Seminario di TEORIA DEI CONTROLLI : Problemi [illegible] stocastici di controllo ottimale (ad orizzonte finito) : teoria esplorata. [illegible] 1

PROBLEMI DETERMINISTICI DI CONTROLLO OTTIMALE.

(MARCO TARSIA) ↔ [J. YONG X.Y. ZHOU]

I DATI ASSEGNATI: $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T \in (0,+\infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, (U,d) spazio metrico (ES. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N}\setminus\{0\})$) ;

$b : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_x \times U_u \to \mathbb{R}^m$, $f : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_x \times U_u \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^m_x \to \mathbb{R}$

mappe misurabili.

IL SISTEMA DI CONTROLLO: (ad orizzonte finito)

(forward ODE)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(almeno in senso debole)

nelle incognite $u(\cdot) : [0,T] \to U$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot)) : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ misurabili.
(Controllo) ($C([0,T];U)$) (traiettoria di stato) ($C([0,T];\mathbb{R}^m)$) (continue) (cammini)

IL FUNZIONALE COSTO: (o disutilità) (misura di performance)

$$J(u(\cdot)) := \int_0^T f(t, x(t), u(t))\,dt + h(x(T)) \quad (\in \mathbb{R})$$

al variare di $u(\cdot) : [0,T] \to U$ misurabile e dove $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$.

I CONTROLLI AMMISSIBILI: i controlli $u(\cdot) : [0,T] \to U$ misurabili tali che esiste una ed una sola soluzione $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$ del sistema di controllo e tale che ~~[illegible]~~ inoltre risulti:

$t \mapsto f(t, x(t), u(t)) \in$ [illegible] $L^1(0,T;\mathbb{R})$.

LE COPPIE AMMISSIBILI: le coppie $(x(\cdot), u(\cdot))$ con $u(\cdot)$ controllo ammissibile e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$.

NOTAZIONE: denotiamo con "$\mathcal{V}_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili (dipendono da tutti i dati assegnati)

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE: "Problema (D)": minimizzare $J(\cdot)$ su $\mathcal{V}_{ad}[0,T]$.

⊛ CONVENZIONE: $\inf \emptyset \triangleq +\infty$)

Ipotesi di finitezza: (DEO) $-\infty < \inf\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)) \cancel{< +\infty}$.

CONTROLLI OTTIMALI: (per il Problema (D)) i controlli $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]$ ~~[illegible]~~ soluzioni del Problema (D) nel senso che , ~~posto $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$~~,

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)) .$$

(Problema (D) : "di Lagrange" se $f \equiv 0$; "di Mayer" se $h \equiv 0$; "di Bolza" se $f \not\equiv 0$ e $h \not\equiv 0$.)

LE COPPIE OTTIMALI: (per il Problema (D)) le coppie $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ con $\bar{u}(\cdot)$ controllo ottimale (per il Problema (D)) e $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$.

Notazione: per ogni $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, denotiamo con "$|\cdot|$" la norma euclidea standard $\|\cdot\|_2$ da $\mathbb{R}^N$ e con "$\langle\cdot,\cdot\rangle$" il prodotto scalare standard $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

LE IPOTESI ~~ASSUNZIONI~~ PER L'ESISTENZA DI UN CONTROLLO OTTIMALE: oltre alle ipotesi di finitezza, (su U, b, f e h)

DE1) Lo spazio metrico (U,d) è polacco (cioè completo e separabile). ✱ (ES. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ chiuso)

DE2) Esistono una costante $L \geq 0$ ($\in [0,+\infty)$) ~~($L \in (0,+\infty)$)~~ ed un modulo di continuità ("globale") $\bar{\omega} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tali che, per ~~ogni~~ ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u)-\varphi(t,\hat{x},\hat{u})| \le L|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U \end{cases}$$.

(DE3) Per ogni $t\in[0,T]$ e $x\in\mathbb{R}^n$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(b,f)(t,x,U) \triangleq \{(b_i(t,x,u), f(t,x,u))^T_{i=1,\dots,n} \mid u\in U\}$$

è ivi convesso e chiuso. ("Condizione di Roxin")

Teorema ~~di~~ (Esistenza di un controllo ottimale). Siano assunte le ipotesi (DE0)–(DE3) (cioè (DE0), (DE1) (DE2) e (DE3)). Allora il Problema (D) ammette un controllo ottimale.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi (DE1) e (DE2) ((D1)) ((D2)), ogni controllo è ammissibile (*) (ed anzi non è necessaria la completezza di (U,d)).

Notazione: per ogni $N,M \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed ogni $F(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$, denotiamo con "$F_x(\cdot)$" $\in\mathbb{R}^{M\times N}$ la matrice jacobiana di $F(\cdot)$.

LE IPOTESI PER LE CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ DI PONTRYAGIN: (su U, b, f e h)

(D1) Lo spazio metrico (U,d) è separabile.

(D2) $\equiv$ (DE2)

✓ (*) Il quale (D2) solo per $\varphi=b$ con la sola crescita lineare in x.
(*) (D4) Esiste $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che U ~~[illegible]~~ sia un corpo convesso di $\mathbb{R}^k$ (un sottoinsieme convesso e a parte interna non vuota di $\mathbb{R}^k$). Inoltre b e f sono localmente lipschitziane nella variabile $u\in U$.

(D3) Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^1 nella variabile $x\in\mathbb{R}^n$. ~~[illegible]~~ Inoltre esiste un modulo di continuità $\bar{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ tale che, per ~~ogni~~ ciascuna

$$\varphi(t,x,u) = b(t,x,u),\ f(t,x,u),\ h(x), \quad \text{risulti}$$

$$|\varphi_x(t,x,u)-\varphi_x(t,\hat{x},\hat{u})| \le \bar{\omega}(|x-\hat{x}|+d(u,\hat{u})) \quad \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U$$

e, in alternativa: ciò vale solo per $\varphi(t,x,u)=b(t,x,u)$ mentre $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono di crescita polinomiale nella x. ✓ (*)

LA FUNZIONE HAMILTONIANA (DEL PROBLEMA (D)): $H(t,x,u,p):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, (dipende da b e f)

$$H(t,x,u,p) \overset{\Delta}{=} \langle p, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u) .$$

LE VARIABILI AGGIUNTE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE (DEL PROBLEMA (D)): (assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^1 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$,) per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$, ~~la~~ una "variabile aggiunta" (associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$) è una mappa $p(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ continua che soddisfi l'"equazione aggiunta". $\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$

(backward ODE) (retrograda) (una backward ODE equivale ad una ODE forward a meno di un'inversione temporale)

$$\text{(ecco } h\text{)} \begin{cases} \dot{p}(t) = -b_x(t,x(t),u(t))^T p(t) + f_x(t,x(t),u(t)), & \text{q.o. } t\in[0,T], \\ p(T) = -h_x(x(T)) . \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. È $H_p \equiv b$, mentre, sempre assumendo b,f,h C^1 nelle x, è $H_x \equiv b_x^T p - f_x$.

LE TRIPLETTE AMMISSIBILI / OTTIMALI: le triplette $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot))$ con $(x(\cdot),u(\cdot))$ coppia ammissibile / ottimale e $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$ ~~la~~ una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$.

IL SISTEMA HAMILTONIANO (DEL PROBLEMA (D)): assumendo sempre che b, ℓ e h siano C^1 nelle x, è il sistema accoppiato ~~che costituisce le~~ soddisfatto dalle triplette ammissibili $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot))$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)) = H_p(t, x(t), u(t))p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \dot{p}(t) = -b_x(t, x(t), u(t))^T p(t) + \ell_x(t, x(t), u(t)) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \\ p(T) = -h_x(x(T)) & . \end{cases}$$

(sistema forward-backward)

Teorema (Principio del massimo di Pontryagin). (MP) ~~(Condizione necessaria di ottimalità)~~ Siano assunte le ipotesi (D1)-(D3).

Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ per il Problema (D), allora esiste una variabile aggiunta $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ tale che la tripletta (ottimale) $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot))$ soddisfi la Condizione del massimo di Pontryagin:

$$\boxed{H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, p(t))}, \quad \text{q.o. } t \in [0,T].$$

IL SISTEMA HAMILTONIANO ESTESO (DEL PROBLEMA (D)): assumendo sempre che b, ℓ e h siano C^1 nelle x, è il sistema hamiltoniano soggetto alla condizione del massimo di Pontryagin:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \\ H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T] . \end{cases}$$

Teorema (Condizioni sufficienti di ottimalità). Siano assunte le ipotesi (D1)-(D4).

Supponiamo inoltre che $h(\cdot)$ sia convessa su $\mathbb{R}^n$. Sia data una tripletta ammissibile $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot))$ tale che la mappa $H(t, \cdot, \cdot, p(t))$ risulti concava su $\mathbb{R}^n \times U$ per ogni $t \in [0,T]$. Allora la coppia $(x(\cdot), u(\cdot))$ è ottimale se

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)), \quad \text{q.o. } t \in [0,T].$$

IL FRAMEWORK E LE IPOTESI PER LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA (DP) DI BELLMAN:

al variare di ogni assegnata coppia $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$,

Problema (D_{sy}): minimizzare $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{V}_{ad}[s,T]$, dove con "$\mathcal{V}_{ad}[s,T]$" denotiamo l'insieme delle mappe $u(\cdot) : ~~[s,T] \to U~~$ $u(s;\cdot) \in C^0([s,T];U)$ ~~costanti~~ tale che esiste una ed una sola soluzione $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; s,y,u(\cdot)) \in C^0([s,T],\mathbb{R}^n)$ del ~~sistema~~ delle ODE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t,x(t),u(t)), & \text{q.o. } t \in [s,T], \\ x(s) = y \end{cases}$$

(forward ODE)

e tale che inoltre risulti $t \mapsto f(t,x(t),u(t)) \in L^1(s,T;\mathbb{R}^n)$, e dove quindi

$$J(s,y;u(\cdot)) \triangleq \int_s^T f(t,x(t),u(t))\,dt + h(x(T))$$

per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[s,T]$.

(D1)' ≡ (D1) (separabilità) $(U, b, f$ e $h)$

(D2)' Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte uniformemente continue ed esiste una costante $L \in (0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},u)| \le L\,|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t \in [0,T],\ x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } u \in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t \in [0,T] \text{ e } u \in U \end{cases}.$$

(D3)' Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^1 nella variabile $x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre esiste un modulo di continuità $\overline{\omega} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$|\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\hat{x},u)| \le \overline{\omega}(|x-\hat{x}|) \quad \text{per ogni } t \in [0,T],\ x,\hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } u \in U.$$

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (D)): $V(s,y),\ V : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,y) \triangleq h(y) & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

L'EQUAZIONE DI HAMILTON – JACOBI – BELLMAN (HJB) (DEL PROBLEMA (D)):

~~$v(t,x) \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ tale che~~ (backward PDE)

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + \sup\limits_{u \in U} H(t,x,u,-v_x(t,x)) = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ v(T,x) = h(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

nelle incognite $v(t,x) \in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ (⇒ il sup è finito)
(e dove H è la hamiltoniana del Problema (D))

Teorema (Principio di ottimalità di Bellman : caso generale e caso liscio). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'. Allora la funzione valore $V(s,y)$ del Problema (D) verifica la equazione della programmazione dinamica:

$$V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))\,dt \; + \right.$$

$$\left. + \; V(\hat{s}; x(\hat{s};s,y,u(\cdot))) \right\} \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \text{ ed ogni } \hat{s}\in[s,T].$$

Inoltre, se $V(s,y)\in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora V è una soluzione (liscia) dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman del Problema (D):

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + \sup\limits_{u\in U} H(t,x,u,-V_x(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

(Da cui la "tecnica della verifica" per trovare formalmente un controllo ottimale in forma "FEEDBACK")

Teorema (Di verifica). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'. Allora ciascuna soluzione $v(t,x)\in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ dell'equazione HJB del Problema (D) soddisfa la disuguaglianza

$$v(s,y) \le J(s,y;u(\cdot)) \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \text{ e } u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T].$$

(Cioè $v \le V$)

Inoltre, per ogni $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]$, $\bar{u}(\cdot)$ è ottimale per il Problema $(D_{s,y})$ se, e solo se, $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot,\bar{u}(\cdot))$ e $\bar{u}(\cdot)$ sono tali che

$$v_t(t,\bar{x}(t)) \equiv \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,-v_x(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-v_x(t,\bar{x}(t))), \quad \text{q.o. } t\in[s,T].$$

Teorema (Una relazione fra il MP e la DP nel caso liscio). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'-(D3)'. Fissiamo $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e supponiamo che esiste una tripletta ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot))$ per il Problema (D_{sy}). Allora valgono le due seguenti proposizioni:

(i) Se $V \in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora

$$V_t(t,\bar{x}(t)) = H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-V_x(t,\bar{x}(t))) = \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,-V_x(t,\bar{x}(t))), \quad \text{q.o. } t\in[s,T].$$

(ii) Se $V \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ e se pure V_{tx} esiste ed è continua, allora

$$V_x(t,\bar{x}(t)) = -p(t) \quad \text{per ogni } t\in[0,T].$$

PROBLEMI LINEARI-QUADRATICI DETERMINISTICI DI CONTROLLO OTTIMALE. (LQ)

NOTAZIONE: per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, ogni $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed ogni $G(\cdot):[a,b]\to S^N$ (per cui $G(t)\in\mathbb{R}^{N^2}$ e $G(t)^T=G(t)$ per ogni $t\in[a,b]$), indichiamo

- $G\geq 0 \iff G(t)\geq 0$ per q.o. $t\in[a,b]$ $\quad(\Updownarrow\ G(\cdot)\in S^N_+)$
- $G> 0 \iff G(t)> 0$ per q.o. $t\in[a,b]$ $\quad(\Updownarrow\ G(\cdot)\in \hat{S}^N_+)$
- $G\gg 0 \iff G(t)\geq \delta I_N$ per un opportuno $\delta\in(0,+\infty)$ e per q.o. $t\in[a,b]$.

(semi-def. pos., def. pos. e uniforme def. pos. rispettivamente)

I DATI ASSEGNATI: $n,k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T\in(0,+\infty)$, $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$;

$A(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2})$, $B(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times k})$, $b(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$;

$Q(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^n)$, $S(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{k\times n})$, $R(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^k)$, $G\in S^n$.

IL SISTEMA DI CONTROLLO:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + b(t), & t\in[s,T], \\ x(s) = y, \end{cases}$$

(forward ODE lineare)

nelle incognite $u(\cdot):[s,T]\to\mathbb{R}^k$ (controllo) e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot)):[s,T]\to\mathbb{R}^n$ (traiettoria) misurabili. ($\Rightarrow U=\mathbb{R}^k$, che è polacco)

IL FUNZIONALE COSTO:

$$J(s,y;u(\cdot)) := \frac{1}{2}\int_s^T \{\langle Q(t)x(t),x(t)\rangle + 2\langle S(t)x(t),u(t)\rangle + \langle R(t)u(t),u(t)\rangle\}\,dt + \frac{1}{2}\langle Gx(T),x(T)\rangle$$

(quadratico)

al variare di $u(\cdot):[s,T]\to\mathbb{R}^k$ misurabile e dove $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$.

LE COPPIE AMMISSIBILI: le coppie $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]\triangleq L^2(s,T;\mathbb{R}^k)$ (controllo ammissibile) e con $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in\mathcal{Y}[s,T]\triangleq L^2(s,T;\mathbb{R}^n)$.

Problema (DLQ): minimizzare $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{V}_{ad}[s,T]$.

E COPPIE OTTIMALI: le coppie ammissibili $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ con $J(s,y;\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot))$.
(controllo ottimale)

OTA: coerentemente con le notazioni generali, abbiamo $b(t,x,u)\equiv A(t)x+B(t)u+b(t)$, $f(t,x,u)\equiv\frac{1}{2}\{\langle Q(t)x;x\rangle+2\langle S(t)x;u\rangle+\langle R(t)u;u\rangle\}$ e $h(x)\equiv\frac{1}{2}\langle Gx;x\rangle$ per ogni $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $u\in\mathbb{R}^k$. (⇒ valgono le ipotesi per le condizioni di ottimalità di Pontryagin 1)-(D4))

A FUNZIONE HAMILTONIANA (DEL PROBLEMA (DLQ)): $H(t,x,u,p):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p)\triangleq-\frac{1}{2}\langle R(t)u;u\rangle+\langle B(t)^Tp-S(t)x;u\rangle+\Big\{-\frac{1}{2}\langle Q(t)x;x\rangle+\langle A(t)^Tp;x\rangle+\langle p;b(t)\rangle\Big\}.$$

$(\Rightarrow -H_x(t,x,u,p)=-A(t)^Tp+Q(t)x+S(t)^Tu)$

E VARIABILI AGGIUNTE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE (DEL PROBLEMA (DLQ)): per ogni coppia ammissibile $x(\cdot),u(\cdot))$, una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è una mappa $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$ che soddisfa l'equazione aggiunta (backward ODE lineare)

$$\begin{cases}\dot{p}(t)=-A(t)^Tp(t)+Q(t)x(t)+S^*(t)^Tu(t), & t\in[s,T],\\ p(T)=-Gx(T).\end{cases}$$

E TRIPLETTE AMMISSIBILI/OTTIMALI: le triplette $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot))$ con $(x(\cdot),u(\cdot))$ ammissibile/ottimale e con $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$ una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$.

IL SISTEMA HAMILTONIANO ESTESO (DEL PROBLEMA DLQ):

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t)+b(t)=H_p(t,x(t),u(t),p(t)), & t\in[s,T],\\ \dot{p}(t)=-A(t)^Tp(t)+Q(t)x(t)+S(t)^Tu(t)=-H_x(t,x(t),u(t),p(t)), & t\in[s,T],\\ x(s)=y, \quad p(T)=-Gx(T),\\ \langle B(t)^Tp(t)-S(t)x(t);u(t)\rangle-\frac{1}{2}\langle R(t)u(t);u(t)\rangle=\max_{u\in\mathbb{R}^k}\Big\{\langle B(t)^Tp(t)-S(t)x(t);u\rangle-\\ \quad-\frac{1}{2}\langle R(t)u;u\rangle\Big\}, & \text{q.o. } t\in[s,T].\end{cases}$$

(Condizione del massimo di Pontryagin)

(sistema forward-backward lineare (+ condizione del massimo))

OSSERVAZIONE. La condizione del massimo di Pontryagin equivale alla condizione seguente:

$$\begin{cases}R(t)u(t)-B(t)^Tp(t)+S(t)x(t)=0, & \text{q.o. } t\in[s,T],\\ R(t)\geq 0, & \text{q.o. } t\in[s,T]\end{cases}$$

(cioè $R\geq 0$). In particolare, sotto tale condizione, se $R\overset{\forall t}{>}0$ allora il controllo è esprimibile in forma feedback come

$u(t)=R(t)^{-1}[B(t)^Tp(t)-S(t)x(t)]$ $t\in[s,T]$ (vincoli di disuguaglianza rognosi...)

Problema (DLQ) standard : è il Problema (DLQ) per il quale i coefficienti $(Q(\cdot), S(\cdot), R(\cdot)$ e $G)$ del funzion
costo godono delle seguenti proprietà :

$$R \gg 0, \qquad Q - S^T R^{-1} S \geq 0 \quad e \quad G \geq 0 .$$

OSSERVAZIONE. Se $\inf\limits_{u(\cdot)\in \mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) > -$ allora $R \geq 0$.

Principio del massimo di Pontryagin per il Problema (DLQ) ed esistenza di un unico controllo ottimale per il Problema (DLQ) standard.

I Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ per il Problema (DLQ), allora esiste una variabile aggiunta $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,;(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ tale che la tripl (ottimale) $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot))$ sia soluzione del sistema hamiltoniano esteso del Problema (DLQ) :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + b(t), & t \in [s,T], \\ \dot{p}(t) = -A(t)^T p(t) + Q(t)\bar{x}(t) + S(t)^T \bar{u}(t), & t \in [s,T], \\ \bar{x}(s) = y, \qquad p(T) = -G\bar{x}(T), \\ R(t)\bar{u}(t) - B(t)^T p(t) + S(t)\bar{x}(t) = 0, & \text{q.o. } t \in [s,T], \\ R(t) \geq 0, & \text{q.o. } t \in [s,T] . \end{cases}$$

II Se il Problema (DLQ) è standard, allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per tale problema. Inoltre, se $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\bar{u}(\cdot))$, allora esiste una ed una sola variabile aggiunta $\bar{p}(\cdot) \equiv p(\cdot\,;(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ tale ch $\bar{u}(\cdot)$ risulta esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = R(t)^{-1}\left[B(t)^T \bar{p}(t) - S(t)\bar{x}(t) \right], \qquad t \in [s,T] .$$

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (DLQ)) : $V(s,y) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\begin{cases} V(s,y) \overset{\Delta}{=} \inf\limits_{u(\cdot)\in \mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n , \\ V(T,y) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}\langle Gy ; y \rangle & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n . \end{cases}$$

L'EQUAZIONE HJB (DEL PROBLEMA (DLQ)) :

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + \sup\limits_{u\in U} \Big\{ -\frac{1}{2}\langle R(t)u ; u \rangle - \langle B(t)^T v_x(t,x) + S(t)x ; u \rangle - \Big[\frac{1}{2}\langle Q(t)x ; x \rangle + \langle A(t)^T v_x(t,x) ; x \rangle \\ \quad + \langle v_x(t,x) ; b(t) \rangle \Big] \Big\} = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n , \\ v(T,x) = \frac{1}{2}\langle Gx ; x \rangle , & x \in \mathbb{R}^n , \end{cases}$$

nelle incognite $v(t,x) \in C^{1,1}([0,T] \times \mathbb{R}^n : \mathbb{R})$

L'EQUAZIONE DI RICCATI (DEL PROBLEMA (DLQ)): nell'ipotesi che $R > 0$,

(quadratica nell'incognita)

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) + Q(t) - [B(t)^T P(t) + S(t)]^T R(t)^{-1} [B(t)^T P(t) + S(t)] = 0, \\ \text{q.o. } t \in [0,T], \\ P(T) = G \end{cases}$$

(backward)

nell'incognita $P(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n^2})$. (Equivalentemente,

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)[A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)] + [A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)]^T P(t) - \\ \quad - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t) + Q(t) - S(t)^T R(t)^{-1} S(t) = 0, \quad \text{q.o. } t \in [0,T], \\ P(T) = G \quad .) \end{cases}$$

(Compaiono tutti i coefficienti tranne $b(\cdot)$)

OSSERVAZIONE. La locale lipschitzianità in $P(\cdot)$ implica la locale risolubilità. Grazie alla limitatezza dei coefficienti, se $R >> 0$ allora sussiste l'unicità della soluzione e $P(t) \in S^n$.

La ~~equazione~~ ODE lineare associata all'equazione di Riccati (del Problema (DLQ)): nell'ipotesi che $R >> 0$,

(backward ODE lineare)

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) + \{[A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)]^T - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T\}\varphi(t) + P(t)b(t) = 0, \quad \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

nell'incognita $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot; P(\cdot)) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

($\varphi(\cdot)$ esiste unica dove $P(\cdot)$ esiste (unica))

(Compaiono tutti i coefficienti tranne $Q(\cdot)$ e G) (impliciti, in realtà, nella $P(\cdot)$)

Teorema (Ottimalità via l'equazione di Riccati). Sia assunta la condizione $R >> 0$. ~~Sia~~ Supponiamo che esista la soluzione $P(\cdot) \in C([0,T]; S^n)$ (su tutto $[0,T]$) dell'equazione di Riccati del Problema (DLQ), e sia quindi $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot; P(\cdot)) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$ la soluzione della ~~equazione~~ ODE lineare associata. Allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il Problema (DLQ), e se $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot, \bar{u}(\cdot))$ allora esiste una ed una sola variabile aggiunta $\bar{p}(\cdot) \equiv p(\cdot; (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ tale che $\bar{u}(\cdot)$ risulti esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = R(t)^{-1}[B(t)^T \bar{p}(t) - S(t)\bar{x}(t)], \quad t \in [0,T].$$

Precisamente è

$$\bar{p}(t) = -P(t)\bar{x}(t) - \varphi(t), \quad t \in [0,T],$$

per cui

$$\boxed{\bar{u}(t) = -R(t)^{-1}[(B(t)^T P(t) + S(t))\bar{x}(t) + B(t)^T \varphi(t)], \quad t \in [0,T]}.$$

(Compaiono solo i coefficienti di "$\bar{u}(\cdot)$" (esplicitamente))

Inoltre, la funzione valore del Problema (DLQ) assume la seguente forma:

$$V(s,y) = \frac{1}{2}\langle P(s)y; y\rangle + \langle \varphi(s); y\rangle + \frac{1}{2}\int_s^T \left\{ 2\langle \varphi(t); b(t)\rangle - \left|R(t)^{-\frac{1}{2}} B(t)^T \varphi(t)\right|^2 \right\} dt$$

$y \in \mathbb{R}^n$.

Corollario (Per il Problema (DLQ) standard). Se il Problema (DLQ) è standard, allora l'equazione di Riccati corrispondente ammette una (sola) soluzione $P(\cdot)$ su tutto $[0,T]$ e, se $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot; P(\cdot))$ è la soluzione della ODE lineare associata, allora ~~[illegible]~~ il controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il problema è

$$\bar{u}(t) = -R(t)^{-1}\left[(B(t)^T P(t) + S(t))\bar{x}(t) + B(t)^T \varphi(t)\right], \quad t \in [0,T].$$

Inoltre, è $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$.

PROBLEMI STOCASTICI DI CONTROLLO OTTIMALE: FORMULAZIONE FORTE E FORMULAZIONE DEBOLE.

I DATI ASSEGNATI (PER ENTRAMBE LE FORMULAZIONI): $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T \in (0,+\infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, (U,d) spazio metrico separabile; $b : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}^n$ $(b(\cdot) \equiv (b_1(\cdot), \dots, b_n(\cdot))^T)$, $\sigma : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}^{n\times m}$ $(\sigma(\cdot) \equiv (\sigma_{ij}(\cdot))_{i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m})$, $f : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ mappe misurabili.

I DATI ASSEGNATI IN PIÙ PER LA FORMULAZIONE FORTE: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ spazio di probabilità filtrato tale che la filtrazione $\mathbb{F} \doteq (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ su Ω soddisfi le due usuali condizioni (di completezza e di continuità a destra) e tale che $W(\cdot) \doteq (W(t))_{0\le t\le T} \equiv$ ~~[illegible]~~ $((W^{(1)}(t), \dots, W^{(m)}(t))^T)_{0\le t\le T}$ sia un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ m-dimensionale (il, a meno di modifiche): brevemente, tale che $W(\cdot)$ sia un m-$\mathbb{F}$-Wiener.

(ES. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W \triangleq$ la filtrazione generata da $W(\cdot)$) (Qui stiamo indicando $W(t) \equiv W(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$

OSSERVAZIONE. Le mappe b, σ, f e h sono non-aleatorie!)

NOTA. ~~[illegible]~~ Ogni processo che entrerà in gioco nel seguito sarà perlomeno adattato a $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-adattato) – o meglio progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-progress. mis.) – e per cui potremo supporre $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

IL SISTEMA DI CONTROLLO ~~PER LA~~ IN FORMULAZIONE FORTE: (ad orizzonte finito) (se $\sigma \equiv 0$, allora è tutto deterministico)

(controlled SDE) (a coeff. aleatori $\mathbb{F}$-progr. mis.)

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))\,dt + \sigma(t, x(t), u(t)) \cdot dW(t), & t \in [0,T],\ P\text{-q.c.} \\ x(0) = x_0, & P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

$x(t,\omega; u(\cdot))$

nelle incognite $u(t) \equiv u(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to U$ (controllo) processo in U $\mathbb{F}$-progr. mis. e $x(t) \equiv x(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ (traiettoria) processo di Itô in $\mathbb{R}^n$ rispetto a $\mathbb{F}$ e $W(\cdot)$: intendiamo precisamente che

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s,x(s),u(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,x(s),u(s))\cdot dW(s)$$ per ogni $t\in[0,T]$ e P-q.c. *

Notazione: per ogni $i=1,\dots,n$, denotiamo con $\sigma_{(i)}(\cdot) \triangleq (\sigma(\cdot)_{i,1}(\cdot),\dots,\sigma(\cdot)_{i,m}(\cdot))^T$ la trasposta della i-esima riga di $\sigma(\cdot)$ mentre, per ogni $j=1,\dots,m$, denotiamo con $\sigma^{(j)}(\cdot)\triangleq(\sigma(\cdot)_{1,j}(\cdot),\dots,\sigma(\cdot)_{n,j}(\cdot))^T$ la j-esima colonna di $\sigma(\cdot)$. Allora la decomposizione di Itô di $x(\cdot)$ è equivalente alla seguente:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s,x(s),u(s))\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{(j)}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s),$$ $t\in[0,T]$ e P-q.c., o cioè

$$\boxed{x_i(t) = (x_0)_i + \int_0^t b_i(s,x(s),u(s))\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s), \quad \forall t\in[0,T] \text{ e P-q.c.}, \forall i=1,\dots,n.}$$

$$dx_i(t) = b_i(t,x(t),u(t))\,dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}(t,x(t),u(t))\,dW^j(t)$$

(processo reale F-adattato, nullo in zero e continuo (quindi F-progr. mis.) e a variazione limitata, quindi a variazione quadratica nulla)

(∀ $j=1,\dots,m$, F-martingala locale nulla in zero e continua (quindi F-progr. mis.), quindi ammette variazione quadratica)

(sono a loro volta processi di Itô reali rispetto a $\mathbb{F}(\cdot)$ e $W(\cdot)$)

(in particolare, $d\left(\int_0^t b_i(s,x(s),u(s))\,ds\right) = b_i(t,x(t),u(t))\,dt$ per ogni $i=1,\dots,n$, e $d\left(\int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s)\right) = \sigma_{i,j}(t,x(t),u(t))\,dW^j(t)$ per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$)

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che tutte le componenti $x_i(\cdot)$ di $x(\cdot)$ ammetteranno variazione quadratica $[x_i]\equiv([x_i]_t)_{0\le t\le T}$ data da

$$[x_i]_t = \left[\left(\sum_{j=1}^m \int_0^{\cdot} \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s)\right)\right]_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))^2\,ds = \int_0^t |\sigma_{(i)}(s,x(s),u(s))|^2\,ds$$ (per ogni $i=1,\dots,n$ e per ogni $t\in[0,T]$ e P-q.c.)

e cioè tale che $d[x_i]_t = |\sigma_{(i)}(t,x(t),u(t))|^2\,dt$. Più in generale, la covariazione delle componenti di $x(\cdot)$ è data da

$$[x_i,x_h]_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,\sigma_{h,j}(s,x(s),u(s))\,ds = \int_0^t \langle\sigma_{(i)}(s,x(s),u(s));\sigma_{(h)}(s,x(s),u(s))\rangle\,ds =$$

$$= \int_0^t \left(\sigma(s,x(s),u(s))\,\sigma(s,x(s),u(s))^T\right)_{i,h}\,ds$$ per ogni $i,h=1,\dots,n$, $t\in[0,T]$ e P-q.c.,

e cioè tale che $d[x_i,x_h]_t = \left(\sigma(t,x(t),u(t))\,\sigma(t,x(t),u(t))^T\right)_{i,h}\,dt$ $(= dx_i(t)\,dx_h(t))$

* I due processi $u(\cdot)$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$ devono essere tali per cui $(b_i(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T}\in\Lambda^1_{\mathbb{F},W}(0,T)$ e $(\sigma_{i,j}(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T}\in\Lambda^2_{\mathbb{F},W^j}(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$, o equivalentemente

$$\int_0^T \{|b(t,x(t,\omega),u(t,\omega))| + |\sigma(t,x(t,\omega),u(t,\omega))|^2\}\, dt < +\infty \quad \text{per } P\text{-q.o. } \omega\in\Omega \,.)$$

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che, per un tale processo di Itô $x(\cdot)$, quale che sia $F(t,x_1,\dots,x_m) : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_{(x_1,\dots,x_m)} \to \mathbb{R}$ di classe $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$, il processo reale $F(\cdot,x(\cdot)) \equiv (F(t,x_1(t),\dots,x_m(t)))_{0\le t\le T}$ risulta a sua volta un processo di Itô (reale) rispetto a $\mathbb{F}$ e $W(\cdot)$, e la sua decomposizione di Itô è data in notazione differenziale dalla formula di Itô:

$$dF(t,x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t))dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,x(t))dx_i(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(t,x(t))\, d[x_i,x_k]_t$$

$\left(= \frac{1}{2}\text{Traccia}\left(D^2F(t,x(t)) \cdot \sigma(t,x(t),u(t)) \cdot \sigma(t,x(t),u(t))^T\right)dt\right.$

(la correzione di Itô)

Una elementare applicazione è la formula stocastica d'integrazione per parti: dati $x(\cdot)\equiv(x(t))_{0\le t\le T}$ e $y(\cdot)\equiv(y(t))_{0\le t\le T}$ due processi di Itô reali, anche il processo reale $x(\cdot)y(\cdot)\equiv(x(t)y(t))_{0\le t\le T}$ è un processo di Itô reale e la sua decomposizione di Itô è data da

$$d(x(t)y(t)) = y(t)dx(t) + x(t)dy(t) + d[x,y]_t \,.$$

(ES. $d(x(t)^2) = 2x(t)dx(t) + d[x]_t$.)

IL FUNZIONALE COSTO (PER LA FORMULAZIONE FORTE): $\boxed{J(u(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,x(t),u(t))dt + h(x(T))\right]}$ $(\in\mathbb{R})$ al variare di $u(\cdot) : [0,T]\times\Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. e dove $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$.

(dove $\mathbb{E}(\cdot)=E^P(\cdot)$)

I CONTROLLI AMMISSIBILI E LE COPPIE AMMISSIBILI IN SENSO FORTE: i controlli "ammissibili in senso forte" (o fortemente ammissibili) sono i controlli $u(\cdot) : [0,T]\times\Omega\to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. tali che esiste una ed una sola" soluzione $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$ della SDE di controllo ("una sola" a meno di indistinguibilità, ossia di modifiche uniformi: se $y(\cdot)\equiv y(\cdot;u(\cdot))$ è un'altra soluzione della SDE di controllo, allora $P[x(t)=y(t) \text{ per ogni } t\in[0,T]]=1$) e tali che inoltre risulti $(f(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e $h(x(T))\in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ (nel senso che $(f(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T}$ risulti un processo (reale) $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che $\mathbb{E}[\int_0^T|f(t,x(t),u(t))|dt]<+\infty$ mentre $h(x(T))$ risulti (una v.a.) $\mathcal{F}_T$-misurabile e con $\mathbb{E}[|h(x(T))|]<+\infty$).

NOTAZIONE: denotiamo con "$\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili in senso forte.
$\equiv \mathcal{U}^s_{ad}([0,T], n, m, x_0, (U,d), b, \sigma, f, h, (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P,W(\cdot)))$

Allora le coppie "ammissibili in senso forte" sono le coppie $(x(\cdot), u(\cdot))$: con $u(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$.

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO FORTE:

Problema (SS): minimizzare $J(\cdot)$ su $\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$. (**Convenzione:** $\inf \emptyset = +\infty$)

Ipotesi (H0) (di finitezza) (per la formulazione forte):

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)) > -\infty .$$

I CONTROLLI / LE COPPIE OTTIMALI IN SENSO FORTE per il Problema (SS)**:** i controlli $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$ soluzioni del Problema (SS) nel senso che $J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]} J(u(\cdot))$ / le coppie $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ con $\bar{u}(\cdot)$ controllo ottimale in senso forte e $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$.

Un teorema di esistenza di un controllo ottimale in senso forte: Siano assegnati $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m = 1$, $T \in (0, +\infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^k$; $A, C \in \mathbb{R}^{n^2}$, $B, D \in \mathbb{R}^{n \times k}$; $f : \mathbb{R}^n_x \times U \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ mappe misurabili. Sia assunta almeno una delle 2 ipotesi (H1) e (H2) su U, f e h date in seguito:

(H1) Lo spazio U è convesso e chiuso in $\mathbb{R}^k$. Inoltre le mappe f e h sono convesse (su tutto il proprio dominio di definizione) ed esistono due costanti $\delta, K \in (0, +\infty)$, tali che $\boxed{f(x,u) \geq \delta |u|^2 - K \text{ e } h(x) \geq -K}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in U$.

(H2) Lo spazio U è convesso e compatto in $\mathbb{R}^k$. Inoltre le mappe f e h sono convesse (su tutto il proprio dominio di definizione).

Allora il Problema (SS) corrispondente al sistema di controllo (in formulazione forte)

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]dt + [Cx(t) + Du(t)]dW(t), & t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.,} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e al funzionale costo (in formulazione forte)

$$J(u(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T f(x(t), u(t))\,dt + h(x(T))\right],$$

per i quali sia assunta pure la corrispondente ipotesi (H0), ammette un controllo $\bar{u}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T; U)$ ottimale (in senso forte).

(Un Problema (SS) di questa forma è un particolare problema lineare-convesso stocastico di controllo ottimale.)

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO DEBOLE:

Problema (WS): è del tutto analogo al Problema (SS) ma con la differenza (essenziale) che pure lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ diventa parte del controllo.

I CONTROLLI AMMISSIBILI IN SENSO DEBOLE: tutte le sestuple $\pi \doteq (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$, o anche $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$, che godono delle due seguenti proprietà:

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ è uno spazio di probabilità filtrato tale che la filtrazione $\mathbb{F}$ su Ω $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$ soddisfi le usuali condizioni e tale che $W(\cdot)$ sia un m-$\mathbb{F}$-Wiener.

(ii) $u(t) \equiv u(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to U$ è un processo $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che esiste una ed una sola soluzione $x(t; u(\cdot)) \equiv x(t,\omega; u(\cdot)) \equiv x(t,\omega;\pi) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ della SDE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))\,dt + \sigma(t,x(t),u(t))\cdot dW(t), & t \in [0,T],\ P\text{-q.c.}, \\ x(0) \equiv x_0, & P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

e tale che inoltre risulti $(f(t,x(t),u(t)))_{0 \le t \le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e

$h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$.

NOTAZIONE: denotiamo con "$\mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili in senso debole. Le "coppie ammissibili in senso debole" sono le coppie $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$. (ES. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$ con $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ assegnato e $u(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$.)

Problema (WS): minimizzare $\overset{J(u(\cdot))}{\overset{\shortparallel}{J(\pi)}}$ al variare di $\underset{u(\cdot)}{\pi} \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$, dove

$$J(u(\cdot)) \equiv J(\pi) \doteq J(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$= \mathbb{E}^P\left[\int_0^T f(t,x(t;u(\cdot)),u(t))\,dt + h(x(T;u(\cdot)))\right]$$

per ogni $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$.

Ipotesi (SE0) di finitezza (per la formulazione debole): $\inf_{\overset{\pi}{u(\cdot)} \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]} J(\pi) > -\infty$.

I CONTROLLI OTTIMALI IN SENSO DEBOLE per il Problema (WS): i controlli $\bar{u}(\cdot) \equiv \bar{\pi} = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{P}, \bar{W}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ $\in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$ soluzioni del Problema (WS) nel senso che

$J(\bar{\pi}) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]} J(\pi)$. Le "coppie ottimali in senso debole" sono le coppie $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ con $\bar{u}(\cdot) \equiv \bar{\pi}$ controllo ottimale (in senso debole) e $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$.

LE IPOTESI PER L'ESISTENZA DI UN CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO DEBOLE:

(oltre a (SE0))

(su U, b, σ, f e h)

SE1) Lo spazio metrico (U,d) è compatto, cioè completo e totalmente limitato.
In (particolare è polacco.)

SE2) Esiste una costante $L \in (0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},u)| \leq L\,|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \leq L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U \end{cases}$$

SE3) Per ogni $t\in[0,T]$ e $x\in\mathbb{R}^n$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+n^2+1}$

$$(b, \sigma\sigma^T, f)(t,x,U) \triangleq \left\{ \left(b_i(t,x,u), (\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T)_{i,k}, f(t,x,u) \right)_{\substack{i=1,\dots,n,\\ k=1,\dots,n}} \,\middle|\, u\in U \right\}$$

è ivi convesso. ("Condizioni di Roxin")

Teorema (Esistenza di un controllo ottimale in senso debole). Siano assunte le ipotesi (SE0) — (SE3). Allora il Problema (WS) ammette un controllo ottimale.

LE IPOTESI PER LE CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ DI PONTRYAGIN PER IL CASO STOCASTICO IN FORMULAZIONE FORTE:

(su U; b, σ, f, h e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$)

S0) La filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ su Ω coincide con quella generata da $W(\cdot)$, ossia $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$, o $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W_t$ per ogni $t\in[0,T]$.

S1) Lo spazio metrico (U,d) è separabile. (⚠ Non era già supposto?!) $(\equiv(D1))$

S2) Esistono una costante $L\in(0,+\infty)$ ed un modulo di continuità $\bar{\omega}: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti
quasi $\equiv(D2)$

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},\hat{u})| \leq L\,|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \leq L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U \end{cases}$$

S3) Le mappe $b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^2 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$. Inoltre esistono una costante $L\in(0,+\infty)$ ed un modulo di continuità
$\Rightarrow (D3)$ (a meno di σ)
$\bar{\omega}: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tali che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$,

risulti

$$\begin{cases} |f_x(t,x,u) - f_x(t,\hat{x},\hat{u})| \le L|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) \\ |f_{xx}(t,x,u) - f_{xx}(t,\hat{x},\hat{u})| \le \bar{\omega}(|x-\hat{x}| + d(u,\hat{u})) \end{cases}$$ per ogni $t\in[0,T]$, $x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ e $u,\hat{u}\in U$.

(S4) Esiste $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che U sia un corpo convesso di $\mathbb{R}^k$. Inoltre, le mappe b,σ e f sono localmente lipschitziane nelle variabile $u\in U$, sono di classe C^1 nella variabile $x\in\mathbb{R}^n$ e le mappe b_x,σ_x e f_x sono continue in $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times U$.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi (S1) e (S2), ogni controllo è ammissibile.

LA FUNZIONE HAMILTONIANA-H, LA FUNZIONE HAMILTONIANA GENERALIZZATA E LA FUNZIONE-$\mathcal{H}$ (DEI PROBLEMI (SS) e (WS)):

(dipendono da b,σ e f)

Le hamiltoniane-H: $H(t,x,u,p,q):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\to\mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p,q) \triangleq \langle p, b(t,x,u)\rangle + \underbrace{\mathrm{tr}[q^T\sigma(t,x,u)]}_{(\in\mathbb{R}^{m^2})} - f(t,x,u).$$

$$\left(=\sum_{j=1}^{m}\langle q^{(j)},\sigma^{(j)}(t,x,u)\rangle\right)$$

(σ interviene al primo ordine)

(Ancora, $q=(q_{ij})$ con $q_{(i)}\triangleq(q_{i,1},\dots,q_{i,m})^T$ e $q^{(j)}\triangleq(q_{1,j},\dots,q_{n,j})^T$.)

Le hamiltoniane generalizzate: $G(t,x,u,p,P):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times S^n\to\mathbb{R}$,

$$G(t,x,u,p,P) \triangleq \frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{tr}\left[\sigma(t,x,u)^TP\,\sigma(t,x,u)\right]}_{(m^2)} + \langle p, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u).$$

$$\left(\overset{(\text{simm.})}{=}\mathrm{tr}[P\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T] = \sum_{i=1}^{n}\langle P^{(i)};(\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T)^{(i)}\rangle\right)$$

(σ interviene al secondo ordine)

~~Le funzione-$\mathcal{H}$: associate ad una quintuple $(\bar{x},\bar{u},\bar{p},\bar{q},\bar{P})\in\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times S^n$ $\mathcal{H}(t,x,u,p,q,P):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times S^n\to\mathbb{R}$, $(\equiv\mathcal{H}(t,x,u,p,q,P;(\bar{x},\bar{u},\bar{p},\bar{q},\bar{P})))$ $\mathcal{H}(t,x,u,p,q,P)\triangleq H(t$~~

Le funzione-$\mathcal{H}$ associate ad una quintuple $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot))$, dove $x(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $u(\cdot):[0,T]\times\Omega\to U$, $p(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $q(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^{n\times m}$ e $P(\cdot):[0,T]\times\Omega\to S^n$:

$$\mathcal{H}(t,x,u) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R},$$

(σ interviene al primo e al secondo ordine)

$$\mathcal{H}(t,x,u) \triangleq H(t,x,u,p(t),q(t)) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x(t),u(t))^TP(t)\sigma(t,x(t),u(t))]$$
$$+\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{tr}\left[[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x(t),u(t))]^TP(t)[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x(t),u(t))]\right]}_{(m^2)} =$$
$$= G(t,x,u,p(t),P(t)) + \mathrm{tr}\left[\sigma(t,x,u)^T\left[q(t)-P(t)\sigma(t,x(t),u(t))\right]\right].$$

(**OSSERVAZIONE.** Per ogni $(t,x,u,p,q,P)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times S^n$, è

$$H(t,x,u,p,q) = H(t,x,u,p) + \mathrm{tr}[q^T\sigma(t,x,u)]$$

$$G(t,x,u,p,P) = H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P\,\sigma(t,x,u)]$$, per cui

$$\mathcal{H}(t,x,u) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P(t)\sigma(t,x,u)] + H(t,x,u,p(t)) + $$
$$+ \underbrace{\mathrm{tr}[q(t)^T\sigma(t,x,u)]}_{\left(=\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T q(t)]\right)} - \mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P(t)\sigma(t,x(t),u(t))] \quad .)$$

I PROCESSI AGGIUNTI DEL PRIM'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL PRIM'ORDINE DEL PROBLEMA (SS):

assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^1 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$, per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso forte, un "processo aggiunto del prim'ordine" associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è un processo $p(t)\equiv p(t,\omega):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ $\equiv p(t,\omega;(x(\cdot),u(\cdot)))$ in $L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ tale per cui esiste un processo $q(t)\equiv q(t,\omega)\equiv q(t,\omega;p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot))))$: $[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^{n\times m}$ in $(L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ (nel senso che $q^{(j)}(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ per ogni $j=1,\dots,m$) (come se $q(\cdot)\equiv(q^{(1)}(\cdot),\dots,q^{(m)}(\cdot))$) tale che la coppia $(p(\cdot),q(\cdot))$ soddisfi "l'equazione aggiunta del prim'ordine" (backward SDE)

$$\begin{cases} dp(t) = -\Big[b_x(t,x(t),u(t))^T p(t) + \sum_{j=1}^{m}\sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t))^T q^{(j)}(t) - f_x(t,x(t),u(t))\Big]dt + \\ \qquad + q(t)\cdot dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ p(T) = -\underset{(\text{con } h)}{h_x}(x(T)), \quad P\text{-q.c.} \quad . \quad (\Rightarrow p(\cdot)\equiv p(\cdot;q(\cdot))) \end{cases}$$

(⚠ Imponendo l'adattamento a $\mathbb{F}$, NON ha senso un'inversione temporale per ottenere una backward SDE come una forward SDE!)

(**OSSERVAZIONE.** Equivalentemente, $dp(t) = -H_x(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\,dt + q(t)\cdot dW(t)$)

Osservazione. È fattibile dimostrare che, sotto le ipotesi (S0)–(S3), per ogni qualsiasi coppia processo $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot):[0,T]\times\Omega\to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. e con $x(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ esiste una ed una sola soluzione $(p(\cdot),q(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)\times(L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ della backward SDE aggiunta.

I PROCESSI AGGIUNTI DEL SECOND'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL SECOND'ORDINE (DEL PROBLEMA (SS)):

assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^2 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$, per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso forte che ammette un processo aggiunto del prim'ordine $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,;(x(\cdot),u(\cdot)))$ e sia essa $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,;p(\cdot))$, allora "un processo aggiunto del second'ordine" associato a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ è un processo $P(t) \equiv P(t,\omega) \equiv P(t,\omega;(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))) : [0,T] \times \Omega \to S^n$ in $L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n)$ tale per cui esiste un processo $Q(t) \equiv Q(t,\omega) \equiv Q(t,\omega;P(\cdot)) : [0,T] \times \Omega \to (S^n)^m$ in $(L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n))^m$ (nel senso che $Q(\cdot) \equiv (Q^{(1)}(\cdot),\dots,Q^{(m)}(\cdot))$ con $Q^{(j)}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n)$ per ogni $j=1,\dots,m$) tale che la coppia $(P(\cdot),Q(\cdot))$ soddisfi "l'equazione aggiunta del second'ordine":

(backward SDE (a valori matriciali))

$$\begin{cases} dP(t) = -\Big\{ b_x(t,x(t),u(t))^T P(t) + P(t)\, b_x(t,x(t),u(t)) + \\ \quad + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t))^T P(t)\, \sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t)) + \\ \quad + \sum_{j=1}^{m} \Big[\sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t))^T Q^{(j)}(t) + Q^{(j)}(t)\, \sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t)) \Big] + \\ \quad + H_{xx}(t,x(t),u(t),p(t),q(t)) \Big\} dt + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\, dW^j(t) \quad , \ t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ P(T) = -h_{xx}(x(T)) \quad , \ P\text{-q.c.} \end{cases}$$

$(\Rightarrow P(\cdot) \equiv P(\cdot\,;Q(\cdot)))$

Osservazione. È possibile dimostrare che, sotto le ipotesi (S0)–(S3), per ogni qualsiasi ~~coppia~~ quadruple di processi $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ con $u(\cdot):[0,T]\times\Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis., $x(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ e $q(\cdot) \in (L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ esiste una ed una sola soluzione $(P(\cdot),Q(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n) \times (L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n))^m$ della backward SDE soprascritta.

LE SESTUPLE AMMISSIBILI/OTTIMALI IN SENSO FORTE: le sestuple $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ con: $(x(\cdot),u(\cdot))$ coppia ammissibile/ottimale in senso forte, $(p(\cdot),q(\cdot))$ coppia tale che $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,;(x(\cdot),u(\cdot)))$ è un processo aggiunto del prim'ordine associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ e $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,;p(\cdot))$, e quindi $(P(\cdot),Q(\cdot))$ coppia tale che $P(\cdot) \equiv P(\cdot\,;(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot)))$ è un processo aggiunto del secondo ordine associato a $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ e $Q(\cdot) \equiv Q(\cdot\,; P(\cdot))$.

IL SISTEMA HAMILTONIANO – H (DEL PROBLEMA (SS)) : assumendo sempre che b, σ, f e h siano C^2 nelle x, è il sistema "accoppiato" (soddisfatto dalle ~~da condizioni di~~) sestuple ammissibili $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$:

(forward-backward)

$$dx(t) = b(t, x(t), u(t))\,dt + \sigma(t, x(t), u(t))\cdot dW(t) =$$

$$= H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\cdot dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e P-q.c.},$$

$$dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + q(t)\cdot dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e P-q.c.},$$

$$dP(t) = \ldots$$

$$x(0) \equiv x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \quad P(T) = -h_{xx}(x(T)) \quad \text{P-q.c.}$$

Teorema (Principio del massimo di Pontryagin stocastico) (MP)

(Condizioni necessarie di ottimalità stocastica)

Siano assunte le ipotesi (S0)–(S3), oppure le ipotesi (S0) e (S1), più le (S2) ~~ma solo~~ per le sole $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u)$ e con le sole crescite lineari in x, più le (S3) ma con l'ipotesi che f e h siano di crescita polinomiale nelle x. Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ in senso forte, allora esiste uno ed un solo processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot), q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ (nel senso che esistono unici $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)))$ e $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,; p(\cdot))$), ed esiste uno ed un solo processo aggiunto del secondo ordine $(P(\cdot), Q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, tali che la sestupla (ottimale) $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ soddisfi la Condizione del massimo di Pontryagin stocastica: se $\mathcal{H}$ è la funzione-$\mathcal{H}$ associata alle quintuple $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot))$, allora

$$\boxed{\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), u)}, \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e P-q.c.},$$

o equivalentemente la disuguaglianza variazionale stocastica

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)) - H(t, \bar{x}(t), u, p(t), q(t)) -$$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[[\sigma(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - \sigma(t,\bar{x}(t),u)]^T P(t) [\sigma(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - \sigma(t,\bar{x}(t),u)] \right] \geq 0,$$

$u\in U$, q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c. -

IL SISTEMA HAMILTONIANO-H ESTESO (DEL PROBLEMA (S5)): assumendo anche che b,σ,f e h siano C^2 nelle x, è il sistema hamiltoniano-H (del Problema (S5)) soggetto alle condizioni del massimo di Pontryagin stocastico (o equivalentemente alla disuguaglianza variazionale stocastica): (...)

$$\begin{cases} dx(t) = H_p(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\,dt + H_q(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\cdot dW(t), & \forall t\in[0,T] \text{ e P-q.c.},\\ dp(t) = -H_x(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\,dt + q(t)\cdot dW(t), & \forall t\in[0,T] \text{ e P-q.c.},\\ dP(t) = \dots & \\ x(0)\equiv x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \quad P(T) = -h_{xx}(x(T)) & \text{P-q.c.}\\ \mathcal{H}(t,x(t),u(t)) = \max\limits_{u\in U}\mathcal{H}(t,x(t),u), & \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e P-q.c.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Se la mappa $\sigma(t,x,u)$ fosse indipendente dalla variabile $u\in U$, cioè se $\sigma(t,x,u)\equiv\sigma(t,x)$ per ogni $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $u\in U$, allora (dalla disuguaglianza variazionale stocastica) otteniamo subito che le condizioni del massimo (di Pontryagin) stocastiche diventerebbero

$$H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)) = \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,p(t),q(t)),$$ q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c., (parallelo al caso deterministico)

ed in particolare non avremmo bisogno né della coppia di processi $(P(\cdot),Q(\cdot))$ né delle regolarità C^2 in x dei coefficienti b,σ,f e h.

Un altro caso nel quale non occorrono né processi né regolarità al second'ordine è se U fosse un convesso di $\mathbb{R}^k$ ($k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) e le mappe b,σ,f e h fossero tutte C^1 nella u, perché in tal situazione le condizioni del massimo stocastiche diventerebbero

("forma locale" del principio del massimo)

$$\langle H_u(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)), u-\bar{u}(t)\rangle \le 0 \quad \forall u\in U,$$ per q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c.

Teorema (Condizioni sufficienti di ottimalità stocastica). Siano assunte le ipotesi del precedente teorema fino all'ipotesi (S4). Supponiamo inoltre che $h(\cdot)$ sia convessa su $\mathbb{R}^n$. Sia data una sestupla ammissibile in senso forte

$(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ tale che la mappa $H(t, \cdot, \cdot, p(t), q(t))$ risulti concava su $\mathbb{R}^n \times U$ per q.o. $t \in [0,T]$ e P-q.c., e tale che se $\mathcal{H}$ è la funzione associata alla quintupla $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot))$ allora

$$\mathcal{H}(t, x(t), u(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x(t), u), \quad \text{q.o. } t \in [0,T] \text{ e P-q.c.}$$

Allora la coppia $(x(\cdot), u(\cdot))$ è ottimale in senso forte.

Osservazione. La teoria delle condizioni di ottimalità di Pontryagin per il caso stocastico in formulazione DEBOLE è del tutto analoga, e basta di considerare ogni processo $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. come quello univocamente corrispondente ad una sestupla del tipo $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, P, W(\cdot), u(\cdot))$ (dunque la (SD) riguarda ogni possibile spazio di probabilità variabile) e, quindi, e basta di sostituire "Problema (SS)" con "Problema (WS)" e "senso forte" con "senso debole".

IL FRAMEWORK E LE IPOTESI PER LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA (DP) DI BELLMAN PER IL CASO STOCASTICO (IN FORMULAZIONE DEBOLE):

al variare di ogni assegnata coppia $(s, y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,

Problema (S_{sy}): minimizzare $J(s, y; \cdot)$ su "$\mathcal{U}^w_{ad}(s,T)$", dove con "$\mathcal{U}^w_{ad}(s,T)$" denotiamo l'insieme delle quintuple $\pi \equiv \pi(s) \equiv u(\cdot) \equiv u(\cdot; s) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) \equiv$
$\equiv (\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot; s), u(\cdot; s))$ che godono delle due seguenti proprietà:

i) $(\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot))$ è uno spazio di probabilità completo tale che $W(\cdot) \equiv (W(t))_{s \le t \le T}$ sia un m-Wiener su Ω e per il quale definiamo su Ω la filtrazione generata da $W(\cdot)$ $\boxed{\mathbb{F} = \mathbb{F}^W} \equiv \mathbb{F}^W(s) \equiv (\mathcal{F}^W_t(s))_{s \le t \le T}$.

ii) la mappa $u(t) \equiv u(t; s) \equiv u(t, \omega; s) : [s,T] \times \Omega \to U$ è un processo $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che esiste una ed una sola soluzione $x(t; u(\cdot)) \equiv x(t, \omega; u(\cdot)) \equiv x(t, \omega; \pi(s)) :$
$: [s,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ della SDE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$

$$\boxed{\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))\,dt + \sigma(t,x(t),u(t))\cdot dW(t), & t\in(s,T],\ P\text{-q.c.},\\ x(s) \equiv y, & P\text{-q.c.},\end{cases}}$$ (forward SDE)

e tale che inoltre risulti $\big(f(t,x(t),u(t))\big)_{s\le t\le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(s,T;\mathbb{R})$ e $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$.*

Quindi $$\boxed{J(s,y;\pi) \equiv J(s,y;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\Big[\int_s^T f(t,\underset{(x(t;u(t)))}{x(t)},u(t))\,dt + h(\underset{(x(T;u(\cdot)))}{x(T)})\Big]}$$

per ogni $\pi \equiv u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$.

(S1)' Lo spazio metrico (U,d) è polacco. $(\equiv (S1) + \text{completezza})$ $(U, b, \sigma, f \text{ e } h)$

(S2)' Le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte uniformemente continue. Inoltre esiste una costante $L\in(0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$, $h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},u)| \le L|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U\\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U.\end{cases}$$

(S3)' $\equiv$ (S3)

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (WS)): ((S)) $V(s,y) : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$,

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n\\ V(T,y) \triangleq h(y) & \text{per ogni } y\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (HJB) (DEL PROBLEMA (WS)): ((S))

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + \sup\limits_{u\in U} G(t,x,u,-v_x(t,x),-v_{xx}(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n;\\ v(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}$$

(backward PDE del second'ordine)

nelle incognite $v(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.

(dove G è la hamiltoniana generalizzata del problema stocastico)

Teorema (Principio di ottimalità di Bellman stocastico: caso generale e caso liscio). Siano assunte le ipotesi (S1)' e (S2)'. Allora la funzione valore $V(s,y)$ del Problema (WS) verifica le equazione della programmazione dinamica (stocastica):

$$V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} \Big\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))\,dt +$$

$$. \qquad + V(\hat{s}, x(\hat{s};s,y,u(\cdot))) \Big\}$$ per ogni $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\hat{s}\in[s,T]$

Se poi esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ per il Problema ~~(WS)~~ $(S_{s,y})$, ~~allora~~ dove $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e $\bar{u}(\cdot)\equiv(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$, allora

$$V(t,\bar{x}(t)) = E^{\bar{P}}\Big[\int_t^T f(r,\bar{x}(r),\bar{u}(r))\,dr + h(\bar{x}(T)) \,\Big|\, \mathcal{F}^W_t(s)\Big]$$ per ogni $t\in[s,T]$ (e $\bar{P}$-q.c.).

Inoltre, se $V(s,y)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora V è ~~la~~ una soluzione pure dell'equazione HJB del Problema (WS):

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Teorema (Di verifica (stocastico)). Siano assunte le ipotesi (S1)' e (S2)'. Allora ciascuna soluzione $v(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ dell'equazione HJB del Problema (WS) soddisfa la disuguaglianza

$v(s,y) \le J(s,y;u(\cdot))$ per ogni $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e $u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$.

Inoltre, per ogni $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$, $\bar{u}(\cdot)$ è ottimale per il Problema (S_{sy}) se, e solo se, $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\bar{u}(\cdot))$ e $\bar{u}(\cdot)$ sono tali che

$$v_t(t,\bar{x}(t)) \equiv \max_{u\in U} G(t,\bar{x}(t),u,-v_x(t,\bar{x}(t)),-v_{xx}(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= G(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-v_x(t,\bar{x}(t)),-v_{xx}(t,\bar{x}(t))),$$

q.o. $t\in[s,T]$ e P-q.c.

Teorema (Una relazione fra il MP e la DP nel caso stocastico liscio).

Siano assunte le ipotesi $(S1)'$-$(S2)'$ e $(S3)$. Fissiamo $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e supponiamo che esiste una sestupla ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ per il Problema (S_{sy}) (con s al posto dello 0). Allora valgono le due seguenti proposizioni:

(i) Se $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora

$$V_t(t,\bar{x}(t)) = G(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-V_x(t,\bar{x}(t)),-V_{xx}(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= \max_{u\in U} G(t,\bar{x}(t),u,-V_x(t,\bar{x}(t)),-V_{xx}(t,\bar{x}(t))),$$

q.o. $t\in[s,T]$ e P-q.c.

(ii) Se $V\in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ e se pure V_{tx} esiste ed è continua, allora

$$\begin{cases} V_x(t,\bar{x}(t)) = -p(t) & \text{per ogni } t\in[s,T] \text{ e P-q.c.} \\ V_{xx}(t,\bar{x}(t))\cdot\sigma(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = -q(t) & \text{per q.o. } t\in[s,T] \text{ e P-q.c.} \end{cases}$$

In particolare, se $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora il processo reale

$$\left(V(t,\bar x(t)) + \int_s^t f(r,\bar x(r),\bar u(r))\,dr\right)_{s\le t\le T}$$, dove

$\bar u(\cdot) \equiv (\bar\Omega, \bar{\mathcal F}, \bar P, \bar W(\cdot), \bar u(\cdot))$, è una $\mathbb F^{\bar W}$-martingala.

PROBLEMI LINEARI-QUADRATICI STOCASTICI DI CONTROLLO OTTIMALE.

(in formulazione debole)

I DATI ASSEGNATI: $n, k, m \in \mathbb N\setminus\{0\}$, $T\in(0,+\infty)$, $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb R^n$;

$A(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb R^{n^2})$, $B(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb R^{n\times k})$, $b(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb R^n)$;

$C(\cdot)\equiv(C^{(1)}(\cdot),\dots,C^{(m)}(\cdot))\in(L^\infty(0,T;\mathbb R^{n^2}))^m$, $D(\cdot)\equiv(D^{(1)}(\cdot),\dots,D^{(m)}(\cdot))\in$

$\in(L^\infty(0,T;\mathbb R^{n\times k}))^m$, $\sigma(\cdot)\equiv(\sigma^{(1)}(\cdot),\dots,\sigma^{(m)}(\cdot))\in(L^\infty(0,T;\mathbb R^n))^m$;

$Q(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^n)$, $S(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb R^{k\times n})$, $R(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^k)$, $G\in S^n$.

Problema (SLQ): minimizzare $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal U^w_{ad}[s,T]$, dove: con $\mathcal U^w_{ad}[s,T]$ denotiamo l'insieme delle quintuple $\pi\equiv\pi(s)\equiv u(\cdot)\equiv u(\cdot;s)\equiv(\Omega,\mathcal F,P,W(\cdot),u(\cdot))\equiv$ $\equiv(\Omega,\mathcal F,P,W(\cdot;s),u(\cdot;s))$ che godono delle due seguenti proprietà.

i) Le triplette, $(\Omega,\mathcal F,P)$ è uno spazio di probabilità completo tale che $W(\cdot)\equiv(W(t))_{s\le t\le T}$ sia un m-Wiener su Ω e per il quale poniamo su Ω la filtrazione generata da $W(\cdot)$ $\mathbb F\equiv\mathbb F^W\equiv\mathbb F^W(s)\equiv(\mathcal F^W_t(s))_{s\le t\le T}$.

ii) La mappa $u(t)\equiv u(t;s)\equiv u(t,\omega;s):(s,T)\times\Omega\to\mathbb R^k$ $(U=\mathbb R^k)$ è un processo in $L^2_{\mathbb F}(s,T;\mathbb R^k)$ ~~[illegible]~~ tale che esiste una ed una sola soluzione $x(t;u(\cdot))\equiv x(t,\omega;u(\cdot))\equiv$ $\equiv x(t,\omega;\pi(s)):(s,T)\times\Omega\to\mathbb R^n$ in $L^2_{\mathbb F}(s,T;\mathbb R^n)$ della SDE lineare su $(\Omega,\mathcal F,\mathbb F,P,W(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)x(t)+B(t)u(t)+b(t)]dt \;+ \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m}[C^{(j)}(t)x(t)+D^{(j)}(t)u(t)+\sigma^{(j)}(t)]dW^{(j)}(t), \quad t\in(s,T], \quad P\text{-q.c.}, \\ x(s)\equiv y, \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

Quindi (quadratico)

$$J(s,y;\pi) \equiv J(s,y;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\Big[\frac{1}{2}\int_s^T \big\{\langle Q(t)x(t),x(t)\rangle + 2\langle S(t)x(t),u(t)\rangle + \langle R(t)u(t),u(t)\rangle\big\}\,dt + \frac{1}{2}\langle Gx(T),x(T)\rangle\Big]$$

per ogni $\pi \equiv u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$.

NOTA: Coerentemente con le notazioni generali, abbiamo $b(t,x,u) \equiv A(t)x + B(t)u + b(t)$,
$\sigma^{(j)}(t,x,u) \equiv C^{(j)}(t)x + D^{(j)}(t)u + \sigma^{(j)}(t)$,
$f(t,x,u) \equiv \frac{1}{2}\{\langle Q(t)x,x\rangle + 2\langle S(t)x;u\rangle + \langle R(t)u,u\rangle\}$ e $h(x) = \frac{1}{2}\langle Gx,x\rangle$

per ogni $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^k$ e $j=1,\dots,m$. ($\Rightarrow$ valgono le ipotesi per Pontryagin)

Problema (SLQ) standard: è il Problema (SLQ) per il quale i coefficienti $Q(\cdot)$, $S(\cdot)$, $R(\cdot)$ e G di $J(s,y;\cdot)$ godono delle seguenti proprietà:

$$R \gg 0\,, \quad Q - S^T R^{-1} S \geq 0 \quad \text{e} \quad G \geq 0\,.$$

(**OSSERVAZIONE.** Anche se $\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) > -\infty$, non è necessario che $R \geq 0$.)

LA FUNZIONE HAMILTONIANA: $H(t,x,u,p) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p) \triangleq -\frac{1}{2}\langle R(t)u;u\rangle + \langle B(t)^T p - S(t)x, u\rangle +$$
$$+ \Big\{-\frac{1}{2}\langle Q(t)x,x\rangle + \langle A(t)^T p, x\rangle + \langle p, b(t)\rangle\Big\}.$$

Ipotesi per semplicità: $m = 1$.

LA HAMILTONIANA-H: $H(t,x,u,p,q) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p,q) \triangleq H(t,x,u,p) + \langle q, C(t)x + D(t)u + \sigma(t)\rangle.$$

LA HAMILTONIANA GENERALIZZATA: $\mathcal{G}(t,x,u,p,P) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times S^n \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}(t,x,u,p,P) \triangleq H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]^T P [C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]$$

LA FUNZIONE - $\mathcal{H}$: (associata ad una quintupla $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot))$, dove $x(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $u(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^k$, $p(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $q(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $P(\cdot):[0,T]\times\Omega \to S^n$):

$$\mathcal{H}(t,x,u) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

$$\mathcal{H}(t,x,u) \triangleq \mathcal{H}(t,x,u,p(t),P(t)) + [C(t)x+D(t)u+\sigma(t)]^T\left\{q(t)-P(t)[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)]\right\}$$

$$\to \Big(H(t,x,u,p(t),q(t)) - \frac{1}{2}[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)]^T P(t)[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)] + \frac{1}{2}[C(t)(x-x(t))+D(t)(u-u(t))]^T P(t)[C(t)(x-x(t))+D(t)(u-u(t))]\Big)$$

I PROCESSI AGGIUNTI DEL PRIM'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL PRIM'ORDINE:

per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso debole, un processo aggiunto del primo ordine associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è una coppia di processi $(p(\cdot),q(\cdot)) \in (L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^2$ che soddisfano l'equazione aggiunta del primo ordine (backward SDE lineare)

$$\begin{cases} dp(t) = -\left[A(t)^T p(t) + C(t)^T q(t) - Q(t)x(t) - S(t)^T u(t)\right]dt + \\ \qquad + q(t)\,dW(t), \quad t\in[0,T], \ P\text{-q.c.}, \\ p(T) = -G\,x(T), \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

I PROCESSI AGGIUNTI DEL SECOND'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL SECOND'ORDINE:

per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso debole che ammette un processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$, un processo aggiunto del second'ordine associato a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ è una coppia di processi $(P(\cdot),\Lambda(\cdot)) \in (L^2_{\mathbb{F}}(0,T;S^n))^2$ che soddisfano l'equazione aggiunta del second'ordine (backward SDE lineare (e a valori matriciali))

$$\begin{cases} dP(t) = -\Big[A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + C(t)^T P(t) C(t) + \\ \qquad + C(t)^T\Lambda(t) + \Lambda(t)C(t) - Q(t)\Big]dt + \Lambda(t)\,dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ P(T) \equiv -G, \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(NON dipende da $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$, e anzi dipende solo dai coeff. di $x(t)$: $A(\cdot)$, $C(\cdot)$, $Q(\cdot)$ e G)

LA CONDIZIONE DEL MASSIMO DI PONTRYAGIN (STOCASTICA):

$$\begin{cases} R(t)u(t) - B(t)^T p(t) + S(t)x(t) - D(t)^T q(t) = 0, & \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ R(t) - D(t)^T P(t) D(t) \geq 0, & \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

($D(\cdot)$ e $R(\cdot)$ (e $P(\cdot)$))

$\Rightarrow$ se $\det R(\cdot) \neq 0$, allora $u(t) = R(t)^{-1}\left[B(t)^T p(t) - S(t)x(t) + D(t)^T q(t)\right]$, q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c.)

Principio del massimo di Pontryagin per il Problema (SLQ) ed esistenza di un "unico" controllo ottimale per il Problema (SLQ) standard.

I **a)** Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ in senso debole per il Problema (SLQ), allora esiste un processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)$ ed esiste un processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot)$ che soddisfano il sistema hamiltoniano esteso del Problema (SLQ):

$$\begin{cases} d\bar{x}(t)=[A(t)\bar{x}(t)+B(t)\bar{u}(t)+b(t)]dt+(C(t)\bar{x}(t)+D(t)\bar{u}(t)+\sigma(t))dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ dp(t)=-[A(t)^Tp(t)+C(t)^Tq(t)-Q(t)\bar{x}(t)-S(t)^T\bar{u}(t)]dt+q(t)dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ dP(t)=-[A(t)^TP(t)+P(t)A(t)+C(t)^TP(t)C(t)+C(t)^T\Lambda(t)+\Lambda(t)C(t)- \\ \qquad -Q(t)]dt+\Lambda(t)dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ \bar{x}(s)\equiv y, \quad p(T)=-G\bar{x}(T), \quad P(T)\equiv -G, & P\text{-q.c.} \\ R(t)\bar{u}(t)-B(t)^Tp(t)-D(t)^Tq(t)+S(t)\bar{x}(t)=0, & \text{q.o. } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ R(t)-D(t)^TP(t)D(t)\geq 0, & \text{q.o. } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

($\Rightarrow$ può essere $R \not\geq 0$)

(sistema stocastico forward-backward lineare, + condizione del MAX)

b) Sia assunto che $\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot))>-\infty$. Se T è un "punto di Lebesgue" delle mappe $R(\cdot)$ e $D(\cdot)$, allora vale $R(T)+D(T)^TGD(T)\geq 0$.

(Qualunque sia $F\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$, quasi ogni $x\in\mathbb{R}^N$ è un punto di Lebesgue per F:
$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\iint_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|dy=0.)$$

II Se il Problema (SLQ) è standard, con $\det R(t)\neq 0$ per q.o. $t\in[s,T]$ e con $R(\cdot)^{-1}\in L^\infty(s,T;S^k)$, allora esiste uno ed "un solo" controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ in senso debole per tale problema. (Questo significa che esist $\bar{u}(\cdot)\equiv(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ minimizzante per $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{U}^w_{ad}[s,T$ e tale che, se anche $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\tilde{u}(\cdot))\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ è minimizzante, allora $\bar{P}[\bar{u}(t)=\tilde{u}(t) \text{ per q.o. } t\in[s,T]]=1$.) Inoltre, se $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$, allora esiste uno ed un solo processo aggiunto del primo ordine $(\bar{p}(\cdot),\bar{q}(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ tale che $\bar{u}(\cdot)$ risulti esprimibile in forma feedback

$\bar{u}(t) = R(t)^{-1}\left[B(t)^T \bar{p}(t) - S(t)\bar{x}(t) + D(t)^T \bar{q}(t) \right]$, q.o. $t \in [s,T]$ e P-q.c. .

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di equivalenza): Il Problema (SLQ) ammette una (ed una sola) coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ in senso debole se, e solo se, (i) esiste una (ed una sola) soluzione $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), \bar{p}(\cdot), \bar{q}(\cdot))$ del sistema

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = [A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + b(t)]dt + [C(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{u}(t) + \sigma(t)]dW(t), & t \in [s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ d\bar{p}(t) = -[A(t)^T\bar{p}(t) + C(t)^T\bar{q}(t) - Q(t)\bar{x}(t) - S^*(t)^T\bar{u}(t)]dt + \bar{q}(t)dW(t), & t \in [s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ \bar{x}(s) \equiv y, \quad \bar{p}(T) = -G\bar{x}(T), \quad P\text{-q.c.}, \\ R(t)\bar{u}(t) + S(t)\bar{x}(t) - B(t)^T\bar{p}(t) - D(t)^T\bar{q}(t) = 0, & \text{q.o. } t \in [s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

e contemporaneamente, (ii) per ogni $u(\cdot) \in \underset{(\Omega,\mathcal{F},P,W(\cdot),u(\cdot))}{\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]}$, le soluzioni $(x_0(\cdot), p_0(\cdot), q_0(\cdot))$ di:

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + [C(t)x(t) + D(t)u(t)]dW(t), & t \in [s,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ dp(t) = -[A(t)^Tp(t) + C(t)^Tq(t) - Q(t)x(t) - S(t)^Tu(t)]dt + \\ \quad + q(t)dW(t), & t \in [s,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ x(s) \equiv 0, \quad p(T) = -Gx(T), \quad P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

(Come se $b(\cdot) \equiv \sigma(\cdot) \equiv 0$ e $y = 0$)

soddisfa

$$E^P\left[\int_s^T \langle R(t)u(t) + S(t)x_0(t) - B(t)^Tp_0(t) - D(t)^Tq_0(t) \,;\, u(t)\rangle dt\right] \geq 0$$

("stazionarietà")

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (SLQ)) : $V(s,y) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ V(T,y) \triangleq \frac{1}{2}\langle Gy, y\rangle & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

EQUAZIONE HJB (DEL PROBLEMA (SLQ)) :

$$-v_t(t,x) + \sup_{u \in U}\left\{ H(t,x,u,-v_x(t,x)) - \frac{1}{2}[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]^T \cdot v_{xx}(t,x) \cdot (C(t)x + D(t)u + \sigma(t)) \right\} = 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n,$$

$$v(T,x) = \frac{1}{2}\langle Gx; x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

nella incognita $v(t,x) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

L'EQUAZIONE DI RICCATI "STOCASTICA" (DEL PROBLEMA (SLQ)):

(è deterministica)

$$\begin{cases} \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) + Q(t) + C(t)^T P(t) C(t) - \\ - \left[B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right]^T \left(R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right)^{-1} \left[B(t)^T P(t) + S(t) + \right. \\ \left. + D(t)^T P(t) C(t)\right] = 0, \qquad q.o.\ t \in [0,T], \\ P(T) = G \qquad \text{(backward)} \\ R + D^T P D > 0 \end{cases}$$

(b(·) e σ(·) NON compaiono)

nelle incognite $P(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n^2})$.

OSSERVAZIONE. Se T è un punto di Lebesgue per R(·) e per D(·), e se vale la condizione $R(T) + D(T)^T G D(T) > 0$, allora l'equazione di Riccati stocastica è localmente risolubile (vicino a T).

Le ODE lineare associate all'equazione di Riccati stocastica:

assegnata una soluzione P(·) dell'equazione di Riccati stocastica,

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) + \left\{A(t) - B(t)\left[R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right]^{-1}\left(B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right)\right\}^T \varphi(t) - \\ + \left\{C(t) - D(t)\left[R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right]^{-1}\left(B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right)\right\}^T P(t)\sigma(t) \\ + P(t)b(t) = 0, \qquad q.o.\ t \in [0,T], \\ \varphi(T) = 0 \qquad \text{(backward)} \end{cases}$$

$\leftarrow$ nelle incognite $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot; P(\cdot)) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di unicità): Sia assunto che $D(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{m \times k})$ e $R(\cdot) \in C([0,T]; S^*)$. Supponiamo che esista su tutto [0,T] una soluzione $P(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n^2})$ dell'equazione di Riccati stocastica. Allora P(·) è l'unica soluzione di tale equazione, per cui in particolare $P(\cdot) \in S^n$. Inoltre, in questo caso, anche le ODE lineare associate a tale equazione ammette (una ed) una sola soluzione $\varphi(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di esistenza e unicità per il Problema (SLQ) standard): Sia assunto che $D(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^{n\times k})$ e $R(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];S^k)$. ~~Allora~~ Se il Problema (SLQ) è standard, esiste su tutto $[0,T]$ una (ed una sola) soluzione $P(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];S^n)$ dell'equazione di Riccati stocastica ed esiste una ed una sola soluzione $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$ della ODE lineare associata a tale equazione.

OSSERVAZIONE. Nel caso $n = k = 1$ e con tutti i coefficienti A, B, C, D, Q, S, R invarianti nel tempo (cioè numeri costanti), ~~Allora~~ è ben nota la completa classificazione dei possibili intervalli massimali di definizione (in $[0,+\infty)$) della soluzione $P(\cdot)$ dell'equazione di Riccati stocastica (in base a certe relazioni tra i coefficienti A, B, C, D, Q, S, R stessi). (D può essere supposto $= 1$ $(\neq 0)$)

Teorema (Ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica). Supponiamo che esiste su tutto $[0,T]$ una ed una sola soluzione $P(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];S^n)$ dell'equazione di Riccati stocastica del Problema (SLQ) tale che, se ~~se è quella~~ $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot\,;P(\cdot)) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$ è la soluzione della ODE lineare associata a tale equazione, ~~allora~~ e se poniamo

- $\Psi(\cdot):[0,T] \to \mathbb{R}^{k\times n}$, $\Psi \overset{\Delta}{\equiv} (R + D^T P D)^{-1}(B^T P + S + D^T P C)$ $\quad (\equiv \Psi(\cdot\,;P(\cdot)))$
- $\psi(\cdot):[0,T] \to \mathbb{R}^{k}$, $\psi \overset{\Delta}{\equiv} (R + D^T P D)^{-1}(B^T \varphi + D^T P \sigma)$ $\quad (\equiv \psi(\cdot\,;\varphi(\cdot)))$,

allora $B\Psi, D\Psi \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2})$ e $B\psi, D\psi \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$.

Allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ in senso debole per il Problema (SLQ) $((\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}, \bar{W}(\cdot), \bar{w}(\cdot)))$ ~~ed~~ e precisamente è esprimibile in forma feedback

$$\boxed{\bar{u}(t) = -\Psi(t)x(t) - \psi(t), \quad t \in [0,T] \text{ a } P\text{-q.c.}}$$

Inoltre, la funzione valore del Problema (SLQ) assume la seguente forma:

$$V(s,y) = \frac{1}{2}\langle P(s)y, y\rangle + \langle \varphi(s), y\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\int_s^T \left\{2\langle \varphi(t), b(t)\rangle + \langle P(t)\sigma(t), \sigma(t)\rangle - \left|\left[R(t)+D(t)^T P(t) D(t)\right]^{1/2}\phi(t)\right|^2\right\}dt\right],$$

$y \in \mathbb{R}^n$.

Caso $m \geq 1$: L'EQUAZIONE DI RICCATI STOCASTICA e le ODE lineare associate e il teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica.

$$\begin{cases} \dot{P} + PA + A^T P + \sum_{j=1}^{m} C^{(j)T} P C^{(j)} + Q - \\ - \left[B^T P + S + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P C^{(j)}\right]^T \left[R + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P D^{(j)}\right]^{-1} \left[B^T P + S + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P C^{(j)}\right] = 0, \\ \text{q.o. } t \in [0,T], \\ P(T) = G \\ R + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P D^{(j)} > 0 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} + \left[A - B\left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1}\left(B^T P + S + \sum_j D^{(j)T} P C^{(j)}\right)\right]^T \varphi + \\ + \sum_j \left[C^{(j)} - D^{(j)}\left(R + \sum_i D^{(i)T} P D^{(i)}\right)^{-1}\left(B^T P + S + \sum_i D^{(i)T} P D^{(i)}\right)\right]^T P \sigma^{(j)} + \\ + Pb = 0, \quad \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

Poniamo anche

$$\Psi \triangleq \left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1}\left[B^T P + S + \sum_j D^{(j)T} P C^{(j)}\right] \quad \text{e}$$

$$\phi \triangleq \left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1}\left[B^T \varphi + \sum_j D^{(j)T} P \sigma^{(j)}\right].$$ (... analogo ...)

Supponiamo che $\exists!\, P(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T], S^n)$ e $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$ tale che $B\Psi, D\Psi \in L^\infty$ e $B\phi, D\phi \in L^2$. Allora $\exists!\, \bar{u}(\cdot)$ ottimale per il Problema SLQ ed è

$$\bar{u}(t) = -\Psi(t)\bar{x}(t) - \phi(t), \quad t \in [s,T].$$ Inoltre

$$V(s,y) = \frac{1}{2}\langle P(s)y, y\rangle + \langle \varphi(s), y\rangle + \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\int_s^T\left\{2\langle \varphi(t), b(t)\rangle + \sum_j \langle P(t)\sigma^{(j)}(t), \sigma^{(j)}(t)\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left|\left[R(t) + \sum_j D^{(j)T}(t) P(t) D^{(j)}(t)\right]^{1/2}\phi(t)\right|^2\right\}dt\right], \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

UN ESEMPIO notevole di Problema (SLQ): ottimizzazione media-varianza di portafoglio. (MVO)

(con $n=1$ e $k=m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) (e $s=0$)

(Notazione: $\mathbb{R}_+ \triangleq [0,+\infty)$, $\hat{\mathbb{R}}_+ \triangleq \mathbb{R}_+\setminus\{0\}=(0,+\infty)$.)

I dati assegnati: (i) $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T\in\hat{\mathbb{R}}_+$, $(p_0,p_1,\dots,p_m)\in\hat{\mathbb{R}}_+^{m+1}$; $r(\cdot)\in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}_+)$, $b(\cdot)\equiv(b_1(\cdot),\dots,b_m(\cdot))^T\in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}^m_+)$, $\sigma(\cdot)\equiv(\sigma_{i,j}(\cdot))_{i,j=1,\dots,m}\equiv(\sigma^{(1)}(\cdot),\dots,\sigma^{(m)}(\cdot))\in(L^\infty(0,T;\mathbb{R}))^m$; $(N_0(0),N_1(0),\dots,N_m(0))^T\in\mathbb{R}_+^{m+1}\setminus\{0\}$; $(\Omega,\mathcal{F},P,W(\cdot))$ uno spazio di probabilità completo, dove $W(\cdot)\equiv(W(t))_{0\le t\le T}\equiv((W^1_1(t),\dots,W^m_m(t))^T)_{0\le t\le T}$ è un m-Wiener su Ω, nel quale consideriamo la filtrazione generata da $W(\cdot)$ $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}^W\equiv(\mathcal{F}^W_t)_{0\le t\le T}$.

Ipotesi basilari (su $r(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$): (i) $b_i(t)>r(t)\ (>0)$ per ogni $i=1,\dots,m$ e (per q.o.) $t\in[0,T]$,

(ii) $\sigma\sigma^T>>0$, nel senso che $\sigma(t)\sigma(t)^T\ge\delta I_m$ per q.o. $t\in[0,T]$ (e per un'opportuna costante $\delta\in(0,+\infty)$). ("non-degenerazione")

(1 solo bond) (titolo privo di rischio)

La ODE del prezzo $P_0(\cdot)$ del bond: (processo reale deterministico)

$$\begin{cases} dP_0(t)=r(t)P_0(t)\,dt, & t\in[0,T],\\ P_0(0)=p_0. \end{cases}$$

(il tasso d'interesse composto relativo al bond) (T data di maturazione, o di scadenza) (← prezzo iniziale del bond)

$$\Rightarrow\quad P_0(t)\overset{\forall t}{=}p_0\exp\Big(\int_0^t r(s)\,ds\Big)$$

(processi reali stocastici) (di Itô)

Le SDE dei prezzi $P_1(\cdot),\dots,P_m(\cdot)$ degli m stocks: per ogni $i=1,\dots,m$, (m stocks) (titoli con rischio)

((i) OK) ⟸ (i tassi di apprezzamento dello stock i-esimo)

$$\begin{cases} dP_i(t)=P_i(t)\Big\{b_i(t)\,dt+\sum_{j=1}^m\sigma_{i,j}(t)\,dW^j_j(t)\Big\}, & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},\\ P_i(0)\equiv p_i & P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(le volatilità dello stock j-esimo) (prezzo iniziale dello stock i-esimo)

$$\Rightarrow\ \text{per ogni } i=1,\dots,m,\quad P_i(t)\underset{P\text{-q.c.}}{\overset{\forall t}{=}}p_i\exp\Big(\int_0^t\Big(b_i(s)-\sum_{j=1}^m\frac{\sigma_{i,j}(s)^2}{2}\Big)ds+\sum_{j=1}^m\int_0^t\sigma_{i,j}(s)\,dW^j_j(s)\Big)$$

($N_0(0),N_1(0),\dots,N_m(0)$ sono NOTI)

Le strategie di portafoglio dell'investitore: per ogni $i=0,1,\dots,m$ e per (q.o.) $t\in[0,T]$, investire in $N_i(t)(\ge0)$ azioni del titolo i-esimo (in modo che restino così definite $m+1$ mappe $N_0(\cdot),N_1(\cdot),\dots,N_m(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}_+$ misurabili (non tutti $\equiv0$). (processi reali deterministici MA INCOGNITI: dipendono dall'andamento del mercato!)

Ipotesi di semplicità: le negoziazioni delle azioni avvengono in modo continuo nel tempo ed i relativi costi di transizione e di commercio risultano trascurabili. ($dN_i(t)\simeq0$)

Il valore di mercato delle ricchezze dell'investitore su ciascun titolo:

per ogni $i=0,1,\dots,m$ e per q.o. $t\in[0,T]$ (e P-q.c.), $\boxed{u_i(t)\triangleq N_i(t)P_i(t)}$. (processo reale stocastico INCOGNITO $\mathbb{F}$-progr. mis.)

La ricchezza totale dell'investitore: per q.o. $t\in[0,T]$ (e P-q.c.), ($\Rightarrow u_i(0)\equiv N_i(0)p_i$ P-q.c.)

(TRAIETTORIA)

$$\boxed{x(t)\triangleq\sum^m u_i(t)=\sum^m N_i(t)P_i(t)}\,.$$

(processo reale stocastico INCOGNITO)

Il portafoglio dell'investitore: (CONTROLLO) per q.o. $t \in [0,T]$ e P-q.c., $\boxed{u(t) \triangleq (u_1(t),\dots,u_m(t))^T}$ $(\Rightarrow x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot)))$

(processo stocastico in $\mathbb{R}^m$ INCOGNITO) (sono $\mathbb{F}$-progr. mis.) (sono consentite operazioni relative allo scoperto (SHORT SELLING))

(osservato che istante per istante $u(t)$ è univocamente determinato da $u_1(t),\dots,u_m(t)$, noto $x(t)$)

Il problema di ottimizzazione media-varianza di portafoglio:

determinare una strategia di portafoglio $(\bar N_0(\cdot),\bar N_1(\cdot),\dots,\bar N_m(\cdot))^T$, o equivalentemente un portafoglio $\bar u(\cdot)$, tali per cui $\bar u(\cdot)$ sia in $L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ e sia tale che, se $\bar x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\bar u(\cdot))$ $(\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}))$, allora

$$\begin{cases} \mathbb{E}^{P}[\bar x(T)] = \max\limits_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)} \mathbb{E}^{P}[x(T;u(\cdot))] \\[2ex] \mathrm{Var}^{(P)}[\bar x(T)] = \min\limits_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)} \mathrm{Var}^{(P)}[x(T;u(\cdot))] \end{cases}$$

(massimizzare il rendimento finale atteso)

(minimizzare il rischio associato a tale stima di rendimento finale atteso)

: (Il problema è non-banale: il conflitto tra il max e il min nasce dal fatto che

$$\mathrm{Var}^P[x(T)] \triangleq \mathbb{E}^P[\{x(T)-\mathbb{E}^P[x(T)]\}^2] = \mathbb{E}^P[x(T)^2] - \overbrace{\mathbb{E}^P[x(T)]^2}^{\text{(NON è quadratico nel senso della teoria sviluppata fin ora!)}} .)$$

tale che cioè

$$\boxed{(-\mathbb{E}[\bar x(T)], \mathrm{Var}[\bar x(T)]) = \min_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)} (-\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))], \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))])}$$ $(\in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$

Portafogli ammissibili (o strategie di portafoglio) **e portafogli efficienti** (o strategie di portafoglio) **e la frontiera efficiente:** Le strategie di portafoglio / i portafogli $u(\cdot)$ sono "ammissibili" se $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$. Le strategie di portafoglio / i portafogli $\bar u(\cdot)$ sono "efficienti" (ottimali) se sono ammissibili e tali che non esistono portafogli ammissibili $u(\cdot)$ tali per cui

$$\begin{cases} -\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))] \leq -\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))] \\ \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] < \mathrm{Var}[x(T;\bar u(\cdot))] \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))] < -\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))] \\ \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] \leq \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] \end{cases} .$$

La "frontiera efficiente" (ottimale) E è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$:

$$E \triangleq \{(-\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))], \mathrm{Var}[x(T;\bar u(\cdot))]) \mid \bar u(\cdot) \text{ è un portafoglio efficiente}\} .$$

($\Rightarrow$ Il problema è quello di determinare i portafogli efficienti e la frontiera efficiente.)

OSSERVAZIONE. Poniamo $x_0 \triangleq \sum_{i=0}^{m} N_i(0)p_i$ (>0) e poniamo $B(\cdot) \in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}_+^{1\times m})$, $B(t) \triangleq (b_1(t)-r(t),\dots,b_m(t)-r(t))$. Allora, per ogni $u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$, $x(\cdot)\equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$ è tale che $(dN_i(t)\equiv 0)$

$$\begin{cases} dx(t) = \{r(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m}[b_i(t)-r(t)]u_i(t)\}dt + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_{ij}(t)u_i(t)\,dW^j(t) = \\ \quad = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + \underbrace{u(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t)}_{(\sum_j^m \sigma^{\cdot j}(t)^T u(t)\,dW^j(t))}, \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ x(0) \equiv x_0 , \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(forward SDE lineare)

Problema $P(\mu)$, assegnato $\mu\in\hat{\mathbb{R}}_+$: minimizzare $\overset{J(u(\cdot);\mu)\equiv}{-\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))]+\mu\,\mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))]}$

(per avere il funzionale costo e criteri noti)

al variare delle coppie $(x(\cdot;u(\cdot)),u(\cdot))\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})\times\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che, se $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$, allora

$$dx(t)=[r(t)x(t)+B(t)u(t)]dt+u(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t),\quad \forall t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$
$$x(0)\equiv x_0,\quad P\text{-q.c.}.$$

(problema equivalente al MVO)

Problema $A(\lambda,\mu)$, assegnati $\mu\in\hat{\mathbb{R}}_+$ e $\lambda\in\mathbb{R}$: minimizzare

(per „cominciare a rimuovere il quadrato fuori")

$$\boxed{J(u(\cdot);\mu,\lambda)\triangleq \mathbb{E}[\mu\, x(T;u(\cdot))^2-\lambda x(T;u(\cdot))]}$$

al variare delle coppie $(x(\cdot;u(\cdot)),u(\cdot))\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})\times\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che, se $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$, allora

$$dx(t)=[r(t)x(t)+B(t)u(t)]dt+u(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t),\quad \forall t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$
$$x(0)\equiv x_0,\quad P\text{-q.c.}$$

Osservazione: quale che sia $\mu\in\hat{\mathbb{R}}_+$, se $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ è un controllo ottimale per il Problema $P(\mu)$, e se $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$, allora $\bar{u}(\cdot)$ è ~~esatta~~ ottimale pure per un opportuno Problema $A(\lambda,\mu)$: precisamente, per il Problema $A(\bar{\lambda},\mu)$ con

$$\boxed{\bar{\lambda}\triangleq 1+2\mu\,\mathbb{E}[\bar{x}(T)]}.$$

(ma in generale NON vale il viceversa)

Dim. (Assegnato $\mu\in\hat{\mathbb{R}}_+$,) Consideriamo la funzione polinomiale $\pi(x,y)\equiv\pi(x,y;\mu):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\pi(x,y)\triangleq\mu x-\mu y^2-y$ in modo che, per ogni $u(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$, sia

$$\pi(\mathbb{E}[x(T)^2],\mathbb{E}[x(T)])=\mu\,\mathrm{Var}(x(T))-\mathbb{E}[x(T)]=J(u(\cdot);\mu)$$: dunque, per ipotesi,

$$\pi(\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2],\mathbb{E}[\bar{x}(T)])\le\pi(\mathbb{E}[x(T)^2],\mathbb{E}[x(T)]).$$

D'altra parte, visto che $\pi(\cdot)$ è concava su $\mathbb{R}^2$ $(\mu>0)$, e che $\pi_x(x,y)\equiv\mu$ e $\pi_y(x,y)=-(1+2\mu y)$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, abbiamo che

(formula generale: $\pi(x,y)-\pi(\bar{x},\bar{y})\le\nabla\pi(\bar{x},\bar{y})^T\begin{pmatrix}x-\bar{x}\\ y-\bar{y}\end{pmatrix}$)

$$0\le\pi(\mathbb{E}[x(T)^2],\mathbb{E}[x(T)])-\pi(\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2],\mathbb{E}[\bar{x}(T)])\le$$

$$\le\mu(\mathbb{E}[x(T)^2]-\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2])-\underbrace{(1+2\mu\,\mathbb{E}[\bar{x}(T)])}_{\triangleq\bar{\lambda}}(\mathbb{E}[x(T)]-\mathbb{E}[\bar{x}(T)])=$$

$$=\mathbb{E}[\mu x(T)^2-\bar{\lambda}x(T)]-\mathbb{E}[\mu\bar{x}(T)^2-\bar{\lambda}\bar{x}(T)]=J(u(\cdot);\mu,\bar{\lambda})-J(\bar{u}(\cdot);\mu,\bar{\lambda}).\Big]$$

~~IDEA RISOLUTIVA~~

OSSERVAZIONE. Per ogni $(\mu,\lambda)\in\hat{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, Poniamo $\boxed{\gamma\triangleq\frac{\lambda}{2\mu}}\in\mathbb{R}$ e, per ogni $x(\cdot)\in\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, poniamo

$y(\cdot) \equiv y(\cdot\,; x(\cdot), \gamma) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\boxed{y(t) \triangleq x(t) - \gamma}$ $\left(\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})\right)$. Allora

$$\mu\, y(T)^2 = \mu\, x(T)^2 - \underbrace{\mu (2}_{\lambda}\gamma x(T)) + \mu\gamma^2 =$$

$$= \left[\mu\, x(T)^2 - \lambda\, x(T)\right] + \underbrace{\mu\gamma^2}_{\text{("costante" in } x(\cdot))}.$$

Riscrittura del Problema $A(\lambda,\mu)$, assegnati $\mu \in \hat{\mathbb{R}}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, come Problema (SLQ) (non standard) : — ("ma non impossibile")

posto $\boxed{\gamma \triangleq \frac{\lambda}{2\mu}}$, minimizzare

$$\boxed{J(u(\cdot);\gamma) \triangleq \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\mu\, y(T;u(\cdot))^2\right]}$$

al variare delle coppie

$(y(\cdot\,;u(\cdot),\gamma), u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}) \times L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che

$y(\cdot\,;u(\cdot),\gamma) \triangleq x(\cdot\,;u(\cdot)) - \gamma$ e, se $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$, allora

$$\begin{cases} dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + u(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t), & t \in [0,T] \text{ e P-q.c.,} \\ x(0) \equiv x_0, & \text{P-q.c.} \end{cases} :$$

cioe', posti:
$$\begin{cases} A(\cdot) \in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}_+), & A(t) \triangleq r(t) \\ b(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}), & b(t) \triangleq \gamma r(t) \\ D(\cdot) \equiv (D^{(1)}(\cdot), \dots, D^{(m)}(\cdot)) \in \left(L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{1\times m})\right)^m, & D^{(j)}(t) \triangleq \sigma^{(j)}(t)^T \end{cases},$$

tali che

$$\begin{cases} dy(t) = [A(t)y(t) + B(t)u(t) + b(t)]dt + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)u(t)\,dW^j(t), & t \in [0,T] \text{ e P-q.c.,} \\ y(0) \equiv x_0 - \gamma, & \text{P-q.c.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Rispetto alle notazioni generali, abbiamo che $n = 1$, $k = m$, $s = 0$, $y = x_0 - \gamma$; $A(\cdot), B(\cdot), b(\cdot), D(\cdot)$ sono quelle sopra, $G = \mu$ mentre $C(\cdot) \equiv 0$, $\sigma(\cdot) \equiv 0$, $Q(\cdot) \equiv 0$, $S(\cdot) \equiv 0$ e $\underbrace{R(\cdot) \equiv 0}_{(\Rightarrow \text{ non standard})}$. (In particolare, $R + D^T G D = \mu\, \sigma^T \sigma^T \geq 0$, anzi $\gg 0$, per ipotesi.)

IDEA RISOLUTIVA: Se esistono $\hat{\mu} \in \mathbb{R}_+$ e $\bar{u}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che $\bar{u}(\cdot)$ sia un controllo (il...) ottimale per il Problema $P(\mu)$, e se $\bar{\lambda} \triangleq 1 + 2\mu \mathbb{E}[x(T;\bar{u}(\cdot))]$ e $\bar{\gamma} \triangleq \frac{\bar{\lambda}}{2\mu}$, allora determinare la forma feedback di $\bar{u}(\cdot)$ rispetto a $\bar{y}(\cdot) \equiv y(\cdot;\bar{u}(\cdot),\bar{\gamma}) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ $\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot)) - \bar{\gamma}$ (molto naturale) ((e ai suoi coefficienti)) in quanto del controllo ottimale per il Problema $A(\bar{\lambda},\mu)$ ((riscritto come Problema (SLQ))) grazie al teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica. Quindi riscrivere le SDE del (forma di Itô) $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$ in funzione solo di $\bar{x}(\cdot)$ stesso ((e dei suoi coefficienti)), trovare le SDE di $\bar{x}(\cdot)^2$ ((grazie alla formula di Itô)), e trovare così $\mathbb{E}[\bar{x}(T)]$ e $\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2]$ ((in funzione dei suoi coefficienti)), ed in particolare $\bar{\lambda} = 1 + 2\mu \mathbb{E}[\bar{x}(T)]$ e quindi $\bar{\gamma} = \frac{\bar{\lambda}}{2\mu}$ (altro valore che compare in $\bar{u}(\cdot)$), dunque infine $Var[\bar{x}(T)]$ e, in definitiva, la frontiera efficiente E risultante.

L'equazione di Riccati stocastica e la mappa Ψ: (diviene lineare con $m=1$ poiché $m=1$ e $S(\cdot)\equiv 0$, $C(\cdot)\equiv 0$, $R(\cdot)\equiv 0$!)

$$\dot{P}(t) = -2A(t)P(t) + B(t)\Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{m} D^{(j)}(t)^T D^{(j)}(t)}_{(\equiv \sigma(t)\sigma(t)^T)}\Big]^{-1} B(t)^T P(t) =$$

$$= \{B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T - 2A(t)\}P(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$$P(T) = \mu$$

$$P(t)(\sigma(t)\sigma(t)^T) > 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T], \qquad (\Leftrightarrow P(\cdot)>0)$$

nell'incognita $P(\cdot) \in C([0,T];\hat{\mathbb{R}})$; e $\Psi(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^m$,

$$\boxed{\Psi(t) \triangleq [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)} \qquad (\Rightarrow B(\cdot)\Psi(\cdot),\ D(\cdot)\Psi(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)).$$

(NON dipende esplicitamente da $P(\cdot)$)

Poniamo $\rho(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}$, $\boxed{\rho(t) \triangleq B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T}$. Allora

$$\dot{P}(t) = [\rho(t) - 2r(t)]P(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$$P(T) = \mu$$

$$P(t)(\sigma(t)\sigma(t)^T) > 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T]$$

(ODE lineare backward) (omogenea)

: chiaramente

$$\boxed{P(t) = \mu \exp\Big(-\int_t^T (\rho(s) - 2r(s))\,ds\Big), \quad t\in[0,T]}.$$

(>0 quindi)

La ODE lineare associata all'equazione di Riccati stocastica e la mappa ψ :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = -\left\{ A(t) - B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T \right\}^T \varphi(t) - P(t)b(t), & \text{q.o. } t\in[0,T], \\ \varphi(T) = 0 & , \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = [\rho(t) - \pi(t)]\varphi(t) - \gamma\pi(t)P(t), & \text{q.o. } t\in[0,T], \\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

(NON-omogenea lineare)(*)

(limitatezza coefficienti $\Rightarrow \exists!\ \varphi(\cdot) \overset{\not\equiv 0}{\ }$ su tutto $[0,T]$ liscia) ; e $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$,

$$\boxed{\psi(t) \triangleq [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)^T \frac{\varphi(t)}{P(t)}} \quad \left(= \Psi(t)\frac{\varphi(t)}{P(t)}\right).$$

$(\Rightarrow B(\cdot)\psi(\cdot),\ D(\cdot)\psi(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R}))$.

Applicazione del teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica :

per ogni $(\mu,\lambda) \in \hat{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, e se $\gamma \triangleq \frac{\lambda}{2\mu}$, allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il Problema $A(\lambda,\mu)$ (in forma di Problema (SLQ)) ed è esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = -\Psi(t) x(t; u(\cdot), \gamma) - \psi(t) =$$

$$= -[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)^T \left(x(t); u(\cdot), \gamma) + \frac{\varphi(t)}{P(t)} \right), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}:$$

cioè, se $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot; \bar{u}(\cdot))$, allora

$$\boxed{\bar{u}(t) = -\underbrace{[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)^T}_{\text{("premio al rischio")}} \left(\frac{\varphi(t)}{P(t)} - \gamma + \bar{x}(t) \right), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}}.$$

OSSERVAZIONE. (*) Poniamo $h(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\boxed{h(t) \triangleq \frac{\varphi(t)}{P(t)}}$. Allora

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \pi(t)h(t) - \gamma\pi(t), & t\in[0,T], \\ h(T) = 0 \end{cases}$$

cioè (chiaramente)

$$\boxed{h(t) = \gamma\left[1 - \exp\left(-\int_t^T \pi(s)\,ds\right)\right], \quad t\in[0,T]}.$$

(Da cui $\varphi(t) = h(t)P(t)$.)

[**Verifica**: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{P}\right) = \frac{P\dot{\varphi} - \dot{P}\varphi}{P^2} = \frac{P[(\rho-\pi)\varphi - \gamma\pi P] - (\rho-2\pi)P\varphi}{P^2} = \frac{\pi P\varphi - \gamma\pi P^2}{P^2} =$

$= \frac{xq}{\rho} - \gamma x = x h - \gamma x$.] Dunque

$$\bar u(t) = [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)^T \left[\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right], \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$

Riscrittura di $d\bar x(\cdot)$: $\begin{cases} d\bar x(t) = [r(t)\bar x(t) + B(t)\bar u(t)]dt + \bar u(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t), \text{ q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ \bar x(0) \equiv x_0, \quad P\text{-q.c.}, \end{cases}$ diventa

$$d\bar x(t) = \left\{[r(t) - \rho(t)]\bar x(t) + \gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt +$$

$$+ B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\left[\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right]\cdot dW(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

$\bar x(0) \equiv x_0$, P-q.c.

Scrittura di $d\bar x(\cdot)^2$: grazie alla formula di Itô,

$$d\bar x(t)^2 = \left\{[2r(t) - \rho(t)]\bar x(t)^2 + \gamma^2 \exp\left(-2\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt +$$

$$+ 2\bar x(t) B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\left[\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right]\cdot dW(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$

$\bar x(0)^2 \equiv x_0^2$, P-q.c.

Verifica. $d\bar x(t)^2 = 2\bar x(t)d\bar x(t) + d[\bar x](t)$, dove $d\bar x(t)$ è data sopra e dove quindi $d[\bar x](t) =$

$$= \left[\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right]^2 B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\left\{B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\right\}^T dt =$$

$$= \left\{\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right\}^2 \rho(t)dt \text{ .]}$$

Scrittura di $d\mathbb{E}[\bar x(\cdot)]$ e $d\mathbb{E}[\bar x(\cdot)^2]$: (strutturalmente analoghe)

$$d\mathbb{E}[\bar x(t)] = \left\{[r(t) - \rho(t)]\mathbb{E}[\bar x(t)] + \gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$\mathbb{E}[\bar x(0)] = x_0$,

$$d\mathbb{E}[\bar x(t)^2] = \left\{[2r(t) - \rho(t)]\mathbb{E}[\bar x(t)^2] + \gamma^2 \exp\left(-2\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$\mathbb{E}[\bar x(0)^2] = x_0^2$. (forward ODEs lineari non-omogenee)

OSSERVAZIONE. Sappiamo benissimo / È ben noto $\underbrace{\text{che}}_{\text{dati } a(\cdot), b(\cdot) \in L^\infty([0,T];\mathbb{R})}$, globalmente una ed una sola soluzione [illegible] $\overset{y(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R})}{}$ ODE lineari non-omogenee della forma

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t), & t\in[0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

ed è

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)\left\{ y_0 + \int_0^t f(s)\exp\left(-\int_0^s a(\tau)d\tau\right)ds\right\}, \quad t\in[0,T].$$

Grazie a tale formula è immediato ottenere che

$$\begin{cases} \mathbb{E}[x(t)] = \exp\left(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\right)x_0 + \overbrace{\gamma}^{\exp(-\int_t^T r(s)ds)}\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \rho(s)ds\right)\right], & t\in[0,T], \\ \mathbb{E}[x(t)^2] = \exp\left(\int_0^t [2r(s)-\rho(s)]ds\right)x_0^2 + \underbrace{\gamma^2}_{\exp(-\int_t^T 2r(s)ds)}\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \rho(s)ds\right)\right], & t\in[0,T]. \end{cases}$$

[$\boxed{\text{Verifica}}$ (per la prima). $\begin{cases} y'(t) = (r(t)-\rho(t))y(t) + \gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t), & t\in[0,T], \\ y(0) = x_0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\right)\left\{ x_0 + \gamma\int_0^t \rho(s)\underbrace{\exp\left(-\int_s^T r(\tau)d\tau\right)\exp\left(-\int_0^s [r(\tau)-\rho(\tau)]d\tau\right)}_{\left(=\exp\left(\int_0^s \rho(\tau)d\tau - \int_0^T r(\tau)d\tau\right)\right)}ds\right\} =$$

$$= \exp\left(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\right)x_0 + \overbrace{\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)}^{\exp(-\int_0^t \rho(s)ds)}\underbrace{\int_0^t \rho(s)\exp\left(\int_0^s \rho(\tau)d\tau\right)ds}_{\left(=\left[\exp\left(\int_0^s \rho(\tau)d\tau\right)\right]_{s=0}^{s=t} = \exp\left(\int_0^t \rho(s)ds\right)-1\right)} =$$

$$= \exp\left(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\right)x_0 + \gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \rho(s)ds\right)\right].\ ]$$

Scritture esplicite di $\mathbb{E}[\bar{x}(T)]$ e $\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2]$: posto

$$\begin{cases} \alpha \triangleq \exp\left(\int_0^T [r(t)-\rho(t)]dt\right) \ (>0) \\ \delta \triangleq \exp\left(\int_0^T [2r(t)-\rho(t)]dt\right) \ (>0) \\ \beta \triangleq 1 - \exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right) \ (<1) \end{cases}, \quad \text{è}$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{E}[\bar{x}(T)] = \alpha x_0 + \beta\gamma \\ \mathbb{E}[\bar{x}(T)^2] = \delta x_0^2 + \beta\gamma^2 \end{cases}}$$

$(\Rightarrow \beta\gamma = \mathbb{E}[\bar{x}(T)] - \alpha x_0)$.

OSSERVAZIONE. ⊙ $1-\beta = \exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)$ (>0), quindi $\frac{1}{1-\beta} = \exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right)$.

⊙ $\frac{\alpha}{1-\beta} = \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)$ e $\frac{\delta}{1-\beta} = \exp\left(2\int_0^T r(t)dt\right)$ e $\frac{\delta}{\alpha} = \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right) = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

⊙ $\beta\delta = \delta - \alpha^2$.

In particolare, $\frac{\beta\delta+\alpha^2}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\beta}$ o anche

$$\boxed{\frac{\beta\delta+\alpha^2}{1-\beta} = \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^2} = \exp\left(2\int_0^T r(t)dt\right).$$

Scrittura di $\bar\lambda$: $\bar\lambda \triangleq 1+2\mu\,\mathbb{E}[\bar x(T)] = \boxed{\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + 2\mu x_0 \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)}$.

[**Verifica.** $\bar\lambda = 1+2\mu\left(\alpha x_0 + \beta\frac{\bar\lambda}{2\mu}\right) = 1+2\mu\alpha x_0 + \beta\bar\lambda$, cioè $\bar\lambda = \frac{1+2\mu x_0\alpha}{1-\beta} \overset{(>0)}{=}$

$= \frac{1}{1-\beta} + 2\mu x_0\frac{\alpha}{1-\beta}$.]

In particolare, se $\bar\gamma \triangleq \frac{\bar\lambda}{2\mu}$, allora $\bar u(t) = [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T\left[\bar\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right]$.

$$\left(= \frac{1}{2\mu}\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right)$$

Conclusione: scrittura di Var$[\bar x(T)]$ e della frontiera efficiente: è

$$\mathrm{Var}[\bar x(T)] = \frac{\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)}{1-\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)}\left[\mathbb{E}[\bar x(T)] - x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right]^2$$

$$-\mathbb{E}[\bar x(T)] = -\left\{x_0\exp\left(\int_0^T [r(t)-\rho(t)]dt\right) + \bar\gamma\left(1-\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)\right)\right\}$$

$$\left(\bar\gamma = \frac{1}{2\mu}\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right).$$

Verifica. $\mathrm{Var}[\bar x(T)] = \mathbb{E}[\bar x(T)^2] - \mathbb{E}[\bar x(T)]^2 =$

$$= \delta x_0^2 + \beta\bar\gamma^2 - \underbrace{(\alpha x_0+\beta\bar\gamma)^2}_{(=\alpha^2x_0^2 + 2\alpha\beta x_0\bar\gamma + \beta^2\bar\gamma^2)} =$$

$$= \beta(1-\beta)\bar\gamma^2 - 2\alpha\beta x_0\bar\gamma + (\delta-\alpha^2)x_0^2 =$$

(cerchiamo di usare che $\beta\bar\gamma = \mathbb{E}[\bar x(T)] - \alpha x_0$)

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{\beta^2\bar\gamma^2 - 2\frac{\alpha\beta^2x_0\bar\gamma}{1-\beta} + \frac{\beta(\delta-\alpha^2)}{1-\beta}x_0^2\right\} =$$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{(\beta\bar{\gamma}+\alpha x_0)^2 - 2\,\frac{\alpha\beta x_0\bar{\gamma}}{1-\beta} + \frac{\beta\delta-\alpha^2}{1-\beta}\,x_0^2\right\}$$

$$=$$

(Perché $(\beta\bar{\gamma}+\alpha x_0)^2 = \beta^2\bar{\gamma}^2 + 2\alpha\beta x_0\bar{\gamma} + \alpha^2 x_0^2 =$

$= \beta^2\bar{\gamma}^2 + \dfrac{2\alpha\beta x_0\bar{\gamma}(1-\beta) + \alpha^2 x_0^2(1-\beta)}{1-\beta}$)

$(\beta\bar{\gamma} = \mathbb{E}[\bar{x}(T)] - \alpha x_0)$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{\mathbb{E}[\bar{x}(T)]^2 - 2\,\underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{\left(\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right)}\,x_0\,\mathbb{E}[\bar{x}(T)] + \underbrace{\frac{\beta\delta+\alpha^2}{1-\beta}}_{\left(\left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^2\right)}\,x_0^2\right\} =$$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{\mathbb{E}[\bar{x}(T)] - x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right\}^2 .\ \Big]$$

VARI ESEMPI/ESERCIZI PIÙ ELEMENTARI.

ES. 1. **a** Consideriamo il seguente Problema (DLQ) con $n=k=1$: assegnata $R(\cdot) \in L^\infty(0,1;\mathbb{R})$ con $R \overset{q.o.}{<} 0$, minimizzare

$$J(0,0;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)^2 + R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2$$

al variare delle $u(\cdot) \in L^2(0,1;\mathbb{R})$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in L^2(0,1;\mathbb{R})$ tali che

$\begin{cases} dx(t) = 0, & t\in[0,1], \\ x(0)=0 \end{cases}$. Dimostrare che il problema non è „finito", ossia che è mal posto.

b Consideriamo il seguente Problema (SLQ) con $n=k=m=1$: assegnata $R(\cdot) \in L^\infty(0,1;\mathbb{R})$ con $R(t) \overset{q.o.}{>} t-2$, minimizzare

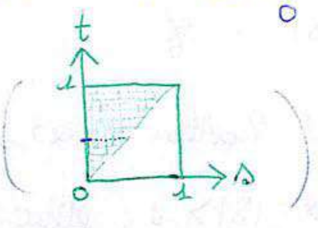
$$J(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)^2 + R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2\right]$$

al variare delle $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$ tali che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ sia uno spazio di probabilità completo con $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^W \equiv$ «la filtrazione generata dal Wiener $W(\cdot)$ su Ω», e $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$, ed inoltre

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)\,dW(t), & t\in[0,1], \\ x(0) \equiv 0 \end{cases}$$ (P-q.c.). Dimostrare che il problema è univocamente risolubile e che il controllo ottimale (in senso debole) è esprimibile in forma feedback.

Dim. $\boxed{a}$ Semplicemente $x(\cdot)\equiv 0$ (per ogni $u(\cdot)\in L^2(0,1;\mathbb{R})$), per cui $J(0,0;u(\cdot)) =$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 R(t)u(t)^2 dt$ e si tratta di un problema (DLQ) col "R" <0. ✓
(in effetti, $J(0,0;u(\cdot)) \to -\infty$ per $|u(\cdot)|\to+\infty$)

$\boxed{b}$ È $x(t) = \int_0^t u(s)\,dW(s)$ (per ogni $u(\cdot)\equiv(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W, P, W(\cdot), u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$), che ha (grazie alla formula d'isometria di Itô) $\mathbb{E}^P[x(1)^2] = \mathbb{E}^P[\int_0^1 u(t)^2 dt]$ e $\mathbb{E}^P[\int_0^1 x(t)^2 dt] = \mathbb{E}^P[\int_0^1(\int_0^t u(s)^2 ds)dt] =$



$= \mathbb{E}^P[\int_0^1(\int_s^1 u(s)^2 dt)ds] = \mathbb{E}^P[\int_0^1 u(s)^2(1-s)ds]$:

pertanto $J(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P[\frac{1}{2}\int_0^1 (R(t)+2-t)u(t)^2 dt]$ ed il problema è standard. □

ES. 2. $\boxed{a}$ Consideriamo i tre, seguenti problemi (DLQ) con $n=k=1$: assegnati $T\in(0,+\infty)$ e $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$, minimizzare

$J_1(s,y;u(\cdot)) \equiv -\frac{1}{2}x(T)^2$ → Problema (DLQ) 1

$J_2(s,y;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_s^T x(t)^2 dt$ → Problema (DLQ) 2

$J_3(s,y;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_s^T u(t)^2 dt - \frac{1}{2}x(T)^2$ → Problema (DLQ) 3

al variare delle $u(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t\in[s,T], \\ x(s) = y \end{cases}$$ Dimostrare che:

(i) il Problema (DLQ) 1 non è finito;

(ii) il Problema (DLQ) 2 è finito, ma è risolubile (univoc.) se, e solo se, $y=0$;

(iii) se $T\geq 1$ e $s>T-1$, allora il Problema (DLQ) 3 è univocamente risolubile.

b Consideriamo i due seguenti Problemi (SLQ) con $n=k=m=1$: assegnati $T\in(0,+\infty)$, $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$ e $\delta\in\mathbb{R}$, minimizzare

$$\begin{cases} J_1(s,T;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T x(t)^2dt\right] & \longrightarrow \text{Problema (SLQ) 1} \\ J_2(s,T;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T u(t)^2dt - \frac{1}{3}x(T)^2\right] & \longrightarrow \text{Problema (SLQ) 2} \end{cases}$$

al variare delle $u(\cdot)\equiv(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot),u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dt + \delta u(t)dW(t), & t\in[s,T], \\ x(s) \equiv y \end{cases}$$

. Dimostrare che:

(i) il Problema (SLQ) 1 è univocamente risolubile in senso forte;

(ii) se $|\delta|>1$, allora il Problema (SLQ) 2 non è finito;

(iii) se il sistema di controllo diventa

$$\begin{cases} dx(t) = \frac{1}{2}x(t)dt + u(t)dW(t), & t\in[s,T], \\ x(s) \equiv y \end{cases},$$

allora il Problema (SLQ) 2 resta non finito.

[**Dim.**] **e** Per ogni $u(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$, è $x(t) = y + \int_s^t u(r)dr$. (i) Per ogni $l\in\mathbb{R}$, $u_l(t)\equiv l$ è tale che $x_l(t)\equiv x(t;u_l(\cdot)) = y + l(t-s)$, per cui $J_1(s,y;u_l(\cdot)) = -\frac{1}{2}[y+l(T-s)]^2 \downarrow -\infty$ per $l\uparrow-\infty$. ✓

(ii) Anzitutto, per ogni $u(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$, è $J_2(s,y;u(\cdot))\geq 0$. Ora, per ogni $\varepsilon\in(0,T-s)$, $u_\varepsilon(t)\equiv -\frac{y}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[s,s+\varepsilon)}(t)$ è tale che $x_\varepsilon(t)\equiv x(t;u_\varepsilon(\cdot)) =$

$$= y - \frac{y}{\varepsilon}\int_s^t \mathbb{1}_{[s,s+\varepsilon)}(r)dr = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } t\in[s+\varepsilon,T] \\ y\left(1-\frac{t-s}{\varepsilon}\right) & \text{per ogni } t\in[s,s+\varepsilon] \end{cases},$$

per cui $J_2(s,y;u_\varepsilon(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_s^{s+\varepsilon} y^2\left(1-\frac{t-s}{\varepsilon}\right)^2dt = \frac{1}{2}y^2\left[\frac{\varepsilon}{3}\left(1-\frac{t-s}{\varepsilon}\right)^3\right]_{t=s+\varepsilon}^{t=s} =$

$= \frac{y^2\varepsilon}{6} \downarrow 0$ per $\varepsilon\downarrow 0$: pertanto $V(s,y)=0$ per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$

Tuttavia $J_2(s,y;u(\cdot))=0$ se, e solo se, $x(t;u(\cdot))\equiv 0$. ✓

(iii) Visto che $\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)^2}{t+1-T}\right)=\frac{2x(t)\dot{x}(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}=\frac{2x(t)u(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}$ (su $[s,T]$), la classica formula di Newton-Leibniz dà subito che

$$x(T)^2=\frac{y^2}{s+1-T}+\int_s^T\left[\frac{2x(t)u(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}\right]dt$$ da cui

$$J_3(s,y;u(\cdot))=-\frac{y^2}{2(s+1-T)}+\frac{1}{2}\int_s^T\left[u(t)-\frac{x(t)}{t+1-T}\right]^2dt$$: dunque la

$\bar{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ tale che $\bar{u}(t)=\frac{\bar{x}(t)}{t+1-T}$, dove $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$ ($\bar{x}(s)=y$ e $\dot{\bar{x}}(t)=\frac{\bar{x}(t)}{t+1-T}$), è l'unico controllo ottimale per il Problema (DLQ) 3 e vale $V(s,y)=\frac{-y^2}{2(s+1-T)}$ per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$. ✓

$\boxed{\text{b}}$ (i) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Consideriamo la $z(\cdot)\in C([s,T];\mathbb{R})$ tale che $\begin{cases}\dot{z}(t)=\frac{1}{\delta^2}z(t)-1,\ t\in[s,T],\\ z(T)=0\end{cases}$, ossia $z(t)\equiv\delta^2\left(1-e^{\frac{t-T}{\delta^2}}\right)$, $t\in[s,T]$.

Allora, per ogni $u(\cdot), x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, è $0=E^P[z(T)x(T)^2]=$

$$=z(s)y^2+E^P\left[\int_s^T\left[\left(\frac{1}{\delta^2}z(t)-1\right)x(t)^2+2z(t)x(t)u(t)+z(t)\delta^2u(t)^2\right]dt\right]$$

(integrando per parti) da cui immediatamente

$$J_1(s,T;u(\cdot))=\frac{1}{2}z(s)y^2+E^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T\delta^2z(t)\left[u(t)+\frac{x(t)}{\delta^2}\right]^2dt\right]$$: così

la $\bar{u}(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ tale che $\bar{u}(t)=\frac{-\bar{x}(t;\bar{u}(\cdot))}{\delta^2}$ è l'unico controllo ottimale per il Problema (SLQ) 1 e vale $V(s,y)=\frac{1}{2}\delta^2\left(1-e^{\frac{s-T}{\delta^2}}\right)y^2$ per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$. ✓

(ii) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Per ogni $\ell\in(0,+\infty)$ grande abbastanza affinché $s\leq T-\frac{1}{\ell}$, $u_\ell(t)\equiv\ell\,\mathbb{1}_{[T-\frac{1}{\ell},T]}(t)$, $t\in[s,T]$, è tale che

$$x_\ell(t) \equiv x(t;u_\ell(\cdot)) = y + \int_s^t u_\ell(r)dr + \delta \int_s^t u_\ell(r)dW(r) =$$

$$= \begin{cases} y & \text{per ogni } t \in [s, T-\frac{1}{\ell}), \\ y + \ell(t-T+\frac{1}{\ell}) + \delta\ell(W(t)-W(T-\frac{1}{\ell})) & \text{per ogni } t\in[T-\frac{1}{\ell},T] \end{cases}$$

per cui $\mathbb{E}^P[x_\ell(T)^2] = \mathbb{E}^P[[y+1+\delta\ell(W(T)-W(T-\frac{1}{\ell}))]^2] \underset{(W_t-W_s\sim N(0,t-s))}{=}$

$= (y+1)^2 + \delta^2\ell^2\cdot\frac{1}{\ell} = (y+1)^2 + \delta^2\ell$ e allora

$$J_2(s,T;u_\ell(\cdot)) = \frac{\ell}{2} - \frac{(y+1)^2}{2} - \delta^2\ell = -\frac{(y+1)^2}{2} - (\delta^2-1)\frac{\ell}{2} \downarrow -\infty$$

per $\ell \uparrow +\infty$ (poiché $|\delta|>1$). ✓

(iii) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Se $z(t)\equiv -e^{T-t}$, $t\in[s,T]$, cioè

$$\begin{cases} \dot z(t) = -z(t), & t\in[s,T], \\ z(T) = -1 \end{cases}$$

allora $\underset{(\text{int. parti})}{,}$ $-\mathbb{E}[x(T)^2] = \mathbb{E}[z(T)x(T)^2] =$

$$= -e^{T-s}y^2 + \mathbb{E}^P\left[\int_s^T [e^{T-t}x(t)^2 - e^{T-t}\cdot 2x(t)(\tfrac{1}{2}x(t)) - e^{T-t}u(t)^2]dt\right]$$

da cui $J_2(s,T;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T \underbrace{(1-e^{T-t})}_{(<0)}u(t)^2dt - \frac{1}{2}e^{T-s}y^2\right] \to -\infty$

per $|u(\cdot)|\to+\infty$. ✓ $\square$

$\boxed{\text{ES. 3.}}$ $\boxed{e}$ Consideriamo il seguente Problema (SLQ) con $n=k=m=1$:

minimizzare $J(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\int_0^1 [x(t)^2 - \frac{1}{2}u(t)^2]dt + x(1)^2\right]$ al variare delle $u(\cdot)\equiv(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot),u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$ tali che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ x(0)\equiv 0 \end{cases}$$

. Dimostrare che:

(i) esiste uno ed un solo controllo ottimale, $\bar u(t)\equiv 0$, ed è in senso forte;

(ii) esiste uno ed un solo processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$ associato alle coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) \equiv (0,0)$, ed è $(p(t),q(t)) \equiv (0,0)$;

iii) esiste uno ed un solo processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot)) \equiv (0,0,0,0)$, ed è $(P(t),\Lambda(t)) \equiv (2t-4,0)$;

iv) se $H(t,x,u,p,q)$ è la funzione hamiltoniana-H (del problema), e se $\mathcal{H}(t,x,u)$ è la funzione-$\mathcal{H}$ (del problema) associata a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot)) \equiv (0,0,0,0,2t-4)$, allora $\max\limits_{u\in\mathbb{R}} \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),u) = \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0$ mentre invece

$$+\infty = \sup_{u\in\mathbb{R}} H(t,\bar{x}(t),u,p(t),q(t)) > H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)) = 0 .$$

b] Consideriamo il seguente Problema (WS) con $n=k=m=1$: minimizzare $J(u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[-\int_0^1 u(t)dt + \frac{1}{2}x(1)^2\right]$ al variare delle $u(\cdot) \equiv (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2(0,1;U)$, dove $U \equiv [0,1]$, e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2(0,1;\mathbb{R})$ tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ x(0) \equiv 0 \end{cases}$$

. Dimostrare che $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \equiv (W(t),1)$ è una coppia ottimale per tale problema.

Dim. a] (i) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Torniamo a considerare l'ES. 1, punto [b]: se poniamo $J^1(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)^2 + R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2\right]$ dove $R(t) \triangleq -\frac{1}{4}$ $(> -1 \geq t-2)$, allora $J(0,0;u(\cdot)) = 2\,J^1(0,0;u(\cdot))$ (per ogni $u(\cdot)\in\mathcal{L}^2(0,1;U)$) ed inoltre, ricordando che

$$J^1(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1 (R(t)+2-t)u(t)^2dt\right],$$ deduciamo che

$$J(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\int_0^1 \left(\frac{3}{2}-t\right)u(t)^2dt\right],$$ da cui subito la tesi. ✓

ii) Osserviamo anzitutto che, rispetto alla notazione generale, tutti e soli i coefficienti non nulli sono $D(\cdot)\equiv 1$, $Q(\cdot)\equiv 2$, $R(\cdot)\equiv -1$ e $G \equiv 2$. Dunque è (P-q.c.)

$$\begin{cases} dp(t) = q(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ p(1) \equiv 0 \end{cases}$$. ✓

iii) È (P-q.c.) $$\begin{cases} dP(t) = 2dt + \Lambda(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ P(1) \equiv -2 \end{cases}$$. ✓

(iv) Abbiamo che $H(t,x,u,p) \equiv \frac{1}{2}u^2 - x^2$, $H(t,x,u,p,q) \equiv H(t,x,u,p) + uq$, $G(t,x,u,p,P) \equiv H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}Pu^2$ e che

$$\mathcal{H}(t,x,u) = G(t,x,u,p(t),P(t)) + uq(t) - P(t)u\bar{u}(t) = \frac{1}{2}(1+P(t))u^2 - x^2$$

In particolare, $H(t,\bar{x}(t),u,p(t),q(t)) = \frac{1}{2}u^2$ mentre

$$\mathcal{H}(t,x,u) = \frac{1}{2}(2t-3)u^2 \quad (\leq 0).$$

(⇒ $P(\cdot)$ che "rese" H da convessa e $\mathcal{H}$ concava!)

$\boxed{b}$ Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitraria. Rispetto alle notazioni generali, abbiamo che $b(t,x,u)\equiv 0$, $\sigma(t,x,u)\equiv u$, $f(t,x,u)\equiv -u$ e $h(x)=\frac{1}{2}x^2$. Osserviamo così che tutte le condizioni (S0)−(S4) sussistono, e che $h(\cdot)$ è convessa su $\mathbb{R}$. Ora, data $(x(\cdot),u(\cdot)) \in L^2(0,1;\mathbb{R}) \times L^2(0,1;[0,1])$, il processo aggiunto del prim'ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$ associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dp(t) = q(t)dW(t), & t\in[0,1), \\ p(1) = -x(1) \end{cases}$$

D'altra parte le hamiltoniane del problema sono $H(t,x,u,p) = u$, $H(t,x,u,p,q) = u(1+q)$ e $G(t,x,u,p,P) = \frac{1}{2}Pu^2 + u$. Dunque il processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),Q(\cdot))$ associato a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ è tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dP(t) = Q(t)dW(t), & t\in[0,1), \\ P(1) \equiv -1 \end{cases}$$

, cioè $(P(t),Q(t))\equiv(-1,0)$ costante.

Pertanto la funzione-$\mathcal{H}$ associata a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot)\equiv -1)$ è

$$\mathcal{H}(t,x,u) = G(t,x,u,p(t),P(t)) + u\left[q(t) - P(t)u(t)\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}u^2 + \left[1 + q(t) + u(t)\right]\cdot u.$$

Ebbene, se prendiamo $(x(t),u(t)) \equiv (W(t),1)$, allora chiaramente $(p(t),q(t)) = (-W(t),-1)$ $(= (-x(t),-u(t)))$ e quindi la mappa $H(t,\cdot,\cdot,p(t),q(t)) \equiv 0$ è banalmente concava su tutto $\mathbb{R}_x \times [0,1]_u$, mentre

$\mathcal{H}(t,x(t),u) = -\frac{1}{2}u^2 + u$ che prende valor massimo $(=\frac{1}{2})$ in $u=1$

per ogni $t\in[0,1)$) { essendo che $(-\frac{1}{2}u^2+u)' = -u+1$ ecc. } : in conclusione $(W(t),1)$ è ottimale in virtù del Teorema delle condizioni sufficienti di ottimalità stocastica. □

ES. 4. Consideriamo il seguente Problema (D_{sy}) con $n=k=1$: assegnati $T\in(0,+\infty)$ e $s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$, minimizzare $J(s,y;u(\cdot)) \equiv x(T)$ al variare delle $u(\cdot)\in L^2(s,T;U)$, dove $U\equiv[-1,1]$, e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2(s,T;\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = u(t)x(t), & t\in(s,T),\\ x(s) = y\end{cases}$$

. Dimostrare che non esistono soluzioni di classe $C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman di tale problema.

Dim. Per ogni $u(\cdot)\in L^2(s,T;U)$, è $x(t)\equiv x(t;u(\cdot)) = y\exp(\int_s^t u(r)dr)$ e per ciò $J(s,y;u(\cdot)) \equiv x(T) = y\exp(\int_s^T u(r)dr)$: dunque risulta chiaramente che

$$V(s,y) \equiv \inf_{|u|\le 1} y\exp(\int_s^T u(r)dr) = \begin{cases} y\cdot e^{T-s} & \text{se } y\le 0\\ y\cdot e^{s-T} & \text{se } y\ge 0\end{cases} \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}.$$

Così $V(\cdot)$ è continua e derivabile su tutto $[0,T]\times\mathbb{R}$, ma $V(\cdot)\notin C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ (in quanto $s\mapsto V_y(s,0)$ non è continua in alcun $s\in[0,T)$).

Ora, visto che la hamiltoniana del problema è $H(t,x,u,p) = xup$, risulta $\sup_{|u|\le 1} H(t,x,u,p) = |xp|$ e pertanto l'equazione HJB del problema è

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + |x v_x(t,x)| = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R},\\ v(T,x) = x, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che esista una soluzione $v(\cdot)\in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ di tale equazione. Allora certamente $v_x(T,x)\equiv 1$, $x\in\mathbb{R}$, e per continuità esiste una mappa $\rho(x)\in C(\mathbb{R};[0,T))$ simmetrica rispetto a $x=0$ e non-decrescente in $|x|$ tale che, se denotiamo con $B_\rho \triangleq \{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \mid \rho(x)\le t\le T\}$, allora

$\boxed{v_x(t,x) > 0 \text{ per ogni } (t,x)\in B_\rho}$. Poniamo poi $B_\rho^+ \triangleq B_\rho\cap([0,T]\times\underbrace{\mathbb{R}_+}_{(=(0,+\infty))})$.

Dunque

$$\begin{cases} v_t(t,x) = \begin{cases} x\, v_x(t,x) & \text{per ogni } (t,x)\in B_\rho^+\\ -x\, v_x(t,x) & \text{per ogni } (t,x)\in B_\rho\setminus B_\rho^+\end{cases},\\ v(T,x) = x, \quad x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Concentriamoci su $\mathcal{B}_\rho^+$, e consideriamo il seguente cambio di variabili per $w(\cdot)$ a

$\mathcal{B}_\rho^+$: $\left\{\begin{array}{l} (t,x)\mapsto(\tau,z)\,, \quad \begin{cases}\tau \doteq t \\ z \doteq xe^{t}\end{cases}, \text{ ossia} \\ \\ (\tau,z)\mapsto(t,x)\,, \quad \begin{cases} t \doteq \tau \\ x \doteq ze^{-\tau}\end{cases} \end{array}\right.$.

$([0,T]\times\hat{\mathbb{R}}_+ \text{ in sé})$

Poniamo quindi $\Phi(\tau,z)\triangleq w(\tau,ze^{-\tau})$: allora, vista la HJB, è

$\Phi_\tau(\tau,z) = w_t(\tau,ze^{-\tau}) + (-ze^{-\tau})\cdot w_x(\tau,ze^{-\tau}) \equiv 0$, ovvero

Φ è costante rispetto alla variabile τ. Riscriviamo $\Phi(\tau,z)\equiv\Phi(z)$.

Dunque $w(\tau,ze^{-\tau}) = \Phi(z)$, e cioè $w(t,x)=\Phi(xe^{t})$ per ogni $(t,x)\in\mathcal{B}_\rho^+$: di conseguenza, grazie anche al dato al bordo, deduciamo che

$xe^{-T} = w(T,xe^{-T}) = \Phi(x)$, da cui $\Phi(x)=xe^{-T}$ e quindi

$\boxed{w(t,x) = xe^{t-T}}$ per ogni $(t,x)\in\mathcal{B}_\rho^+$. Ma in modo analogo è possibile ottenere che $w(t,x)=xe^{T-t}$ su $\mathcal{B}_\rho\setminus\mathcal{B}_\rho^+$, ed in conclusione che $w(\cdot)\equiv V(\cdot)$ su tutto $\mathcal{B}_\rho$: assurdo, perché $V(\cdot)\big|_{\mathcal{B}_\rho}\notin C^1(\mathcal{B}_\rho)$. □]