left. + (z'(q))^2\dot{q}^2\right\} = \boxed{\underbrace{\frac{m}{2}[\underbrace{(r'(q))^2 + (z'(q))^2}_{\neq 0!\ (\text{r.})}]\dot{q}^2}_{=:\ T_2(q,\dot{q})} + \underbrace{\frac{m}{2}\omega^2 r^2(q)}_{=:\ T_0(q)}},$$

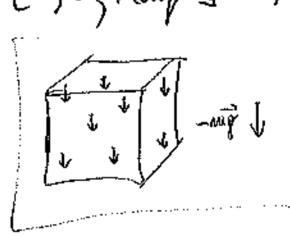
$=: T_2(q,\dot{q}) =$ l'energia cinetica (totale) che avremmo su (r,z) NON ruotante

$=: T_0^{(q)} =$ l'energia cinetica di rotazione del punto (infatti $\frac{1}{2}I\omega^2$ con $I = mr^2(q)$)

che è anche $\frac{1}{2} r(q) \cdot \underbrace{[m\omega^2 r(q)]}_{\text{FORZA CENTRIFUGA!}}$

mentre in generale sarà $W(x,y,z) =$ mgz (per avere il solito campo di forze costante $-\nabla W = (0,0,-mg)^T$!)

in generale, se $W(x(q,t), y(q,t), z(q,t)) = V(q)$, ossia "se W COME T non dipende direttamente



dal tempo (per cui $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0$), allora anche $L =$ $= T_2 + T_0 - V$ è indip. dal tempo, per cui l'eq. di LAGRANGE è semplicemente $\frac{DL}{Dq} = 0$, CIOÈ

$$\| \; m\,[r'(q)\,r''(q) + z'(q)\,z''(q) + \omega^2 r(q)\,r'(q)] - V'(q) = 0 \; . \|$$

Inoltre il sistema è INTEGRABILE perché l'hamiltoniana del suo hamiltoniano: $H(p,q) =$ "$p\dot q - L(q,\dot q)$", CON ~~$\frac{p^2}{2m} = \frac{m}{2}[r'(q)^2 + z'(q)^2]\dot q^2$~~, cioè $p = m\underbrace{[(r'(q))^2 + (z'(q))^2]}_{=:e(q) > 0\,!}\dot q$, $\Rightarrow$

$H(p,q) = \frac{p^2}{e(q)} - \frac{p^2}{2e(q)} - T_0(q) + V(q) = T_2(p,q) - T_0 + V$. NOTA:

$p = p(\dot q)$ è integrale primo per l'eq. di Lagrange, ma NON va interpretato come impulso: l'energia totale è invece

$E(q,\dot q) =$ "$T + V$" $= T_2 + T_0 + V = H + 2T_0$ che ha

$\dot E = \dot H + 2\dot T_0 = 2\dot T_0 \not\equiv 0$; A PROPOSITO: $\dot E =$ $= 2\dot T_0 = \omega^2 \frac{dI}{dt}$, $I = m r^2(q)$, è esattamente la potenza richiesta al motore esterno che fa ruotare il sistema!

[La forza assorbita nel fare è quella centripeta!]

(ES) Se la curva in (r,z) di P fosse il grafico di $f(\cdot)$, cioè $\binom{r(q)}{z(q)} = \binom{q}{f(q)}$, allora $T(q,\dot q) =$

$= \frac{1}{2} m\,(1 + (f'(q))^2)\,\dot q^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$, e se $V(q) = mg\,f(q)$

allora $L(q,\dot q) = T(q,\dot q) - V(q)$, mentre per $H(p,q)$,

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$ (così come $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$!) $= m[1+(f'(q))^2]\dot q$ (con cui q)

$\Rightarrow H(p,q) = p\dot q - L(q,\dot q) = \frac{p^2}{2m(1+(f'(q))^2)} - \frac{m\omega^2}{2}q^2 + mgf(q)$

Da cui avremo le Eq. di Hamilton $\begin{cases}\dot p = -\partial_q H \\ \dot q = \partial_p H\end{cases}$; ora, $\partial_p H(p,q) =$

$= \frac{p}{>0} = 0 \Leftrightarrow p = 0$, dunque (ovviamente) per calcolare quando $\partial_q H = 0$

calcolo solo $\partial_q\left(-\frac{m\omega^2}{2}q^2 + mgf(q)\right) = -m\omega^2 q + mgf'(q) = 0$

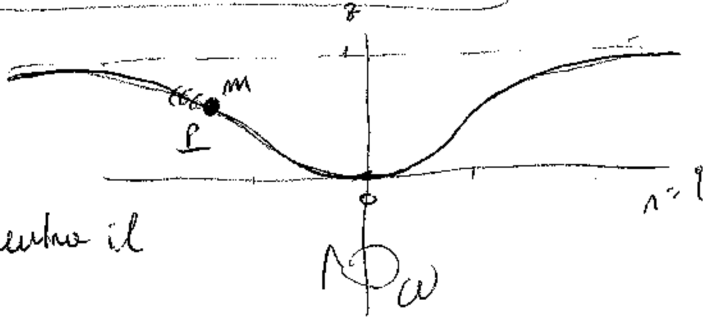
$\Leftrightarrow \boxed{m\omega^2 q = mgf'(q)}$.

Diagramma di biforcazione: ES. Sia P

punto di massa m (>0) vincolato

a muoversi in $\mathbb{R}^2_{(q,z)}$ lungo il

grafico di $f(q) = 1 - e^{-q^2/2}$, mentre il



piano stesso sta ruotando con velocità angolare ω costante, e supponiamo sia presente la sola forza di gravità $\vec g$ (rivolta verso le $z<0$).

Allora $L(q,\dot q) = \frac{1}{2}m(1+(f'(q))^2)\dot q^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 - mgf(q) =$

$= \left[f'(q) = qe^{-q^2/2}\right.$, che al quadrato è $\left.(f'(q))^2 = q^2e^{-q^2}\right] =$

$\frac{1}{2}m[1+q^2e^{-q^2}]\dot q^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 - mgf(q)$, da cui

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = m[1+q^2e^{-q^2}]\dot q$ e quindi $H(p,q) = \frac{p^2}{2m[1+q^2e^{-q^2}]}$

$- \frac{1}{2}m\omega^2q^2 + mg(1-e^{-q^2/2})$, da cui $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow$

$p=0$, si ottiene $\frac{\partial H}{\partial q}\big|_{p=0}=0 \iff \omega^2 q = \gamma q \sigma^{-q^2/2}$:

$q=0$ ✓, altrimenti $-\frac{q^2}{2} = \log\left(\frac{\omega^2}{\gamma}\right)$ SE

$\frac{\omega^2}{\gamma} < 1$, cioè $\pm\sqrt{-2\log\left(\frac{\omega^2}{\gamma}\right)} = \underset{(|q|=c)}{q}$. SIA

(α) $J := \frac{\omega^2}{\gamma}$ "parametro di biforcazione", ove, per la stabilità,

$$\mathcal{H}_H(0,q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2m(1+q^2\sigma^{-q^2})} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}-m\omega^2+m\gamma\sigma^{-q^2/2}\\ -m\gamma q^2\sigma^{-q^2/2}\end{matrix} \end{bmatrix}$$ che per $q=0$ ha DET $= \frac{-m\omega^2+m\gamma}{2m} = \frac{\gamma-\omega^2}{2}$

~~per cui $(0,0)$ è STABILE (ellittico)~~, mentre per

$|q|=c$ è $\overset{>0}{\frac{1}{2m(1+c^2\frac{\omega^2}{\gamma})}} \cdot \left[-m\omega^2+m\gamma\frac{\omega^2}{\gamma} - m\gamma c^2\frac{\omega^2}{\gamma}\right] =$

~~col segno definito sempre da $(2-c^2)m\omega^2$, cioè da $2-c^2$, cioè da $2-2\log(\frac{\omega^2}{\gamma})$~~ $= -mc^2\omega^2 < 0$, cioè sempre INSTAB.

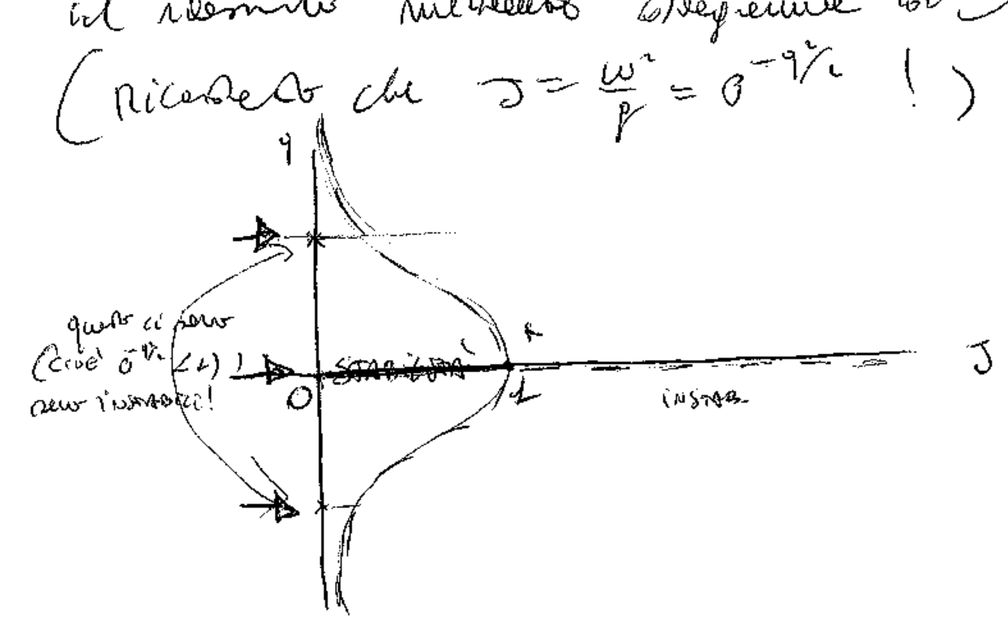
, mentre $\gamma - \omega^2 = \gamma(1-J) > 0$

se $\underset{(\text{STAB.})}{J<1}$, se $J>1$ $\underset{(\text{INSTAB.})}{\text{è } <0}$: troviamo allora

il seguente medesimo "diagramma di biforcazione" in (q, J)

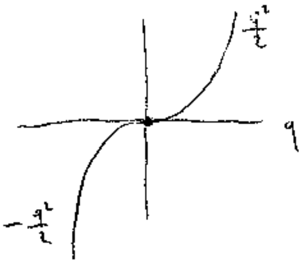
(Ricordando che $J = \frac{\omega^2}{\gamma} = \sigma^{-q^2/2}$!)

(la stabilità si riferisce a $(0,0)$!)

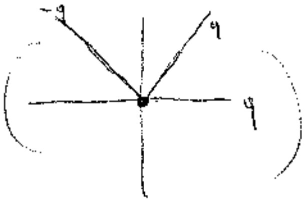


(FORZE NON C^1 : $H(p,q)\in C^2 \Rightarrow F(p,q)=(-\partial_q H, \partial_p H)\in C^1$,

ma ciò non è necessario né per esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz (per il sistema hamiltoniano) né per lo studio delle corrispondenti soluzioni! AD ES., $H(p,q)=\frac{p^2}{2}+V(q)$ CON $f(q)=-V'(q)$ $(=-\partial_q H)$ $\in C^1$ TRANNE che in un numero (≥ 1) finito di punti, dove però esistono derivate destra e sinistra: allora comunque $f(q)$ resta localmente lipschitziana! (ES) $V(q)=\frac{q\cdot|q|}{2}$, ossia

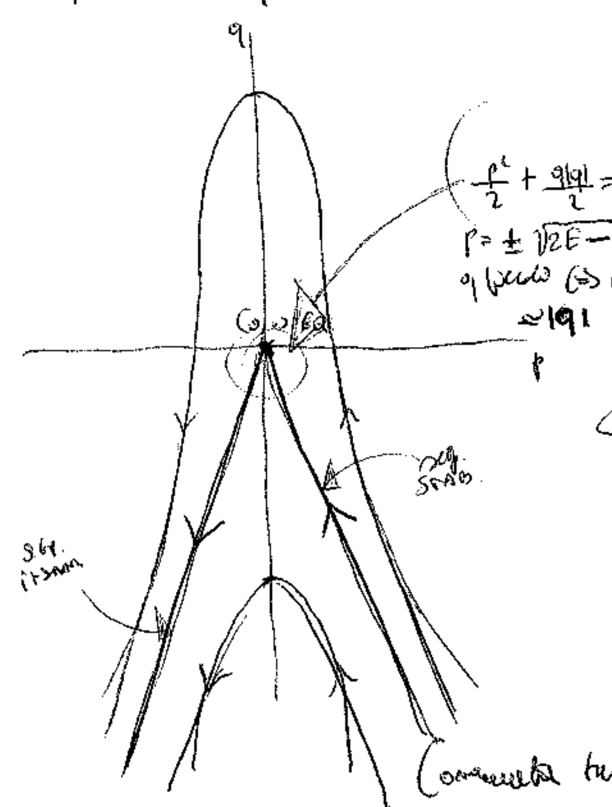


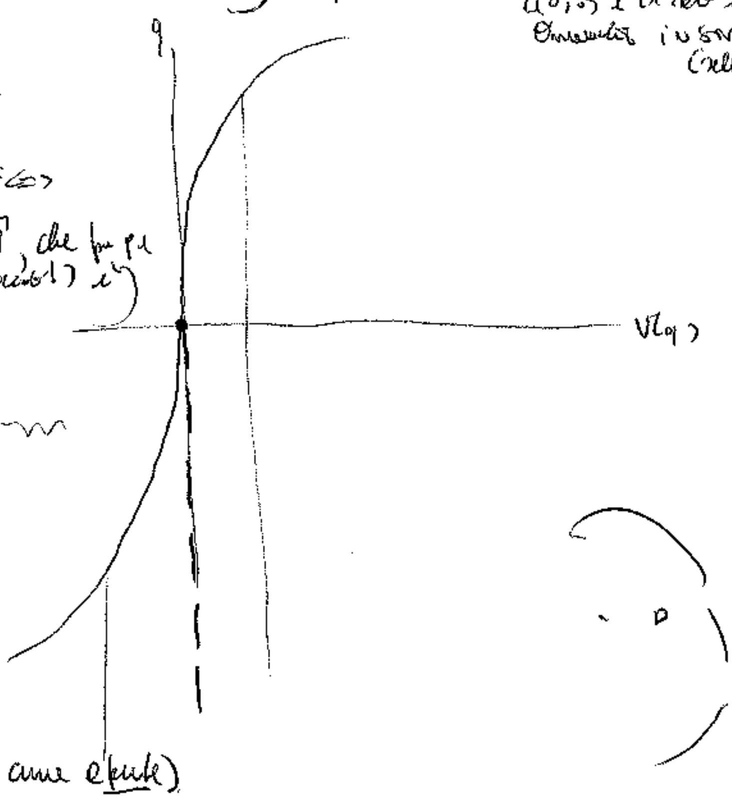
, cosicché $V'(q)=|q|$



che è C^1 tranne in 0, restando però lipschitziana (sotto sopra, e cioè è la norma di $\mathbb{R}$, per cui ovviamente $L=1$), $\Rightarrow$ $\begin{cases}\dot p=-|q|\\ \dot q=p\end{cases}$ ha soluzione locale definita e unica $\forall$ condizione iniziale, anche per $q=0$ (e lo stesso per $L(q,\dot q)$ "$=$" $p\dot q - H(p,q) \overset{p=\dot q}{=} \dot q^2-\frac{\dot q^2}{2}-V(q)=\frac{\dot q^2}{2}-V(q)$, $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q}$, cioè $\ddot q=-|q|$), e precisamente

((0,0) è il solo eq.! Ovviamente INSTABILE)





(ovviamente tutte curve aperte)

EX. (1) HAMILTON e LAGRANGE

EX Trasformare $H(p,q)$ in $\mathcal{L}(q,\dot q)$:

(1) $H(p,q)=\frac{p^2}{2}+pq$; (2) $H(p,q)=e^{p(q^2+1)}$; (3) $H(p,q)=$
$=\frac{|p|^\alpha}{\alpha}+V(q)$ CON $\alpha>2$. (per l'eq. di $\mathcal{L}$, dare sempre risposte e q e rispetto a $\dot q$!)

$$\mathcal{L}(q,\dot q) \,\text{"}=\text{"}\, p\dot q - H(p,q) \,\text{"}=\, p(q,\dot q)\cdot\dot q - H(p(q,\dot q),q),$$ se $p(q,\dot q)$ è dato dalla trasf. zione di LEGENDRE inversa.

(1) $\dot q=\partial_p H=p+q$ (cioè $p=\dot q-q$) $\Rightarrow$ $p\dot q - H(p,q)= \underbrace{p(p+q)}_{p^2+pq}-\frac{p^2}{2}-pq=$
$=\frac{1}{2}p^2$ ~~; ma~~ $\cancel{\begin{cases}\dot p=-\partial_q H=p\\ \dot q=\partial_p H=p+q\end{cases}}$ $=\frac{(\dot q-q)^2}{2}$, cioè

$$\mathcal{L}(q,\dot q)=\frac{(q-\dot q)^2}{2}.\ \checkmark$$

(2) $\dot q=\partial_p H(p,q)=(q^2+1)e^{p(q^2+1)}$ $\left(\text{cioè } p=(q^2+1)^{-1}\log\frac{\dot q}{q^2+1}\right)$;
allora $p\dot q - H(p,q)= p(q^2+1)e^{p(q^2+1)}-e^{p(q^2+1)}=$

$$=\underset{\dot q/(q^2+1)}{\underset{\uparrow}{e^{p(q^2+1)}}}(pq^2+p-1)=\frac{\dot q}{q^2+1}\Big[\underbrace{\frac{q^2}{q^2+1}\log\Big(\frac{\dot q}{q^2+1}\Big)+\frac{1}{q^2+1}\log\Big(\frac{\dot q}{q^2+1}\Big)}_{\log\left(\frac{\dot q}{q^2+1}\right)}-1\Big]$$

$$=\mathcal{L}(q,\dot q).\ \checkmark$$

(3) $\dot q=\partial_p H(p,q)=|p|^{\alpha-1}\cdot\underbrace{\text{segno}(p)}_{\frac{p}{|p|}}=p|p|^{(\alpha-2)>0}$ $\Rightarrow$

$p\dot q - H(p,q)=|p|^\alpha-\frac{|p|^\alpha}{\alpha}-V(q)=\frac{\alpha-1}{\alpha}|p|^\alpha-V(q)$; ma

$\dot q=\pm|p|^{\alpha-1}\Leftrightarrow\pm\dot q=|p|^{\alpha-1}\Rightarrow|\dot q|=|p|^{\alpha-1}$, cioè $|\dot q|^{\frac{1}{\alpha-1}}=|p|$, cioè

$|\dot q|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=|p|^\alpha$: $\mathcal{L}(q,\dot q)=\frac{\alpha-1}{\alpha}|\dot q|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-V(q)$. $\checkmark$ $\square$]

EX Trasformare $\mathcal{L}(q,\dot q)$ in $H(p,q)$. (1) $\mathcal{L}(q,\dot q)=-\sqrt{1-\dot q^2}$ CON $|\dot q|<1$; (2) $\mathcal{L}(q,\dot q)=\frac{1}{2}A^2(q)\dot q^2+B(q)\dot q-V(q)$, $A^2(q)\neq 0$.

[Analog. $H(p,q)\,\text{"}=\text{"}\,p\dot q-\mathcal{L}(q,\dot q)\,\text{"}=\,p\dot q(p,q)-\mathcal{L}(q,\dot q(p,q))$

dove $\dot q(p,q)$ è dato da LEGENDRE. (1) $p\dot q - L(q,\dot q) =$
$= p\dot q + \sqrt{1-\dot q^2}$; MA $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-\dot q^2}}(-2\dot q) = \dfrac{\dot q}{\sqrt{1-\dot q^2}}$,

$\Rightarrow p^2 = \dfrac{\dot q^2}{1-\dot q^2} \Leftrightarrow p^2 = p^2\dot q^2 + \dot q^2 = (p^2+1)\dot q^2$, cioè

$\dot q^2 = \dfrac{p^2}{1+p^2}$ (sì!) : dovendo $p\dot q$ in qui caso ≥ 0, è allora

$H(p,q) = H(p) = |p|\underbrace{\sqrt{\dfrac{p^2}{1+p^2}}}_{\left(=\frac{|p|}{\sqrt{1+p^2}}\right)} + \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \dfrac{p^2+1}{\sqrt{1+p^2}} = \sqrt{1+p^2}$. ✓

(2) $\partial_{\dot q} L = A^2(q)\dot q + B(q) = p$, cioè $\underset{(A\neq 0)}{}\ \dot q = \dfrac{p-B(q)}{A^2(q)} \Rightarrow$

$H(p,q) = "p\dot q - L(q,\dot q)" =$ $p\dot q - \frac{1}{2}A^2(q)\dot q^2 - B(q)\dot q + V(q) =$

$= \underbrace{\dot q}_{\frac{p-B(q)}{A^2(q)}}\big(p - \tfrac{1}{2}A^2(q)\underbrace{\dot q}_{\frac{p-B(q)}{A^2(q)}} - B(q)\big) + V(q) = \dfrac{(p-B(q))^2}{2A^2(q)} + V(q)$ ✓

$p - \underbrace{\frac{p}{2}}_{\frac{p}{2}} + \underbrace{\frac{B(q)}{2} - B(q)}_{-\frac{B(q)}{2}}$

$\boxed{\text{NOTA:}}$ Qualche conto sulle eq. negli EX facoltativi:

(1) $L(q,\dot q) = \dfrac{(q-\dot q)^2}{2}$ che eq. di L. $\dfrac{d}{dt}\underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}}_{-(q-\dot q)} = \underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial q}}_{(q-\dot q)}$, cioè

$-\dot q + \ddot q = q - \dot q$, cioè $\ddot q = q$:

$\begin{cases}\dot q = u \\ \dot u = q\end{cases}$ " = " $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\u\end{bmatrix}$, cioè $\begin{pmatrix}q(t)\\u(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh(t) & \sinh(t)\\ \sinh(t) & \cosh(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0\\u_0\end{pmatrix}$

(in effetti è carinuccio ...)

(2) $L(q,\dot q) = \dfrac{\dot q}{q^2+1}\left(\log\dfrac{\dot q}{q^2+1} - 1\right)$; $x(q) := \arctan(q) \Rightarrow$

$\dot x(q(t)) = \dfrac{1}{1+q^2}\dot q = \dfrac{\dot q}{q^2+1}$, per cui ho EQUIVALENTEMENTE

$\mathcal{L}(x,\dot x) = \dot x(\log \dot x - 1)$, $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$; ②

allora ma $\frac{\partial L}{\partial \dot x} = \log\dot x - 1 + \dot x\left(\frac{1}{\dot x}\right) = \log \dot x$ è integrale primo, e $\boxed{x(t) = x(0)+\dot x(0)\,t}$ perché $\dot x(t) = \dot x(0)$ (e $\log(\dot x(0))$ è costante in t!) (e poi $x(0)=x_0$ e $\dot x(0)=\dot x(0)$), cioè $q(t) = \tan\left(\arctan(q(0)) + \frac{\dot q(0)}{q(0)^2+1}\,t\right)$. ✓

(1) $H(p)=\sqrt{1+p^2} \Rightarrow \dot q = \partial_p H = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ (indip. da q!), cioè

$q(t) = q(0) + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\,t$ ...

EX Data $L(x,\dot x) = \frac{\dot x^2}{2} - x^2$, trovare diffeo. $x=g(q)$ che trasformi $L(q,\dot q) = (1+2q)^2\frac{\dot q^2}{2} - (q+q^2)^2$ in $L(x,\dot x)$.

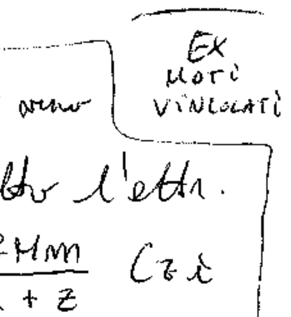
[È chiaro che è $x = g(q) := q+q^2$, perché è anche $\dot x = \dot q + 2q\dot q = (1+2q)\dot q$. ✓ In effetti anche nel passato x è $\dot x = (1+2q)\dot q$ ...]

$\dot g(q) = g'(q)\dot q$

EX Studiare il moto di un corpo che viene lanciato verso l'alto, in direzione perfettamente verticale, sotto l'azione della forza terrestre con energia potenziale $V(z) = -\frac{GMm}{R+z}$ (z è la coordinata verticale dello spazio!)

EX MOTI VINCOLATI

[Dunque, V è appunto tale che la forza corrispondente che "pesa" m e P è quella di attrazione gravitazionale tra m e M (a distanza $R+z$ tra loro):



$F(z) = -V'(z) = -G\frac{Mm}{(R+z)^2}$ (il "−" corrisponde al fatto che F si oppone al moto!)

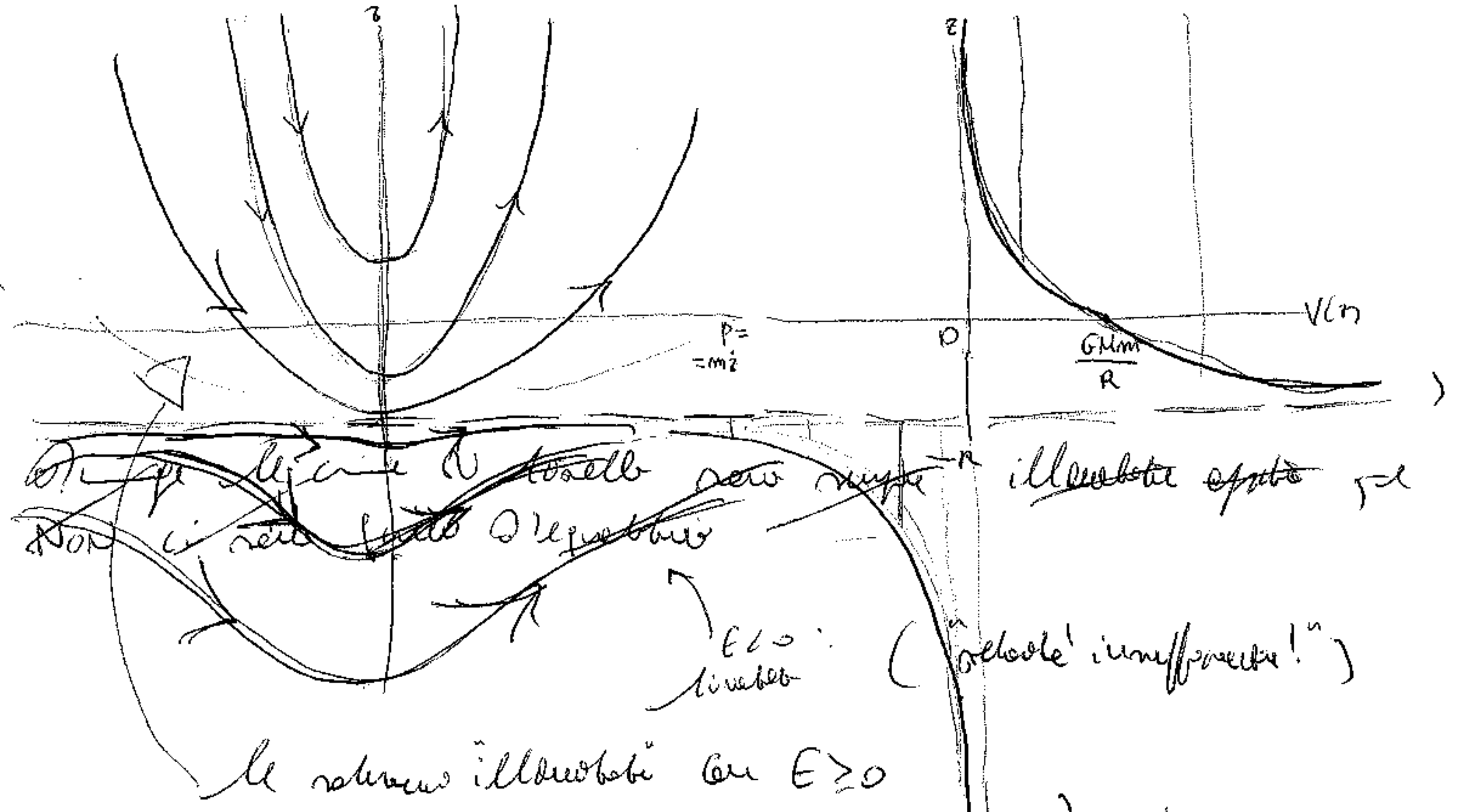
M concentrata al centro!

Comunque allora $\mathcal{L}(z,\dot z) = T(z,\dot z) - V(z) = \frac{1}{2} m \dot z^2 + \frac{GMm}{R+z}$ è la lagrangiana, e "l'equazione di Lagrange" è (come noto!) $m\ddot z - F(z) = \boxed{m\ddot z + \frac{GmM}{(R+z)^2} = 0}$, cioè

$\ddot z = -GM\frac{1}{(R+z)^2}$, da cui sarebbe $\dot z = \sqrt{\frac{2GM}{R+z}}$ (infatti la $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2GM}{R+z}}}\cdot\frac{-2GM}{(R+z)^2}\cdot\dot z = -\frac{GM}{(R+z)^2}$!) ; arriviamo quindi all'hamiltoniana (che permettono di fare anche uno studio qualitativo!) : $H(p,z) =$ "$p\dot z - \mathcal{L}(z,\dot z)$" ($\dot z = f(p,z)$!) $=$

$= p\underbrace{\dot z}_{p/m} - \frac{1}{2} m \underbrace{\dot z^2}_{p^2/m^2} - \frac{GMm}{R+z} \overset{\dot z = p/m}{=} \frac{p^2}{2m} - \underbrace{\frac{GMm}{R+z}}_{V(z)!}$, con

$\lim_{z\to\infty} V(z) = 0^+$, anzi è



$E = \frac{1}{2} m\dot z^2 - \frac{GmM}{R+z}$; il livello critico è ovviamente

$E = 0 = \frac{1}{2} m\dot z^2 - \frac{GmM}{R+z}$, cioè $\sqrt{\frac{2GmM}{m(R+z)}} = \dot z$. Dunque

e resta in "orbita"!

il tempo $t(z)$ che ci vuole, nel caso $E<0$, per arrivare da 0 a z è l'inverso di

$$t(z) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{E - V(z')}}\, dz' = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{(R+z')}}}$$

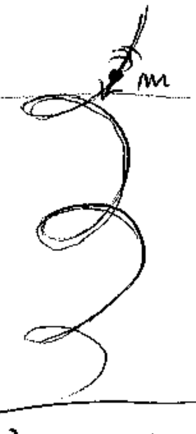
(per arrivare a z e tornare ci vuole il doppio!)

Ex Studiare il moto di un punto vincolato all'ELICA CILINDRICA

$$X(q) = \begin{cases} x = R\cos q \\ y = R\sin q \\ z = kRq \end{cases} \qquad (k := \tan(\alpha),\ \alpha \text{ pendenza})$$

con energia potenziale

$W(x,y,z) := mgz$ $(= mgkRq)$.



Intanto, la velocità è $|\dot X(q)| = \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial q}\right|}_{\sqrt{\frac{\partial X}{\partial q}\cdot\frac{\partial X}{\partial q}}} |\dot q| =$

$= \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2} =$

$= \sqrt{(-R\sin(q)\dot q)^2 + (R\cos(q)\dot q)^2 + (kR\dot q)^2} = \sqrt{R^2\dot q^2 + k^2R^2\dot q^2} =$

$= R|\dot q|\sqrt{1+k^2}$ ($\neq 0$ sempre) $\Rightarrow T(q,\dot q) = \frac{1}{2}m|\dot X(q)|^2 =$

$= \frac{1}{2} m R^2 \dot q^2 (1+k^2)$, dunque la lagrangiana è

$L(q,\dot q) = T(q,\dot q) - V(q) = \frac{1}{2} m R^2 \dot q^2 (1+k^2) - mgkRq$,

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot q} = mR^2\dot q(1+k^2) \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = mR^2\ddot q(1+k^2)$,

e $\frac{\partial L}{\partial q} = mgkR \Rightarrow$ l'eq. di Lagrange è

$mR^2\ddot q(1+k^2) + mgkR = 0$, cioè $\ddot q = -\frac{g}{R}\frac{k}{1+k^2}$;

ma $\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sin\alpha\cos\alpha$, da cui

$$\ddot q = -\frac{k}{R}\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -\frac{k}{R}\frac{\sin(2\alpha)}{2}$$, dunque

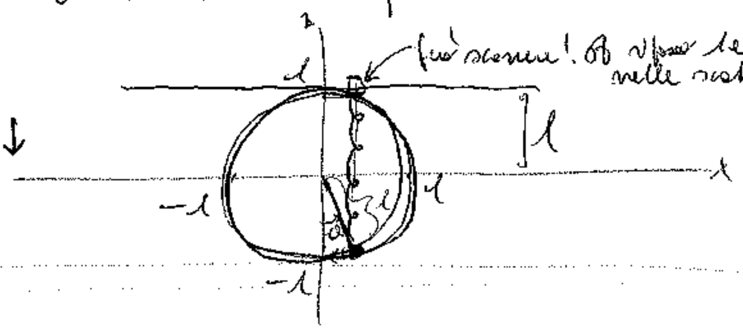
$$q(t) = -\frac{k}{R}\frac{\sin(2\alpha)}{4}t^2 + \dot q(0)t + q(0)$$ è quadratica nel tempo (intuitivo!) . Nota : l'hamiltoniana sarebbe

$$H(p,q) = \underbrace{p\dot q}_{p/m} - \mathcal{L}(q,\underbrace{\dot q}_{p/m}) = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{m}\frac{1}{2}R^2(1+n^2) + mgnRq =$$

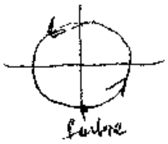
$$= \frac{\boxed{2p^2 - p^2 R^2(1+n^2)}}{2m} + mgnRq \quad . \checkmark \; \square$$

$p^2(2-R^2(1+n^2))$

$\boxed{EX}$ Studiare il moto di un punto P di massa $m\,(>0)$ vincolato in $\mathbb{R}^2_{(x,z)}$ alla circonferenza di raggio l $x^2+z^2=l^2$ CHE È PURE COLLEGATO AD UNA MOLLA, DI costante elastica k, come in figura:



[Risultato, il vincolo è il sostegno della curva $X(\theta) := \begin{bmatrix} l\sin(\theta) \\ -l\cos(\theta)\end{bmatrix}$



, che dice $\dot X(\theta) = \begin{bmatrix} l\cos(\theta) \\ l\sin(\theta)\end{bmatrix}\dot\theta \Rightarrow |\dot X(\theta)|^2 =$

$= l^2\dot\theta^2$, MENTRE l'energia potenziale è costituita da

$-mg\,\underbrace{"z(\theta)"}_{l\cos(\theta)} = -mgl\cos(\theta)$ e da quella della molla, cioè $\frac{1}{2}\cdot k\cdot$

$$\big(\underbrace{\text{spostamento molla}}_{l+l\cos(\theta)=l(1+\cos(\theta))}\big)^2 = \frac{1}{2}kl^2(1+\cos(\theta))^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl\cos(\theta) - \frac{1}{2}kl^2(1+\cos(\theta))^2 ;$$

(4)

Da cui l'eq. di L: $ml^2\ddot{\vartheta} = -mgl\sin(\vartheta) + kl^2(1+\cos(\vartheta))\sin(\vartheta)$;

per la hamiltoniana, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \underbrace{ml^2}_{>0}\dot{\vartheta}$, cioè $\dot{\vartheta} = \frac{p}{ml^2}$,

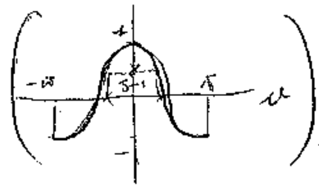
da cui $H(p,\vartheta) = "p\dot{\vartheta} - L(\vartheta,\dot{\vartheta})" = \frac{p^2}{ml^2} - \cancel{\frac{1}{2}\frac{p^2}{ml^2}} - mgl\cos(\vartheta) + \frac{1}{2}kl^2(1+\cos(\vartheta))^2 = \boxed{\frac{p^2}{2ml^2} \underbrace{- mgl\cos(\vartheta) + \frac{1}{2}kl^2(1+\cos(\vartheta))^2}_{=:V(\vartheta)}}$, da

cui $\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} = 0 \Leftrightarrow p = 0$, mentre $\frac{\partial H}{\partial \vartheta} =$

$= mgl\sin(\vartheta) - kl^2(1+\cos(\vartheta))\sin(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow$

$mgl\sin(\vartheta) = kl^2(1+\cos(\vartheta))\sin(\vartheta)$, per cui $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$ (sin)

vanno bene, altrimenti $\boxed{\cos(\vartheta) = \frac{mg}{kl} - 1}$, $\frac{mg}{kl} =: J$, da cui per l'esistenza

dovremo $J \in [0,2]$, da cui $\bar{\vartheta} = \pm\arccos(J-1)$ ;

per la stabilità, $\mathcal{H}_H(0,\vartheta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{ml^2} & 0 \\ 0 & V''(\vartheta) \end{bmatrix}$, dunque dipende

tutto dal segno di $V''(\vartheta)$: $V''(\vartheta) = mgl\cos(\vartheta) -$

$- kl^2(1+\cos(\vartheta))\cos(\vartheta) + kl^2\sin^2(\vartheta)$; si vede che

$V''(0) = mgl - 2kl^2 = l(mg - 2kl) = l\cdot kl\left(\frac{mg}{kl} - 2\right) > 0$ se

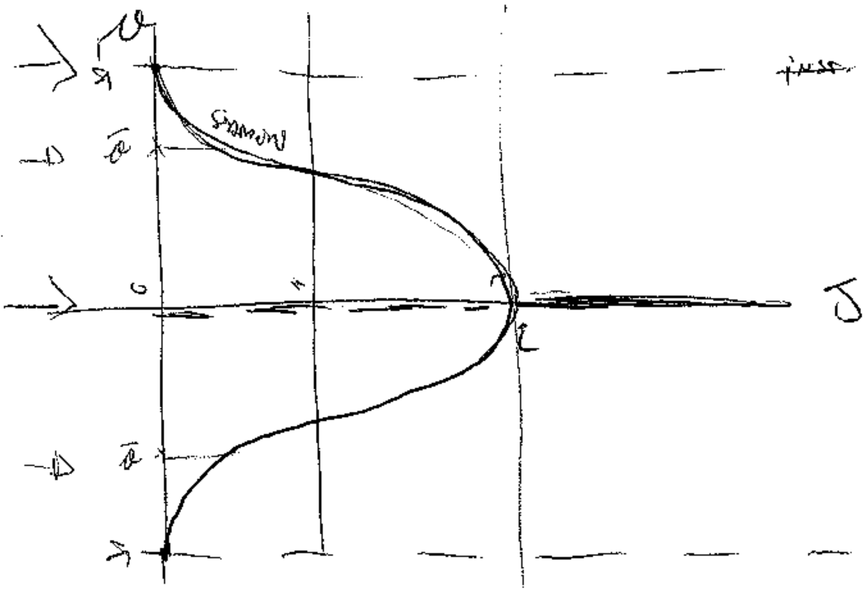
$J > 2$, se $J < 2$ è < 0; $V''(\pi) = -mgl < 0$: instabile!

$V''(\bar{\vartheta}) = \underbrace{mgl\left(\frac{mg}{kl} - 1\right)}_{\frac{mg-kl}{kl}} - kl^2\left(\frac{mg}{kl}\right)\left(\frac{mg}{kl} - 1\right) + kl^2\sin^2(\bar{\vartheta})$

$\frac{mg}{k}(mg - kl)$ $\quad - mg\left(\frac{mg-kl}{kl}\right)$ $\quad = 0$

Dunque è stab., in

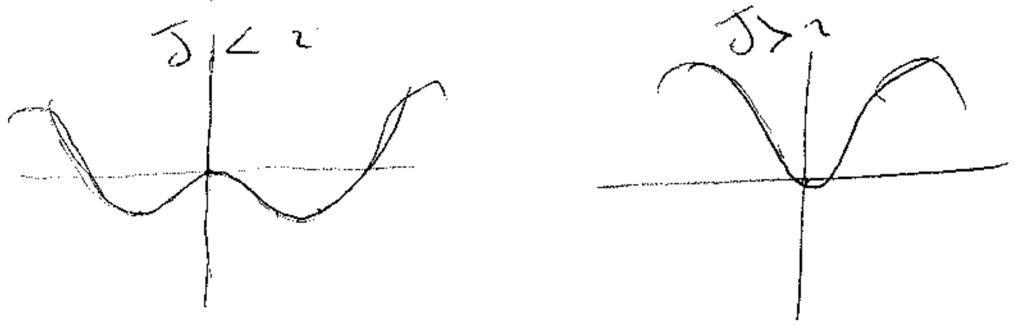
Concludendo, prima di un disegno di ...:

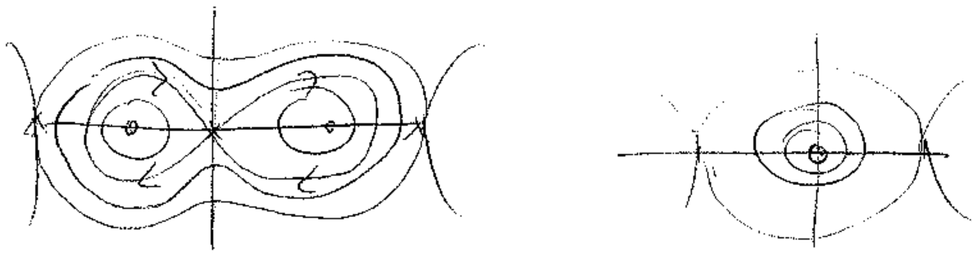


$J = \cos(\theta) + 1$

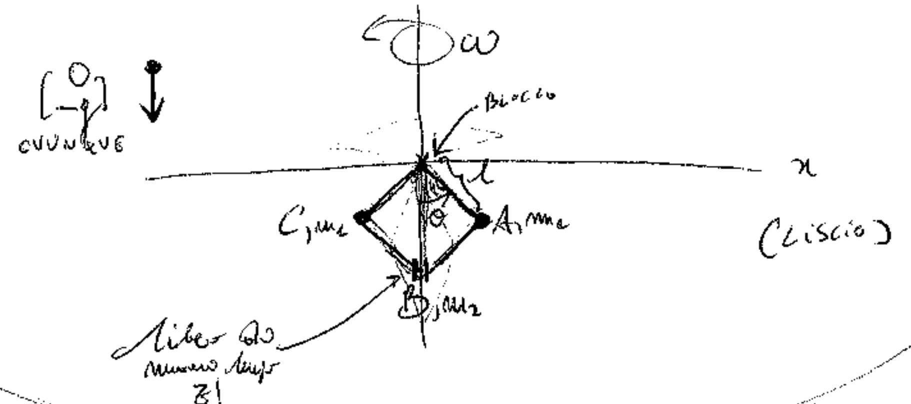
$) \ \ell$

Allora





$\boxed{EX}$ Studiare il moto dei punti A, C di massa m_1 (>0) e B di massa m_2 (>0) VINCOLATI ad un compasso (quadrato di lato ℓ) in $\mathbb{R}^2_{(x,z)}$ come in figura, mentre tale piano sta ruotando attorno a z con ω costante.



Cinematica $\begin{cases} x_A(\theta) = \ell\sin(\theta) \\ z_A(\theta) = -\ell\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_A(\theta) = \ell\cos(\theta)\dot\theta \\ \dot z_A(\theta) = \ell\sin(\theta)\dot\theta \end{cases}$, quindi l'energia cinetica di A è $\frac{1}{2}m_1\ell^2\dot\theta^2$, e lo stesso per C; invece per B

$\begin{cases} x_B(\theta) = 0 \\ z_B(\theta) = -2l\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_B(\theta) = 0 \\ \dot z_B(\theta) = 2l\sin(\theta)\dot\theta \end{cases}$ per cui che in. cinetica

$\frac{1}{2} m_2 4 l^2 \sin^2(\theta)\dot\theta^2 = 2 m_2 l^2 \sin^2(\theta)\dot\theta^2$, e in totale

$T_2(\theta,\dot\theta) = m_1 l^2 \dot\theta^2 + 2 m_2 l^2 \dot\theta^2 \sin^2(\theta) = l^2\dot\theta^2\left[m_1 + 2m_2\sin^2(\theta)\right]$,

invece $T_0(\theta,\cancel{\dot\theta}) = \left(\frac{1}{2} m_1 \omega^2 l^2 \sin^2(\theta)\right)\cdot 2 + 0$, quindi in totale

$\boxed{T(\theta,\dot\theta) = l^2\dot\theta^2\left[m_1 + 2m_2\sin^2(\theta)\right] + m_1 l^2\omega^2\sin^2(\theta)}$, mentre

$V(\theta) = -m_1 g l\cos(\theta)\cdot 2 - m_2 g 2l\cos(\theta) = -2gl\cos(\theta)(m_1+m_2) \Rightarrow$

$\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T(\theta,\dot\theta) - V(\theta) = \boxed{l^2\dot\theta^2\left[m_1 + 2m_2\sin^2(\theta)\right] + m_1 l^2\omega^2\sin^2(\theta) + 2gl\cos(\theta)(m_1+m_2)}$, da cui $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}(\theta,\dot\theta) =$

$= \underbrace{2l^2}_{>0}\dot\theta\,\underbrace{\left[m_1 + 2m_2\sin^2(\theta)\right]}_{>0}$, cioè $\dot\theta = \frac{p}{2l^2(m_1+2m_2\sin^2(\theta))}$, $\Rightarrow$

$H(p,\theta) = p\dot\theta - \mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \boxed{\frac{p^2}{4l^2(m_1+2m_2\sin^2(\theta))} - \underbrace{m_1 l^2\omega^2\sin^2(\theta) - 2gl\cos(\theta)(m_1+m_2)}_{=:V(\theta)}}\ \cancel{-\frac{p^2}{4l^2(m_1+2m_2\sin^2(\theta))}}$, per cui gli equilibri (punti d'eq.)

$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow p = 0$ (esatto!) , e per $\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0$ ho

$\frac{\partial H}{\partial\theta} = V'(\theta)$, e non solo: $\mathcal{H}ess_H(p,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2l^2[\dots]} & 0 \\ 0 & V''(\theta) \end{bmatrix}$ che

$\text{SEGNO}(\det \mathcal{H}ess_H) = \text{SEGNO}(V''(\theta))$, quindi per la stabilità valuto anche $V''(\theta)$:

$V'(\theta) = -2m_1 l^2\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) + 2gl\sin(\theta)(m_1+m_2) =$

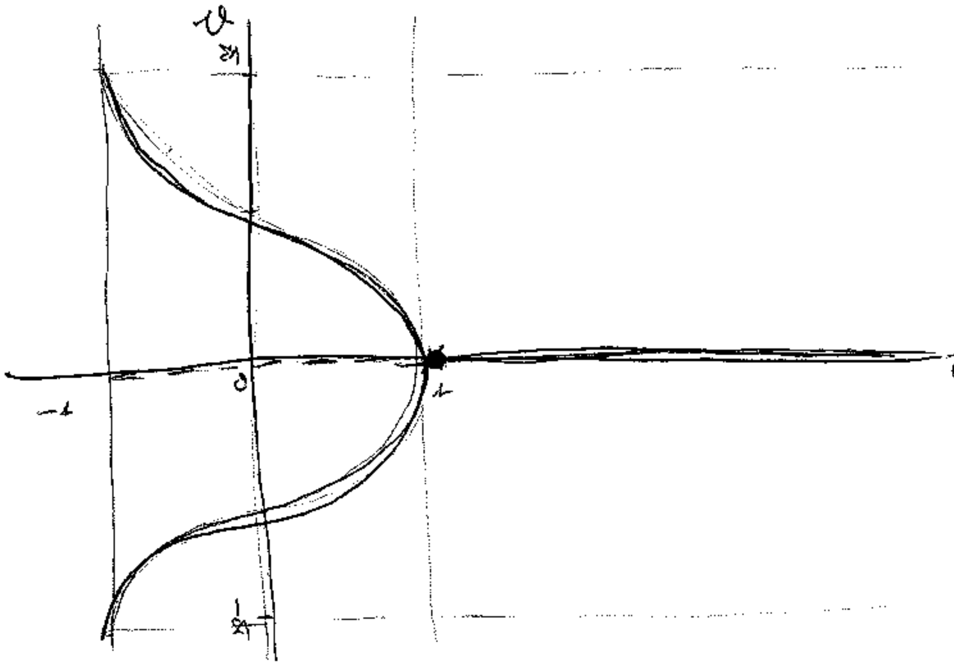
$= 2l\sin(\theta)\left[g(m_1+m_2) - \underbrace{m_1 l\omega^2}_{>0}\cos(\theta)\right] = 0$ certamente se $\theta = 0$ o

$\theta = \pi$, ma anche se $\cos(\theta) = \frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l\omega^2} =: J$: $(p,\theta) = (0,0)$ o

$(p,\theta) = (0,\pi)$ sempre , mentre $J \in [-1,1]$ $(J>0!)$ $\Rightarrow$ anche $(0,\bar\theta)$ con

$\bar\theta = \pm\arccos(J)$; d'altra parte $V''(\theta) = 2l\cos(\theta)\left[g(m_1+m_2) - m_1 l\omega^2\cos(\theta)\right] + 2l\sin(\theta)\left[m_1 l\omega^2\sin(\theta)\right] \Rightarrow V''(0) = 2l\left[g(m_1+m_2) - m_1 l\omega^2\right] = 2l\underbrace{m_1 l\omega^2}_{>0}(J-1) > 0 \Leftrightarrow \underset{(\text{STAB.})}{J > 1}$, $V''(\pi) = -2l(g(m_1+m_2) + m_1 l\omega^2) \underset{(\text{INSTAB})}{< 0}$, e $V''(\bar\theta) = 2l^2\omega^2 m_1\sin^2(\bar\theta) \underset{(\text{STAB.})}{> 0}$, dunque

il diagramma di biforcazione è ($J = \cos(\bar\theta)$!)

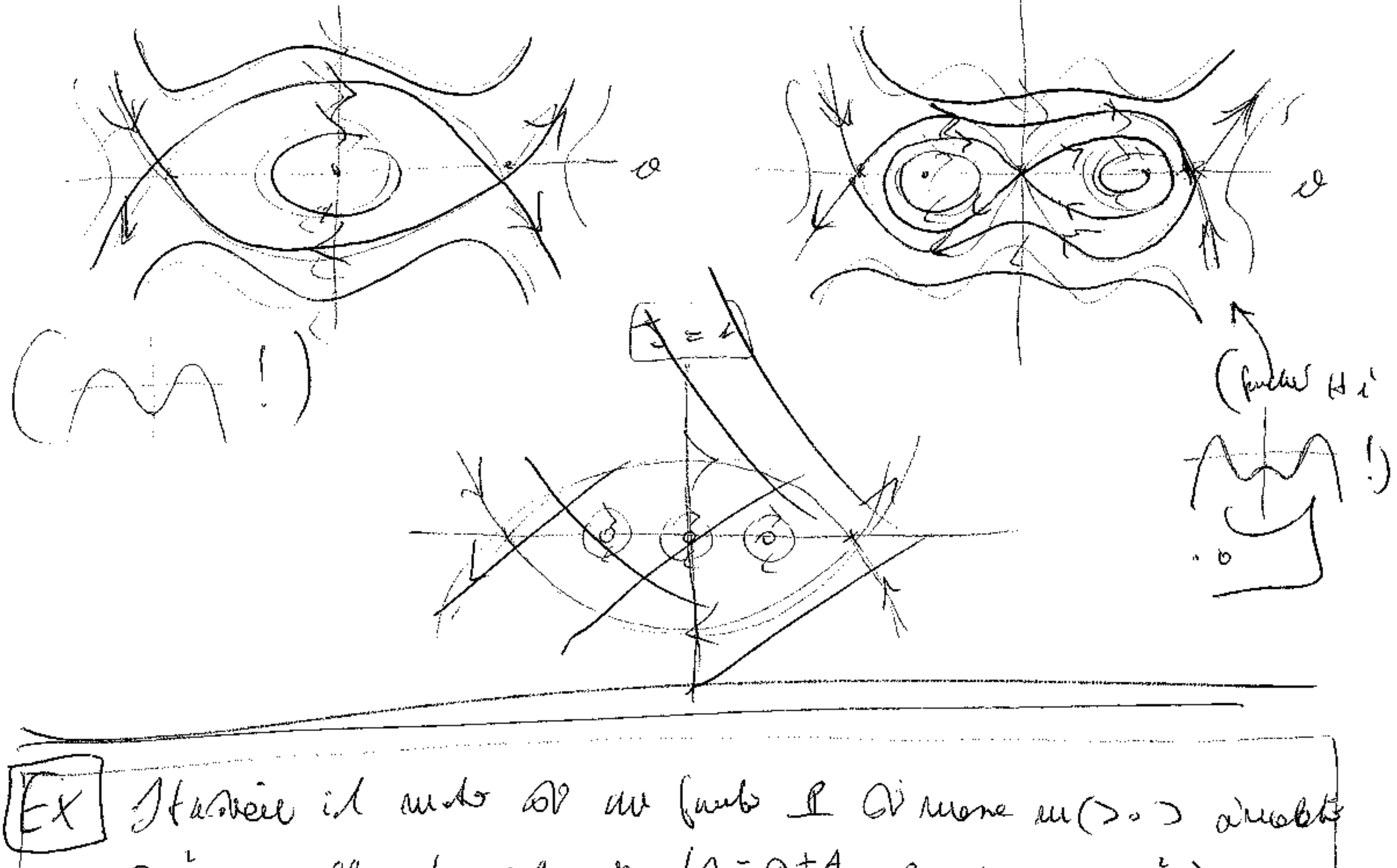


(NOTANDO CHE

$$V'''(\theta) = -2l\sin(\theta)\left[g(m_1+m_2) - m_2 l^2\omega^2\cos(\theta)\right] + 2l\cos(\theta)\left[g(m_1+m_2) + m_2 l^2\omega^2\sin(\theta)\right] + 4m_2 l^2\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) \Rightarrow V'''(0) = 2lg(m_1+m_2) > 0,$$

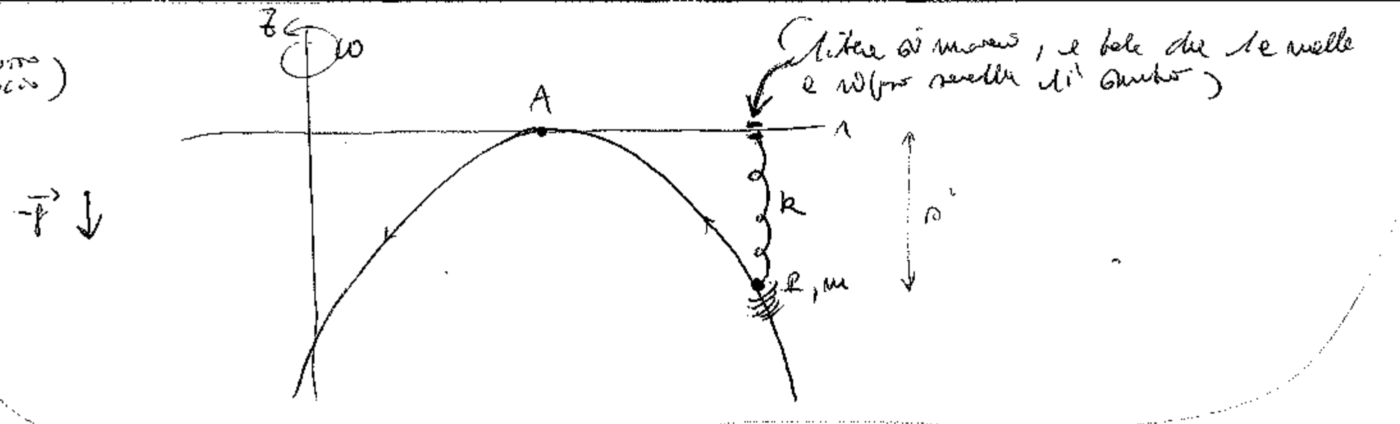
per cui 0 è di min. anche per $J=1$)

$(J \geq 1)_p$ (per $J>1$, $\bar{\theta}=0$!)) e i ritratti di fase $(\bar{\theta}\pm)_p$ $(J<1)$



EX Studiare il moto di un punto P di massa $m(>0)$ vincolato in $\mathbb{R}^2_{(r,z)}$ alla parabola $\begin{cases} r = s + A \\ z = -s^2 \end{cases}$ (cioè $z=-(r-A)^2$) e collegato ad una molla come in B3 pur, molla tale però da ruotare attorno a z con velocità angolare costante ω ;

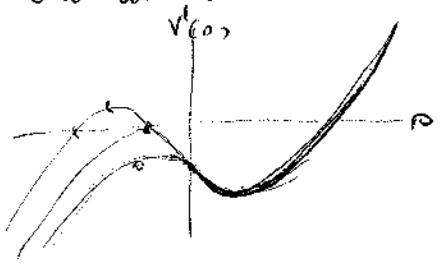
(tutto liscio)



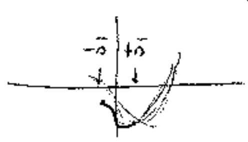
La curva-direttrice è $\begin{cases} x = s + A \\ z = -s^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{s} \\ \dot{z} = -2s\dot{s} \end{cases}$, quindi $T_2(s,\dot{s}) =$
$= \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + 4s^2\dot{s}^2) = \frac{m}{2}\dot{s}^2(1+4s^2)$, mentre $T_0(s) =$
$= \frac{1}{2} m\omega^2(s+A)^2$, ossia $T(s,\dot{s}) = \frac{m}{2}\dot{s}^2(1+4s^2) + \frac{m}{2}\omega^2(s+A)^2$;
inoltre $V(s) = -mgs^2 + \frac{1}{2}k s^4$, da cui la lagrangiana:

$$\boxed{L(s,\dot{s}) = \frac{m}{2}\dot{s}^2(1+4s^2) + \frac{m}{2}\omega^2(s+A)^2 + mgs^2 - \frac{1}{2}ks^4}$$, da

cui $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}(1+4s^2)$ (e, volendo, l'eq. di L. ...), $\Rightarrow$
$\dot{s} = \frac{p}{m(1+4s^2)} \Rightarrow H(p,s) \text{“}=\text{”}\, p\dot{s} - L(s,\dot{s})\text{“} = \frac{p^2}{2m(1+4s^2)} -$
$\underbrace{- \frac{m}{2}\omega^2(s+A)^2 - mgs^2 + \frac{1}{2}ks^4}_{=:\,V(s)}$, da cui $\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow$
$p = 0$, mentre per $\frac{\partial H}{\partial s} = 0$ è $\frac{\partial H}{\partial s} = V'(s)$, tale che inoltre (essendo
$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} > 0$ e derivate miste nulle) $V''(s)$ dà il segno a $\det H_H$, cioè
dà la stabilità degli equilibri: $\boxed{V'(s) = \underbrace{-m\omega^2(s+A)}_{-m\omega^2 s \; -m\omega^2 A} - 2mgs +}$
$+ 2ks^3 = \boxed{2ks^3 - (2mg + m\omega^2)s - m\omega^2 A}$, $\Rightarrow \boxed{V''(s) =}$
$\boxed{= 6ks^2 - (2mg + m\omega^2)}$; funzione a studiare $V'(s)$:
definita ovunque, $\lim_{s\to\pm\infty} V'(s) = \pm\infty$ (mentre $\lim_{s\to\pm\infty} V''(s) = +\infty$), $V'(0) = -m\omega^2 A < 0$ (anche $V''(0) < 0$)
$\Rightarrow$ c'è uno zero di $V'(s)$ > 0; per $s < 0$ ce ne possono essere 0, 1 o 2:



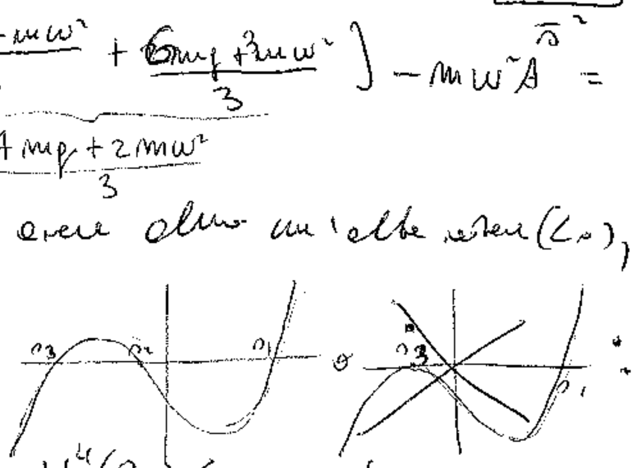
; ma $V''(s) = 0 \Leftrightarrow s = \pm\bar{s} = \pm\sqrt{\frac{2mg + m\omega^2}{6k}}$,
cioè



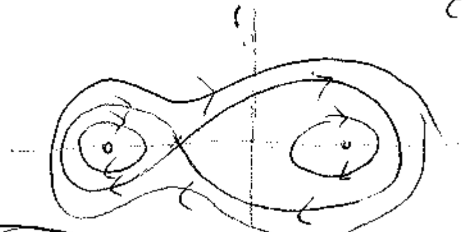
, e notare

che $V'(-s) = -2ks^3 + (2mg+m\omega^2)s - m\omega^2 A \Big|_{s=\bar s} = -2k\bar s \underbrace{\frac{2mg+m\omega^2}{6k}}_{\bar s^2}$
$+ (2mg+m\omega^2)\bar s - m\omega^2 A = \bar s \Big[\underbrace{\frac{-2mg-m\omega^2}{3} + \frac{6mg+3m\omega^2}{3}}_{\frac{4mg+2m\omega^2}{3}} \Big] - m\omega^2 A =$

$= \frac{2}{3}\bar s m(2g+\omega^2) - m\omega^2 A \boxed{\geq 0}$ per avere altre un'altra radice (<0), cioè $\frac{2}{3}\bar s(2g+\omega^2) \geq \omega^2 A$; dove

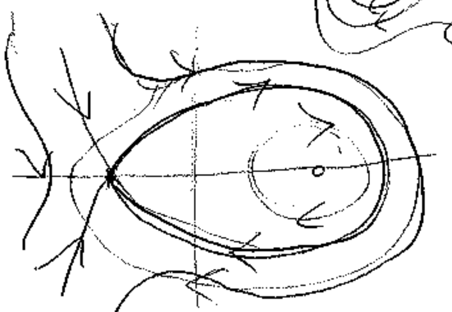


: $V''(s_2) > 0$ (e anche $V''(s_3) > 0$, stabili), mentre $V''(s_1) < 0$ (instabile)) per cui

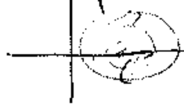


; per $s_2 = s_3$

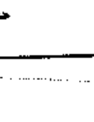
si ha



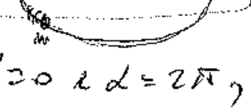
($V'''(s_3) < 0$). Il parametro di bif. è in modo naturale $\bar A := \frac{2}{3}\frac{\bar s}{\omega^2}(2g+\omega^2)$ (>0), per cui $\bar A \geq A \Leftrightarrow$ ci sono due o tre radici come discusso; $\bar A < A \Leftrightarrow$ c'è solo quella "stabile" s_1, tale che ovviamente



; ora,
$\frac{\partial V'(s,A)}{\partial A} = -m\omega^2 \neq 0 \overset{\text{Dini}}{\Rightarrow}$ si può esprimere s come funzione di A (in modo unico), sia $s(A)$, tale che inoltre $s'(A) = -\frac{\partial_s V'(s,A)}{\partial_A V'(s,A)} =$
$= \frac{-[-6ks^2 + (2mg+m\omega^2)]}{-m\omega^2} = \frac{6ks(A)^2 - (2mg+m\omega^2)}{m\omega^2}$ (>0), da cui si ottiene il diagramma di bif. . . . .



EX Studiare il moto del pendolo cicloidale, ossia di un punto vincolato alla curva in $\mathbb{R}^2_{(x,z)}$ (massa $m>0$) $\begin{cases} x(\alpha) = l\alpha - l\sin(\alpha) \\ z(\alpha) = -l + l\cos(\alpha) \end{cases}$.



Intanto $\begin{cases} \dot x(\alpha) = (l - l\cos(\alpha))\dot\alpha \\ \dot z(\alpha) = -l\sin(\alpha)\dot\alpha \end{cases} \neq 0$ tranne che per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2\pi$, cioè è regolare per $0 < \alpha < 2\pi$;

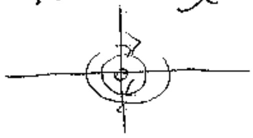
Comunque allora $T(\alpha,\dot\alpha) = \frac{1}{2} m \dot\alpha^2 [\underbrace{l^2(1-\cos(\alpha))^2 + l^2\sin^2(\alpha)}_{\substack{1+\cos^2(\alpha)-2\cos(\alpha) \\ 2l^2-2l^2\cos(\alpha)}}] =$

$= m\dot\alpha^2 l^2(1-\cos(\alpha))$; invece $V(\alpha) = +mg\,y(\alpha) = +mg[-l+l\cos(\alpha)]$,

ANZI $V(\alpha) = +mgl\cos(\alpha)$, per cui $L(\alpha,\dot\alpha) = m\dot\alpha^2 l^2(\cancel{1} - \cos(\alpha)) - mgl\cos(\alpha)$, ANZI $\boxed{L(\alpha,\dot\alpha) = \dot\alpha^2(1-\cos(\alpha)) - \frac{k}{l}\cos(\alpha)}$; ora $p = \frac{\partial L}{\partial\dot\alpha} = 2\dot\alpha(1-\cos(\alpha)) \Rightarrow H(p,\alpha) =$

$=$ "$p\dot\alpha - L(\alpha,\dot\alpha)$" $=$ [$\dot\alpha = \frac{p}{2(1-\cos(\alpha))}$ ovvero per $0<\alpha<2\pi$!] $=$

$= \frac{p^2}{4(1-\cos(\alpha))} + \frac{k}{l}\cos(\alpha)$, che ha $\frac{\partial H}{\partial p}(p,\alpha) = 0 \Leftrightarrow p=0$,

mentre $\frac{\partial H}{\partial\alpha}(0,\alpha) = -\frac{k}{l}\sin(\alpha) = 0 \overset{0<\alpha<2\pi}{\Leftrightarrow} \alpha=\pi$; inoltre è chiaro che $\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha^2}(0,\alpha) = -\frac{k}{l}\cos(\alpha)\big|_{\alpha=\pi} = \frac{k}{l} > 0$, per cui $(0,\pi)$ è di eq. STABILE, e cioè  ; in effetti possiamo anche procedere così: sia s parametro arco di $\binom{x(\alpha)}{y(\alpha)}$,

ossia tale che $1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)^2 =$ $\left[\binom{x(\alpha(s))}{y(\alpha(s))}\right]$

$= \Big[\underbrace{(l - l\cos(\alpha))^2}_{l^2+l^2\cos^2(\alpha)-2l^2\cos(\alpha)} + \underbrace{(-l\sin(\alpha))^2}_{l^2\sin^2(\alpha)}\Big]\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)^2$ $\underbrace{\qquad}_{2l^2(1-\cos(\alpha))}$, cioè $(0<\alpha<2\pi)$ $\underbrace{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)^2}_{>0!} = \frac{1}{2l^2(1-\cos(\alpha))}$;

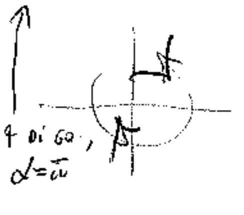
sia $l=1$, per cui avremo $\boxed{\frac{\partial s}{\partial\alpha} = \sqrt{2-2\cos(\alpha)} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ (>0 sempre!)

[perché $1-\cos(\alpha) = 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$, enti $\cos(\alpha) = \cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, per cui $\underbrace{1 - \cos^2(\frac{\alpha}{2})}_{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin^2(\frac{\alpha}{2})$!] , cioè $s(\alpha) = 2\int_0^\alpha \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta =$

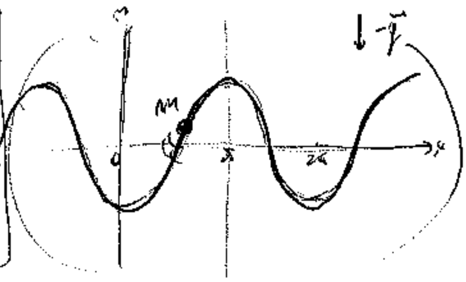
$= 2\left[-2\cos(\frac{\theta}{2})\right]_0^\alpha = -4\cos\frac{\alpha}{2} + 4 = 4\left(1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}\right)$ se $0<\alpha<\pi$ / se $\pi<\alpha<2\pi$ [come prima, $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos(\alpha)$, da cui i segni!] , da cui $L(s,\dot s) = \frac{1}{2}m\dot s^2 - V(\alpha(s))$, con $V(\alpha(s)) = mg1\cos(\alpha(s))$, ANZI

$-\frac{k}{\ell}\cos(\vartheta(s))$, dove $\cos(\vartheta(s))$ si ricava dal fatto che $(s-4)^2 =$
$= 16\left(\frac{1+\cos(\vartheta(s))}{2}\right)$, cioè $\cos(\vartheta(s)) = \frac{(s-4)^2}{8} - 1$, cioè
$V(s) = -\frac{k}{\ell}\frac{(s-4)^2}{8}$, da cui $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot s}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$,
ossia $m\ddot s = -\frac{k}{4\ell}(s-4)$, cioè $(x := s-4)$

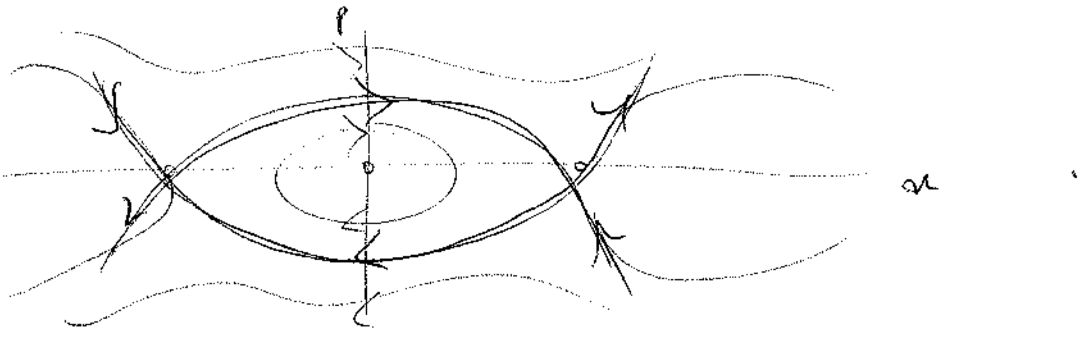
$\boxed{m\ddot x = -\frac{k}{4\ell}x}$, che è un oscillatore armonico (cioè perché lineare conservativo)



EX Studiare il moto di un punto P di massa m (> 0) vincolato in $\mathbb{R}^2$ (liscio) al grafico $y = -\cos(x)$.



Sol La curva è $\begin{pmatrix} x \\ -\cos(x) \end{pmatrix}$ ⇒ che $\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \sin(x)\dot x \end{pmatrix}$, per cui $T(x,\dot x) = \frac{1}{2}m(1+\sin^2(x))\dot x^2$, mentre $V(x) = $ "$mg\,y$" $= -mg\cos(x)$ ⇒
$L(x,\dot x) = \frac{1}{2}m(1+\sin^2(x))\dot x^2 + mg\cos(x)$, da cui $p = \frac{\partial L}{\partial \dot x} =$
$= m(1+\sin^2(x))\dot x$, cioè $\dot x = \frac{p}{m(1+\sin^2(x))}$, ⇒ $H(p,x) =$
$=$ "$p\dot x - L(x,\dot x)$" $= \frac{p^2}{2m(1+\sin^2(x))} - mg\cos(x)$, per cui gli eq. sono $(0,x)$ con x tale che $mg\sin(x) = 0$, ossia $x = k\pi$ $\forall k$; come è intuitivo, in effetti $mg\cos(x) = mg\cos(k\pi) = (-1)^k$, cioè sono stabili $2k\pi$, ma instabili $(2k+1)\pi$; naturalmente quelli stabili non sono mai attrattivi, perché H è integrale primo (non c'è dissip!):



(s ↦ t ↦ (x(t), y(t))) (8)

Sarà la stessa distanza del punto commutato?? Se s parametro ascissa

per cui $1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = \cancel{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]\left(\frac{\partial t}{\partial s}\right)^2}$

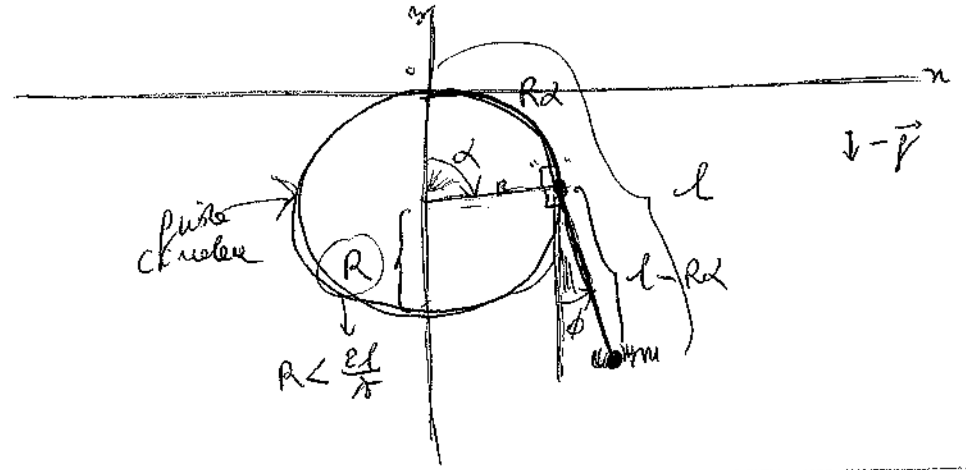
$\cancel{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \dot{x}^2(1+\sin^2(x))}$, $\cancel{\frac{\partial s}{\partial t} = \dot{x}\sqrt{1+\sin^2(x)}}$

$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 = (1+\sin^2(x))\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2$, cioè

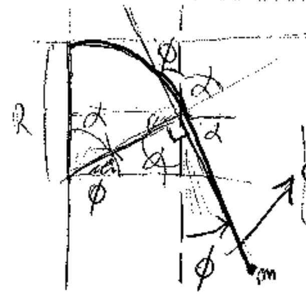
$\boxed{s'(x) = \sqrt{1+\sin^2(x)}}$, cioè $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+\sin^2(t)}\,dt$ ...

INTEGRAZIONE NO!)

$\boxed{EX}$ Studiare il moto di un punto P di massa m>0 vincolato in $\mathbb{R}^2$ ad un filo come in figura:



$\boxed{}$ Intanto,



$\boxed{\phi = \pi/2 - \alpha}$ $(\alpha = \pi/2 - \phi)$ ⟹

$$\begin{cases} x(\phi) = R\cos(\phi) + [l - R(\pi/2 - \phi)]\sin(\phi) \\ y(\phi) = R - R\sin(\phi) + [l - R(\pi/2-\phi)]\cos(\phi) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}(\phi,\dot\phi) = \cancel{-R\sin(\phi)\dot\phi} + [l - R(\pi/2-\phi)]\cos(\phi)\dot\phi + \cancel{\sin(\phi)[R]\dot\phi} \\ \dot{y}(\phi,\dot\phi) = \cancel{-R\cos(\phi)\dot\phi} - [l-R(\pi/2-\phi)]\sin(\phi)\dot\phi + \cancel{\cos(\phi)R\dot\phi} \end{cases} \Rightarrow$$

$T(\phi,\dot\phi) = \frac{1}{2}m(\dot{x}(\phi,\dot\phi)^2 + \dot{y}(\phi,\dot\phi)^2) = \frac{m}{2}\dot\phi^2[l - R(\pi/2-\phi)]^2$, e

$V(\phi) = mg\,y(\phi) \Rightarrow L(\phi,\dot\phi) = T(\phi,\dot\phi) - V(\phi) = \frac{m}{2}[l-R(\pi/2-\phi)]^2\dot\phi^2 - Rmg$
$+ mgR\sin(\phi) - mg[l - R(\pi/2-\phi)]\cos(\phi)$ ⟹

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m[l - R(\pi/2-\phi)]^2\dot\phi$, cioè $\dot\phi = \frac{p}{m(l-R\alpha)^2}$, $\Rightarrow$

$H(p,\phi) = \text{"} p\dot\phi - L(\phi,\dot\phi) \text{"} = \frac{p^2}{2m(l-R\underbrace{\alpha}_{(\pi/2-\phi)})^2} - V(\phi)$; è chiaro ora

che gli equilibri sono $(p,\phi) = (0,\phi)$ CON $V'(\phi) = 0$, e la stabilità è data dal segno di $V''(\phi)$: $\frac{V(\phi)}{mg} =$

$= -R\cancel{mg} + R\cancel{mg}\sin(\phi) - \cancel{mg}(l - R\underbrace{\alpha}_{\pi/2-\phi})\cos(\phi)$, che $\frac{\partial}{\partial\phi} =$

$= R\cos(\phi) + [l - R(\pi/2-\phi)]\sin(\phi) - \cos(\phi)R$, da cui l'eq.

$[l - R(\pi/2-\phi)]\sin(\phi) = 0$: $\phi = 0$ o $\underset{(=-\pi)}{\phi = \pi}$ vanno bene,

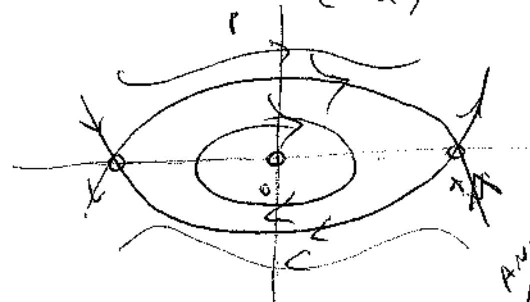
altrimenti $l - R\alpha = 0$, MA NON

è per ipotesi $R < \frac{2l}{\pi}$ ($\alpha \le \pi/2 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \ge \frac{2}{\pi}$), per cui $\frac{l}{\alpha} \ge \frac{2}{\pi}l > R$, cioè

appunto $R\alpha - l < 0$) ; e questo punto $\frac{V''(\phi)}{mg} =$

$= [l - R(\pi/2-\phi)]\cos(\phi) + \sin(\phi)R$ $\begin{cases} \text{in } 0 \rightarrow l - R\pi/2 > 0 \\ \text{in } \pi \rightarrow (l + R\pi/2)(-1) < 0 \end{cases}$, per cui

$(0,0)$ è STABILE mentre $\underset{(-\pi)}{(0,\pi)}$ è INSTABILE, con ritratto di fase



ϕ

ANZI (*)

(?) Qual è la frequenza delle "piccole" oscillazioni attorno a $(0,0)$??.

$$\begin{cases} \dot p = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = V'(\phi) + \frac{p^2}{2m}\frac{R}{[l-R(\pi/2-\phi)]^4} \\ \dot\phi = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m[l-R(\pi/2-\phi)]^2} \end{cases}$$

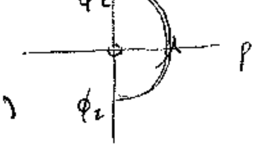
$H(p,\phi) = \frac{p^2}{2m[l-R(\pi/2-\phi)]^2} - V(\phi) = E$

$\Leftrightarrow p^2 = 2m[l-R(\pi/2-\phi)]^2(E+V(\phi))$,

cioè $p = \pm\sqrt{2m}[l-R(\pi/2-\phi)]\sqrt{E+V(\phi)}$, da cui per $p>0$ $\dot\phi = \frac{p}{\cdots} =$

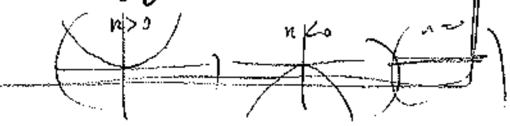
$\frac{\sqrt{2m(E+V(\phi))}}{[l-R(\pi/2-\phi)]}$, dunque per andare

da ϕ_1 a ϕ_2 e ritorno ci mette $T = 2\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\sqrt{\frac{2}{m}(E+V(\phi'))}}{l-R(\pi/2-\phi')}\,d\phi'$ *,



e allora la frequenza è T^{-1}

EX Studiare il caso di $\underset{(\text{in } (r,z))}{z = k r^2}$ ruotante attorno a z a ω costante, ottenendo le relazioni tra ω, g, k affinché i punti d'eq. siano STABILI.



La curva-sezione è $\begin{pmatrix} r \\ kr^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ che $\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \dot r \\ 2kr\dot r \end{pmatrix}$ e quindi $T_2(r,\dot r) = \frac{1}{2} m \dot r^2 (1+4k^2r^2)$, mentre $T_0(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$, e infine $V(r) = mgkr^2 \Rightarrow L(r,\dot r) = \frac{m}{2}\dot r^2[1+4k^2r^2] + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - mgkr^2$, $\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r[1+4k^2r^2]$, cioè $\dot r = \frac{p}{m(1+4k^2r^2)}$, $\Rightarrow$

$$H(p,q) = p\dot r - L(r,\dot r) = \frac{p^2}{2m(1+4k^2r^2)} - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 + mgkr^2,$$

ci allora gli eq. sono $(p,r) = (0,r)$ con r tale che $\boxed{-m\omega^2 r + 2mgkr} = 0$, mentre $\boxed{-m\omega^2 + 2mgk}$ ne decide la stabilità: $r(2mgk - m\omega^2) = 0 \Leftarrow r = 0$, oppure $2gk = \omega^2$; ma questo punto è stabile $\Leftrightarrow -m\omega^2 + 2mgk > 0$, cioè $2\cancel{m}gk > \cancel{m}\omega^2$, dunque $(0,0)$ è l'unico eq. stabile se $\frac{2gk}{\omega^2} > 1$ (in particolare dovremo $k>0$!). □

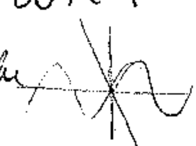
EX Studiare il caso di $z = \cos(r)$ ruotante (al solito modo); dim. che per $\frac{\omega^2}{g} > \frac{1}{\sigma}$ non ci sono punti d'eq.

$\begin{pmatrix} r \\ \cos(r) \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \begin{pmatrix} \dot r \\ -\sin(r)\dot r \end{pmatrix} \Rightarrow T_2(r,\dot r) = \frac{m}{2}\dot r^2[1+\sin^2(r)]$; $T_0(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$; $V(r) = mg\cos(r) \Rightarrow L(r,\dot r) = \frac{m}{2}\dot r^2[1+\sin^2(r)] + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - mg\cos(r)$; $\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r[1+\sin^2(r)]$, da cui al solito $\dot r = \frac{p}{m(1+\sin^2(r))} \Rightarrow H(p,r) = p\dot r - L(r,\dot r) = \boxed{\frac{p^2}{2m(1+\sin^2(r))} - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 + mg\cos(r)}$

da cui gli eq. $= (p,r) = (0,r)$ con r tale che

~~[illegible]~~ $\boxed{-m\omega^2 r - mg\sin(r)} = 0$, cioè $\omega^2 r +$

$+ g\sin(r) = 0$, cioè $\boxed{\sin(r) = -\frac{\omega^2}{g} r}$, cioè r tale che



per uno certamente $r=0$; in generale

non tante più intersezioni quanto più $\frac{\omega^2}{g}$ è piccolo, e si prendono sempre

~~[illegible]~~ a coppie, uno con r più grande e uno con r più piccolo; ora, $-m\omega^2 - mg\cos(r) \geq 0 \Leftrightarrow$ ~~[illegible]~~ $-(\omega^2 + g\cos(r))$

$\Leftrightarrow \omega^2 + g\cos(r) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(r) \leq -\frac{\omega^2}{g}$, ora, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $r=0$ è dunque instabile, e in generale

r piccolo stabile mentre r grande instabile, essendo che tali

coppie $\xrightarrow[\frac{\omega^2}{g}\to 0]{}$ $((2k+1)\pi,\ 2k\pi$ ...$)$, che hanno coseno

-1 e 1 ..., e poi $-1 < -\frac{\omega^2}{g}$ $\left(-\frac{\omega^2}{g} \geq ... > -1!\right)$ □

(*) $H(p,\phi) = \frac{p^2}{2m[l-R(\pi/2-\phi)]^2} + mgR + mgR\sin(\phi) - mg[l-R(\pi/2-\phi)]\cos(\phi)$

... Basta: il linearizzato in $(\pi/2, 0)$ è

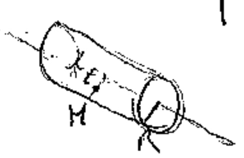
$J \cdot H_{xx}(\pi/2, 0) = J \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{m(l-R\pi/2)^2} & 0 \\ 0 & mg(l-R\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -mg(l-R\pi/2) \\ \frac{1}{m(l-R\pi/2)^2} & 0 \end{pmatrix}$ che

ha eq. caratt. $\lambda^2 + \frac{g}{l-R\pi/2} = 0$, ossia $\lambda_\pm = \pm i \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l-R\pi/2}} = \pm i\omega$ velocità angolare di oscillazione,

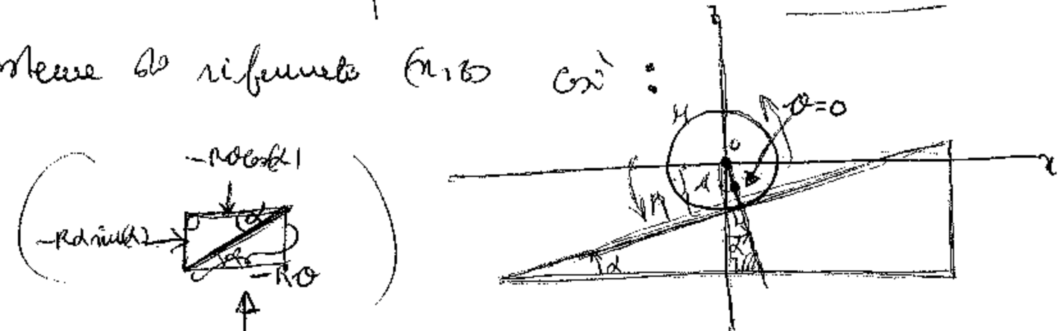
$\omega = \sqrt{2}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2l-R\pi}}$

quindi il periodo è $\frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{2l-R\pi}{g}}$. □

ω

(EX) Studiare l'esperimento del piano inclinato di Galileo, ma con un cilindro rotolante (di raggio R) tale che il suo centro di massa sia a distanza $0<l<R$ dal suo asse (rispetto al quale sta rotolando!) :  .

: si tratta di ricondurre il problema con corpo rotante ad un problema con corpo puntiforme; prendiamo come sistema di riferimento (x,z) così:



(che fortuna!),

per cui trasformazione per rotazione (del punto) è chiaramente

$$\begin{cases} x = -R\theta\cos(\alpha) + l\sin(\theta+\alpha) \\ z = -R\theta\sin(\alpha) - l\cos(\theta+\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\theta}\left[-R\cos(\alpha) + l\cos(\theta+\alpha)\right] \\ \dot{z} = \dot{\theta}\left[-R\sin(\alpha) + l\sin(\theta+\alpha)\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{T(\theta,\dot{\theta}) = \frac{M}{2}\dot{\theta}^2\left[R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)\right]}$ (perché $-2Rl(\cos(\alpha)\cdot\cos(\theta+\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\theta+\alpha))$ è il doppio prodotto, e $\theta = (\theta+\alpha) - \alpha$!),

mentre $V(\theta) = Mg\,z(\theta) = \boxed{-Mg(R\theta\sin(\alpha) + l\cos(\theta+\alpha))}$, da cui

$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = T(\theta,\dot{\theta}) - V(\theta) = \frac{M}{2}\dot{\theta}^2(R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)) + Mg(R\theta\sin(\alpha) + l\cos(\theta+\alpha))$, $\Rightarrow \boxed{p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}(\theta,\dot{\theta}) = M\dot{\theta}(R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta))}$, così che $\dot{p} = M\ddot{\theta}(R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)) + M\dot{\theta}(2Rl\sin(\theta)\dot{\theta}) = M[\ddot{\theta}(R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)) + \dot{\theta}^2\cdot 2Rl\sin(\theta)]$, per cui $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}(\theta,\dot{\theta}) = MRl\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + Mg(R\sin(\alpha) - l\sin(\theta+\alpha))$ e l'EQ. DI LAGRANGE

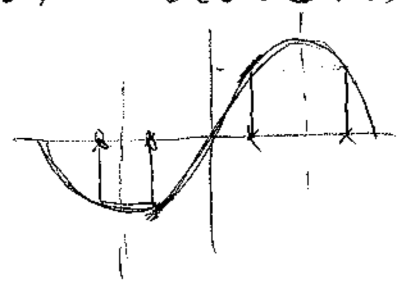
$M[\ddot{\theta}(R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)) + \dot{\theta}^2 2Rl\sin(\theta)] = M[Rl\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + g(R\sin(\alpha) - l\sin(\theta+\alpha))]$, cioè $[R^2 + l^2 - 2Rl\cos(\theta)]\ddot{\theta} + Rl\sin(\theta)\dot{\theta}^2 +$

$+g\left(l \sin(\theta+\alpha) - R \sin(\alpha)\right)$; e quindi l'hamiltoniana è

$$H(p,\theta) = "p\dot\theta - L(\theta,\dot\theta)" = \frac{p^2}{2M[R^2+l^2-2Rl\cos(\theta)]} - \underbrace{Mg\left(R\theta\sin(\alpha) + l\cos(\theta+\alpha)\right)}_{V(\theta)!},$$

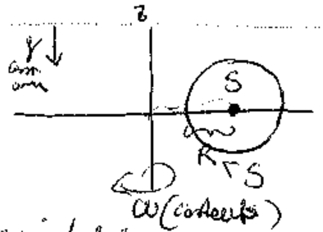
ed è evidente che i punti d'eq. (dell'eq. di Hamilton), cioè i punti stazionari di H, sono $(q,\theta) = (0,\theta)$ con $V'(\theta)=0$, mentre il segno di $V''(\theta)$ ne decide la stabilità: e meno di $-Mg$, $V'(\theta) = R\sin(\alpha) - l\sin(\theta+\alpha) = 0 \iff \boxed{\sin(\theta+\alpha) = \frac{R}{l}\sin(\alpha)}$, che ha due soluzioni (in θ) se $\frac{R}{l}\sin(\alpha) \le 1$, che sono $\overline{\theta} = "\arcsin(\frac{R}{l}\sin(\alpha))" - \alpha$, ≥ 0

nel senso delle due soluzioni "simmetriche" rispetto a $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$ (in $[-\pi,\pi]$) ; ma $V''(\theta) = -l\cos(\theta+\alpha)$ decide la stabilità, ed è evidente



, è chiaro che la $\overline{\theta}$ in modulo minore è la sola stabile.

$\boxed{EX}$ Studiare il sistema seguente



(che dà luogo al Toro),

riflessione su $\mathcal{L}$, EqL, H, EqH, equilibri.

Le curve in $\mathbb{R}^2_{(r,z)}$ è $\begin{cases} r = S + R\cos(q) \\ z = R\sin(q) \end{cases}$, per cui $\begin{cases} \dot r = -R\sin(q)\dot q \\ \dot z = R\cos(q)\dot q \end{cases} \Rightarrow$

$T_2(q,\dot q) = \frac{m}{2}R^2\dot q^2$, mentre $T_0(q) = \frac{m}{2}\omega^2(S+R\cos(q))^2 \Rightarrow$

$T(q,\dot q) = \frac{m}{2}R^2\dot q^2 + \frac{m}{2}\omega^2(S+R\cos(q))^2$, infine $V(q) = mgR\sin(q)$,

per cui $\boxed{\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{m}{2}R^2\dot q^2 + \frac{m}{2}\omega^2(S+R\cos(q))^2 - mgR\sin(q)}$, $\Rightarrow$

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = \underset{>0}{mR^2}\dot q$ $\left(\text{cioè } \left(\dot q = \frac{p}{mR^2}\right)\right)$, $\Rightarrow \dot p = mR^2\ddot q$, mentre

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = m\omega^2(S+R\cos(q))(-R\sin(q)) - mgR\cos(q)$, da cui l'eq. di $\mathcal{L}$...,

finalmente, $H(p,q) = p\dot q - \mathcal{L}(q,\dot q) = \boxed{\frac{p^2}{2mR^2}} - \frac{m}{2}\omega^2(S+

$+ R\cos(q))^2 + mgR\sin(q)$] permette lo studio qualitativo del moto: (11)

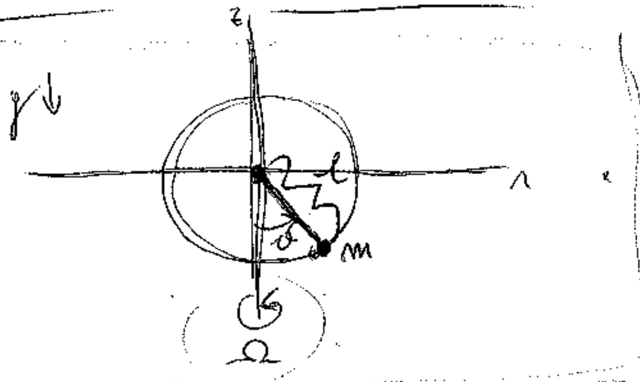
i punti staz. sono $(p,q) = (0,q)$ con q tale che $\left(+m\omega^2 (S+R\cos(q))(+R\sin(q)) + mgR\cos(q)\right) = 0$, cioè $\omega^2 S\sin(q) + \omega^2 R\cos(q)\sin(q) + g\cos(q) = 0$,

..., da cui la stabilità passa dal segno di $\omega^2 S\cos(q) + \omega^2 R\cos^2(q) - \omega^2 R\sin^2 q - g\sin(q)$ ... . Tuttavia, l'eq. di H.

sono
$$\begin{cases} \dot p = -\partial_q H = -\left[m\omega^2 R\sin(q)(S+R\cos(q)) + mgR\cos(q)\right] ; \\ \dot q = \partial_p H = \dfrac{p}{mR^2} \end{cases}$$

infine l'energia totale è $E = T+V = \dfrac{p^2}{2mR^2} + \dfrac{m}{2}\omega^2(S+R\cos(q))^2 + mgR\sin(q)$ $(\neq H!)$.]

EX. B.4, p. 242 : $g\downarrow$



[
$$\begin{cases} x(\vartheta) = l\sin(\vartheta) \\ z(\vartheta) = -l\cos(\vartheta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x(\vartheta) = l\cos(\vartheta)\dot\vartheta \\ \dot z(\vartheta) = l\sin(\vartheta)\dot\vartheta \end{cases} \Rightarrow T_2(\vartheta,\dot\vartheta) = \frac{m}{2} l^2\dot\vartheta^2$$, mentre

$T_0(\vartheta) = \frac{m}{2}\Omega^2 l^2\sin^2(\vartheta)$, mentre $V(\vartheta) = -mgl\cos(\vartheta)$, ANZI pongo

$V(\vartheta) := -\frac{m}{2}\Omega^2 l^2\sin^2(\vartheta) - mgl\cos(\vartheta)$, per cui la lagrangiana è

$\mathcal{L}(\vartheta,\dot\vartheta) = \frac{m}{2} l^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}\Omega^2 l^2\sin^2(\vartheta) + mgl\cos(\vartheta)$], da cui la

trasf. di Legendre $p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\vartheta} = ml^2\dot\vartheta$ (cioè $\dot\vartheta = \frac{p}{ml^2}$), che

dà $\dot p = ml^2\ddot\vartheta \overset{\text{eq. di Lagrange}}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = m\Omega^2 l^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgl\sin(\vartheta)$ ✓. Per

l'hamiltoniana, $H(p,\vartheta) =$ "$p\dot\vartheta - \mathcal{L}(\vartheta,\dot\vartheta)$" $= \frac{p^2}{2ml^2} + V(\vartheta)$, da cui

le eq.
$$\begin{cases} \dot p = -\partial_\vartheta H = -V'(\vartheta) \\ \dot\vartheta = \partial_p H = \dfrac{p}{ml^2} \end{cases}$$
, per cui è evidente che i punti di eq.

sono $(p,\theta)=(0,\theta)$, con il potenziale per V, e la sua stabilità è data dal [illegible] $V''(\theta)$: $V'(\theta)=\left(-\frac{m}{2}\Omega^2 l^2\sin^2(\theta)-mgl\cos(\theta)\right)'=$
$= -m\Omega^2 l^2\sin(\theta)\cos(\theta)+mgl\sin(\theta)=0$ se $\theta=0$ o $\theta=\pm\pi$,
oppure $-m\Omega^2 l^2\cos(\theta)+mgl=0 \iff g=l\Omega^2\cos(\theta) \iff$
$\boxed{J:=\frac{g}{l\Omega^2}}=\cos(\theta)$: ci sono altri 2 punti di eq. $\bar\theta=\pm\arccos(J)$ SE $\boxed{(J>0)\ J\le 1}$; ora, $V''(\theta)=\boxed{mgl\cos(\theta)-m\Omega^2 l^2\cos^2(\theta)+m\Omega^2 l^2\sin^2(\theta)}$
$\Rightarrow V''(0)=mgl-m\Omega^2 l^2=ml(g-\Omega^2 l)=ml^2\Omega^2(J-1)$ è
STAB. se $J\gneq 1$, INSTAB. se $J<1$; per $J=1$, $V'''(\theta)=$
$= -mgl\sin(\theta)+4m\Omega^2 l^2\cos(\theta)\sin(\theta)+\cancel{2m\Omega^2 l^2\sin(\theta)\cos(\theta)}\big|_{\theta=0}=$
0, ma $V''''(\theta)=-mgl\cos(\theta)-4m\Omega^2 l^2\sin^2(\theta)+4m\Omega^2 l^2\cos^2(\theta)\big|_{\theta=0}=$
$=4m\Omega^2 l^2-mgl=ml(4\Omega^2 l-g)=ml^2\Omega^2(4-J)>0$,
quindi 0 è STABILE (centro) $\iff J=1$ ($J>1$ non ha senso!);
$V''(\pm\pi)=-(mgl+m\Omega^2 l^2)<0$, ossia INSTABILE (sella [illegible]); $V''(\bar\theta)=$
$=[\cos(\bar\theta)=J!]$ $\underbrace{mglJ-m\Omega^2 l^2 J^2}_{mlJ(g-\Omega^2 l J)=0}+\underbrace{m\Omega^2 l^2\sin^2(\bar\theta)}_{>0}>0$ $\left(J=\frac{g}{l\Omega^2}\right)$ (altrimenti sarebbe [illegible] $\pm\pi$!))
ossia è STABILE. Diagramma di bif. per $J=\frac{g}{l\Omega^2}=\cos(\theta)$:

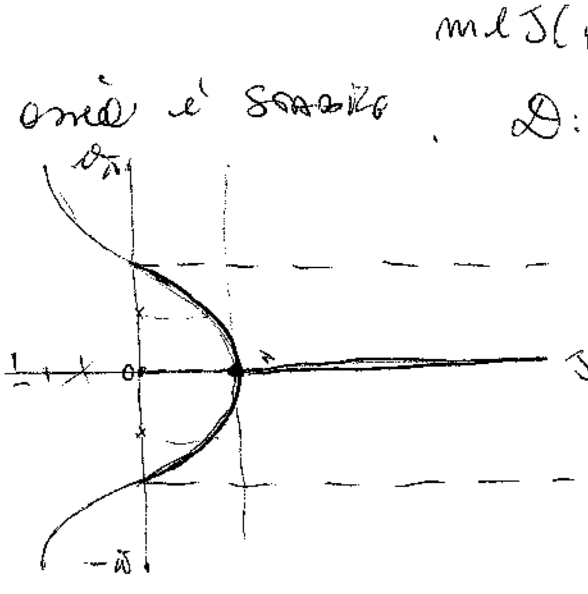
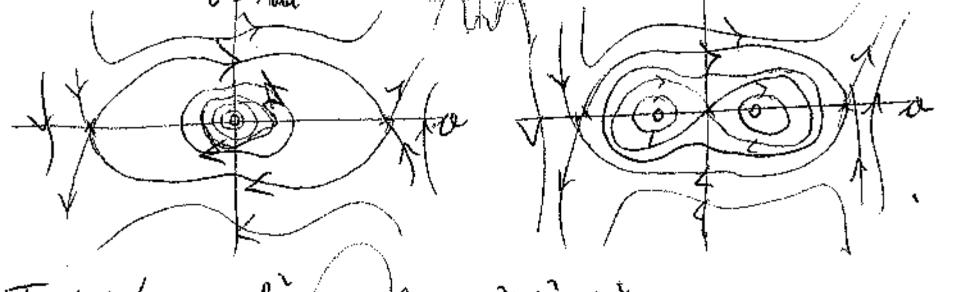


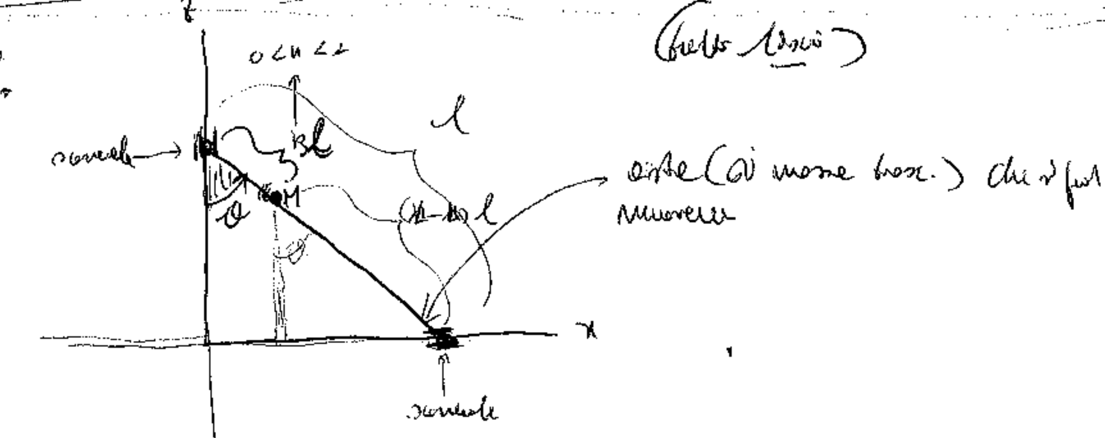
Grafico qualitativo per $J\geq 1$ e $J<1$:



$$\overset{T_2-T_0+V}{\overset{\|}{H}} \neq E = T+V = \frac{p^2}{2ml^2}+\frac{m}{2}\Omega^2 l^2\sin^2(\theta)-mgl\cos(\theta),$$
Dunque che infatti non è conservata: $E=T_2+T_0+V=$

$= H + 2T_0$, per cui $\underset{(H=0!)}{\ }$ $\dot E = 2\dot T_0 = m\Omega^2 l^2\, 2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot\theta\,]$ (12)

Ex. f.1 2+S 6.57 :



$$\begin{cases} x = nl\sin(\theta) \\ z = (1-n)l\cos(\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = nl\cos(\theta)\dot\theta \\ \dot z = -(1-n)l\sin(\theta)\dot\theta\end{cases} \Rightarrow T(\theta,\dot\theta) = \frac{M}{2}\dot\theta^2 l^2\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]$$

, mentre $V(\theta) = Mg(1-n)l\cos(\theta) \Rightarrow L(\theta,\dot\theta) = T - V = \frac{M}{2}\dot\theta^2 l^2\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right] - Mgl(1-n)\cos(\theta)$, da cui $p = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = Ml^2\dot\theta\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]$, cioè

$$\dot\theta = \frac{p}{Ml^2\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]}$$

, da cui $H(p,\theta) = p\dot\theta - L(\theta,\dot\theta) =$

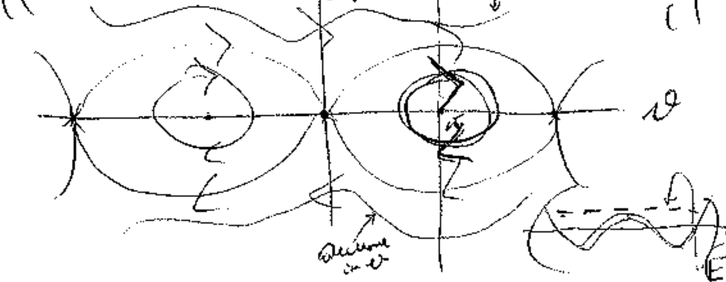
$$= \frac{p^2}{2Ml^2\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]} + Mgl(1-n)\cos(\theta)$$

, da cui

$$\begin{cases} \dot p = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{p^2}{2Ml^2}\cdot\frac{\left[-2n^2\cos(\theta)\sin(\theta) + 2(1-n)^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right]}{\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]^2} + Mgl(1-n)\sin(\theta) \\ \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{Ml^2\left[n^2\cos^2(\theta) + (1-n)^2\sin^2(\theta)\right]}\end{cases}$$

($2\sin(2\theta)(1+n^2-2n-n^2) = \sin(2\theta)(1-2n)$)

i punti d'eq. $= (p,\theta) = (0,\theta)$ con θ stazionario per V, la cui stabilità dipende da V'' : $V'(\theta) = -Mg(1-n)l\sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ o $\theta = \pm\pi$, e $V''(\theta) = -Mg(1-n)l\cos(\theta) \Rightarrow (0,0)$ INSTABILE, $(0,\pm\pi)$ STABILI (modulo 2π) :



infatti, per $\theta = \pi$, è $H(0,\pi) = -Mgl(1-n) < 0$, mentre $H(0,0) = Mgl(1-n) > 0$, per cui $E = T+V > Mgl(1-n)$, cioè $T > Mgl(1-n) - V \geq Mgl(1-n)$ in π!)

per avere un'orbita sopra o sotto al riferimento ~~[illegible]~~ occorre e basta che sia energia cinetica $> 2Mgl(1-\cos)$ ~~[illegible]~~

$\cancel{\frac{M}{2}\dot{\theta}^2}$ ← le suff. di energia poiché l'eq. sopra è quella instab.!

~~[illegible]~~, cioè $(\theta=\pi)$ $\frac{M}{2}\dot{\theta}^2 l^2 n^2 > 4Mgl(1-n)$,

cioè $\dot{\theta}^2 > \dfrac{4g(1-n)}{l n^2}$. $\square$

$r^2(r^2-2)$

$\boxed{\text{EX B.9 p. 246.}}$ (imp...)

[Eq. parametriche: $\begin{cases} x = r\cos(\omega t) \\ y = r\sin(\omega t) \\ z = r^4 - 2r^2 \end{cases}$; ω era nota,

$\begin{cases} r = r \\ z = r^4 - 2r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dot{r} \\ \dot{z} = (4r^3 - 4r)\dot{r} \end{cases}$, per cui $T_2(r,\dot{r}) = \frac{m}{2}\dot{r}^2[1 +$

$+ (4r^3-4r)^2]$, mentre $T_0(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$, e infine

$V(r) = mgz(r) = mg(r^4 - 2r^2)$ Quindi $\mathcal{L}(r,\dot{r}) = T_2 + T_0 - V =$

$= \frac{m}{2}\dot{r}^2\left[1 + (4r^3-4r)^2\right] + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - mg(r^4-2r^2)$, che ha

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}\left[1 + (4r^3-4r)^2\right]$ (da cui $\dot{r}$) $\Rightarrow H(p,r) =$

$= p\dot{r} - \mathcal{L}(r,\dot{r}) = \dfrac{p^2}{2m(1+(4r^3-4r)^2)} - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 + mg(r^4-2r^2)$, che

ha punti di eq. $(p,r) = (0,r)$ con r determinati dai conti che seguono, e insieme la stabilità: $-\cancel{m}\omega^2 r + \cancel{m}g(4r^3 - 4r) =$

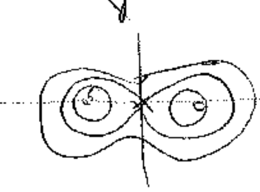
$= r\left[+ 4gr^2 - (\omega^2+4)\right] = 0$ se $r = 0$,

oppure $r = \pm\sqrt{\dfrac{\omega^2+4}{4g}}$; MA $-\omega^2 + g(12r^2-4)$

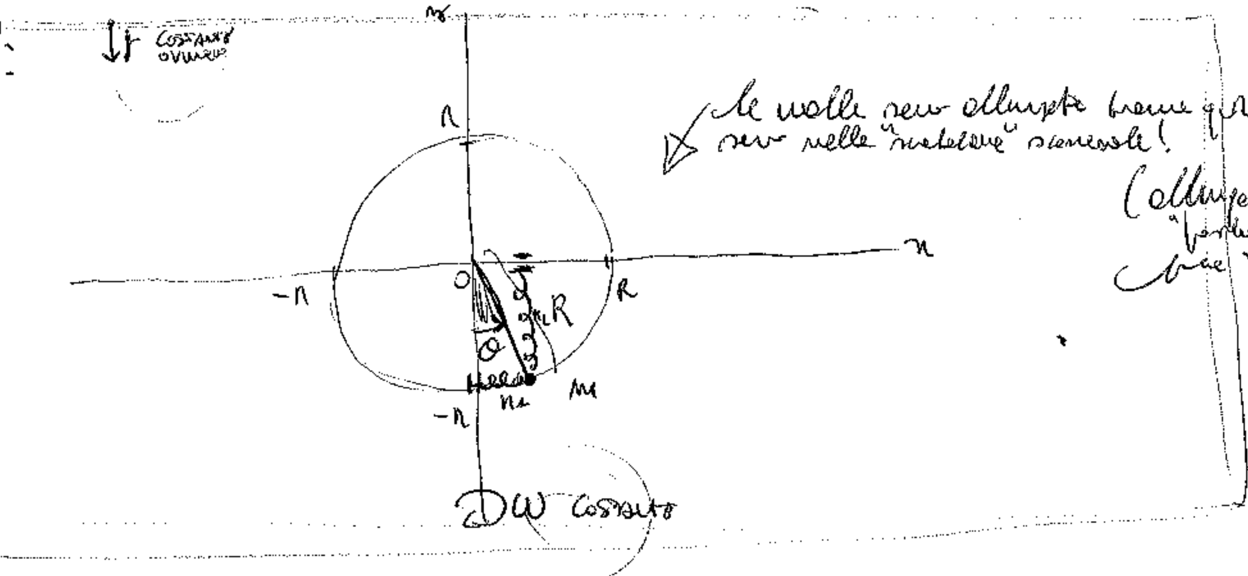
in $r=0$ è $-\omega^2 - 4g < 0$, cioè è instab., mentre

$-\omega^2 + g\left(3\dfrac{(\omega^2+4)}{g} - 4\right) = 2\omega^2 + 12 - 4g \gtrless 0$ (stab.) $\Leftrightarrow \omega^2 + 6 > 2g$,

$\dfrac{3(\omega^2+4) - 4g}{g}$ cioè $\omega^2 > 2g - 6$; e

ritratto:  ;... ; $H \neq 6$, e $\dot{E} = 2\dot{T}_0 = m\omega^2 2r\dot{r}$. $\square$

Ex



$$\begin{cases} x = R\sin(\theta) \\ y = -R\cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\cos(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = R\sin(\theta)\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow T_2(\theta,\dot{\theta}) = \frac{M}{2}R^2\dot{\theta}^2 \ ; \ T_0(\theta) =$$

$= \frac{M}{2}\omega^2R^2\sin^2(\theta)$, mentre $V(\theta) = -MgR\cos(\theta) + \frac{1}{2}k_1R^2\sin^2(\theta) + \frac{1}{2}k_2R^2\cos^2(\theta)$, $\Rightarrow \mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = T_2 + T_0 - V$, da cui

$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta}$, cioè $\dot{\theta} = \frac{p}{MR^2}$, e allora $H(p,\theta) =$

$$= p\dot{\theta} - \mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = \frac{p^2}{2MR^2} \underbrace{- \frac{M}{2}\omega^2R^2\sin^2(\theta) - MgR\cos(\theta) + \frac{1}{2}k_1R^2\sin^2(\theta) + \frac{1}{2}k_2R^2\cos^2(\theta)}_{=:V(\theta)} \ ; \ V'(\theta) = -M\omega^2R^2\sin(\theta)\cos(\theta) + MgR\sin(\theta) +$$

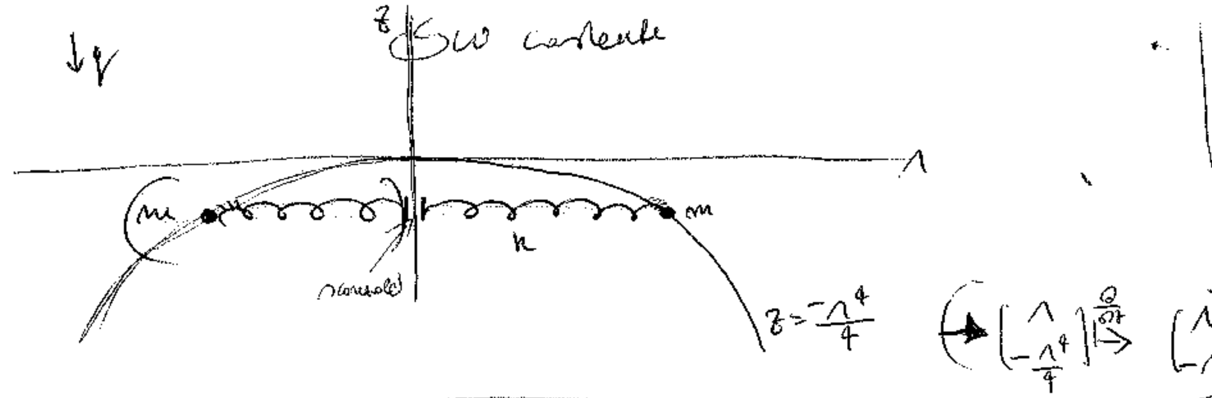
$$+ k_1R^2\sin(\theta)\cos(\theta) - k_2R^2\cos(\theta)\sin(\theta) = \boxed{MgR\sin(\theta) + (k_1R^2 - k_2R^2 - M\omega^2R^2)\sin(\theta)\cos(\theta)} = 0$$ certamente per $\theta = 0$ o $\theta = \pm\pi$,

altrimenti per $\cos(\theta) = \frac{Mg}{MR\omega^2 + k_2R - k_1R} =: J$, che se è (per $J \neq 1$ non quelle sopra!) in $[-1,1]$ dà $\bar{\theta} = \pm\arccos(J)$; ora, $V''(\theta) =$

$$= Mg\cos(\theta) + (k_1R - k_2R - M\omega^2R)\cos^2(\theta) - (k_1R - k_2R - M\omega^2R)\sin^2(\theta)$$

$\Rightarrow V''(0) = Mg + \underline{k_1R - k_2R - M\omega^2R} \geq 0 \underset{\text{stab.}}{\Leftrightarrow} J \leq 1$, $\pm\pi$ lo è $\Leftrightarrow J \geq 1$; $V''(\bar{\theta}) = -\underbrace{(k_1R - k_2R - M\omega^2R)}_{\leq 0}\sin^2(\theta)$

Ex: $\downarrow g$



$$\left(\begin{bmatrix} r \\ -\frac{r^4}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \begin{bmatrix} \dot r \\ -r^3 \dot r \end{bmatrix} \right)$$

$T_2(r,\dot r) = \frac{m}{2}\dot r^2(1+r^6)$, $T_0(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$, mentre $V(r) = -mg\frac{r^4}{4} + \frac{1}{2}kr^2 = -mg\frac{r^4}{4} + \frac{1}{2}kr^2$,

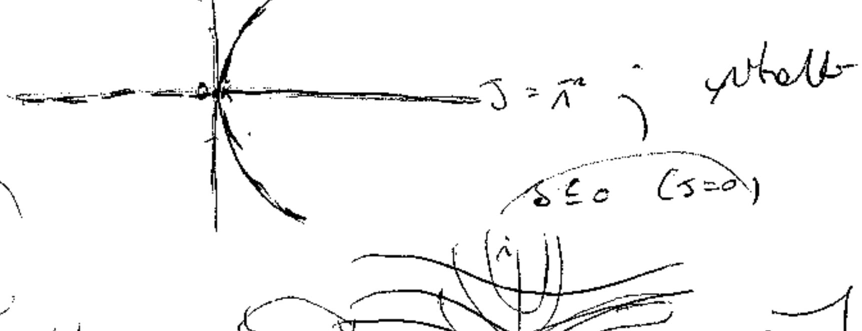
$\Rightarrow L(r,\dot r) = T_2 + T_0 - V$, $\Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r(1+r^6)$ (se ...), $\Rightarrow H(r,p) = \frac{p^2}{2m(1+r^6)} - \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - mg\frac{r^4}{4} + \frac{1}{2}kr^2$ ($T - T_0 + V$, $\neq E$!), dunque Eq. $= (0,q)$ con r stazionario per $V - T_0$: $-m\omega^2 r - mgr^3 + kr = 0$ se $r = 0$, oppure $-m\omega^2 - mgr^2 + k = 0$

$\Leftrightarrow \bar r = \pm\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{mg}}$ SE $\delta := \frac{k-m\omega^2}{mg} \geq 0$ (=0 ...!) cioè se $k - m\omega^2 \geq 0$; infine $\boxed{-m\omega^2 - 3mgr^2 + k}\Big|_{r=0} =$

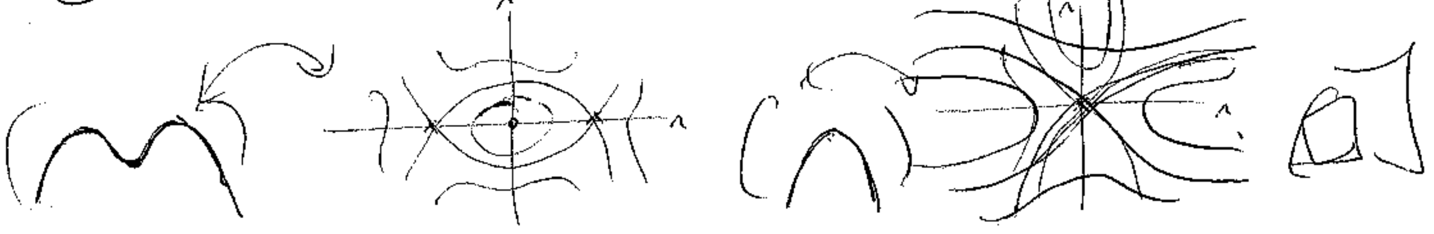
$= k - m\omega^2 > 0 \Leftrightarrow$ STABILE, e se $\delta = 0$ $-6mgr \to -6mg$ INSTABILE; in $\bar r$ è $-m\omega^2 - 3(k - m\omega^2) + k =$

$= 2m\omega^2 - 2k = 2(m\omega^2 - k) < 0$ INSTAB.;

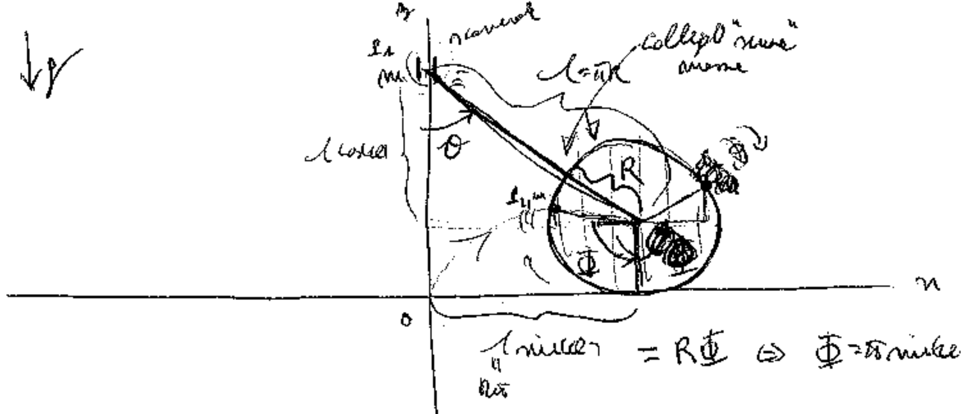
Diagramma di biforcazione



; ritratto di fase:



EX :



$\ell \sin(\theta) = R\Phi \Leftrightarrow \Phi = \bar{\alpha}\sin(\theta)$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = R + \ell\cos(\theta) = R(1 + \bar{\alpha}\cos(\theta)) \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = \ell\sin(\theta) - R\cos(\Phi - \pi/2) = \\ y_2 = \ell\cos(\theta) - R\sin(\Phi - \pi/2) = \end{cases}$

$= R(\bar{\alpha}\sin(\theta) - \sin(\Phi))$

$= R(\bar{\alpha}\cos(\theta) + \cos(\Phi))$, dove $\Phi = \bar{\alpha}\sin(\theta)$, per m

$V(\theta) = mgR\left(\bar{\alpha}\cos(\theta) + \cos(\bar{\alpha}\sin(\theta))\right)$; invece aggiunto

$T(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}m\left[\dot y_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y_2^2\right]$

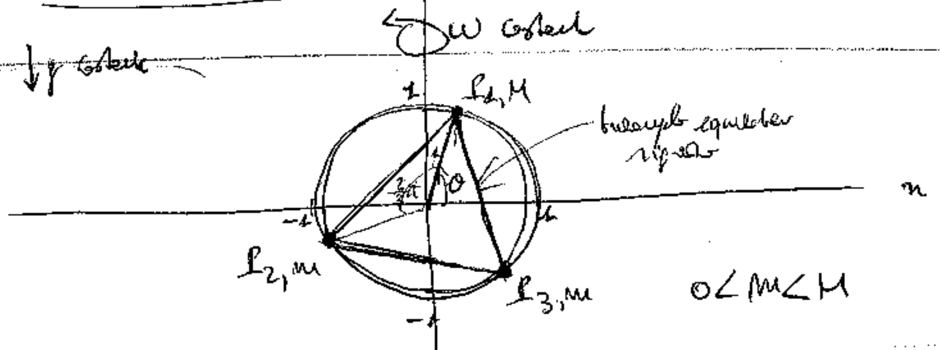
$\dot y_1^2 = (-R\bar{\alpha}\sin(\theta)\dot\theta)^2 = R^2\bar{\alpha}^2\sin^2(\theta)\dot\theta^2$

$\dot x_2^2 = (R(\bar{\alpha}\cos(\theta)\dot\theta - \cos(\bar{\alpha}\sin(\theta))\bar{\alpha}\cos(\theta)\dot\theta))^2 = R^2\bar{\alpha}^2\dot\theta^2\cos^2(\theta)(1-\cos(\bar{\alpha}\sin(\theta)))^2$

$\dot y_2^2 = R^2\left[-\bar{\alpha}\sin(\theta)\dot\theta + \sin(\bar{\alpha}\sin(\theta))\bar{\alpha}\cos(\theta)\dot\theta\right]^2 = R^2\bar{\alpha}^2\dot\theta^2\left[\sin(\theta) + \sin(\bar{\alpha}\sin(\theta))\cos(\theta)\right]^2$

$\ldots$; $p = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} \Rightarrow \ldots$; $V'(\theta) = mgR(-\bar{\alpha}\sin(\theta) - \sin(\bar{\alpha}\sin(\theta))\cdot\bar{\alpha}\cos(\theta)]\ldots$

EX :



$0 < m < M$

$\begin{cases} x_1 = \cos(\theta) \\ y_1 = \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x_1 = -\sin(\theta)\dot\theta \\ \dot y_1 = \cos(\theta)\dot\theta \end{cases} \Rightarrow T_{P_1}(\theta,\dot\theta) = \frac{M}{2}\dot\theta^2$; $\begin{cases} x_2 = \cos(\theta + 2/3\pi) \\ y_2 = \sin(\theta + 2/3\pi) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \dot x_2 = -\sin(\theta + 2/3\pi)\dot\theta \\ \dot y_2 = \cos(\theta + 2/3\pi)\dot\theta \end{cases} \Rightarrow T_{P_2}(\theta,\dot\theta) = \frac{m}{2}\dot\theta^2$, e $\begin{cases} x_3 = \cos(\theta + 4/3\pi) \\ y_3 = \sin(\theta + 4/3\pi) \end{cases} \Rightarrow \ldots$

$\ldots \Rightarrow T_{P_3}(\theta,\dot\theta) = \frac{m}{2}\dot\theta^2$, DUNQUE $T_2(\theta,\dot\theta) = T_{P_1} + T_{P_2} + T_{P_3} = \boxed{\frac{\dot\theta^2}{2}(M + 2m)}$;

invece $T_0(\theta) = \frac{\omega^2}{2}\left[M\cos^2(\theta) + m\cos^2(\theta+\frac{2}{3}\pi) + m\cos^2(\theta+\frac{4}{3}\pi)\right]$; ma

$\cos(\theta+\frac{2}{3}\pi) = -\cos(\theta)\frac{1}{2} - \sin(\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(\theta+\frac{4}{3}\pi) = \cos(\theta)(-\frac{1}{2}) -$

$- \sin(\theta)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\cos(\theta)\frac{1}{2} + \sin(\theta)\frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui $\cos^2(\theta+\frac{2}{3}\pi) +$

$+ \cos^2(\theta+\frac{4}{3}\pi) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta) + \frac{3}{2}\sin^2(\theta)$ $\Rightarrow$ $T_0(\theta) =$

$$\boxed{= \frac{\omega^2}{2}\left[M\cos^2(\theta) + \frac{m}{2}\left[\underbrace{\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta)}_{1+2\sin^2(\theta)}\right]\right]}$$; infine

$V(\theta) = Mg\,y_1 + mg\,y_2 + mg\,y_3 = Mg\sin(\theta) + mg\left(\underbrace{\sin(\theta+\frac{2}{3}\pi) + \sin(\theta-\frac{2}{3}\pi)}_{\substack{\parallel \\ 2\sin(\theta)\cos(\frac{2}{3}\pi) \\ -1/2}}\right) =$

$$\boxed{= g\sin(\theta)(M-m)}$$; notiamo che $T_0(\theta) = \frac{\omega^2}{2}\Big(M\underbrace{\cos^2(\theta)}_{1-\sin^2(\theta)} + \frac{m}{2}\cdot$ ININFL. per il rispetto

$+ m\sin^2(\theta)\Big) = \frac{\omega^2}{2}\Big(M - \underbrace{M\sin^2(\theta) + m\sin^2(\theta)}_{(m-M)\sin^2(\theta)}\Big) =$

$$= \boxed{-\frac{\omega^2}{2}(M-m)\sin^2(\theta)}$$, da cui $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T_2 + T_0 - V =$

$= \frac{\dot\theta^2}{2}(M+2m) - \frac{\omega^2}{2}(M-m)\sin^2(\theta) - g\sin(\theta)(M-m)$, da cui

$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \dot\theta(M+2m)$ (cioè $\dot\theta = \frac{p}{M+2m}$), e ottengo l'eq. di

$\mathcal{L}$, nonché $H(p,\theta) = p\dot\theta - \mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = \boxed{\frac{p^2}{2(M+2m)} + \underbrace{\frac{\omega^2}{2}(M-m)\sin^2(\theta)}}$

$\underbrace{+ g\sin(\theta)(M-m)}_{=:\,v(\theta)}$; gli eq. sono $(p,\theta) = (0,\theta)$ con θ staz. per V, e V'' decide della loro stabilità:

$V'(\theta) = \boxed{\omega^2(M-m)\sin(\theta)\cos(\theta) + g\cos(\theta)(M-m)} = 0$ certamente per

$\theta_{1,2} = \pm\pi/2$, se no $\sin(\theta) = -\frac{g}{\omega^2} =: s\ (<0)$, e se $s \geq -1$ ($s = -1$

$\Leftrightarrow \theta = -\pi/2$ già considerato!) allora $\theta_3 = \arcsin(-s)$ e $\theta_4 = \pi - \arcsin(s)$,

(simmetriche rispetto a $x = -\pi/2$ o ~~$\pi/2$~~ (in $(-\pi,\pi]$)!)

$$\boxed{V''(\theta) = \omega^2\cos^2(\theta) - \omega^2\sin^2(\theta) - g\sin(\theta)} \Rightarrow V''(\pi/2) = -\omega^2 - g < 0$$ INSTABILE

$V''(-\pi/2) = -\omega^2 + g = \cancel{\ldots} -\omega^2(1+\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow \gamma \leq -1$, (15)

"cioè" $\gamma = -1$ si ? θ_3 e θ_4, altrimenti $\gamma < -1$ stazionari;

$\Big[\, V'''(\theta) = -4\omega^2\cos(\theta)\sin(\theta) \cancel{-2\omega^2\ldots} - g\cos(\theta)\,\big|_{\theta=-\pi/2} = 0$;

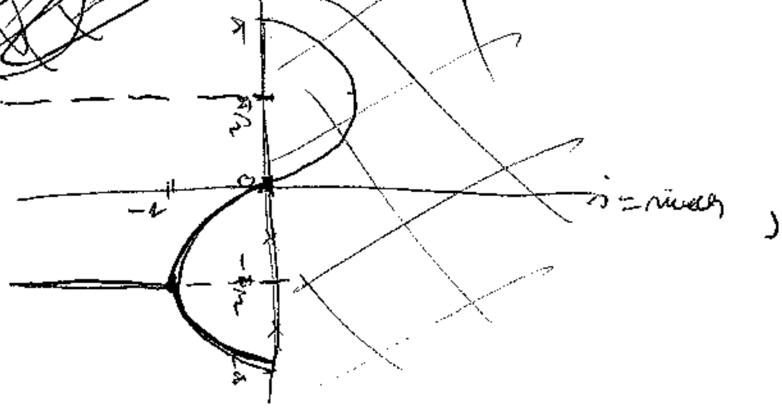
$V''''(\theta) = 4\omega^2\sin^2(\theta) \cancel{\ldots} + g\sin(\theta) > 0$ in $-\pi/2$, che però

se $\gamma = -1$ è stabile (di meno) $\Big]$; infatti $V''(\theta_3) \overset{\gamma=\sin(\theta_3)}{=} \omega^2\cos^2(\theta_3)$

$\underbrace{-\omega^2\gamma^2 - g\gamma}_{=0} > 0$ $(\theta \neq \pm\pi/2!)$ e lo stesso per θ_4,

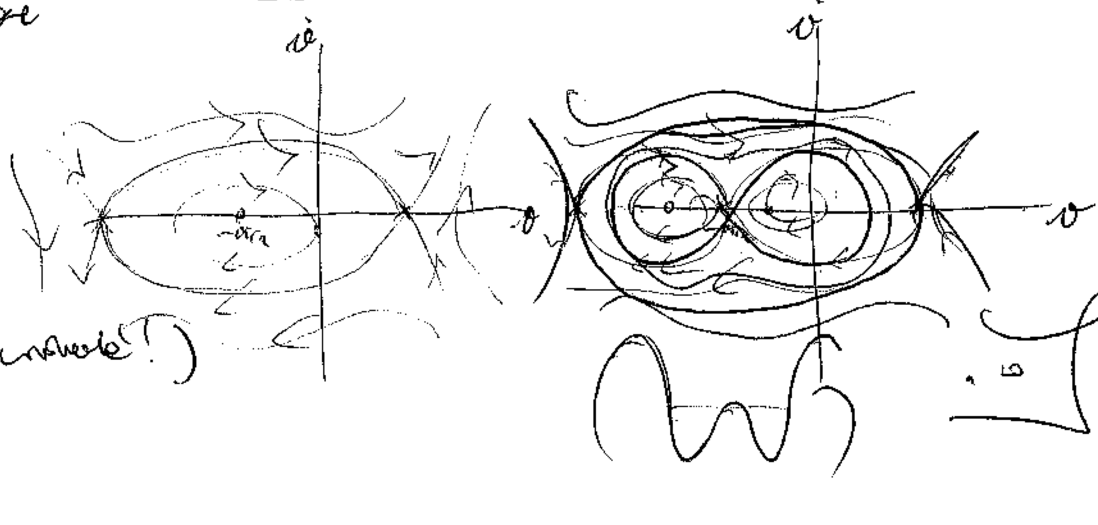
$-\gamma(\omega^2\gamma + g)$ ($\gamma = -\frac{g}{\omega^2}$) che risultano stabili: il diagramma

di biforcazione è



i ritratti di fase

$\boxed{\gamma \leq -1}$ (0>) $\boxed{\gamma > -1}$



(dove le 2π-periodiche!)

TRASFORMAZIONI CANONICHE = diffeomorfismi χ di $\mathbb{R}^2$ (1)

tali che $(p,q) \xmapsto{\chi} (w,z) = (w(p,q), z(p,q))$ in modo che, se (p,q) risolvono ($H \in C^2$)
$$\begin{cases}\dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q}\\ \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p}\end{cases},$$
allora (w,z) risolvono
$$\begin{cases}\dot w = -\dfrac{\partial K}{\partial z}\\ \dot z = \dfrac{\partial K}{\partial w}\end{cases}$$
CON $K(w(p,q), z(p,q)) = H(p,q)$, e ciò per ogni hamiltoniana H (cioè: il cambiamento di coordinate χ preserva la forma hamiltoniana della dinamica, con hamiltoniana che si corrisponde per valore!).

~~(TEOREMA DELLE TRASFORMAZIONI CHE CONSERVANO L'AREA)~~

χ diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ TRASFORMAZIONE CANONICA $\iff$
$$\det J_\chi(p,q) = \det \underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial p} & \dfrac{\partial w}{\partial q}\\ \dfrac{\partial z}{\partial p} & \dfrac{\partial z}{\partial q}\end{bmatrix}}_{=:A} = +1.$$

[Se $\begin{bmatrix}\dot p\\ \dot q\end{bmatrix} = J\nabla H(p,q)$, allora $\begin{bmatrix}w\\ z\end{bmatrix}$ è tale che $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}w(p,q)\\ z(p,q)\end{bmatrix} =$

$= A\begin{bmatrix}\dot p\\ \dot q\end{bmatrix} = AJ\nabla H(p,q)$; ora, io voglio che è $= J\nabla K(w(t),z(t))$

CON $K(w(p,q),z(p,q)) = H(p,q)$, $\Rightarrow \nabla H(p,q) = A^T \nabla K(w(p,q),z(p,q))$,

ossia $J\nabla K(w,z) = AJA^T \nabla K(w,z)$, cioè $J = AJA^T$:

se $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, allora $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b & -d\\ a & c\end{bmatrix} =$

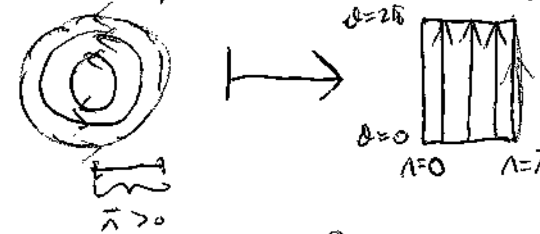
$= \begin{bmatrix}0 & bc-ad\\ ad-bc & 0\end{bmatrix} = \underbrace{(ad-bc)}_{\det A!} J$, $= J \iff \det A = +1$. □]

(Esempi: $\begin{cases}w = -q\\ z = p\end{cases}$ o $\begin{cases}w = q\\ z = -p\end{cases}$ (MA NON $\begin{cases}w = q\\ z = p\end{cases}$!);

(e tante altre!) $\begin{cases}w = \sqrt{2r}\cos(\theta)\\ z = \sqrt{2r}\sin(\theta)\end{cases}$ (MA NON $\begin{cases}w = r\cos(\theta)\\ z = r\sin(\theta)\end{cases}$!).)

Se $H(p,q) = \omega \frac{p^2+q^2}{2}$ (), allora $\begin{cases} p = \sqrt{2\lambda}\cos(\varphi) \\ q = \sqrt{2\lambda}\sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow$

$K(\lambda,\varphi) = \omega \cdot \lambda$, ossia $(p,q) \mapsto (\lambda,\varphi)$ è CANONICA e con λ costante lungo le soluzioni e φ variabile angolo; è inoltre ovvio che

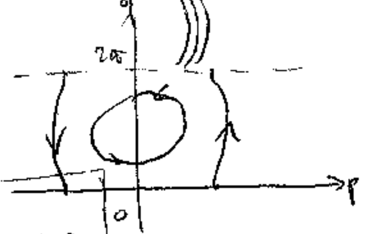


, e il SDC è banalmente $\begin{cases} \dot\lambda = 0 \\ \dot\varphi = \omega \end{cases}$, cioè $\begin{cases} \lambda(t) \equiv \lambda_0 \\ \varphi(t) = \omega t + \theta_0 \end{cases}$.

IN GENERALE: sia per librazioni "a ciclo"  $\left(\begin{cases} p(t+T) = p(t) \\ q(t+T) = q(t) \end{cases}\right)$,

sia per circolazioni "a ruota"  $\left(\begin{cases} p(t+T) = p(t) \\ q(t+T) = q(t) + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}\right)$, ossia

se q è variabile angolo

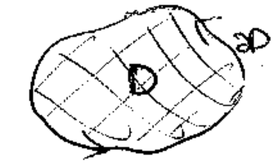


, cerchiamo trasformazioni canoniche $\boxed{(p,q) \longmapsto (I,\varphi)}$ (φ variabile angolo), aperto $W \mapsto [I_1, I_2] \times [0, 2\pi)$, TALE CHE I è costante su ogni orbita: I è VARIABILE AZIONE.

Se così fosse, allora si ha $\begin{cases} \dot I (=0) = -\frac{\partial K}{\partial \varphi} \\ \dot\varphi = \frac{\partial K}{\partial I} \end{cases}$, $\Longleftrightarrow K = K(I)$

e allora $\begin{cases} I(t) \equiv I_0 \\ \varphi(t) = \frac{\partial K}{\partial I}(I_0)\, t + \theta_0 \end{cases}$ è SCORRIMENTO in φ!

Per le orbite periodiche di tipo librazione, dovendo essere

(tra le AREE)  =  , I costante su

∂D (VARIAZIONE!) è allora vero che $Area(D) = \oint_{\partial D} p\, dq = 2\pi \cdot I$,

cioè $\boxed{I = \frac{Area(D)}{2\pi}}$ $\Leftarrow$ VAR. AZIONE ED AREA (ES: $p(q) = \sqrt{2m[E - V(q)]} \dots$)

SD discreto è $f: W \to W$ DIFFEOMORFISMO, DISCRETIZZAZIONE!
(in $W \subseteq \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ (aperto))

("SDD")

"ossia"
$$X_{k+1} = f(X_k) \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad , \simeq$$

(1): dato lo stato del fenomeno all'istante k,

(2): lo stato successivo è f "di lui"!

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \qquad (\ \ ) \quad . \ \text{Oss.}$$

(intermediata so quelle con stato "elementare")

Che, $\forall X_0 \in W$, c'è l'orbita (UNICA!!): $\boxed{(X_k := f^k(X_0))_{k \in \mathbb{Z}}}$.

[$X_0 = f^0(X_0) = X_0$, $X_1 = f(X_0)$, $X_2 = f^2(X_0) = f(f(X_0)) = f(X_1)$, ..., $X_{k+1} = f^{k+1}(X_0) = f(f^k(X_0)) = f(X_k)$, ...; per i negativi: $X_{-1} = f^{-1}(X_0) \Rightarrow X_0 = f(f^{-1}(X_0)) = f(X_{-1})$,

$X_{-1} = f^{-1}(X_0) = f(f^{-1}(f^{-1}(X_0))) = f(\underbrace{f^{-2}(X_0)}_{X_{-2}})$,

..., $X_{-k} = f^{-k}(X_0) = f(\underbrace{f^{-1}(f^{-k}(X_0))}_{f^{-(k+1)}(X_0)}) = f(X_{-k-1})$, ..., "].

"LINEARE" $\Leftrightarrow$ f lineare, ossia

$$\boxed{X_{k+1} = A \cdot X_k} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ INVERTIBILE},$$
(~~$X(0) = X_0$~~)

che effettua una ORBITA $(X_k := A^k \cdot X_0)_{k \in \mathbb{Z}}$. Notiamo che se un SDC del tipo $\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ ne otteniamo uno

come questo per discretizzazione: $X(t) = \exp(At)\cdot X_0 \Rightarrow \forall$ $h>0$ scelto ("passo"), $\forall k\in\mathbb{Z}$, $X_k := X(k\cdot h) =$
$= \exp((Ah)\cdot k)\, X_0 \overset{(**)}{=} (\exp(Ah))^k \cdot X_0$!

[(**): $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\exp(A\cdot k) = (\exp(A))^k$; infatti, in effetti,
$I = \exp(\underline{0}) = \exp(A-A) \overset{\text{comm.}}{=} \exp(A)\exp(-A) \Leftrightarrow$
$\boxed{\exp(-A) = \exp(A)^{-1}}$: allora, per $k\ge 0$, $\exp(A\cdot k) =$
$= \exp(\underbrace{A+A+\dots+A}_{k \text{ volte}}) \overset{\text{com}}{=} (\exp(A))^k$, mentre per $k<0$ è
$\exp(A\cdot k) = \exp(-A\cdot|k|) = \exp(\underbrace{-A-A\dots-A}_{|k| \text{ volte}}) \overset{\text{com}}{=} \exp(-A)^{|k|} =$
$= \exp(A)^{\overbrace{(-|k|)}^{=k}}$]

|| L'interessante è il viceversa: discretizzare il sistema $\dot{X} = F(X)$ per avere informazioni sulle andamento nel soluzioni!! (si discretizza $\downarrow$ con A^k!)

Vediamo con precisione le strette analogie col caso continuo.

(1) Possiamo risolvere "in questo caso": se A, nella base V, è "Q", cioè $V^{-1}AV = Q$, allora $A = VQV^{-1} \Rightarrow \boxed{X_k = A^k X_0 = VQ^kV^{-1}X_0}$, con Q diviene diagonale a blocchi di Jordan.

(2) In effetti il calcolo di A^k è "semplificato" nel calcolo di "Q^k" (quasi!), "ossia" grazie a $A = S+N$ (S semisemplice e N nilpotente), tale che $SN = NS \overset{\text{Newton}}{\Rightarrow} \forall k\ge 0$,

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^{k-j} N^j \quad (\text{in realtà fino a } k = \theta(N)-1),$$

mentre per $n = -|n|$ $A^n = (A^{|n|})^{-1}$

TEOREMA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE $X_{n+1} = A X_n$, $n \in \mathbb{Z}$ ("equazione alle differenze finite"): $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\det A \neq 0$, le componenti dell'orbita $(X_n = A^n X_0)_{n \in \mathbb{Z}}$ si possono esprimere come COMBINAZIONI LINEARI di ($\forall n$) (successioni!):

(1) λ_i^n, λ_i autovalori reali di A;

(2) $\lambda_i^n P_i(n)$, $P_i(n)$ polinomio in n di $\deg P_i < \nu_i$ = molteplicità algebrica di λ_i;

(3) $\mathrm{Re}(z_i^n)$, $\mathrm{Im}(z_i^n)$ $(\neq 0)$, $z_i, \bar{z}_i$ autovalori complessi coniugati di A;

(4) $\mathrm{Re}(z_i^n) Q_i(n)$, $\mathrm{Im}(z_i^n) Q_i(n)$, con $Q_i(n)$ polinomio in n di $\deg Q_i < \nu_i$:= molteplicità alg. di z_i (= quella di $\bar{z}_i$) (quindi pari!)

[$\exists V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\det V \neq 0$ tale che (A reale!) $V^{-1} A V = Q$, Q = forma canonica di Jordan REALE di A, per cui $Q = S + N$ con S che ha sulla diagonale gli autovalori reali di A (contati con le loro molteplicità alg. ν_i), mentre gli autovalori complessi di A $z_j = a_j \pm i b_j$ $(\neq 0)$ compaiono in blocchi diagonali 2×2 del tipo $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ (contati con le loro molteplicità!), e con N in forma canonica del nilpotente (i blocchi nilpotenti relativi agli autovalori reali λ_i sono blocchi $\nu_i \times \nu_i$ con un numero di 1 sotto-diagonali che dipende dalle molteplicità GEO di λ_i; i blocchi nilpotenti relativi agli autovalori $z_j = a_j \pm i b_j$ sono blocchi $\frac{\nu_j}{2} \times \frac{\nu_j}{2}$, con "pari" sotto-diagonali di tutti 1 a seconda delle molteplicità geo. (pari) di z_i). ORA, come visto $X_n = V Q^n V^{-1} X_0 =$
$= V (S+N)^n V^{-1} X_0 \overset{(n \geq 0)}{=} V \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} S^{n-j} N^j \right) V^{-1} X_0$; ora, per ogni blocco $\nu_i \times \nu_i$ di N, è chiaro che $N^{\nu_i} = \underline{0}$, per

cui la serie da considerare è in realtà $\sum_{j=0}^{\min(k,\lambda_i-1)=:k'} \binom{k'}{j} S^{k'-j} N^j$ (j termini), per

cui $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j(j-1)(j-2)\cdots 1}$ è polinomio di grado

$= j \le k \Rightarrow \binom{k'}{j}$ è un pol. di grado $\le \lambda_i - 1 \ (<\lambda_i)$!

Ho finito perché $\begin{bmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \lambda_i\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\lambda_i^n & 0\\ 0 & \lambda_i^n\end{bmatrix}$, mentre

$\begin{bmatrix}a_i & -b_i\\ b_i & a_i\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}Re(z_i^n) & -Im(z_i^n)\\ Im(z_i^n) & Re(z_i^n)\end{bmatrix}$ $\left((a_iI+b_iJ)^n \simeq (\underbrace{a_i+ib_i}_{z_i})^n, \simeq aI + bJ \right)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; per $n<0$ nessun problema: considero X_{n-1} (o un'altra "ennesima [...]") con X_0!]

A NON ovvio autovalore 1

$f(X) = AX = X \Leftrightarrow X = 0$, nel caso ~~...~~, altrimenti per ~~...~~ $X \in W$. In generale:

~~($AX = X$, $(A-I)X = 0$, se $X \neq 0$ allora $A-I$ ... per cancellazione!)~~

1) "X_0 DI EQUILIBRIO" (o FISSO) $\overset{def}{\Leftrightarrow} f(X_0) = X_0$; ($X_n = X_0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$ risolve $X_{n+1} = f(X_n)$!)

2) "f STABILE in X_0" $\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che, $\forall X \in W$, $|X - X_0| \le \delta \Rightarrow |f^m(X) - f^m(X_0)| \le \varepsilon \ \forall m \in \mathbb{N}$;

"f INSTABILE in X_0" $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ f NON è stabile in X_0 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0, \exists X \in W$ tale che $|X - X_0| \le \delta$ MA $|f^m(X) - f^m(X_0)| > \varepsilon$ per almeno un $m \in \mathbb{N}$; ~~ottiene~~

~~f STABILE in $X_0 \Rightarrow X_0$ è FISSO cioè $f(X_0) = X_0$~~

~~[CONTINUITÀ di f: se $X_0 \neq f(X_0)$ ...]~~

Dunque a partire da X "abbastanza" vicino a X_0, le successioni $(f^m(X))_{m\ge0}$, $(f^m(X_0))_{m\ge0}$ restano "orbite" vicine. (def. "X_0 stabile", ossia in $f(X_0)$)

3) "f ASINTOTICAMENTE STABILE in X_0" $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ X_0 è stabile ed $\exists$ intorno $U_0 \ (\subseteq W)$ di X_0 tale che $X \in U_0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} |f^m(X) - f^m(X_0)| = 0$,

cioè $(f^m(X))_{m\ge0}$ "tende eventualmente ad essere" $(f^m(X_0))_{m\ge0}$.

Per x_0 fisso, cioè tale che $x_0 = f(x_0)$ (cioè l'orbita per x_0 è ... x_0!), le definizioni diventano:

$$\begin{cases} x_0 \text{ STABILE} \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in W,\ |x - x_0| \le \delta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |f^n(x) - x_0| \le \varepsilon\ ; \\ x_0 \text{ ATTRATTIVO} \iff \exists \delta > 0 : \forall x \in W,\ |x - x_0| \le \delta \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f^k(x) = x_0 \end{cases}$$

Notiamo che comunque x_0 PUNTO LIMITE $\Rightarrow$ x_0 FISSO, cioè $\exists x \in W$ tale che $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0 \Rightarrow x_0$ fisso.

[Analogo al caso continuo: $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f^m(x_0) = f^m(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) \overset{\text{cont.}}{=} \lim_{n\to\infty}(f^{m+n}(x)) = x_0$. ⊠]

I "MOLTIPLICATORI DI LYAPUNOV" di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono i moduli dei suoi autovalori: se A ha autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ reali e $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_s, \bar{z}_s$ complessi coniugati ($r + 2s = n$), allora i m. di L. di A sono $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_r|, |z_1|, \dots, |z_s|$ $(r+s)$.
Gli "ESPONENTI DI LYAPUNOV" di A sono i logaritmi (naturali) dei suddetti m. di L.: $\forall \mu$ autovalore di A, $|\mu|$ è un moltiplicatore di L. mentre $\log|\mu|$ è un esponente di L.

(NOTA: per noi A è la f oppure è la jacobiana di f, MA f è un diffeomorfismo (per ipotesi), per cui come è noto vale $\det A \neq 0$, e allora $\mu \neq 0$!)

Sia x_0 fisso per f e $A = J_f(x_0)$: x_0 è POZZO se i moltipl. sono < 1, cioè gli esp. < 0; è SORGENTE se i moltipl. sono > 1, cioè gli esp. > 0.

{ NOTIAMO come tale def di ESP. di L. sia coerente (ostense!) con quella precedente : $\begin{cases}\dot{X}=AX\\ X(0)=X_0\end{cases} \Leftrightarrow X(t)=\exp(At)\cdot X_0$; scelto $h>0$,

$t=n\cdot h$ $(n\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \| X_n := X(n\cdot h) = \exp(Ah)\cdot X_0 = \underbrace{\exp(Ah)^n}_{\text{"}B^n\text{"}}\cdot X_0 \|$,

ma, come sappiamo, $\exp(Ah)$ ha autovalori (se μ lo è per A, anche complesso) $e^{\mu h} = e^{\mathrm{Re}(\mu)\cdot h}[\cos(\mathrm{Im}(\mu)\cdot h) \pm i\sin(\mathrm{Im}(\mu)\cdot h)]$, quindi moltiplicatori $|e^{\mu h}| = \underbrace{e^{\mathrm{Re}(\mu)\cdot h}}_{<1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\mu<0}$ ed esponenti $\boxed{\mathrm{Re}(\mu)\cdot h}$! }

X_0 (fisso) è IPERBOLICO se $\nexists$ moltipl. >1 ma anche <1 ;
X_0 è ELLITTICO se $\exists$ moltipl. $=1$

TEOREMA DEI POZZI E DELLE SORGENTI NEUZIONALI DISCRETI, "sul' altro" : Consideriamo $X_{n+1} = f(X_n)$ $\ni$ $X_0 = f(X_0)$, e $A := J_f(X_0)$, X_0 POZZO $\Rightarrow$ X_0 esponenzialmente stabile (per $n\to+\infty$) (cioè f lo è in X_0), X_0 SORGENTE $\Rightarrow$ X_0 esponenzialmente stabile per $n\to-\infty$ (cioè f^{-1} lo è in X_0 ; per $n\to+\infty$ è invece INSTABILE); X_0 IPERBOLICO $\nRightarrow$ X_0 "sempre" instabile ; per X_0 ELLITTICO... ... può accadere di tutto!

~~(come sopra.)~~

Equazioni alle differenze finite di ordine 2 (in $\mathbb{R}^m$):

$\boxed{X_{k+2} = F(X_{n+1}, X_n)}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$ (cioè ogni stato è definito univocamente (da F) dai due stati precedenti!) ;

così come un'eq. diff. ordinaria di ordine 2 è un SDC in $\mathbb{R}^2$, un'eq. alle diff. finite di ordine 2 è un SDD in $\mathbb{R}^{2m}$: $Y_n := \begin{bmatrix}X_{n+1}\\X_n\end{bmatrix} \Leftrightarrow Y_{n+1} := \begin{bmatrix}X_{n+2}\\X_{n+1}\end{bmatrix}$, per cui è

$$Y_{n+1} = f(Y_n) = \begin{bmatrix} F(X_{n+1}, X_n) \\ X_{n+1} \end{bmatrix}$$

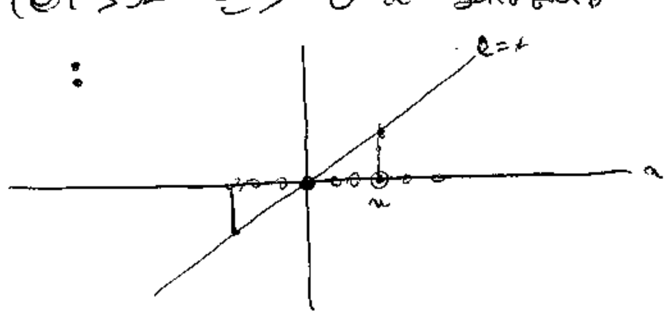
$\boxed{\text{ES : Lineare!}}$ In $\mathbb{R}$, siano $a \neq 0$ e b, c reali, e consideriamo $a x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$; tale equazione al SDD

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} x_{n+1} - \frac{c}{a} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b/a & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix},$$

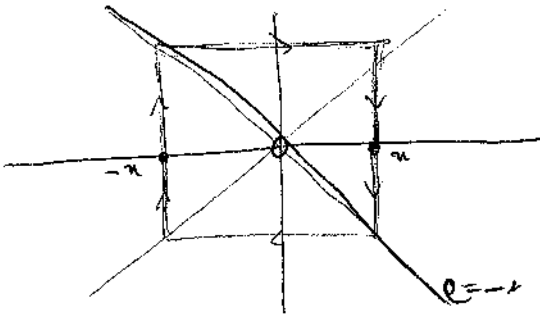
Allora A ha eq. caratt. $\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = \frac{1}{a}[a\lambda^2 + b\lambda + c] = 0$, cioè $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$) (come A è la compagna del tale polinomio in λ!), da cui deduciamo in teoria molteplicità ≤ 2, cioè eq. di k; $\exists!$ orbita $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$ iniziale, ed è la serie seguente $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ (supponendo anche $c \neq 0$, altrimenti ho un "normale" SDD!).

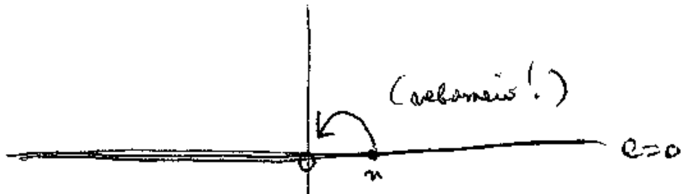
~~NOTA: l'inverso tempo di tale SDD è ..., perché $A = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$!~~

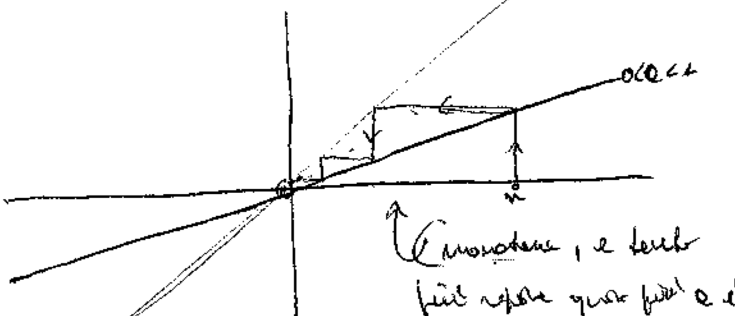
Oss.: nel caso $f(x) = ax$ in $\mathbb{R}$, chiaramente f ha punti fissi solo lo 0 se $a \neq 1$, altrimenti sono tutti fissi; NON SOLO: per $|a| < 1$, 0 è asint. stabile (sempre (e anche) $a = 0$!), mentre $|a| > 1 \Rightarrow 0$ è sorgente; per $a = \pm 1$ è NON asintoticamente stabile:



)

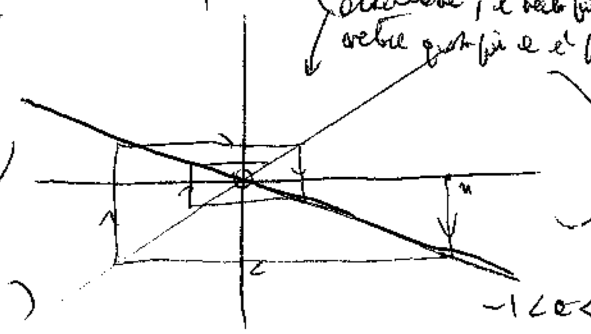


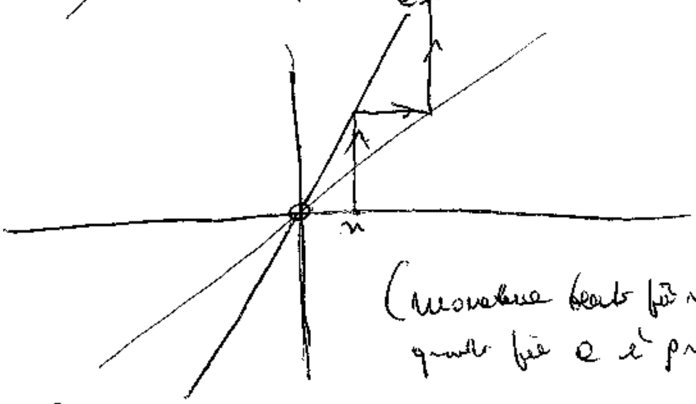




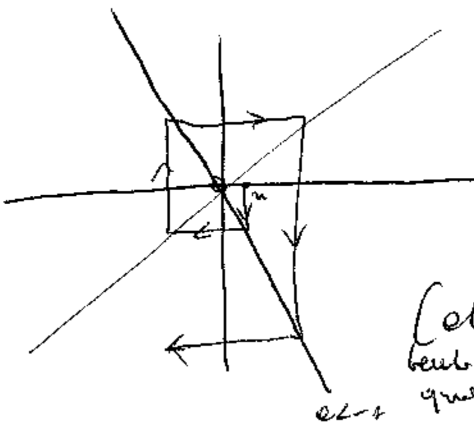
(monotona, e tende più rapido quanto più e è piccolo)

(alternata, e tende più velocemente quanto più e è piccolo)





(monotona tende più rapidamente quanto più e è grande)



(alternata e tende più rapida quanto più e è piccola)

(NOTA: $x_{n+1} = e x_n$, ovvero $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e$, se ad es. quanto più $e<1$ è piccolo quanto più x_{n+1} è piccolo rispetto a x_n; o anche $x_n = e^k \cdot x_0$, se no si alterna la velocità di decrescere $(e<1)$.)

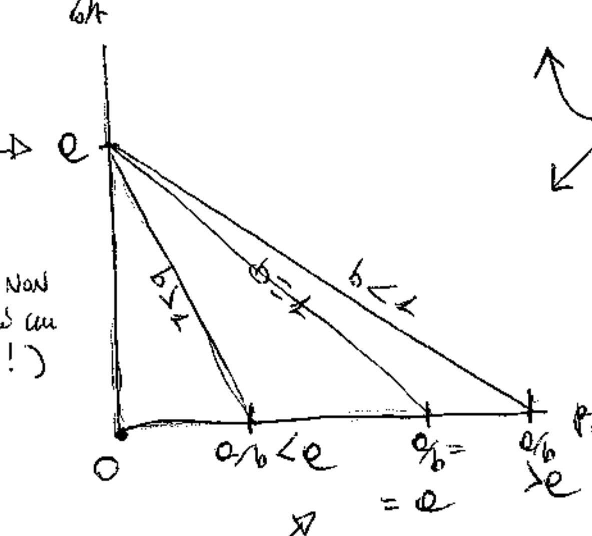
Due esempi dalla MICROECONOMIA

(UN SOLO BENE DI UN CERTO MERCATO)

$\boxed{\text{ES. 1}}$ (Modello della RAGNATELA). Dato un certo bene (di un certo mercato), siano p = prezzo, d = domanda e s = offerta, con tempo naturalmente DISCRETO $t \in \mathbb{Z}$: p_t, d_t, s_t. Rispetto a 3 leggi di partenza almeno (tenute presenti i collegamenti fra loro fondamentali: $p \leftrightarrow d \leftrightarrow s$), come si realizza IL PREZZO (che costituisce il modello)

Del bene al variare di t ? (1) EQUAZIONE DELLA DOMANDA : rispetto ⑤

di costanti $a, b > 0$, $\boxed{d_t = a - b p_t}$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.



massimo consumo (anche se il bene NON costa affatto, ci sarà un massimo consumo UTILE!)

a/b è il prezzo massimo che può raggiungere il bene (se si vuole vendere!)

la domanda DIMINUISCE LINEARMENTE al crescere del prezzo, ovvero aumenta linearmente al decrescere del prezzo;

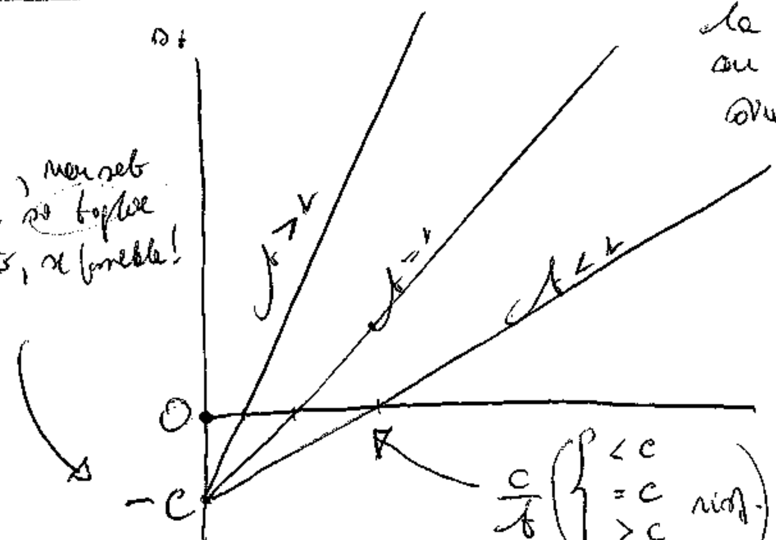
la costante di prop. b è l'indice di sensibilità, di "elasticità", del consumatore al variare del prezzo

(contribuiscono, ad esempio: il potere d'acquisto del consumatore, l'importanza del bene, ...)

(2) EQUAZIONE DELLA PRODUZIONE : rispetto di costanti $c \geq 0$, $f > 0$,

$\boxed{s_t = -c + f p_{t-1}}$ $\forall t \in \mathbb{Z}$, a causa del tempo di offerta, dovuto ai tempi di consegna: la produzione AUMENTA LINEARMENTE con l'aumentare del prezzo, ovvero diminuisce linearmente se cala il prezzo;

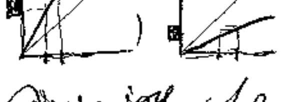
la costante di prop. f è l'indice di sensibilità (elasticità) del produttore al variare del prezzo



se $p_{t-1}=0$, ovviamente NON si produce; si toglie anche dal mercato, se possibile!

$\frac{c}{f}$ $\left(\begin{cases} <c \\ =c \\ >c \end{cases} \text{risp.}\right)$ è il prezzo MINIMO STABILITO per produrre ancora

Contribuiscono ad esempio avidità e intelligenza: all'aumentare del prezzo si può essere tentati di aumentare la produzione per guadagnare il più possibile (si confronti:



), PERÒ saper comprendere perché se aumenta il prezzo diminuisce la domanda! (vedi b)

Comunque, vediamo che l'equivalentemente si aumenta le forme di "deve" anche il ferro, e qui è $f < 1$ "più caro".

In ogni caso, il tipo che avevamo

meno ferro $\Rightarrow$ più domanda $\Rightarrow$ ~~più~~ $\Rightarrow$ più caro $\Rightarrow$ meno produzione $\Rightarrow$ meno domanda $\Rightarrow$ più prezzo ... $\Rightarrow$ più caro $\Rightarrow$ meno domanda $\Rightarrow$ ... ?

Che sarebbe generare OSCILLAZIONI nel ferro; grazie a

(3) EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DI MERCATO : $\boxed{d_t = o_t}$ $\forall t \in \mathbb{Z}$

ho più $o \Rightarrow$ più $p \Rightarrow$ meno d $\Rightarrow$ meno o $\Rightarrow$ più p $\Rightarrow$ meno d

Si stabilizza e sale, o meno, o ...??

Vediamo: abbiamo l'eq. alle differenze finite $a - bp_t = -c + fp_{t-1}$, cioè $\boxed{p_t = -\frac{f}{b} p_{t-1} + \frac{a+c}{b}}$.

(Parentesi: $\boxed{\text{I}}$ $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tale che $y_{n+1} = F(y_n, k) = a y_n + \beta(n)$ ($\beta(n) \neq 0$)

$\Leftrightarrow y_n = x_n + \overline{x_n}$ con $\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + \beta(n) & (\text{"soluzione particolare"}) \\ \overline{x_{n+1}} = a \overline{x_n} & (\text{"soluzione omogenea"}) \end{cases}$

$\boxed{\Leftarrow}$: $y_{n+1} = x_{n+1} + \overline{x_{n+1}} = a x_n + \beta(n) + a \overline{x_n} = a(\underbrace{x_n + \overline{x_n}}_{y_n}) + \beta(n)$. $\Rightarrow$: Data sol. part. x_n e y_n sono tali che $y_{n+1} - x_{n+1} = a y_n + \cancel{\beta(n)} - a x_n - \cancel{\beta(n)} = a(y_n - x_n)$. $\square$

$\boxed{\text{II}}$ Mentre $\overline{x_n} = a^n x_0$, per x_{n+1} con $\beta(n) \equiv b$ $(\neq 0)$ è semplicemente $x_n \equiv \frac{b}{1-a}$ ($a \neq 1$ perché $b \neq 0$...). [$x_n \equiv c \Leftrightarrow c = ac + b$, cioè $c(1-a) = b$ ($\neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$, $a \neq 1$), ossia $c = \frac{b}{1-a}$]

$\Rightarrow$ $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tale che $y_{n+1} = a y_n + b$ ($b \neq 0$) $\Leftrightarrow y_n = a^n x_0 + \frac{b}{1-a}$, dove $x_0 = y_0 - \frac{b}{1-a}$, per cui in conclusione

$$y_{n+1} = a y_n + b \iff y_n = a^n\left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$ (Come n° ⑥

(vedi anche oscillare!)

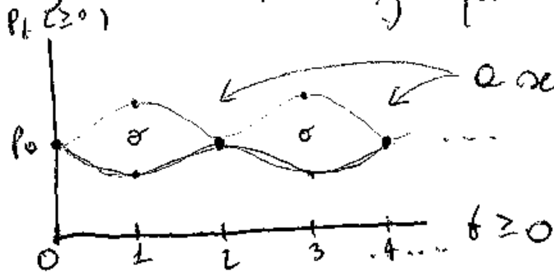
Allora

$$\boxed{P_t = \Big(\underbrace{-\frac{d}{b}}_{<0}\Big)^t\left(P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right) + \frac{a+c}{b+d}}$$

oscillante!

$\left(\frac{a+c}{b+d} = \frac{(a+c)/b}{1+d/b}\right.$!) quindi:

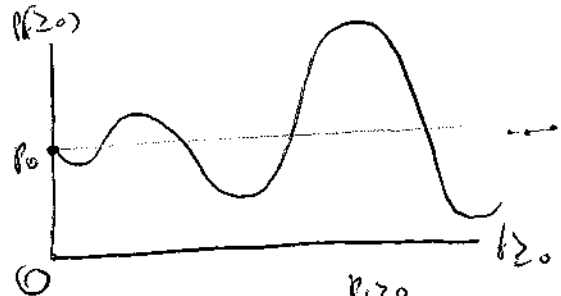
$d=b \Rightarrow$ (cioè $-\frac{d}{b}=-1$)



a seconda che $\frac{2(a+c)}{b+d} \gtrless p_0$ (risp.), nell'ipotesi $\frac{2(a+c)}{b+d} - p_0 \geq 0$;

$d>b \Rightarrow$ (cioè $\frac{d}{b}>1$)

$\left(-\frac{d}{b}\right)^t = (-1)^t\left(\frac{d}{b}\right)^t \to \infty$



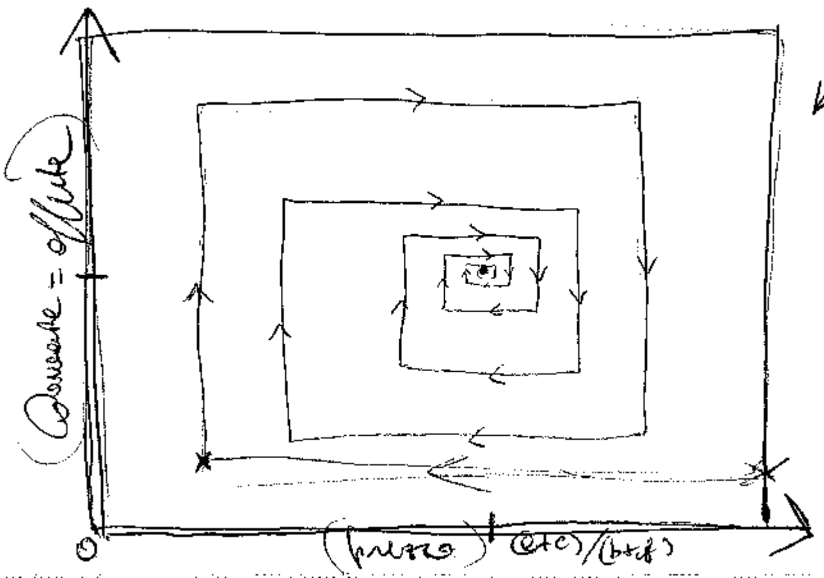
senza limite!!

$d<b$ (cioè $\frac{d}{b}<1$: $\left(-\frac{d}{b}\right)^t = (-1)^t\left(\frac{d}{b}\right)^t \to 0$)

DUNQUE è esattamente b il punto limite (superiore) per d! (cavolata)

∃ il limite, ed è il prezzo $\frac{a+c}{b+d}$.

e in tal caso si potrebbe vedere il modello della ragnatela "in azione":



Ogni segmento corrisponde ad un $t \in \mathbb{Z}$ (n.: prezzo)

$\boxed{\text{ES. 2}}$ (modello delle scorte). (3)' (al posto di (3), mentre (1) e (2) sono naturalmente invariate) EQUAZIONE DELLE SCORTE:

$$\boxed{u_t - u_{t-1} = s_t - d_t} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

~~(cioè $u_t = (s_t - d_t) + u_{t-1}$)~~ "invenduto"

(cioè u_t sono le scorte in magazzino, per cui, se ieri ne avevamo u_{t-1}, allora oggi

$$\begin{cases} \text{ancora } u_{t-1} \Leftrightarrow s_t = d_t & \text{(tante ne ho prodotte, quante ne ho vendute)} \\ u_t > u_{t-1} \Leftrightarrow s_t > d_t & \text{(ho prodotto "troppo"!)} \\ u_t < u_{t-1} \Leftrightarrow s_t < d_t & \text{(ho prodotto "poco"!)} \end{cases};$$

grazie alla nuova variabile u, evito di legare p a u per un'eq. nel prezzo!)

(4) EQUAZIONE DEL PREZZO: $\boxed{p_{t+1} - p_t = -\rho\left[u_t - u_{t-1}\right]}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$, rispetto ad un'opportuna $\rho > 0$ (cioè quanto più c'è di invenduto quanto più cala il prezzo ($p_{t+1} = p_t - \rho[u_t - u_{t-1}]$); altrimenti si vede invariato o addirittura aumenta). (ρ come "potere" del produttore!)

$$\Rightarrow \quad p_{t+1} - p_t = -\rho\left[s_t - d_t\right] = -\rho\left[-c + f p_{t-1} - a + b p_t\right] =$$

$$= \rho c - \rho f p_{t-1} + a\rho - \rho b p_t$$

), cioè si ha un'eq. alle diff. finite di ordine 2

$$\boxed{p_{t+1} - (1 - b\rho) p_t + f\rho\, p_{t-1} = (a+c)\rho};$$

Di nuovo, cerco $p_t \equiv k$: $k - \underbrace{(\cancel{1} - b\rho)k}_{b\rho k} + f\rho k = (a+c)\cancel{\rho}$,

cioè $k = \dfrac{a+c}{b+f}$; per $p_{t+1} - (1-b\rho)p_t + f\rho\, p_{t-1} = 0$,

considero $\boxed{\lambda^2 - (1 - b\rho)\lambda + f\rho = 0}$, che può avere radici reali o complesse; ma il comportamento di p_t per $t \to +\infty$ dipende dai moduli delle radici in questione, ove, $\boxed{\begin{cases} 1-bp = \text{loro somma} \\ cbp = \text{loro prodotto} \end{cases}}$ $\Rightarrow$ il punto d'eq. (17)

è INSTABILE se $\overset{(9.1)}{\mathcal{A}_p} > 1$ ($\underset{|\lambda|\cdot|\mu|}{|\lambda \cdot \mu|} = \mathcal{A}_p > 1 \Rightarrow$ certamente $|\lambda|$ o $|\mu| > 1$

~~invece stabile se ...~~ ~~... è stabile ... assoluto~~), ossia ... se c'è troppe catastrofi e troppa fame!

Metodo di Eulero!

Ossia il più semplice per "approssimare" un SD C (cioè ...) con un SD D.

Caso lineare. Così come $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$, $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{at}{k}\right)^k = e^{at}$ di conseguenza, è $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ che

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\left(I+\frac{At}{m}\right)^m = \exp(At)}\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\exp(At) = \sum_{k\geq 0}\frac{(At)^k}{k!} \Rightarrow \exp(At) - \overbrace{\left(I+\frac{At}{m}\right)^m}^{\sum_{k=0}^{m} \underbrace{I^{m-k}}_{I}\frac{(At)^k}{m^k}\binom{m}{k}} = \sum_{k\geq 0}\left[\frac{1}{k!} - \binom{m}{k}\frac{1}{m^k}\right]A^k t^k \quad \left(\binom{m}{k} = 0\ \forall k>m\right)$$

(tra l'altro ciascun termine $\underset{k \text{ volte!}}{\geq 0}$: $\frac{1}{k!} - \overbrace{\binom{m}{k}}^{\frac{m!}{k!(m-k)!}}\frac{1}{m^k} = \frac{1}{k!}\left[1 - \frac{m!}{(m-k)!}\frac{1}{m^k}\right]$, e $\frac{m!}{(m-k)!}\frac{1}{m^k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{m\cdot m \cdots m} \leq 1$!), e allora (se $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ (su un compatto)) è $\left\|\exp(At) - \left(I+\frac{At}{m}\right)^m\right\| \leq e^{\|A\||t|} - \left(1+\frac{\|A\||t|}{m}\right)^m$

($\|\exp(At)\| = \left\|\sum_{k\geq 0}\frac{A^k t^k}{k!}\right\| \overset{\text{cont. }\|\cdot\|}{\leq} \sum_{k\geq 0}\frac{\|A^k\||t|^k}{k!} \overset{\|A^k\|\leq\|A\|^k}{\leq} \sum_{k\geq 0}\frac{\|A\|^k|t|^k}{k!} = e^{\|A\|\cdot|t|}$; d'altra parte $\left\|\left(I+\frac{At}{m}\right)^m\right\| \leq \left\|I+\frac{At}{m}\right\|^m \leq \left(\underset{1}{\|I\|}+\frac{\|A\||t|}{m}\right)^m$; ✓), ma ovviamente

$\left(1+\frac{\|A\|\cdot|t|}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to+\infty]{(*)} e^{\|A\|\cdot|t|}\ \forall t\in\mathbb{R}$. Dunque c'è

convergenza puntuale assoluta perché c'è quella UNIFORME su ogni compatto (di $\mathbb{R}$). Ossia,

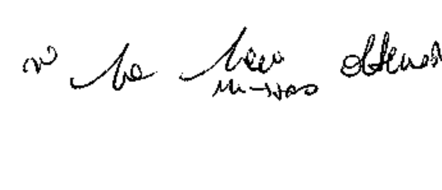
$\begin{cases}\dot X = AX\\ X(0)=X_0\end{cases} \Leftrightarrow \underset{(\text{in } \mathbb{R})}{X(t)} = \exp(At)\cdot X_0$; ma effettivamente $\exp(At)\cdot X_0 =$

$= \left(\lim_{m\to\infty}\left(I+\frac{At}{m}\right)^m\right)X_0 \overset{\text{stesso tempo!}}{=} \underline{\lim_{m\to\infty}\left[\left(I+\frac{At}{m}\right)^m X_0\right]}$; ma

rispettivamente $X_k := \left(I+\frac{At}{m}\right)^k X_0$ è L'ORBITA del SDD lineare $\begin{cases}X_{k+1} = \left(I+\frac{At}{m}\right)X_k \\ X(0)=X_0\end{cases}$ $\left(\underset{(\text{con } t)}{m\geq 1} \text{ fissato}\right)$, tale che

all'istante m è $X_m = \left(I+\frac{At}{m}\right)^m X_0$, dove si fa $\lim_{m\to\infty}$ ottenendo approssimazione IN $\|\cdot\|_\infty$!!

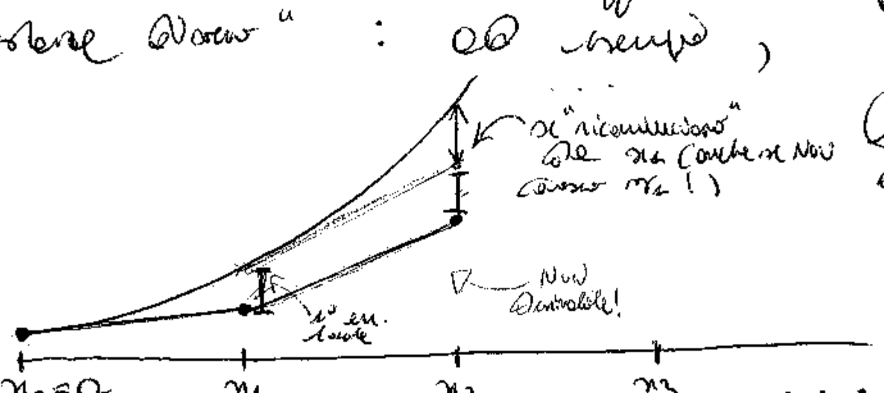
(MOTIVAZIONE GEOMETRICA: risolvere in $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ $\begin{cases}y'=f(y)\\ y(a)=y_0\end{cases}$ approssimando y con Eulero, dividendo intervallo $[a,b]$ in N intervallini di uguale ampiezza $h:=\frac{b-a}{N}$ ("passo d'integrazione"; N "piccolo"!) grazie ai punti $x_0:=a, \dots, x_k = x_{k-1}+h$ $(k\geq 1), \dots, x_N := b$, con l'idea di approssimare $y(x)$ IN TALI PUNTI, ottenendo quindi $y_k := y(x_k)$ $\forall\, 0\leq k\leq N$ DA CONGIUNGERE LINEARMENTE; in effetti ad ogni passo approssimiamo la soluzione col suo differenziale nel punto precedentemente calcolato:



$$\begin{cases} y_0 = y_0 \\ y_k = y_{k-1} + h\underbrace{f(y_{k-1})}_{=\,y'(x_{k-1})\,!} \quad \forall\, 1\leq k\leq N \end{cases}$$

(e infatti è come se y in $[x_{k-1},x_k]$ fosse $h y'(x_{k-1}) + y_{k-1}$, ossia

!); il problema è chiaramente che il differenziale nel punto "precedente" può essere "abbastanza diverso": ad esempio,



(l'errore viene locale (2) del metodo!)

Ora, se $[a,b]=[0,t]$ e allora $h=\frac{t}{n}$, e se f è LINEARE (per fare i passaggi che vediamo subito...) (sia $f(x)=ax$) allora l'approssimazione è (8)

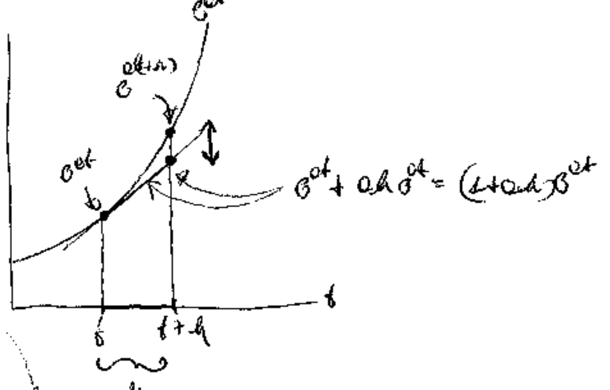
y_0, $y_1 = y_0 + hay_0$ $\Rightarrow$ $y_2 = y_1 + hay_1 = (y_0 + ahy_0) + ah(y_0+ahy_0) =$
$= [1 + 2ah + (ah)^2]y_0 = (1+ah)^2 y_0 = (1+\frac{at}{n})^2 y_0$! Per induzione $y_n = y_{n-1} + ahy_{n-1} = 1\cdot(1+ah)^{n-1}y_0 + ah(1+ah)^{n-1}y_0 =$
$= (1+ah)(1+ah)^{n-1}y_0 = (1+ah)^n y_0$, ossia

$\begin{cases} y' = ay \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ è stata così approssimata con $y_n = \left(1+\frac{at}{n}\right)^n \cdot y_0$ in ogni x_k.

In generale, per $\begin{cases} X' = AX \\ X(0)=X_0 \end{cases}$, allo stesso modo $\begin{cases} X_0 = X_0 \\ X_n = X_{n-1} + hAX_{n-1} \end{cases}$

$\Rightarrow X_2 = X_1 + AhX_1 = (X_0 + AhX_0) + Ah(X_0+AhX_0) = (I + 2Ah + A^2h^2)\cdot X_0 = (I+Ah)^2 X_0$, $\Rightarrow X_n = (1+Ah)X_{n-1} \overset{\text{ip. ind.}}{=} (1+Ah)(1+Ah)^{n-1}X_0$
$= (1+Ah)^n X_0 = (1+\frac{At}{n})^n X_0$.

Ora, per l'ERRORE LOCALE nel caso lineare, sapendo che conosciamo la y (anzi $\exp(At)$), ossia $y(t)=e^{at}$, vediamo



), osserviamo

$e^{at}\cdot[e^{ah} - (1+ah)]$ (per $h\to 0$) ≥ 0 ! : grazie allo sviluppo $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(\xi)$, ξ fra x_0 e x, CON $f(x)=e^{ahx}$ e $\begin{cases} x_0=0 \\ x=1 \end{cases}$ (quindi $0<\xi<1$), è

$e^{ah} = 1 + ah + \frac{a^2h^2}{2}e^{ah\xi} \Leftrightarrow e^{ah} - (1+ah) = \boxed{\frac{a^2h^2}{2}e^{ah\xi}} \left(\leq \frac{a^2h^2}{2}e^{ah}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0\cdot 1 = 0$; notiamo che allora

ERR. LOCALE $= \mathcal{O}(h^2)$. Per $\exp(Ah)$:

$$\left\| \exp(Ah) - (I + Ah) \right\|_{(\infty)} = \left\| \sum_{n\geq 2} \frac{(Ah)^n}{n!} \right\| \overset{\text{cont. } \|\cdot\|}{\leq} \sum_{n\geq 2} \frac{\|A^n\| h^n}{n!} \overset{\text{sub-molt.}}{\leq}$$

$$\leq \sum_{n\geq 2} \frac{\|A\|^n h^n}{n!} = e^{\|A\| \cdot h} - (1 + \|A\| h) = \frac{\|A\|^2 h^2}{2} e^{\|A\| h \cdot \xi} \quad (\xi \in (0,1))$$

esattamente come prima!) $= \mathcal{O}(h^2)$. ✓

$\boxed{\text{ES}}$ $\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = -\omega x \end{cases}$, cioè $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ oscillatore

$(\ddot{x} = -\omega^2 x)$

ovvero "armonico" ($\omega > 0$!), la "discretizzo" in EE:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \left(I + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\omega t}{m} \\ -\frac{\omega t}{m} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{(stesse cond. iniziali!)} =$$

$$\overset{t/m = h}{=} \left(I + \begin{bmatrix} 0 & \omega h \\ -\omega h & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = (I - \omega h J) \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \text{ ossia}$$

orbita approssimata (da n-esso) $\boxed{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = (I - \omega h J)^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}}$;

visto che $I - \omega h J \simeq 1 - i(\omega h) = 1 + i(-\omega h)$, è

$|1 + i(-\omega h)| = (1 + \omega^2 h^2)^{1/2}$ e $\arg(1 + i(-\omega h)) = \arctan\left(\frac{-\omega h}{1}\right) =$

$= -\arctan(\omega h) =: -\theta$, $= -\omega h + \mathcal{O}(\omega^3 h^3)$ {ricordiamo

che "vicino a 0" $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$!), cioè

$$\boxed{1 + i(-\omega h) = (1 + \omega^2 h^2)^{1/2} [\cos(\theta) - i \sin(\theta)]}, \text{ cioè}$$

$(1 + i(-\omega h))^k = (1 + \omega^2 h^2)^{k/2} [\cos(k\theta) - i \sin(k\theta)]$, cioè

$$\left\| (I - \omega h J)^k = (1 + \omega^2 h^2)^{k/2} [I \cos(k\theta) - J \sin(k\theta)] \right\|,$$

e in conclusione: mentre $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$,

"ossia" ha traiettoria , ove

$(I-\omega h J)^n$ è una dilatazione di $\boxed{(1+\omega^2h^2)^{n/2} = 1 + k\frac{\omega^2h^2}{2} + O_{h\to 0}(\omega^4 h^4)}$ (si ricorda che, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, e x vicino a 0, è

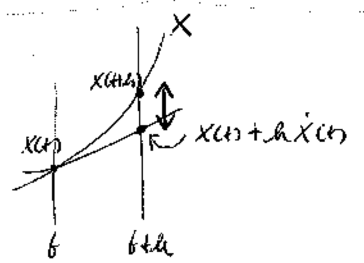
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}),$$

vicino a 1 per ωh PICCOLO, seguita da una rotazione (oraria) di $\boxed{-\vartheta = -\omega h + O_{h\to 0}(\omega^3h^3)}$, che è piccola $-\omega h$ essendo per ωh PICCOLO; il punto allora della approssimazione sarà buona quantitativamente ma NON qualitativamente (DUNQUE È ANCHE APPR. QUALITATIVA!)
(per tempi lunghi, e infatti si hanno spirali, più che circonferenze!)

In pratica approssimiamo $\dot X = F(X)$ (in $h = \frac{t}{n}$) con

$$\begin{cases} X_0 = X(0) \\ X_{n+1} = X_n + hF(X_n) \quad (\forall k \geq 0) \end{cases}$$

(naturale!), commettendo errore locale (o di troncamento)



precisamente $X(t+h) - X(t) - h\dot X(t) = O_{h\to 0}(h^2)$, come sappiamo [analogamente $X(x) = X(x_0) + (x-x_0)\dot X(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\ddot X(\xi)$ (Peano!), ξ fra x e x_0, $\Rightarrow \left(\begin{cases} x = t+h \\ x_0 = t\end{cases}\right)$ $X(t+h) = X(t) + h\dot X(t) + \frac{h^2}{2}\ddot X(\xi)$!].

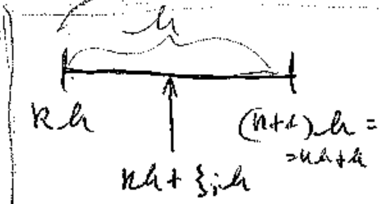
Invece l'errore accumulato o totale fino al passo k è ovviamente $X(kh) - X_k =: \Delta^{(k)}$. Comunque è O per $h \to 0$, ossia il metodo è convergente (?).

TEOREMA DELLA CONVERGENZA DEL M. DI EULERO:
$\exists L, M > 0$ tali che, $\forall X, Y \in W$, $|F(X) - F(Y)| \leq L|X-Y|$ e
(F lipschitziana!)

$|F(X)| \le M$ (F limitata) $\Longrightarrow |\Delta^{(n)}| =: \delta_n \le Mh\left[e^{\sqrt{m}Lt} - 1\right] \quad \forall t = kh$, → (in quale la proprietà, ci viene osservato in)

e tale disug. è OTTIMALE (dunque, come già intuito, tale metodo funziona bene per "tempi piccoli").

Se $X = (x_i)$ e $F = (f_i)$, allora (per Lagrange) $\exists\, 0 < \xi_i < 1$ tale che $x_i(nh+h) = x_i(nh) + h\,\dot{x}_i(nh+\xi_i h) =$



$= x_i(nh) + h\,f_i(X(nh+\xi_i h))$, cioè

$\boxed{x_i(nh+h) = x_i(nh) + h f_i(X(nh+\xi_i h))}$, e inoltre ciò

$\Rightarrow |x_i(nh+h) - x_i(nh)| = h\,|f_i(X(nh+\xi_i h))|$, $\stackrel{\text{(ovvio)}}{\Longrightarrow}$

$|X(nh+\xi_i h) - X(nh)| = h\,|F(X(nh+\xi_i h))| \le hM$; ora,

$X_{n+1} = X_n + hF(X_n)$ e $\Delta^{(n)} = X(nh) - X_n \Longrightarrow$

$\Delta^{(n+1)} = X((n+1)h) - X_{n+1} = \Delta^{(n)} + X((n+1)h) - X(nh) - hF(X_n)$,

quindi $\boxed{\Delta_i^{(n+1)} = \Delta_i^{(n)} + h f_i(X(nh+\xi_i h)) - h f_i(X_n)} \underset{\text{Lip}}{\Longrightarrow}$

$|\Delta_i^{(n+1)}| \le |\Delta_i^{(n)}| + hL\,|X(nh+\xi_i h) \overbrace{-}^{-X(nh)+X(nh)} X_n| \le |\Delta_i^{(n)}| + hL[hM + \delta_n]$,

"cioè" $\delta_{n+1} \le \delta_n + \sqrt{m}\, hL[hM + \delta_n]$ (il $\le$ delle componenti $\Rightarrow$ il $\le$ della $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, inoltre $hL[hM+\delta_n] =: \alpha$ COSTANTE (SO) $\Rightarrow$

$\left\|\begin{bmatrix} y_1+\alpha \\ \vdots \\ y_m+\alpha \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}\right\| \le \left\|\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}\right\| + \underbrace{\sqrt{m\alpha^2}}_{\sqrt{m}\,\alpha}$). Ora, se ε_n è

tale che $\varepsilon_0 \underset{(\le \dots)}{=} \delta_0 = 0$ e $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \sqrt{m}\, hL[hM + \varepsilon_n]$,

allora (è facile che) ovviamente $\delta_n \le \varepsilon_n$ (INDUZIONE su n:

$\delta_{n+1} \le \delta_n + \sqrt{m}\, hL[hM+\delta_n] \stackrel{\text{ip. ind.}}{\le} \varepsilon_n + \sqrt{m}\, hL[hM+\varepsilon_n] = \varepsilon_{n+1}$!))

ε_n è ricavabile esplicitamente come somma di soluz. particolare COSTANTE con soluzione dell'omogenea associata $\bar{\varepsilon}_{n+1} = (1+\sqrt{m}hL)\bar{\varepsilon}_n$,

ossia $\bar{\varepsilon}_n = (1+\sqrt{m}hL)^n \bar{\varepsilon}_0$; $\quad c = c + \sqrt{m}hL[hM + c]$

$\Leftrightarrow$ $c = -hM$, per cui $\varepsilon_n = -hM + (1+\sqrt{m}hL)^n \overline{\varepsilon}_0$, con $\overline{\varepsilon}_0 = hM$, ossia $\| \varepsilon_n = (1+\sqrt{m}hL)^n hM - hM \| = hM\left[(1+\sqrt{m}hL)^n - 1\right]$, e appunto $\delta_n \leq \varepsilon_n$; ma d'altra parte $(1+\sqrt{m}hL)^n \underset{h=\frac{t}{n}}{=} \left(1+\frac{\sqrt{m}tL}{n}\right)^n \leq e^{\sqrt{m}tL}$ (in generale $(1+\frac{1}{n})^n \uparrow e$!). $\square$

$(X_n \mapsto X_n + hX_n \underset{X(R)}{})$

Osserviamo meglio EULERO: ad ogni passo avviene una trasformazione del tipo $Y \mapsto Y + h\dot{Y}$ $(= Y + hF(Y)!)$, ossia $\boxed{I + hD}$, D di derivazione; ciò permette di approssimare (per tempo NON grande...) un SDC col discretizzato tramite appunto Eulero, anche se si tratta di un SDC che è un'eq. diff. ordinaria (autonoma) DI ORDINE ≥ 2; ebbene, può essere conveniente invece scrivere direttamente una formula di approssimazione per le derivate di ordine ≥ 2.

Definiamo, $\forall f \in C^k_{\mathbb{R}^q}(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, $\underset{\text{LINEARI}}{S, \Delta_+, I} : C^k \longrightarrow C^k$ tali che: $f \longmapsto \begin{cases} Sf \\ \Delta_+ f \\ If \end{cases}$

(A) $(Sf)(t) := f(t+h)$ $\forall t \in \mathbb{R}$;

($S := S_h$ di SPOSTAMENTO, e sarebbe $S_h = \tau_h$!);

S è invertibile $(S^{-1}f)(t) = f(t-h)$ (cioè $S_h^{-1} = S_{-h}$) !

(B) $(\Delta_+ f)(t) := f(t+h) - f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

(Δ_+ di DIFFERENZA IN AVANTI, $\Delta_+ := \Delta_{+,h}$)

(C) $(If)(t) := f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ di IDENTITÀ, per cui

$\boxed{\Delta_+ = S - I}$, $IS = SI = S$, $I\Delta_+ = \Delta_+ I = \Delta_+$ e soprattutto $\boxed{\Delta_+ S = S\Delta_+}$ $(= S^2 - S : f \mapsto f(t+2h) - f(t+h))$,

(in generale $S^m f = f(\cdot + mh)$!)

Multar $\Rightarrow \forall k \geq 0,\ \Delta_+^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} S^{k-j} I^j (-1)^j$ ("DIFFERENZA k-esima IN AVANTI") ; ad esempio $\boxed{\Delta_+^2 = S^2 - 2S + I}$.

(NOTA: ovviamente potremmo anche considerare

$(\mathbb{R})^1\ \Delta_- f(t) := f(t) - f(t-h)\quad \forall t \in \mathbb{R}$, DIFFERENZA ALL'INDIETRO

$(\Delta_- := \Delta_{-,h})$, onde $\boxed{\Delta_- = I - S^{-1}}$, e commuterebbe con tutto S, Δ_+ e I , in particolare $\Delta_- S = S\Delta_- = S - I = \Delta_+$)

Se poi $\mathcal{D}: C^n \to C^{n-1},\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}$, ovviamente con $n \geq 2$, allora

$$\boxed{\frac{\Delta_+}{h} = \mathcal{D} + \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h)} \Rightarrow \frac{\Delta_+^2}{h^2} = \mathcal{D}^2 + \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h) \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

[infatti, $\mathcal{A}$: $(\mathcal{D} + \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h))^2 = \mathcal{D}^2 + \underbrace{2\mathcal{D}\underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h)}_{\underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h)} + \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h^2)$! Poi,

$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) + \underset{h\to 0}{o}(1)$, onde $f(t+h) - f(t) = hf'(t) + \underset{h\to 0}{o}(h)$;

precisamente, se $f \in C^2$, allora per TAYLOR $f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_h)$, ξ_h tra t e $t+h$, $\Leftrightarrow$

$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) + \underbrace{\frac{h}{2} f''(\xi_h)}_{\underset{h\to 0}{\mathcal{O}}(h)}$.] (e

anche $\frac{\Delta_-}{h} = \mathcal{D} + \mathcal{O}(h)$, $\Rightarrow \frac{\Delta_-^2}{h^2} = \mathcal{D}^2 + \mathcal{O}(h)$!
$[\Delta_-^2 = I - 2S^{-1} + S^{-2}]$)

che è un'approssimazione (al primo ordine) delle derivate esatte, ed è chiaro che potremmo iterare per le derivate superiori.

$\boxed{\text{ES.}}$ Riprendendo l'oscillatore armonico nella forma

$\ddot{x} = -\omega^2 x$, cioè $\mathcal{D}^2 x = -\omega^2 x$,
$(\forall t)$

Vogliamo direttamente che $\mathcal{D}^2 \simeq \dfrac{\Delta_+^2}{h^2}$: (?) (11)

s^2-2s+I

$\dfrac{\Delta_+^2}{h^2} x_k = -\omega^2 x_k \iff x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = -\omega^2 h^2 x_n$, cioè

$$\boxed{x_{n+2} = 2x_{n+1} - (1+\omega^2h^2)x_n}$$, se ci volessimo risolvere

$\lambda^2 - 2\lambda + (1+\omega^2h^2) = 0$: $\Delta/4 = 1-(1+\omega^2h^2) = -\omega^2h^2 \Rightarrow$
$\lambda_\pm = 1 \pm i\omega h$, ovviamente lo stesso di $I - \omega h J =$ (stesse eq. caratt.)

$= \begin{bmatrix} 1 & \omega h \\ -\omega h & 1 \end{bmatrix}$, se uso lo stesso risultato ottenuto, ma in un altro sistema di riferimento , precisamente quello NON canonico

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -(1+\omega^2h^2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(NOTA : per portare A nella forma canonica $\overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & \omega h \\ -\omega h & 1 \end{bmatrix}}$, o procediamo nel "modo solito" (trovare autovettori di $1-i\omega h$, parte immaginaria e parte reale, ecc) , o col "ritenere" a partire da $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$, o più precisamente $\left(\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = -\omega x \end{cases}\right)$ $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ CON

$\omega y_0 = \dot{x}(0)$, ma (Eulero) $x_1 \simeq x_0 + h\mathcal{D}x_0$

$= x_0 + h\omega y_0$, perché chiaramente

$x_1 - x_0 = \Delta_+ x_0$, cioè $x_1 = x_0 + \Delta_+ x_0 \overset{\Delta_+ \simeq h\mathcal{D}}{\simeq} x_0 + h\mathcal{D}x_0$; in

generale $x_{n+1} = x_n + \Delta_+ x_n \simeq x_n + h\omega y_n$ $(\dot{x} = \omega y)$, per

cui il cambiamento di base sarà $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & h\omega \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:C} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$,

nel senso che $C^{-1}AC = B$.)

Per eq. diff. che contengono solo derivate PARI , Possiamo procedere anche in un altro modo:

sia $\Delta_0 : C^k \to C^k$ ($k \geq 2$) DIFFERENZA CENTRALE

$(\Delta_0 f)(t) := f(t+\frac{h}{2}) - f(t-\frac{h}{2})$ (lineare!)

($\Delta_0 := \Delta_{0,h}$, $h>0$ scelto), dove $\boxed{\Delta_0 = S_{h/2} - S_{h/2}^{-1}}$),

per cui le potenze PARI di Δ_0 non usano mezzi passi:

$$\boxed{\Delta_0^2 = S - 2I + S^{-1}} \quad \left(S_{h/2}^2 = S_h = S,\ e\ S_{-h/2}^2 = S_{-h} = S_h^{-1} = S^{-1}\right)$$

$$\Delta_0^4 = S^2 + 4I + S^{-2} - 4S - 4S^{-1} + 2I =$$
$$= S^2 - 4S + 6I - 4S^{-1} + S^{-2}, \text{ ecc. } \dots$$

Ora, $\frac{f(t+h/2) - f(t-h/2)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(t)$ [tale rapporto è infatti

$= \frac{1}{2}\frac{f(t+h/2) - f(t)}{h/2} + \frac{1}{2}\frac{f(t) - f(t-h/2)}{h/2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2}f'(t) + \frac{1}{2}f'(t) = f'(t)$!]

$\Rightarrow$ (come prima) $\frac{\Delta_0}{h} = D + O(h) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta_0^2}{h^2} = D^2 + O(h)}$.

$\boxed{\text{ES.}}$ $\ddot{x} = -\omega^2 x \leadsto \frac{\Delta_0^2}{h^2} x_n = -\omega^2 x_n$, cioè

$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = -\omega^2 h^2 x_n$, cioè $x_{n+1} = (2-\omega^2h^2)x_n - x_{n-1}$,

cioè $\boxed{x_{n+2} = (2-\omega^2h^2)x_{n+1} - x_n}$: da $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\omega^2h^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$, $\lambda^2 - (2-\omega^2h^2)\lambda + \lambda = 0$ ha $\Delta =$

$= (2-\omega^2h^2)^2 - 4 = \omega^4h^4 - 4\omega^2h^2$, $\Rightarrow$

$$\lambda_\pm = \frac{(2-\omega^2h^2) \pm \sqrt{\omega^4h^4 - 4\omega^2h^2}}{2} = \left(1 - \frac{\omega^2h^2}{2}\right) \pm \frac{\omega h}{2}\sqrt{\omega^2h^2 - 4}$$

(reali o complessi), e in generale saranno complessi (h piccolo!) (perché $\omega h < 2$),

per cui $\lambda_\pm = \left(1 - \frac{\omega^2h^2}{2}\right) \pm i \underbrace{\frac{\omega h}{2}\sqrt{4 - \omega^2h^2}}_{\left(\omega h \sqrt{1 - \frac{\omega^2h^2}{4}}\right)}$, e allora hanno modulo ~~...~~ $\underbrace{\left(1-\frac{\omega^2h^2}{2}\right)^2}_{\left(1+\frac{\omega^4h^4}{4}-\omega^2h^2\right)} + \frac{\omega^2h^2}{4}\left(4-\omega^2h^2\right) = 1$, per

cui $A=\begin{pmatrix}2-\omega^2h^2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = V R_\theta V^{-1}$ in forma canonica R_θ DI SOLA ROTAZIONE, $\Rightarrow \begin{pmatrix}x_{k+1}\\ x_k\end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix} = V R_{k\theta} V^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix}$,

CON $\theta = \cancel{\arctan}(\lambda_+) = \arcsin\left(\omega h\underbrace{\sqrt{1-\frac{\omega^2h^2}{4}}}_{\simeq 1}\right) \overset{(\dots)}{=} \omega h + O(\omega^3h^3)$

(Modulo 1:

)

rotazioni all'indietro!!

circa ωh per ωh "piccolo". Notiamo rispetto che le due proprietà IMPORTANTI di $\ddot{x} = -\omega^2 x$ di essere CONSERVATIVO e di avere INTEGRALE PRIMO sono "quasi" mantenute: $R_{k\theta}$ è "conservativa" (l'approssimazione con Δ_0 fornisce infatti che è "conservativo", in questo caso!), e per la "parte" è quasi conservata anche $E(x,v) = x^2+v^2$ (nel sistema V).

(⚠ Il problema in generale sarà capire se queste due proprietà sono mantenute per un SDC del quale NON conosciamo esplicitamente le soluzioni!)

Cominciamo ora con due osservazioni: (1) $\ddot{x} = -\omega x$ è un sistema newtoniano, per cui possiamo estendere questo fatto!

(2) $\Delta_+^* = S - I$, $\Delta_-^* = I - S^{-1}$, $\Delta_0^* = S - 2I + S^{-1}$

$\Rightarrow \boxed{\Delta_0^2 = \Delta_+ - \Delta_-}$. Ebbene, consideriamo il generico sistema newtoniano conservativo $\ddot{x} = f(x)$, CIOÈ

$\begin{cases}\dot x = y \\ \dot y = f(x)\end{cases}$ $(f\in C^1)$; $\ddot x = f(x) \rightsquigarrow \frac{\Delta_0^2}{h^2} x_n = f(x_n)$;

ovviamente può essere $x(0)=x_0$ e $y(0)=y_0$, discretizzando $\dot x = y$:

si ottiene $\frac{\Delta_-}{h} x_n = y_n$, cioè $\underbrace{\Delta_- x_n}_{x_n - x_{n-1}} = h y_n$, cioè

$\boxed{x_{n+1} - x_n = h y_{n+1}}$, cioè $\Delta_+ x_n = h y_{n+1}$, riassumendo

$$h y_n = \Delta_- x_n \Leftrightarrow h y_{n+1} = \Delta_+ x_n$$; allora

$\Delta_0^2 x_n = h^2 f(x_n) \Leftrightarrow \overbrace{(\Delta_+ - \Delta_-) x_n}^{h^2 f(x_n)} = h y_{n+1} - h y_n$, $\Leftrightarrow$

$\boxed{y_{n+1} - y_n = h f(x_n)}$ (in effetti lo otteniamo subito da $\dot y = f(x)$ $\rightsquigarrow \frac{\Delta_+}{h} y_n = f(x_n)$!), e ~~[illegible]~~ con

$x_{n+1} - x_n = h y_{n+1}$ troviamo il SDD nonlineare

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n)\end{cases}$$ detta MAPPA STANDARD di (caso conservativo!)

$\ddot x = f(x)$.

TEOREMA DELLA MAPPA STANDARD : $f \in C^1 \Rightarrow$

la mappa standard è CONSERVATIVA !

($\nexists$ né (ci) attrattori né pozzi né sorgenti !) (è difficile!)

[Infatti, ad ogni passo, $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x_n\\y_{n+1}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$, e entrambe le trasformazioni intermedie sono dette scorrimenti, che essendo CONSERVATIVE $(\det J = +1)$ $\overset{\text{Binet}}{\Rightarrow}$ lo è la mappa stessa: ad es., infatti, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x\\y+a(x)\end{bmatrix}$ ha $J(x,y) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ a'(x) & 1\end{bmatrix}$, che ha palesemente $\det J = 1$. $\square$]

Dunque la mappa standard è una trasformazione canonica
(trasforma coordinate in coordinate!) però... Non conserva l'integrale primo che c'è all'inizio. ̈

ES: mappa standard del pendolo (matematico) conservativo. $\ddot{x} = -\sin(x)$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n - h\sin(x_n) \end{cases}$$ (sottovuoto: calcolare prima y_{n+1} di x_{n+1}!)

Ora, essendo palese che tale sistema sia 2π-per. nella x_n ($\sin(x_n) = \sin(x_n + 2\pi)$, e ... $x_{n+1} = x_n + h y_{n+1} \Leftrightarrow x_{n+1} + 2\pi = x_n + 2\pi + h y_{n+1}$!), per avere le stesse cose in y CAMBIO VARIABILE "$y_{n+1} = h y_{n+1}$", otteniamo ovviamente

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} = y_n - h^2\sin(x_n) \end{cases}$$ (i punti fissi sono ovviamente $(k\pi, 0)$!)

(nota: $x_{n+1} + 2\pi = x_n + y_{n+1} + 2\pi$; MA $x_{n+1} + 2\pi = x_{n+1}$, visto che x_n può essere vista come variabile angolo!), per cui potremmo dire che si ha un diffeomorfismo del toro in sé. Comunque, tale mappa ha jacobiana $A = \begin{bmatrix} 1 - h^2\cos(x_n) & 1 \\ -h^2\cos(x_n) & 1 \end{bmatrix}$ (effettivamente $\det A = +1$!),

$\Rightarrow$ eq. caratt. è $\lambda^2 - (2 - h^2\cos(x_n))\lambda + 1 = 0$:

$\Delta = (2 - h^2\cos(x_n))^2 - 4 = \boxed{h^4\cos^2(x_n) - 4h^2\cos(x_n)}$, quindi

$\lambda_\pm = \dfrac{2 - h^2\cos(x_n) \pm \sqrt{h^4\cos^2(x_n) - 4h^2\cos(x_n)}}{2}$; allora, nel punto "$x_n$" $= (2j+1)\pi$ (come π) sarà $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2 + h^2) \pm \sqrt{h^4 + 4h^2}\right]$, uno > 1 e uno < 1, cioè (come dovrebbe!) $((2j+1)\pi, 0)$ è IPERBOLICO: $(2 + h^2) + \sqrt{h^4 + 4h^2} > 2$, mentre $(2 + h^2) - \sqrt{h^4 + 4h^2} < 2$ perché (equiv.) $h^2 < \sqrt{h^4 + 4h^2}$! ($\lambda_2 = 1/\lambda_1$!)

INVECE "x_n" $= 2j\pi$ (come 0) $\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2 - h^2) \pm \sqrt{h^4 - 4h^2}\right]$,

e mentre per h piccolo il punto è "quasi" ELLITTICO (controllo comput. usando sviluppo "quasi"!), per h

più grande può anche diventare INSTABILE: ad es., $2-h^2-\sqrt{h^4-4h^2}<-1$

$\Leftrightarrow 3-h^2<\sqrt{h^4-4h^2}$, $\Leftrightarrow \cancel{h^4}+9-6h^2<\cancel{h^4}-4h^2 \Leftrightarrow$

$9<2h^2$, cioè $h^2>9/2$ (cioè $h>\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$) (come $h^2=5$, cioè $h=\sqrt{5}$) . .

[INOLTRE la superficie si trasforma in "regione centrale" tanto più ampia quanto più h è piccolo...]

EVIDENZIAMO: la mappa standard di $\ddot{x}=f(x)$ ($f\in C^1$)

equivale a
$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+v_{n+1} \\ v_{n+1}=v_n+h^2 f(x_n) \end{cases},$$
che ha jacobiana

$$A=\begin{bmatrix} 1+h^2 f'(x_n) & 1 \\ h^2 f'(x_n) & 1 \end{bmatrix} \quad (\det A=+1\,!)$$

INOLTRE tutti i punti fissi della mappa sono (giustamente!) $(x_0,v_0)=(x_0,0)$ CON $f(x_0)=0$!

Per $\ddot{x}=f(x)-\gamma\dot{x}$ ($f\in C^1$, $\gamma>0$), cioè

$$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \dot{v}=f(x)-\gamma v \end{cases},$$
si ha $\dot{x}=v \rightsquigarrow \frac{\Delta_-}{h}x_n=v_n$, cioè

$x_n-x_{n-1}=hv_n$, cioè $x_{n+1}-x_n=hv_{n+1}$, cioè $\Delta_+ x_n=hv_{n+1}$,

mentre $\dot{v}=f(x)-\gamma v \rightsquigarrow v_{n+1}-v_n=hf(x_n)-h\gamma v_n$,

da cui
$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+hv_{n+1} \\ v_{n+1}=hf(x_n)+(1-\gamma h)v_n \end{cases},$$
ossia

$$\boxed{\begin{cases} x_{n+1}=x_n+v_{n+1} \\ v_{n+1}=h^2 f(x_n)+(1-\gamma h)v_n \end{cases}}$$
(MAPPA STANDARD nel caso dissipativo!),

che ancora ha punti fissi $(x_0,v_0)=(x_0,0)$ CON $f(x_0)=0$, DOVE la jacobiana è $A = \begin{bmatrix} 1 + h^2 f'(x_0) & 1-\gamma h \\ h^2 f'(x_0) & 1-\gamma h \end{bmatrix}$, che ha

pol. caratt. $\boxed{P(\lambda) = \lambda^2 - (2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h)\lambda + (1-\gamma h) = 0}$

$\left(\det(A) = (1+h^2 f'(x_0))(1-\gamma h) - h^2 f'(x_0)(1-\gamma h) = (1-\gamma h)(\cdot 1 \cdot)\right)$:

(1) $P(0) = \underset{(<1)}{1-\gamma h}$ e $P(1) = -h^2 f'(x_0)$; ora, essendo γ e h piccoli, è $P(0) > 0$, mentre

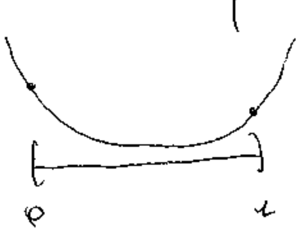
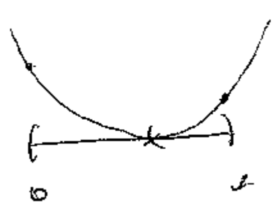
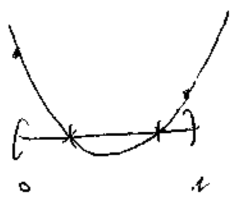
$\boxed{\underset{(MAX)}{f'(x_0) > 0}} \Rightarrow P(1) < 0$, dunque è

ovvio che una radice è in $(0,1)$ e l'altra è > 1, ossia $(0, x_0)$ è IPERBOLICO ($\Rightarrow$ instabile) !

(in effetti $P'(\lambda) = 2\lambda - (2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h) \Rightarrow P'(0) = -2 - \underbrace{h^2 f'(x_0)}_{<0} + \gamma h < 0$ (γh piccolo!) e $P'(1) = -\underbrace{h^2 f'(x_0)}_{<0} + \gamma h < 0$ o > 0 è lo stesso)

(2) $\boxed{\underset{(MIN)}{f'(x_0) < 0}} \Rightarrow$ ($P(0)$ e) $P(1) > 0$, e d'altra parte

$P'(1) > 0$, mentre $P'(0) < 0$ per h abb. piccolo : è

o  o  o , per cui se

le radici sono reali allora (ab initio) sono POZZO ; se invece sono complesse, poi sono CONIUGATE e allora sono tali che $|z|^2 = |z||\bar{z}| =$ $= 1-\gamma h$, cioè $|z| = \sqrt{1-\gamma h} < 1$, e ancora sono POZZO, come in conclusione nel caso continuo!
(almeno per h piccoli e localmente)

$\boxed{\text{EX}}$ Studiare $\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \\ x_0 = 1\ ,\ x_1 = 1 \end{cases}$ ("numeri di Fibonacci"!) EX ① Discr.!

L'eq. è $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$, per cui so che suo associata l'eq. $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$; in effetti il SDD equivalente è

$$\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+1} + x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix},$$

dove A ha proprio tal eq. caratt.; gli autovalori di A sono allora $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\left(-1,\ \underset{-0.62}{\lambda_-},\ 0,\ 1,\ \underset{1.62}{\lambda_+} \right)$, per cui $|\lambda_+| = \lambda_+ > 1$ e $|\lambda_-| < 1$ $\Rightarrow$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (il solo punto fisso) è INSTABILE, e in effetti già per $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ la successione è

$\to x_n = x_{n+2} - x_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots x_{-5} & x_{-4} & x_{-3} & x_{-2} & x_{-1} & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \ldots \\ -3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \ldots \end{array}$$

$\hookrightarrow 5, -8, \ldots$! Comunque, $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$ iniziale, $\exists!$ orbita in $n \in \mathbb{Z}$ ed è $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$; ora, A diagonalizzabile come $A = VDV^{-1} = V \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} V^{-1} \Rightarrow A^n = V \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} V^{-1}$,

per cui basterebbe calcolare V e V^{-1} ($V = [v_- | v_+]$, $v_\mp$ autovalore di $\lambda_\mp$); invece facciamo così: è chiaro che sempre $\boxed{x_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$, a e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e che allora dovremo

$$\begin{cases} x_0 = a + b = 1 \\ x_1 = a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} b = 1 - a \\ a(1-\sqrt{5}) + (1-a)(1+\sqrt{5}) = 2 \end{cases},$$

da cui $a = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, e allora $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Rightarrow x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$. $\square$

(che è intero, anche se dalla formula non è chiaro!)

$\boxed{EX}$ È illimitata, per $n \to +\infty$, la soluzione di $\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n \\ x_0 = 0,\ x_1 = 1 \end{cases}$??

Per $n \geq 0$, la succ. è $0, 1, 2, 0, -8, -16, 0, 64, 128, 0, \ldots$ e così via, quindi non pare illimitata; in effetti: $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda = 0$, che ha $\Delta/4 = 1 - 4 = -3$, $\Rightarrow \lambda_\pm = 1 \pm i\sqrt{3}$, per cui entrambi hanno $|\lambda_\pm| > 1$ ($|\lambda_\pm| = \sqrt{10}$, per la precisione) $\Rightarrow$ INSTABILITÀ di $(0,0)$ per $n \to +\infty$, perché è piuttosto una SORGENTE, dunque dovrebbe essere che la soluzione è effettivamente illimitata per $n \to \infty$; ma in effetti, essendo la forma canonica di $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$, $Q^n \simeq (1 + i\sqrt{3})^n$ $\left(1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \rho e^{i\theta},\ \rho = 2 \text{ e } \theta = \frac{\pi}{3} \right)$

$= (2e^{i\pi/3})^n = 2^n e^{in\pi/3} = 2^n \left[\cos(n\pi/3) + i \sin(n\pi/3)\right]$, CIOÈ

$Q^n = 2^n \begin{bmatrix} \cos(n\pi/3) & -\sin(n\pi/3) \\ \sin(n\pi/3) & \cos(n\pi/3) \end{bmatrix}$; ora, $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = V Q^n V^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_n =$ combinazione lineare di termini tra i quali $2^n \cos(n\pi/3)$ e $2^n \sin(n\pi/3)$, i soli dove c'è n, quindi $\xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

$\boxed{EX}$ Discutere $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ al variare di $\{x_1, x_0\}$.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1$ (ha forma canonica nella def. di 0!); ora, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, quindi $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = x \\ x = y \end{cases} \iff 2x - x = x$ ✓, ossia l'autospazio è $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$, per cui A ha forma canonica $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (che commutano, ovviamente! (c'è I)) $\Rightarrow \forall n \geq 1$, $Q^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k =$

$= \left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^h = 0 \ \forall h\geq 2 \right) = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{I^n \cdot I}_{I} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{k} I^{n-1}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix}0&0\\n&0\end{bmatrix} =$

$=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix}$ (in effetti $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$, ...);

ossia, $A = VQV^{-1}$ presa V tale che $AV = VQ$,

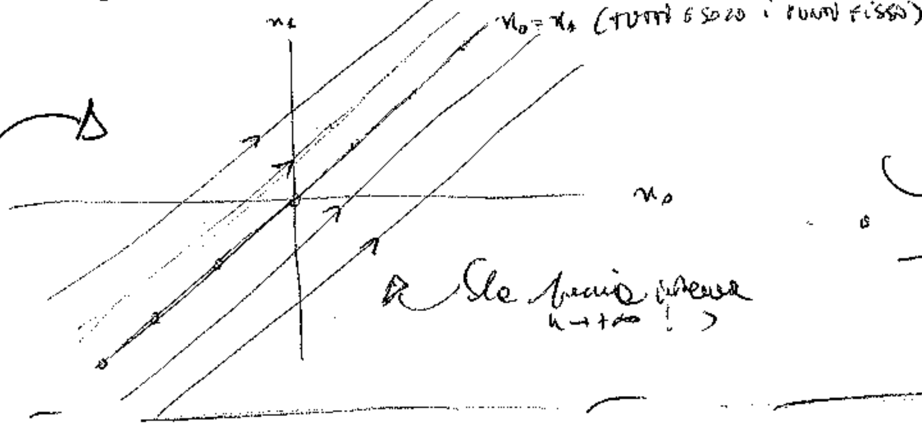
cioè $\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}V = V\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$, ossia $V=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$, che ha

$V^{-1} = (\underbrace{\det V}_{1})^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$, per cui l'orbita per

$\binom{x_1}{x_0}$ è $\binom{x_{n+1}}{x_n} = A^n\binom{x_1}{x_0} = VQ^nV^{-1}\binom{x_1}{x_0} = VQ^n\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}\binom{x_1}{x_0} =$

$= VQ^n\begin{bmatrix}x_1-x_0\\x_1\end{bmatrix} = V\begin{bmatrix}1&0\\k&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-x_0\\x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-x_0\\k(x_1-x_0)+x_1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}k(x_1-x_0)+x_1\\k(x_1-x_0)\cancel{+x_1}-x_1+x_0\end{bmatrix} = k\begin{bmatrix}x_1-x_0\\x_1-x_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1\\x_0\end{bmatrix}$:

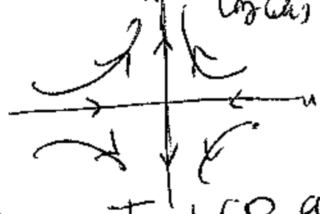


$\square$

EX Discretizzare con Eulero $\begin{cases}\dot x = \omega y\\ \dot y = \omega x\end{cases}$ $(\omega>0)$ e studiare l'andamento asintotico delle soluzioni ottenute.

Dunque, $\frac{\partial}{\partial t}\binom{x}{y} = \begin{bmatrix}0&\omega\\\omega&0\end{bmatrix}\binom{x}{y}$ che ha come soluzione (o come è facile!) "~~diagonalizzata~~" in forma canonica $\binom{x(t)}{y(t)} = \begin{bmatrix}e^{-\omega t}&0\\0&e^{\omega t}\end{bmatrix}\binom{x_0}{y_0} =$

$= \begin{bmatrix}e^{-\omega t}x_0\\e^{\omega t}y_0\end{bmatrix}$, ossia di tracciato

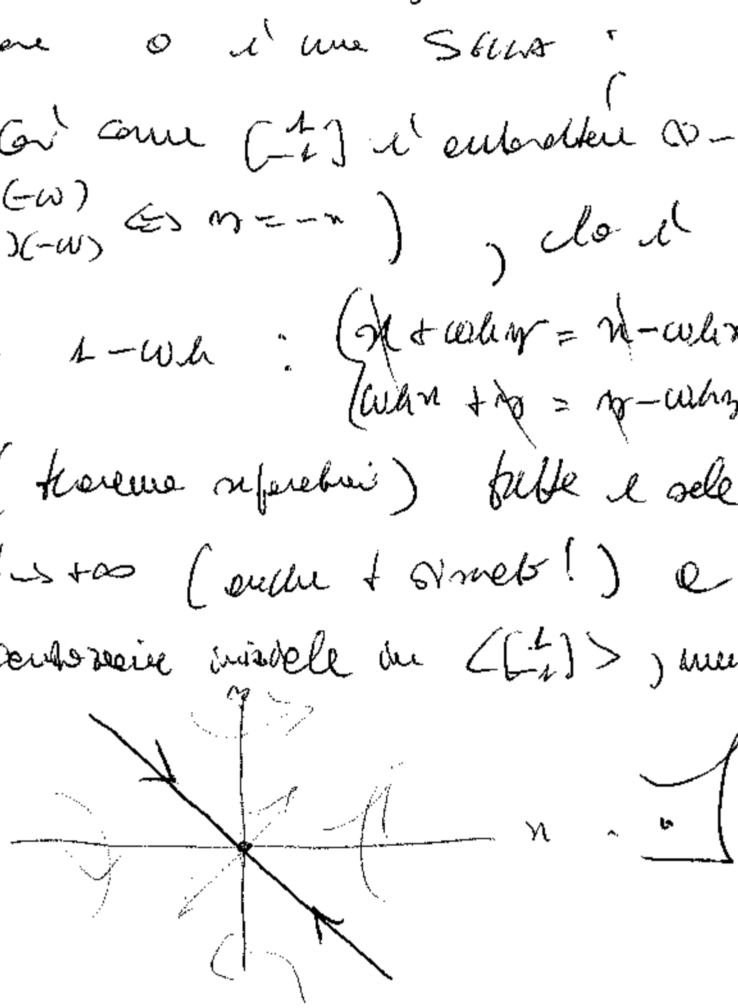


. Ora, tale sistema discretizzato con $h=t/n$ dà $\left(I+\begin{bmatrix}0&\omega h\\\omega h&0\end{bmatrix}\right)^n$, cioè

dà $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix} = \left(I+\begin{bmatrix}0&\omega h\\\omega h&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$, ossia delle orbite

$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \left(I + \begin{bmatrix} 0 & \omega h \\ \omega h & 0 \end{bmatrix} \right)^k \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$; ora, $I + \begin{bmatrix} 0 & \omega h \\ \omega h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega h \\ \omega h & 1 \end{bmatrix}$ ha eq. caratt. $\lambda^2 - 2\lambda + (1-\omega^2 h^2) = 0$, ossia ($\Delta/4 = 1 - (1-\omega^2h^2) = \omega^2 h^2$!) $\lambda_\pm = 1 \pm \omega h$, dunque $1+\omega h > 1$ $\Rightarrow$ origine instabile; essendo h "molto piccolo" in generale non sarà $1-\omega h < -1$ (dunque $|1-\omega h| > 1$), ossia sarà $|1-\omega h| < 1$ e dunque ancora o è una sella:

inoltre, per la precedente, così come $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è autovettore $0-\omega$ per $\begin{bmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$ $\left(\begin{cases} \omega y = (x)(-\omega) \\ \omega x = (y)(-\omega) \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \right)$, così è anche per $\begin{bmatrix} 1 & \omega h \\ \omega h & 1 \end{bmatrix}$ rispetto a $1-\omega h$: $\begin{cases} x + \omega h y = x - \omega h x \\ \omega h x + y = y - \omega h y \end{cases}$ $\Leftrightarrow y = -x$! CIOÈ (teorema superiore) tutte le soluzioni che tendono per $t \to +\infty$ (anche + simmetr!) a $(0,0)$ sono quelle con condizione iniziale in $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, mentre le altre $\to \infty$:



EX Discretizzare e studiare $\ddot{x} = -\omega^2 x$ $(\omega > 0)$ mediante Δ_-.

[$\mathcal{D}^2 \approx \dfrac{\Delta_-^2}{h^2}$ $\Rightarrow$ il discr. è $\dfrac{\overset{I - 2S^{-1} + S^{-2}}{\Delta_-^2}}{h^2} x_n = -\omega^2 x_n$, cioè

$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} = -\omega^2 h^2 x_n$, "CIOÈ" $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = -\omega^2 h^2 x_{n+2}$, cioè $\boxed{(1+\omega^2h^2)x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0}$:

caratteristica $(1+\omega^2h^2)\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$,

$\Delta/4 = 1 - (1+\omega^2h^2) = -\omega^2 h^2$ $\Rightarrow$

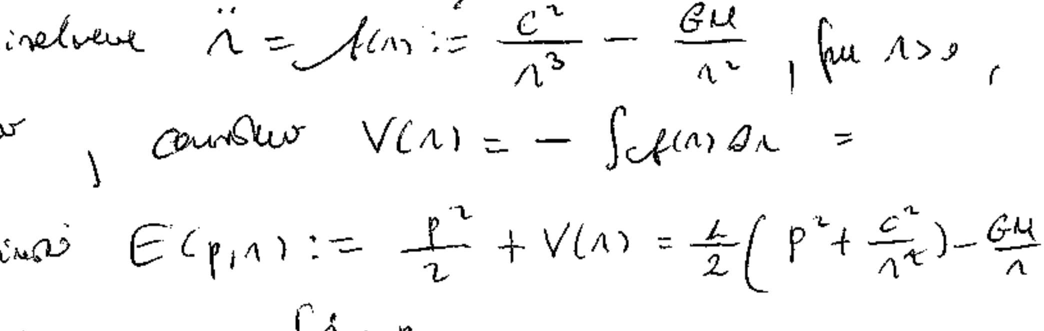
$\lambda_\pm = \dfrac{1 \pm i\omega h}{1+\omega^2 h^2}$; ora, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ $\Leftrightarrow$

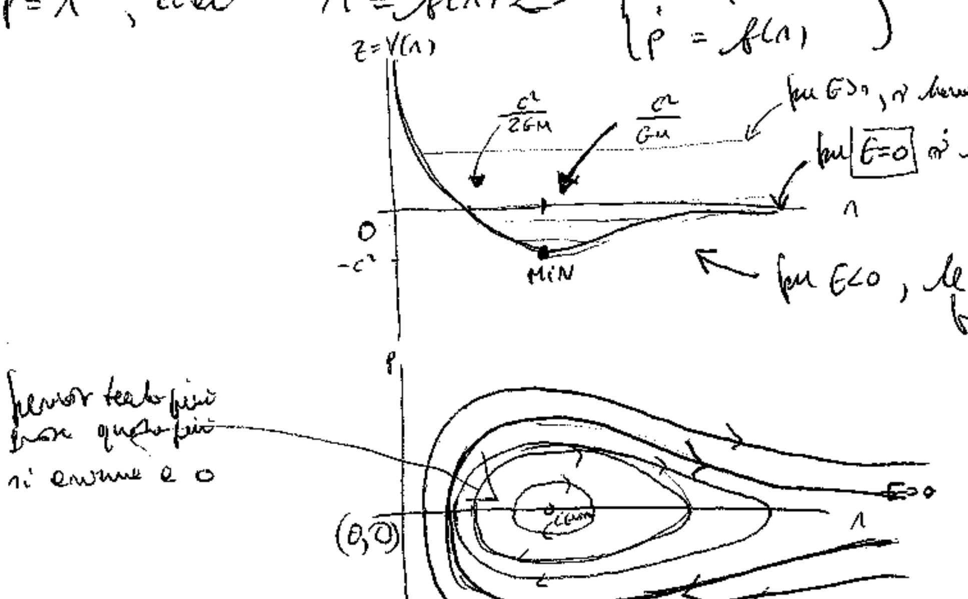
$\frac{z\cdot\bar z}{|z|^2}=1$, cioè $z^{-1}=\frac{\bar z}{|z|^2}$; ora, è proprio questo il caso, infatti $\frac{1\pm i\omega h}{1+\omega^2h^2}$ "è" l'inverso risp. di $1\mp i\omega h$, ossia dopo calcolato $1\mp i\omega h$ dell'app. discreta con Δ_+ (che non = a quello dell'app. con Eulero), dunque è chiaro in particolare ($(\rho e^{i\theta})^{-1}=\rho^{-1}e^{-i\theta}$) che per $n\to+\infty$ si va al centro AVVOLGENDOSI a $(0,0)$, in senso antiorario, decrescendo come $(1+\omega^2h^2)^{-n/2}$. ∎
(anche "buono" solo per h piccolo!)

EX (il problema dei due corpi). Date $G>0$, $M>0$ e $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ costanti, sia $\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{c^2}{r^3}-\frac{GM}{r^2}$, $r>0$: costruire la sua mappa di fase, trovare i punti fissi e (...) studiarne il comportamento al variare del passo h.

$\left(f'(r)=\frac{2GM}{r^3}-\frac{3c^2}{r^4}\right)$

Intanto, volendo risolvere $\ddot r=f(r):=\frac{c^2}{r^3}-\frac{GM}{r^2}$, per $r>0$, con SDC conservativo, considero $V(r)=-\int f(r)\,dr=$
$=\frac{c^2}{2r^2}-\frac{GM}{r}$, quindi $E(p,r):=\frac{p^2}{2}+V(r)=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{c^2}{r^2}\right)-\frac{GM}{r}$
(se $p=\dot r$, cioè $\ddot r=f(r)\Leftrightarrow\begin{cases}\dot r=p\\ \dot p=f(r)\end{cases}$):





; ci aspettiamo

Che nel problema discretizzato la soluzione si trasforma in una "spirale centrale", tanto più ampia quanto più lungo è il passo h. Comunque,

La mappa stessa è $\begin{cases} r_{n+1} = r_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + h^2 f(r_n) = p_n + h^2\left(\frac{C^2}{r_n^3} - \frac{GM}{r_n^2}\right) \end{cases}$,

per cui la jacobiana $A = \begin{pmatrix} 1 + h^2 f'(r_n) & 1 \\ h^2 f'(r_n) & 1 \end{pmatrix}$, che ha allora

eq. caratt. $\lambda^2 - (2 + h^2 f'(r_n))\lambda + 1 = 0$ che ha che

punto fisso ($p=0$ per forza...) $\left(\frac{C^2}{GM}, 0\right)$ isolato; sarà stabile sempre? La mappa ha jacobiana $A = \begin{bmatrix} 1 + h^2 f'(r) & 1 \\ h^2 f'(r) & 1 \end{bmatrix}$, quindi eq. caratt. $P(\lambda) = \lambda^2 - (2 + h^2 f'(r))\lambda + 1 = 0$, da cui

$\Delta = (2 + h^2 f'(r))^2 - 4 = 4h^2 f'(r) + h^4 (f'(r))^2 \Rightarrow$

$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2 + h^2 f'(r)) \pm \sqrt{4h^2 f'(r) + h^4 (f'(r))^2}\right]$; ora,

$f'(r) = \frac{2GM}{r^3} - \frac{3C^2}{r^4}\Big|_{r=\frac{C^2}{GM}} = \frac{(2GM)G^3M^3}{C^6} - \frac{3C^2 G^4 M^4}{C^8} =$

$= -\frac{G^4M^4}{C^6}$ (<0) $\Rightarrow$

$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[\left(2 - h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}\right) \pm \sqrt{h^4 \frac{G^8M^8}{C^{12}} - 4h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}}\right]$.

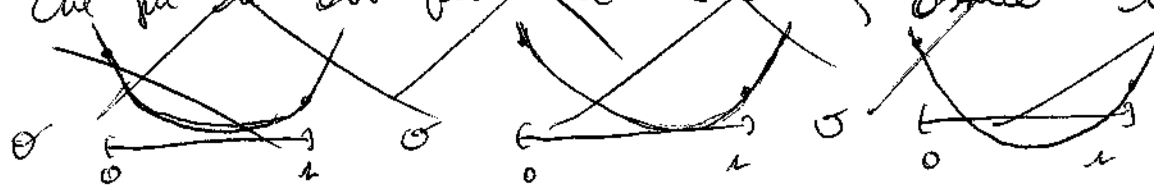
per h piccolo sono "quasi" unità C, quindi c'è stabilità.

Nota. $P(0) = 1$ (>0) e $P(1) = 1 - \left(2 - h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}\right) + 1 =$

$= -h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}$ (<0); $P'(\lambda) = 2\lambda - (2 + h^2 f'(r))$, $\Rightarrow$

$P'(1) = -h^2 f'(r) = h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}$ (>0) e $P'(0) = -2 + h^2 \frac{G^4M^4}{C^6}$,

che per h abb. piccolo è <0, ossia è

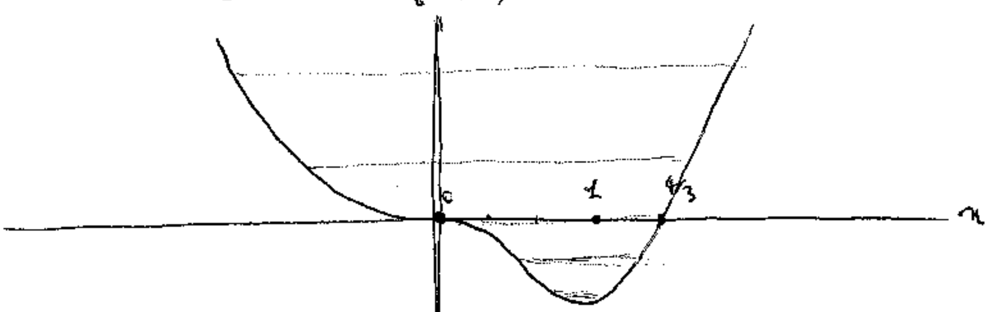


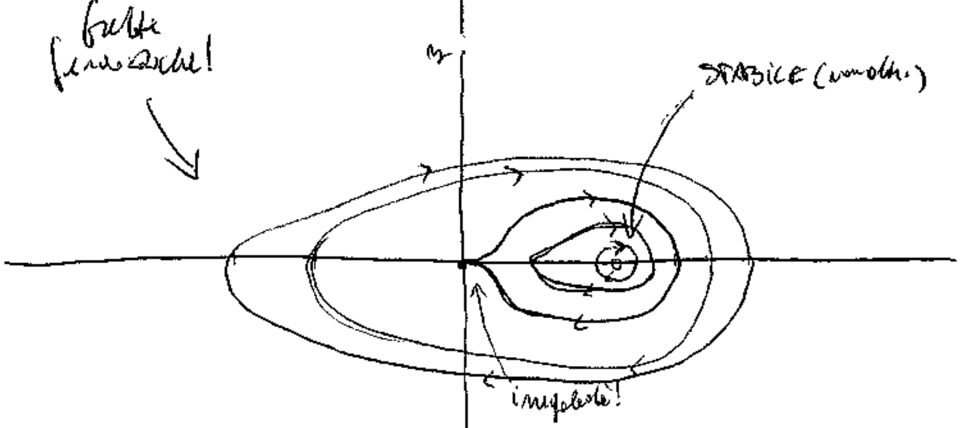
EX Dato $\ddot{x} = x^2 - x^3 - \gamma\dot{x}$ (in $\mathbb{R}$) costruire le mappe di fase e commentare eq./stabilità nel caso CONS. e prov./stabilità nel caso DIS; $\exists\ (0, h_0)$ in cui si hanno le stesse proprietà?? (4)

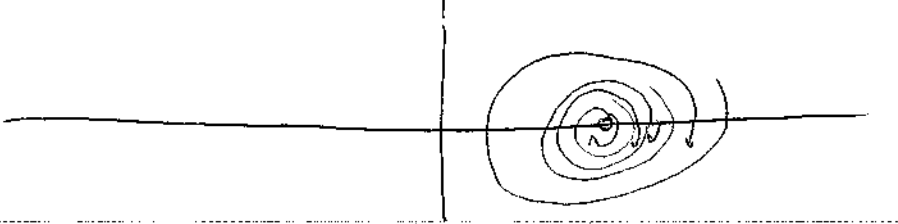
$\ddot{x} = x^2 - x^3 - \gamma\dot{x} \iff \begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 - x^3 - \gamma y\end{cases}$, $f(x) := x^2 - x^3$;

$V(x) = -\int f(x)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} = x^3\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{3}\right)$:

definita in $\mathbb{R}$, né pari né dispari, si annulla in 0 e in $4/3$ (>1) fra i quali è <0, e per altre $x>0$ è >0, mentre per $x<0$ è sempre >0, e tende a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$; inoltre $V'(x) = -f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ si annulla in 0 e 1, essendo <0 $\forall x < 1$ ($\neq 0$), per cui 1 è di minimo, mentre 0 di flesso orizzontale; in effetti $V''(x) = -f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$ è 0 in 0 e in $2/3$, e resta >0 per $x > 2/3$ o $x < 0$:







γ>0: le mappe cambiano in modo ..., per cui le separatrici si AVVOLGONO tra loro

Il discretizzato è $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + v_{n+1} \\ v_{n+1} = h^2 \underbrace{f(x_n)}_{(x_n^2 - x_n^3)} + (1-\gamma h) v_n \end{cases}$, che ha

punti fissi $(x_0, v_0) = (x, 0)$ con $f(x) = 0$, ossia $(0,0)$ e $(1,0)$;

ora, $f'(x) = 2x - 3x^2 \Rightarrow f'(1) < 0$, quindi $(1,0)$ è

sella (almeno per h piccoli); inoltre ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $f'(0) = 0 \Rightarrow$ la jacobiana è

$\begin{bmatrix} 1 & 1-\gamma h \\ 0 & 1-\gamma h \end{bmatrix}$ che ha eq. c. $\lambda^2 - (2-\gamma h)\lambda + 1 - \gamma h = 0$,

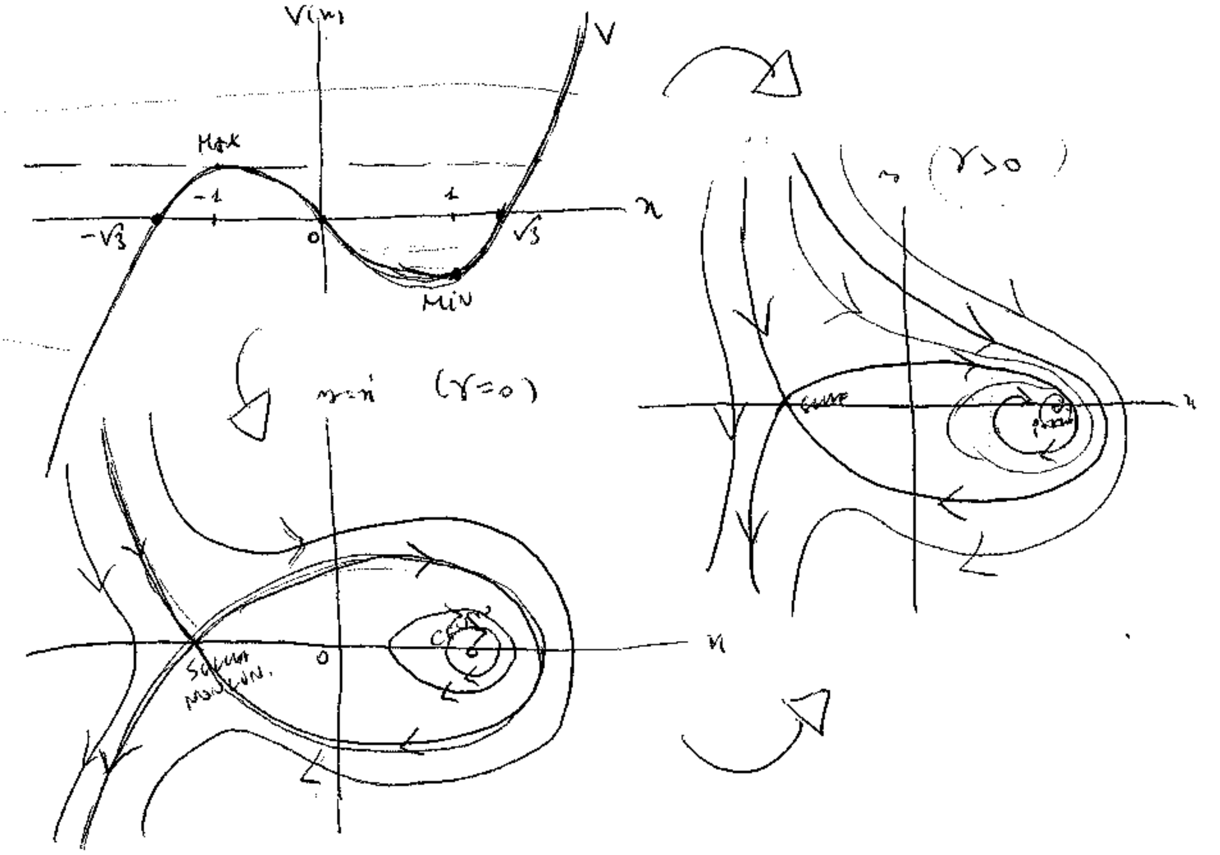
$\Delta = (2-\gamma h)^2 - 4(1-\gamma h) = \gamma^2 h^2$, per cui $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2-\gamma h) \pm (\gamma h)\right] =$

$= \begin{cases} + & 1 \\ - & 1-\gamma h \end{cases}$, dunque è stabile ma non asintoticamente ...??

$\boxed{\text{EX}}$ Per $\ddot{x} = \underbrace{1 - x^2}_{f(x)} - \gamma \dot{x}$??. $\quad (f'(x) = -2x)$

$-f(x) = x^2 - 1$ ha $V(x) = \int -f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x = x\left(\frac{x^2}{3} - 1\right)$:

$(-f'(x) = 2x)$



Discretizzato: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\, y_{n+1} \\ y_{n+1} = h\, f(x_n) + (1-\gamma h)\, y_n = h(1-x_n^2) + (1-\gamma h)\, y_n \end{cases}$

che ha punti fissi $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ con $f(x_0) = 0$, cioè ancora $(-1,0)$ e $(1,0)$; la Jacobiana in $(x_0,0)$ è

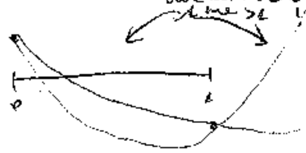
$$A = \begin{bmatrix} 1 + h^2 f'(x_0) & h(1-\gamma h) \\ h f'(x_0) & 1-\gamma h \end{bmatrix}$$

, dunque l'eq. caratt.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{(2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h)}_{f'(x_0) = -2x_0 = \pm 2 \ (\text{in } \mp 1)}\lambda + (1-\gamma h) = 0$$

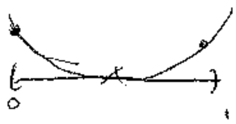
; ~~...~~ ove,

$p(0) = 1-\gamma h \in (0,1)$ (h piccolo), $p(1) = -h^2 f'(x_0)$, per cui per $x_0 = -1$ ($f'(x_0) > 0$) è

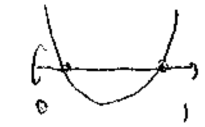


quindi $(-1,0)$ è IPERBOLICO ($\Rightarrow$ instabile);

invece $p(1) = 2h^2$ se $x_0 = +1$; d'altra parte $p'(\lambda) = 2\lambda - (2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h)$ vale $p'(1) = \gamma h + h^2 \underbrace{f'(x_0)}_{-2} = (\gamma - 2h)h > 0$ per h abb. piccolo, e $p'(0) = -2 + \gamma h + 2h^2 < 0$ per h abb. piccolo, per cui



o



nel caso di radici reali, il che $\Rightarrow$ ASINTOTICA STABILITÀ; nel caso di radici complesse coniugate pure, perché $\det A = 1 - \gamma h = |z|\,|\bar z| = |z|^2$, cioè $|z| = \sqrt{1-\gamma h} < 1$! Dunque, per h piccolo, anche l'approssimazione è affidabile. In realtà, per la precisione,

(1) $p'(1) = (\gamma - 2h)h > 0 \iff \gamma > 2h$, cioè $h < \frac{\gamma}{2}$; per

$p'(0) = 2h^2 + \gamma h - 2 = 0 \iff h^2 + \frac{\gamma}{2}h - 1 = 0$: $\Delta = \frac{\gamma^2}{4} + 4$

$\Rightarrow h_\pm = \frac{1}{2}\left[-\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + 4}\right]$ ($\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+4} > \frac{\gamma}{2}$!), quindi $p'(0) < 0$ (ricordando $h > 0$) $\iff h < \frac{1}{2}\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+4}\right)$; per γ "piccolo" ricominciamo con $h < \gamma/2$, perché $\gamma/2 < \frac{1}{2}\left[-\gamma/2 + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+4}\right] \iff$

$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\gamma\right)^2}_{\frac{9\gamma^2}{4}} < \frac{\gamma^2}{4} + 16$, cioè $8\gamma^2 < 16$, cioè $\gamma^2 < 2$, cioè $(0<)\ \gamma < \sqrt{2}$, altrimenti il contrario! Dunque (2) fa un FUOCO se ha complessi coniugati, ossia $f(\lambda) =$ ...

$$0 > \Delta_{f(\lambda)} = \underbrace{(2-2h^2-\gamma h)^2}_{4+4h^4+\gamma^2h^2-4\gamma h-8h^2+4\gamma h^3} - 4(1-\gamma h) = 4h^4+4\gamma h^3+\gamma^2 h^2-8h^2$$

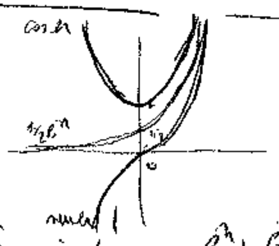
(dopo 2 semplificazioni)

$$\iff 4h^2+(4\gamma)h+(\gamma^2-8)<0 \ :\ \Delta_{/2} = 4\gamma^2-4(\gamma^2-8) = 32 \Rightarrow$$

$h_\pm = \frac{1}{4}\left[-2\gamma \pm 4\sqrt{2}\right]$, quindi $h < \frac{1}{4}(-2\gamma+4\sqrt{2}) =$

$= -\frac{\gamma}{2}+\sqrt{2}$, ossia $\boxed{h<\sqrt{2}-\frac{\gamma}{2}}$ (in effetti $4h^2+4\gamma h+\gamma^2-8$

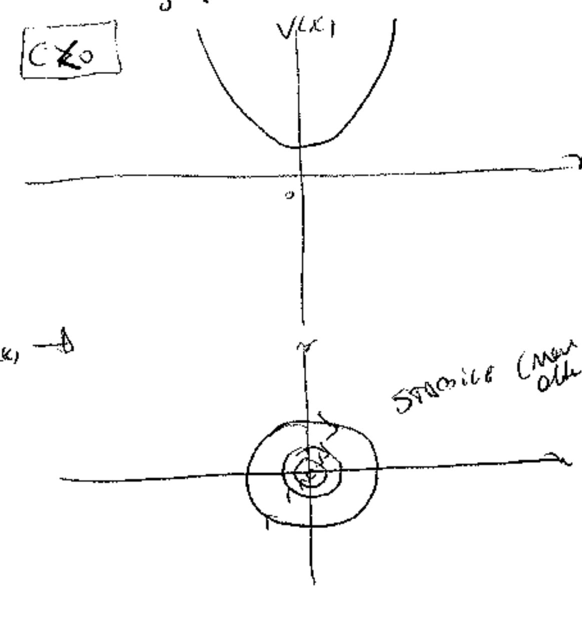
$= (2h+\gamma)^2-8 < 0 \iff 2h+\gamma < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, cioè $h < \sqrt{2}-\gamma/2$!)

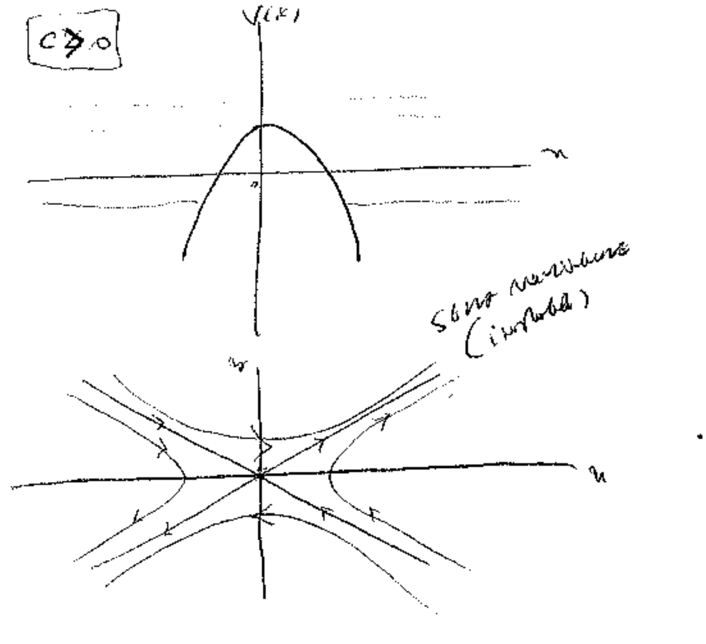


$\boxed{\text{EX}}$: Data $c \neq 0$ reale, $\dot{x} = \underbrace{c\cdot \sinh(x)}_{f(x)}$.

[Ricordiamo anzitutto che $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (per cui $\sinh'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$), ~~analogamente~~ analogamente $\cosh'(x) = \sinh(x)$), per cui

$V(x) = -\int f(x)\,dx = -c\cosh(x)$;





$\begin{cases}\dot x = y\\ \dot y = c\sinh(x)\end{cases}$

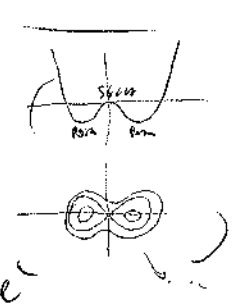
Discretizzazione: $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h y_{n+1} = x_n + h^2 C \sinh(x_n) + h y_n \\ y_{n+1} = y_n + h \underbrace{f(x_n)}_{(C \sinh(x_n))} = y_n + h C \sinh(x_n) \end{cases}$, che ha il solo punto fisso $(0,0)$; la jacobiana è $A =$

$$= \begin{bmatrix} (1+h^2 c)\cosh(x_0) & h \\ (hc)\cosh(x_0) & 1 \end{bmatrix}$$ (nuovo!) che ha eq. caratt. $P(\lambda) = \lambda^2 - (2+h^2c)\lambda + 1 =$

$= 0$: $\Delta = (2+h^2c)^2 - 4 = 4h^2c + h^4c^2 = ch^2(4+ch^2)$

$\Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2+h^2c) \pm h\sqrt{c(4+ch^2)}\right]$; ora, o $\Delta > 0$ o $\Delta < 0$, e $c>0 \Rightarrow \Delta > 0$, e anche $c<0$ con $4+ch^2<0$, ossia $c < \frac{-4}{h^2} \Rightarrow \Delta > 0$, così in cui le radici sono reali con (sotto trattamento 1, e allora una è >1 e l'altra è <1: punto instabile (sella)) $\{ |\lambda||\mu| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{|\mu|}$ (nessuna può essere 0, e non sono $=1$ perché $\Delta \neq 0$!) $\}$; se invece $-\frac{4}{h^2} < c < 0$, allora sono complesse coniugate (di modulo 1) e per h piccolo si avrà stabilità grazie alla "quasi" 1-a legge conservazione dell'energia. Notiamo allora che per h è piccolo, per la distinzione $c<0$ e $c>0$ del caso continuo è rispettata (perché $-\frac{4}{h^2} \xrightarrow[h\to 0]{} -\infty$!).

$\boxed{\text{EX B.3 p. 272:}}$ $\ddot{x} = \underbrace{-4x^3 + 2x}_{= f(x)} - \gamma\dot{x}$, $0<\gamma<1$



$\ddot{x} = f(x) - \gamma\dot{x} \rightsquigarrow \frac{\Delta_0^2}{h^2} x_n = f(x_n) - \gamma \frac{\Delta_-}{h} x_n$, cioè

$\underbrace{\Delta_0^2 x_n}_{(\Delta_+ x_n - \Delta_- x_n)} = h^2 f(x_n) - \gamma h \Delta_- x_n \Leftrightarrow \Delta_+ x_n = h^2 f(x_n) + (1-\gamma h)\Delta_- x_n$;

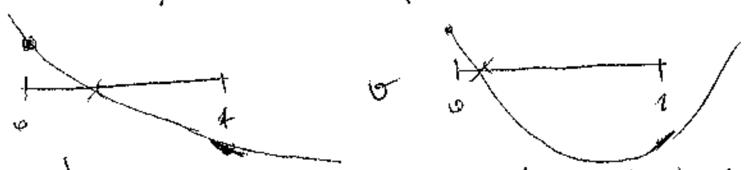
Ora, $y_n = \frac{\Delta_- x_n}{h} \Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{\Delta_+ x_n}{h}$ (innovativo!) $\Rightarrow$ il sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h y_{n+1} = x_n + h^2(2x_n - 4x_n^3) + (1-\gamma h) h y_n \\ y_{n+1} = h f(x_n) + (1-\gamma h) y_n = h(2x_n - 4x_n^3) + (1-\gamma h) y_n \end{cases}$$

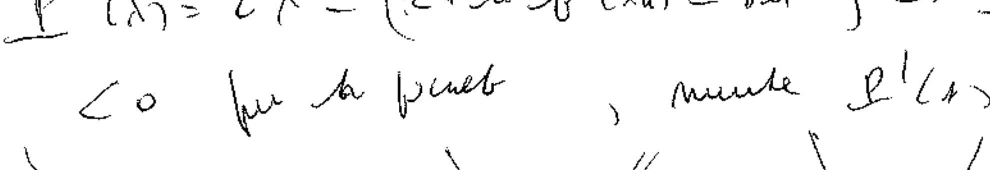
È ora evidente che (giustamente!) tutti e soli i punti fissi di tale mappa sono $(x_0, v_0) = (x_0, 0)$ con $f(x_0) = 0$: $f(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2) = 0 \iff x \in \{0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\}$; inoltre la mia jacobiana è $A = \begin{pmatrix} 1 + h^2 f'(x_0) & h(1-\gamma h) \\ h f'(x_0) & 1-\gamma h \end{pmatrix}$, che ha

$\mathrm{tr} A = 2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h$ e $\det A = (1 + h^2 f'(x_0))(1-\gamma h) - h^2 f'(x_0)(1-\gamma h) = 1 - \gamma h$ $\Rightarrow$ che eq. caratt. $p(\lambda) = \lambda^2 - (2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h)\lambda + 1 - \gamma h = 0$; ebbene, $f'(x) = 2 - 12x^2 = \begin{cases} 2 & \text{per } x = 0 \\ -4 < 0 & \text{per } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;

ma $p(0) = 1 - \gamma h \in (0,1)$ essendo $\gamma h > 0$ e piccolo ($1 - \gamma h > 0 \iff h < 1/\gamma$, ragionevole, che sarà maggiore ($\gamma < 1$!)) e $p(1) = -h^2 f'(x_0)$, < 0 per $x = 0$, ossia p è della forma o



, ma in ogni caso una radice è in $(0,1)$ e un'altra è > 1 : $(0,0)$ è iperbolico ; invece per $x = \pm\sqrt{2}/2$ è $p(1) > 0$; poi $p'(\lambda) = 2\lambda - (2 + h^2 f'(x_0) - \gamma h) \Rightarrow p'(0) = -2 \underset{+4h^2}{- h^2 f'(x_0)} + \gamma h$ < 0 per h piccolo, mentre $p'(1) = \gamma h - h^2 f'(x_0) > 0$:



; nel caso di radici reali, sono allora in $(0,1)$: bene! Se complesse, comunque $|z|^2 = |z||\bar{z}| = 1 - \gamma h$, cioè $|z| = \sqrt{1-\gamma h} < 1$. □

$\boxed{\text{EX 8.6 p. 244:}}$ $\ddot{x} = \underbrace{-3x^2 + 1}_{=: f(x)}$ $\left[\frac{\Delta_0^2}{h^2} x_n = f(x_n) \iff \right.$

$\Delta_0^2 x_n = (\Delta_+ - \Delta_-) x_n = h^2 f(x_n)$, cioè $\underset{h v_{n+1}}{\Delta_+ x_n} = h^2 f(x_n) + \underset{h v_n}{\Delta_- x_n}$;

ora, $v_n = \frac{\Delta_- x_n}{h} \iff v_{n+1} = \frac{\Delta_+ x_n}{h}$, che usa il sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\, y_{n+1} = x_n + h^2(1-3x_n^2) + h y_n \\ y_{n+1} = h f(x_n) + y_n = h(1-3x_n^2) + y_n \end{cases}$$, che ha solamente

punti fissi $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ t.c. $f(x_0) = 0$: $x_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; (sella? iperbolico?)

Ora, la jacobiana è $A = \begin{pmatrix} 1 + h^2 f'(x_0) & h \\ h f'(x_0) & 1 \end{pmatrix}$ da cui $\mathrm{tr}A =$
$= 2 + h^2 f'(x_0)$ e $\det A = 1 + h^2 f'(x_0) - h^2 f'(x_0) = 1$ (giustamente!),
$\Rightarrow$ ha eq. caratt. $p(\lambda) = \lambda^2 - (2 + h^2 f'(x_0))\lambda + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Delta = (2 + h^2 f'(x_0))^2 - 4 = \underbrace{\cancel{2}\,4h^2 f'(x_0) + h^4 (f'(x_0))^2}_{h^2(4f'(x_0) + h^2 (f'(x_0))^2)} \ , \Rightarrow$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(2 + h^2 f'(x_0)) \pm h\sqrt{4f'(x_0) + h^2 (f'(x_0))^2} \right]; \text{ ora,}$$

$f'(x) = -6x = \begin{cases} -2\sqrt{3} & (+\sqrt{3}/3) \\ +2\sqrt{3} & (-\sqrt{3}/3) \end{cases}$, dunque per $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ si ottengono autovalori

reali, ed essi sono tali che $|\lambda_+| \cdot |\lambda_-| = 1$ (e anche $\neq 0$!),
è $|\lambda_+| = \frac{1}{|\lambda_-|}$, quindi uno è >1 e l'altro è <1 (NON sono $=1$,
poiché $\Delta \neq 0$!) , e in effetti allora $(-\sqrt{3}/3, 0)$ è iperbolico.

Per $\sqrt{3}/3$, $\Delta = h^2 \left[\underbrace{(-2\sqrt{3}) \cdot 4}_{-8\sqrt{3}} + h^2 \cdot 12 \right] < 0 \Leftrightarrow h^2 12 < 8\sqrt{3}$,

cioè $h^2 < \frac{2}{3}\sqrt{3}$, cioè $\boxed{h < 4/3}$ (sempre!), e allora

abbiamo autovalori complessi coniugati (di modulo 1!), che vanno
studiato per via "quasi" interp. fino all'ordine ...