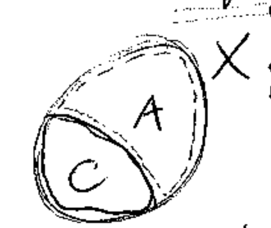
X insieme ; $\mathcal{T}$ $(\subseteq \mathcal{P}(X))$ TOPOLOGIA SU X $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (o STRUTTURA TOPOLOGICA SU X) soddisfa (A1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$; (A2) $(\emptyset \neq I)$ $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{T}$ $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$; (A3) $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ (cioè lo stesso vale con $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 2$)

[ES.: $\mathcal{T} := \{\emptyset, X\}$ (TOP. INDISCRETA) e $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$ (TOP. DISCRETA).] Allora X o $(X, \mathcal{T})$ è SPAZIO TOPOLOGICO, e $x \in X \overset{\text{def.}}{\iff} x$ è UN PUNTO DI X ; notiamo che avendo $\mathcal{T}$ abbiamo X ; $A \in \mathcal{T}$ $\overset{\text{def.}}{\iff}$ A è UN APERTO DI X.

$(X, \mathcal{T})$ SP. TOP. ; C $(\subseteq X)$ è UN CHIUSO DI X $\overset{\text{def.}}{\iff}$ $C \subseteq X$ è tale che $X \setminus C$ è un aperto di X, cioè $X \setminus C \in \mathcal{T}$.

{Tutti e soli i chiusi di X sono i complementari (in X) degli aperti di X.

["tutti": $C = X \setminus \underbrace{(X \setminus C)}_{=:A}$; "soli": $X \setminus \underbrace{(X \setminus A)}_{=:C} = A$;



il "degli" è motivato dalla natura involutoria dell'operazione "$\setminus$". □]}

I chiusi di X soddisfano (C1) $\emptyset, X$ sono chiusi ; (C2) $(C_i)_{i \in I}$ chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i$ chiuso ; (C3) C_1, C_2 chiusi $\Rightarrow C_1 \cup C_2$ chiuso. [$\emptyset = X \setminus X$ e $X = X \setminus \emptyset$; $C_i = X \setminus A_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$; $(X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cap A_2)$ □] Quindi è ormai chiaro che potremmo definire una topologia su X elencando i chiusi, cioè elencando gli sottoinsiemi C di X che soddisfano (C1), (C2) e (C3).

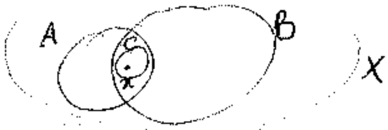
$(X,\mathcal{T})$ sp. top.; $\underline{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}}$ BASE DI $\mathcal{T}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A\in\mathcal{T}$,
$\underset{(B_i\subseteq A)}{\exists (B_i)_{i\in I}}$ in $\underset{(\subseteq\mathcal{T})}{\mathcal{B}}$ tali che $A=\bigcup_{i\in I} B_i$ $(\in\mathcal{T}!)$. [ES.: $\mathcal{B}=\mathcal{T}$! $(B_i:=A)$]

Dunque gli aperti sono tutte e sole le unioni di elementi della base, per cui una base determina univocamente la topologia.
(e allora potremmo considerare più semplicemente $(X,\mathcal{B})$)

TEO.: X ins. e $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$; esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base $\Longleftrightarrow$ valgono (1) E (2): ~~(che dunque sono EQUIVALENTI)~~

(1) $X\overset{(\subseteq)}{=}\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$;

(2) $\forall A,B\in\mathcal{B}$, $\forall x\in A\cap B$, $\exists C\in\mathcal{B}$ tale che
$x\in C\subseteq A\cap B$.
(banale se fosse $A\cap B\in\mathcal{B}$)



(banalmente verificata se $A\cap B=\emptyset$!)

$\Rightarrow$): (1) vale perché $X\in\mathcal{T}$; (2) vale perché $A,B\in\mathcal{B}(\subseteq\mathcal{T})$ $\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{T}$, e dunque è unione di elementi $C\in\mathcal{B}$. ✓

$\Leftarrow$): definiamo $\mathcal{T}$ prendendo $A\subseteq X$ aperto $\overset{\text{def. (di ora)}}{\Longleftrightarrow}$ $A=\bigcup_{i\in I} B_i$ con $(B_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{B}$, cioè otteniamo gli aperti al variare delle unioni di elementi di $\mathcal{B}$; in effetti allora $\mathcal{T}$ è topologia (su X): $(1)\Rightarrow X\in\mathcal{T}$, mentre $\emptyset\in\mathcal{T}$ perché è unione vuota di elementi di $\mathcal{B}$; unione di aperti è chiaramente un aperto; infine, essendo $(2)\Leftrightarrow\forall A,B\in\mathcal{B}$, $A\cap B\overset{(\subseteq)}{=}\bigcup_{C\in\mathcal{B},\, C\subseteq A\cap B} C$,

concluderemo pure che intersezione di due aperti è aperto: presi infatti $U=\bigcup_{i\in I}A_i$ e $V=\bigcup_{j\in J}B_j$ $((A_i)_{i\in I},(B_j)_{j\in J}$ in $\mathcal{B})$, è

$$U\cap V=\bigcup_{i\in I,\, j\in J}(A_i\cap B_j)\overset{\text{(ovvio)}}{=}\bigcup_{\substack{C\in\mathcal{B},\\ C\subseteq A_i\cap B_j \text{ per qualche } i\in I,\, j\in J}} C\,. \quad\square$$

Date due topologie T e R su X, T È PIÙ FINE DI R / R È MENO FINE DI T $\overset{d.}{\iff}$ $R \subseteq T$ [per cui la top. discreta su X è la più fine possibile, mentre quella indiscreta è la meno fine possibile!].

$(T_i)_{i\in I}$ topologie su X $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} T_i$ è topologia su X (meno fine di ogni T_i!), conseguentemente; allora, preso $S \subseteq P(X)$, esiste la più piccola topologia su X che contiene S (la quale dunque potrebbe essere chiamata "la top. GENERATA da S"): è $\underset{(o\ "\langle S\rangle")}{T} := \bigcap_{\substack{T_i \text{ top. su } X,\\ T_i \supseteq S}} T_i$ (intersezione NON vuota, essendo $S \subseteq T_i := P(X)$ almeno!). $\rightarrow$ (allora $S \subseteq \langle S\rangle$, e vale $= \iff S$ è una topologia)

Dati quindi $((X_i,T_i))_{i\in I}$ sp. top. disgiunti (nel senso che $X_i \cap X_j = \emptyset\ \forall i \neq j$), $(X := \bigcup_{i\in I} X_i, T := \langle \bigcup_{i\in I} T_i \rangle)$ è uno sp. top., detto L'UNIONE DISGIUNTA degli X_i, ed è caratterizzato dal fatto $A \in T \iff \forall i \in I,\ A_i := A \cap X_i \in T_i$

[$\underset{(A\subseteq X)}{\Leftarrow}$: $A \cap X_i \in T_i \subseteq T$ $(\forall i \in I)$ $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I}(A\cap X_i) = A \cap \underbrace{\bigcup_{i\in I} X_i}_{=X} = A \in T$; ✓ $\Rightarrow$): $A \in T \overset{\text{(vedi poi)}}{\iff} A = \bigcup_{j\in I} A'_j$ con $A'_j \in T_j$ $(\forall j \in I)$, per cui in effetti $A \cap X_i = \bigcup_{j\in I}(A'_j \cap X_i) \overset{\text{(disg.)}}{=} A'_i \cap X_i \in T_i$. □] Osserviamo infatti che per (X, T) vale, con $\mathcal{B} := \bigcup_{i\in I} T_i$, la seguente osservazione.

COR. TEO.

$\Rightarrow$ X ins. e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tale che $X = \bigcup_{(\subseteq) B \in \mathcal{B}} B$ e $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$, $\overset{(TEO.)}{\Rightarrow}$ è topologia su X (di base $\mathcal{B}$) $\mathcal{T} := \{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \}$ e inoltre $\underset{(\text{ovvio})}{} \mathcal{T} \underset{(\subseteq)}{=} \langle \mathcal{B} \rangle$.

(*) In effetti $\mathcal{B} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ è tale che $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ (ogni altro $B \in \mathcal{B}$ è $B \subseteq$ in un X_i) e, $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{T}_i$ e $B \in \mathcal{T}_j$ con $i \neq j \Rightarrow A \cap B = \emptyset \, (\in \mathcal{B})$, mentre $i = j \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}_i$ $(\subseteq \mathcal{B})$; infine è chiaro che $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$ con $\mathcal{B}' \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i$ le posso scrivere come $\bigcup_{j \in I} A_j'$ dove $\forall j \in I$ $A_j' \in \mathcal{T}_j$. $\checkmark$

<u>NOTA</u>: in generale, per $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ base di $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T} \underset{(\subseteq)}{=} \langle \mathcal{B} \rangle$, e vale $\Leftarrow$ certamente <u>se</u> $\mathcal{B}$ è chiuso per $\cap$ finite.

$(X, \mathcal{T})$ sp. top. e $B \subseteq X$; $B^\circ := \bigcup_{A \subseteq B,\ A \text{ aperto}} A$ è <u>LA PARTE INTERNA DI B</u> (= il più grande aperto $\subseteq$ in B),

$\overline{B} := \bigcap_{C \supseteq B,\ C \text{ chiuso}} C$ è <u>LA CHIUSURA DI B</u> (= il più piccolo chiuso $\supseteq B$) e $\partial B := \underset{(\subseteq B)}{\overline{B}} \setminus B^\circ$ è <u>LA FRONTIERA DI B</u> (in effetti $B^\circ \subseteq B \subseteq \overline{B}$); $x \in B^\circ \overset{d.}{\Leftrightarrow}$ x è INTERNO A B, $x \in \overline{B} \overset{d.}{\Leftrightarrow} x$ è ADERENTE A B, $x \in \partial B \overset{d.}{\Leftrightarrow} x$ è DI FRONTIERA PER B.

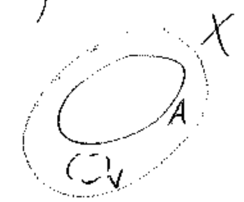
Chiaramente B aperto $\Leftrightarrow B \underset{(\subseteq)}{=} B^\circ$ e B chiuso $\Leftrightarrow B \underset{(\supseteq)}{=} \overline{B}$

$A \subseteq X$ <u>DENSO</u> (in X) $\overset{d.}{\Leftrightarrow} \overline{A} \underset{(\supseteq)}{=} X$, $\Leftrightarrow$ $\forall$ aperto

$V \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$ (ovvio c'è almeno un elemento di A in qui aperto $\neq \emptyset$ di X ! (

))

[$\Rightarrow$) : se per assurdo $\exists\, V \neq \emptyset$ tale che $A \cap V = \emptyset$, allora però $X \setminus V$ è un chiuso $\subsetneq X$ tale che $A \subseteq X \setminus V$, $\Rightarrow \overline{A} \subseteq X \setminus V \neq X$, che è assurdo.



$\Leftarrow$) : se per assurdo $\overline{A} \subsetneq X$, allora $X \setminus \overline{A}$ è un aperto $\neq \emptyset$ tale che però $A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$: assurdo. $\square$]

$x \in X$; (def) $U \subseteq X$ è UN INTORNO DI x $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ aperto V tale che $x \in V \subseteq U$, cioè $x \in U^{\circ}$. (ciò sarebbe ovvio se U fosse aperto)

Sia, $\forall x \in X$, $\mathcal{I}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in U^{\circ}\}$ $(\subseteq \mathcal{P}(X))$ l'insieme di tutti gli intorni di x : allora, $\forall B \subseteq X$, $B^{\circ} = \{x \in B \mid B \in \mathcal{I}(x)\}$ (e in particolare B aperto $\Leftrightarrow$ è intorno di ogni suo punto).

[$\subseteq + \supseteq$: $x \in B^{\circ} \overset{(2),(5)}{\Longleftrightarrow} \exists$ aperto $A \subseteq B$ tale che $x \in A$. $\square$]

Inoltre $\mathcal{I}(x)$ gode delle seguenti proprietà : $\forall x \in X$,

(1) $X \in \mathcal{I}(x)$ ma $\emptyset \notin \mathcal{I}(x)$, anzi in generale $U \in \mathcal{I}(x) \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} X \setminus U \notin \mathcal{I}(x)$

(2) $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$, per cui (ovvio) certamente $(U_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{I}(x) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{I}(x)$;

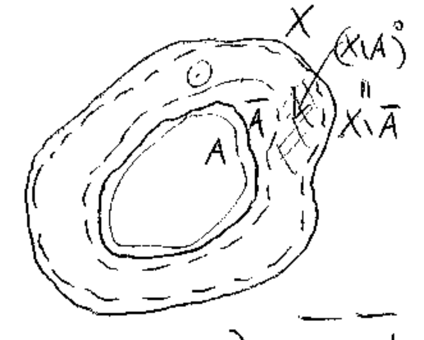
(3) $U, V \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{I}(x)$;

(4) con $A \subseteq X$, $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{I}(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$.

[(1) $x \in X$ e X è aperto ; (2) $\exists$ aperto A tale che $x \in A \subseteq U \subseteq V$; (3) $\exists\, A, B$ aperti tali che $x \in A \subseteq U$ e però

$x \in B \subseteq V \Rightarrow x \in A \cap B \; (\subseteq U \cap V)$; (4) infatti al contrario
$x \notin \overline{A} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} x \in (X \setminus A)^\circ$, $\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{I}(x)$ tale che $(x \in)$
$U \subseteq X \setminus A$ (prendo U aperto!) , cioè $U \cap A = \emptyset$. $\square$

(*) : con $A \subseteq X$, $\boxed{X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ}$;



infatti $X \setminus \overline{A} = X \setminus \bigcap_{\substack{C \supseteq A, \\ C \text{ chiuso}}} C = \bigcup_{\substack{C \supseteq A, \\ C \text{ chiuso}}} (X \setminus C) =$

$= \bigcup_{\substack{V \subseteq X \setminus A, \\ V \text{ aperto}}} V$ (perché C chiuso $\supseteq A \Leftrightarrow X \setminus C$ aperto $\subseteq X \setminus A$) . ✓

$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(x)$ è UN SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI DI x (O UNA BASE LOCALE DI x) $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, U \in \mathcal{I}(x)$, $\exists\, A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subseteq U$. ES. : fissato $U \in \mathcal{I}(x)$, considero $\mathcal{J} := \{U' \in \mathcal{I}(x) \mid U' \subseteq U\}$ (infatti allora, $\forall\, V \in \mathcal{I}(x)$, $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$ è tale che $U \cap V \subseteq \begin{cases} U \\ V \end{cases}$) . ES. : nel caso $\mathcal{T}$ avente base $\mathcal{B}$, considero $\mathcal{J} := \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$ (infatti $\exists$ aperto V tale che $x \in V \subseteq U$, se $U \in \mathcal{I}(x)$; ma $V = \bigcup_{i \in I} B_i$ con $\underset{(\subseteq V!)}{B_i} \in \mathcal{B}$ opportuni : $x \in B_i$ per almeno un i).

X, Y spazi topologici $(\neq \emptyset)$; $f : X \to Y$ è UN'APPLICAZIONE CONTINUA $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall$ aperto $A \subseteq Y$, $f^{-1}(A)$ è un aperto $\subseteq X$; ciò equivale a : $\forall$ chiuso $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C)$ è chiuso in X . Infatti i soli tali C sono $C = Y \setminus A$ con $A \subseteq Y$ aperto , per cui $f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. $\square$

Se $\mathcal{B}$ è base per la topologia di Y, allora $f: X \to Y$ è continua $\iff \forall A \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(A)$ è aperto di X [infatti, $\forall A$ aperto $\subseteq Y$, $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ per opportuni $B_i \in \mathcal{B}$ $\Rightarrow f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ è aperto di X. □]

Sia $f: X \to Y$: f è continua $\iff \forall A \subseteq X$, è $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (cioè x aderente ad $A \Rightarrow f(x)$ aderente a $f(A)$!).

$\Rightarrow$): $\forall A \subseteq X$, $\overline{f(A)}$ chiuso in $Y \Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)})$ è chiuso in X; ma $f(A) \subseteq \overline{f(A)} \overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, e $A \overset{(\text{ovvio})}{\subseteq} f^{-1}(f(A)) \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ (insieme chiuso) $\Rightarrow$ $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, ~~cioè~~ (ovvio) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ✓

$\Leftarrow$): $\forall C$ chiuso $\subseteq Y$, $A := f^{-1}(C) \Rightarrow f(\overline{f^{-1}(C)}) \overset{(\text{ip.})}{\subseteq}$ $\subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \overset{(f(f^{-1}(C)) \subseteq C)}{\subseteq} \overline{C} = C$ [$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \overline{B_1} \subseteq \overline{B_2}$ (perché $\overline{B_2} \supseteq B_2 \supseteq B_1$ ed è chiuso)], cioè $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq$ $\subseteq f^{-1}(C)$, cioè $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$ (il $\supseteq$ è generale), cioè $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X. □

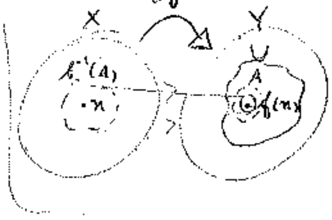
Composizione di applicazioni continue è continua.

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, con X, Y e Z sp. top. e f, g continue, $\Rightarrow g \circ f$ è continua perché, $\forall$ aperto $A \subseteq Z$, $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, e allora $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto in X. □

$f: X \to Y$ CONTINUA IN UN PUNTO $x \in X \overset{def}{\iff} \forall$ intorno U di $f(x)$, $\exists$ intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$.

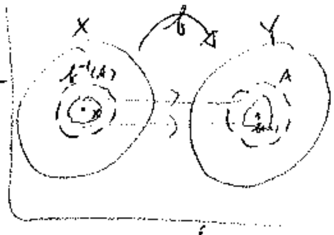
$f: X \to Y$ continua $\iff$ continua in OGNI punto di X.

$\Rightarrow$): $\forall x \in X$, $\forall$ intorno U di $f(x)$, esiste A aperto di Y tale che $f(x) \in A \subseteq U$;



ma f continua $\Rightarrow V := f^{-1}(A)$ è aperto di X, e chiaramente $x \in V$ ($\Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$) e $f(V) = f(f^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq U$.

$\Leftarrow$): $\forall$ aperto A di Y, $\forall x \in f^{-1}(A)$ (se $f^{-1}(A) = \emptyset$, allora è aperto!), $f(x) \in A$



$\overset{(A \text{ fa da intorno di } f(x))}{\Rightarrow}$ $\exists$ intorno V di x tale che $f(V) \subseteq A$, cioè $V \subseteq f^{-1}(A)$, per cui anche $f^{-1}(A)$ è intorno di x; essendo dunque $f^{-1}(A)$ intorno di ogni suo punto, è aperto. □

$f: X \to Y$ continua è UN OMEOMORFISMO $\overset{def}{\iff}$ esiste $g: Y \to X$ continua tale che $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$; ossia un omeomorfismo è un'applicazione continua e biettiva con inversa continua. Resta in particolare implicito che sia $|X| = |Y|$.

$f: X \to Y$ applicazione APERTA $\overset{def}{\iff} \forall A$ aperto di X, $f(A)$ è aperto di Y; CHIUSA $\overset{def}{\iff} \forall C$ chiuso di X, $f(C)$ è chiuso di Y.

Per $f: X \to Y$ continua, le seguenti condizioni sono equivalenti:
(1) f è omeomorfismo; (2) f è chiusa e biettiva; (3) f è aperta e biettiva.

(1) $\Rightarrow$ (2): f è biiettiva perché omeo., e inoltre $\forall$ chiuso C di X è $f(C) \overset{(f=g^{-1})}{=} g^{-1}(C)$ chiuso di Y per continuità di g. ✓ (2) $\Rightarrow$ (3): $\forall$ aperto A di X, $C := X \setminus A$ è chiuso (di X) e $f(A) = f(X \setminus C) \underset{(\subseteq)}{=} Y \setminus \underbrace{f(C)}_{(\text{chiuso!})}$ è allora aperto di Y. ✓ (3) $\Rightarrow$ (1): f è biiettiva con inversa g tale che, $\forall A$ aperto di X, $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto di Y, dunque g è continua. □

X insieme $\neq \emptyset$; $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ è UNA DISTANZA SU X (O METRICA) $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ d soddisfa le seguenti tre proprietà:

1. $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\forall x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $\forall x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (tale condizione è LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE).

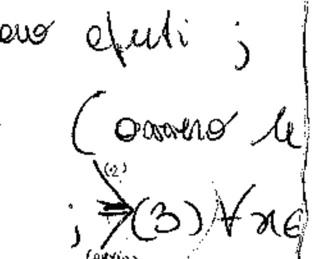
Supponendo che d sia una distanza su X, la coppia (X,d) è UNO SPAZIO METRICO e per lui definiamo, $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$ reale fissati, $\mathcal{B}(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ chiamandolo PALLA APERTA DI CENTRO x E RAGGIO r (rispetto alla distanza d); osserviamo che certamente $x \in \mathcal{B}(x,r)$.

Dotiamo a questo punto (X,d) di una naturale struttura topologica, LA TOPOLOGIA INDOTTA DA UNA DISTANZA: $A \subseteq X$ è aperto $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in A$, $\exists \lambda > 0$: $\mathcal{B}(x,\lambda) \subseteq A$.

(A1) $\emptyset$ è aperto tautologicamente ("$x \in \emptyset \Rightarrow \ldots$" è del tipo "$F \Rightarrow \dots$"), mentre X è aperto perché ad esempio $X \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{x \in X} B(x,1)$ $\quad (x \in B(x,1))$ ✓ (A2) $(A_i)_{i \in I}$ aperti $\Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} A_i$ aperto perché, $\forall x \in A$, diciamo $x \in A_j$, c'è $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq A_j \subseteq A$. ✓ (A3) A, B aperti $\Rightarrow A \cap B$ aperto perché, $\forall x \in A \cap B$, $\begin{cases} x \in A \Rightarrow \exists r>0 : B(x,r) \subseteq A \\ x \in B \Rightarrow \exists s>0 : B(x,s) \subseteq B \end{cases} \Rightarrow B(x,r) \cap B(x,s) \subseteq A \cap B$, ed ora $B(x, r \wedge s) \subseteq B(x,r) \cap B(x,s)$ ✓ $\square$

In tale topologia abbiamo che (1) le palle aperte sono aperti; (2) $A \subseteq X$ è aperto $\overset{(\Leftarrow)}{\Leftrightarrow}$ A è unione di palle aperte (ovvero le palle aperte costituiscono una base di tale topologia); (3) $\forall x \in X$, $U \in \mathcal{U}(x) \overset{(\Leftarrow)}{\Leftrightarrow} \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq U$. [(2) $\Leftarrow$ (ovvio)]

(1) Sia $B(x,r)$ la generica palla aperta; $\forall y \in B(x,r)$ fissato, cioè tale che $s := r - d(x,y) > 0$, è infatti $B(y,s) \subseteq B(x,r)$: $\forall z \in X$, $d(y,z) < s \Rightarrow d(x,z) \underset{(\text{dis. tr.})}{\leq} d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = r$. ✓



(2) Essendo A aperto, $\forall x \in A$ $\exists r(x) > 0$ tale che $B(x, r(x)) \subseteq A$, e d'altra parte $x \in B(x, r(x))$: concludiamo che $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r(x))$. (3) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists$ aperto A tale che $x \in A \subseteq U$; ma è pure vero che $\exists r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq A$, $\subseteq U$. $\square$

(X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici e $x \in X$: $f : X \to Y$ è continua in $x \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X, d_X(x,y) \underset{(=)}{<} \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \underset{(=)}{<} \varepsilon\right)$.

$f : X \to Y$ continua in $x \Leftrightarrow \forall$ intorno U di $f(x)$, $\exists$

intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$; essendo ora X e (6)
Y con metrica, possono usare le (3) viste prima : $\Rightarrow)$: $\forall \varepsilon > 0$, $U := B(f(x), \varepsilon)$ è un intorno di $f(x)$ in corrispondenza del quale $\exists$ intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$; ma tale V è tale che $\exists\, \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq V$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} f(B(x,\delta)) \subseteq f(V)$, $\subseteq U$, da cui in effetti, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall y \in X$, $y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in U = B(f(x), \varepsilon)$. ✓ $\Leftarrow)$: $\forall$ intorno U di $f(x)$, se $\varepsilon > 0$ è tale che $B(f(x), \varepsilon) \subseteq U$, allora contemporaneamente $\exists\, \delta > 0 : \forall y \in X$, $y \in B(x,\delta) \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$, cioè $\exists\, \delta > 0 : f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, $\subseteq U$: prendo $V := B(x, \delta)$ ($\in \mathcal{J}(x)$!). ✓ $\square$ (Notiamo che
$(\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall y \in X,\ d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon) \Leftrightarrow$
$(\forall \varepsilon' > 0, \exists\, \delta' > 0 : \forall y \in X,\ d_X(x,y) \le \delta' \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \le \varepsilon'$.

$\boxed{\Leftarrow)}$: $\delta := \delta'$ e $\varepsilon' < \varepsilon$ (infatti, $\forall \varepsilon > 0$, se $\varepsilon' < \varepsilon$, allora $\exists\, \delta' := \delta > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $d_X(x,y) < \delta$ ($\Rightarrow \le \delta$) $\Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \le \varepsilon' < \varepsilon$) ; ✓ $\Rightarrow)$: $\varepsilon' := \varepsilon$ e $\delta' < \delta$ (infatti, $\forall \underset{(\varepsilon)}{\varepsilon'} > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $d_X(x,y) \le \delta'$ ($< \delta$) $\Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ($\Rightarrow \le \varepsilon = \varepsilon'$)). ✓ $\square$] **Inoltre**, essendo che f è continua se e solo se è continua in ogni punto, possiamo affermare

$f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow (\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : \forall y \in X$, $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$. ✓)

X insieme $\neq \emptyset$ con distanze d e h ; la topologia indotta da d è più fine di quella indotta da h $\Leftrightarrow (\forall x \in X,$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x,y) < \varepsilon$).

[$id_X : (X, d) \to (X, h)$ è aperta continua $\Leftrightarrow$ la topologia indotta da h è meno fine di quella indotta da d. √
In effetti comunque la tesi equivale ad avere che, $\forall$ aperto A della h-topologia, $\exists$ d-palla tutta $\subseteq A$, cioè questa stessa condizione ma con $A :=$ una h-palla, cioè che $\underset{(\Leftarrow)}{}$ $\underset{(\Rightarrow)}{}$ appunto, $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $B_d(x,\delta) \subseteq B_h(x,\varepsilon)$ ($B_h(x,\varepsilon)$ sarebbe infatti un d-aperto e quindi un d-intorno di x!). □

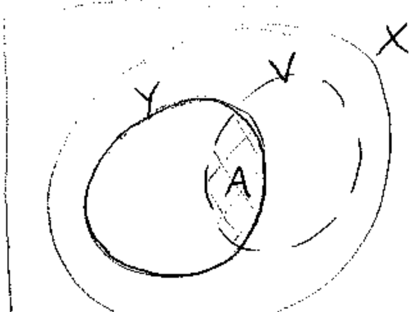
$\Rightarrow$ X insieme $\neq \emptyset$ con distanze d e h; $\exists$ $a, c > 0$ tali che, $\forall x, y \in X$, $\dfrac{a \wedge h(x,y)}{c} \leq d(x,y)$ $\Rightarrow$ la topologia indotta da d è più fine di quella indotta da h.

[Infatti, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow h(x,y) < \varepsilon$: prendiamo infatti $\delta := \dfrac{a \wedge \varepsilon}{c}$, essendo
$a \wedge b < a \wedge b' \underset{\text{(il viceversa no)}}{\Rightarrow} b < b'$ (perché certamente $b \neq b'$, e se per assurdo $b' < b$ allora $a \leq b'$ $(< b)$ $\Rightarrow a < a$, che è assurdo, mentre $b' \leq a \Rightarrow a \wedge b < b'$, da cui $b' > b$ o $b' > a$, eventualità entrambe assurde) . □]

(X, d) spazio metrico; due distanze d e h su X sono EQUIVALENTI $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ d e h inducono su X la stessa topologia.
Uno spazio topologico X è METRIZZABILE $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ la topologia di X coincide con la topologia indotta da un'opportuna distanza su X.

(X, d) spazio metrico ; $A \subseteq X$ LIMITATO $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ reale $M > 0$ tale che, $\forall\, x, y \in A$, $d(x,y) \leq M$. Scelto quindi un insieme $Z \neq \emptyset$, $f : Z \to X$ LIMITATA $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(Z)$ è un sottoinsieme limitato (di X).

$(X, \mathcal{T})$ spazio topologico ; consideriamo un qualsiasi $Y \subseteq X$ come SOTTOSPAZIO (TOPOLOGICO) DI X pensando Y come dotato della naturale TOPOLOGIA DI SOTTOSPAZIO definita come segue:



$A \subseteq Y$ aperto in Y $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ aperto V di X tale che $A = Y \cap V$; ossia la topologia di Y è esattamente $\{Y \cap V \mid V \in \mathcal{T}\}$.

[Si tratta effettivamente di una topologia su Y:
(A1) $\emptyset = Y \cap \emptyset$ e $Y = Y \cap X$; (A2) $(A_i)_{i \in I}$ aperti in Y, poiché $\exists\, (V_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{T}$ tali che $A_i = Y \cap V_i$ $\forall\, i \in I$, $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (Y \cap V_i) = Y \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right)}_{(\in \mathcal{T}!)}$ è aperto in Y ; (A3) A, B aperti in Y, poiché $\exists\, V, U \in \mathcal{T}$ tali che $A = Y \cap V$ e $B = Y \cap U$, $\Rightarrow$ $A \cap B = Y \cap \underbrace{(V \cap U)}_{(\in \mathcal{T}!)}$ è aperto in Y. $\square$]

(1) La topologia di sottospazio su X coincide giustamente con $\mathcal{T}$;
(2) $C \subseteq Y$ chiuso in Y $\Leftrightarrow$ $\exists$ chiuso B di X tale che $C = Y \cap B$;
(3) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ base di $\mathcal{T}$ $\Rightarrow$ $\{Y \cap V \mid V \in \mathcal{B}\}$ base della top. su Y ;
(4) $\forall\, Z \subseteq Y$, Z aperto (risp. chiuso) di X $\Rightarrow$ Z aperto (risp. chiuso) di Y ;
(5) l'applicazione i (o i_Y) $: Y \to X$ di inclusione, cioè data da $i(y) := y$ $\forall\, y \in Y$, è continua e anzi la topologia di sottospazio è la meno fine fra tutte le topologie su Y che rendono continua i ;

(6) $Z\ (\subseteq X)$ SOTTOSPAZIO DISCRETO DI $X \overset{\text{def}}{\iff}$ la topologia di sottospazio su Z è quella discreta, ossia è $\mathcal{P}(Z)$; ciò equivale alla proprietà che, $\forall z \in Z$, $\exists V \in \mathcal{T}$ tale che $V \cap Z = \{z\}$.

[(1) $\{\underbrace{X \cap V}_{(=V!)} \mid V \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$; (2) $C\ (\subseteq Y)$ chiuso in $Y \iff Y \setminus C$ aperto in $Y \iff \exists V$ aperto di X tale che $Y \setminus C = Y \cap V$, $\iff C = Y \setminus (Y \cap V), = Y \setminus V = Y \cap (X \setminus V)$: prendiamo il chiuso $B := X \setminus V$ di X; (3) $\forall A \subseteq Y$ aperto di Y, se $A = Y \cap V$ con V aperto di X, essendo $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ per opportuni (I e) $V_i \in \mathcal{B}$, allora $A = Y \cap (\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} (Y \cap V_i)$; (4) $Z \subseteq Y \Rightarrow Z = Y \cap Z$, quindi Z aperto di X implica Z aperto di Y, e lo stesso se chiuso; (5) $\forall V \in \mathcal{T}$, $i^{-1}(V) = Y \cap V$ è aperto in Y, quindi i è continua; per ogni altra topologia su Y che rende i continua, è comunque $i^{-1}(V) = Y \cap V$, $\forall V \in \mathcal{T}$, aperto in tale topologia, che allora contiene quella di sottospazio su Y; (notiamo che in particolare, come già era chiaro, la topologia meno fine su X che rende $i_X = id_X : (X, ?) \to (X, \mathcal{T})$ continua è esattamente $\mathcal{T}$!)
(6) Z ha topologia $\mathcal{P}(Z) \iff$ tutti i singoletti di Z sono aperti di Z, cioè la tesi. □ (ES.: $Z = \emptyset$!)]

Z, X sp. top. e $Y \subseteq X$ sottosp.; posto $i := i_Y$ l'inclusione $Y \to X$, una $f : Z \to Y$ è continua $\iff i \circ f : Z \to X$ è continua.

[$\Rightarrow$): $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} X$ è continua in quanto composizione di continue;
$\Leftarrow$): $\forall$ aperto A di Y, diciamo $A = Y \cap V$ con V aperto di X,

$f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \cap V) = f^{-1}(i^{-1}(V)) = (i \circ f)^{-1}(V)$ è aperto in Z per ipotesi di continuità. $\square$ 8

X sp. top. e $Y \subseteq X$ sottosp. $\neq \emptyset$; (1) $\forall A \subseteq Y$, $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}^X$; (2) sia $Z \subseteq Y$ aperto (risp. chiuso) di Y : se Y è aperto (risp. chiuso) in X, allora anche Z è aperto (risp. chiuso) in X ; (3) se Y è un intorno in X di un certo $y \in Y$, allora, $\forall Z \subseteq Y$, Z è un intorno di y in Y ($\Leftrightarrow$) Z è un intorno di y in X.

(1) $\forall A \subseteq Y$ fissato, essendo chiaramente che $\{C \subseteq Y \mid C$ è un chiuso di Y e $C \supseteq A\} = \{Y \cap B \ (\subseteq Y \subseteq X) \mid B$ è un chiuso di X e $B \supseteq A\}$, allora la tesi discende semplicemente dalla def. di chiusura : $\overline{A}^Y = \bigcap_{\substack{C \subseteq Y \text{ chiuso in } \\ Y,\ C \supseteq A}} C = \bigcap_{\substack{B \text{ chiuso in } X, \\ B \supseteq A}} (Y \cap B) = Y \cap \left(\bigcap_{\substack{B \text{ chiuso di } X, \\ B \supseteq A}} B\right) =: Y \cap \overline{A}^X$; ✓

(2) se $Z = Y \cap V$ con V aperto di X, Y aperto di $X \Rightarrow Z$ aperto anche di X ; analogo se sono chiusi ! ✓

(3) $\Leftarrow$) : se $y \in V \subseteq Z$ per un opportuno aperto V di X, allora si ha immediatamente la tesi riconoscendo che V è aperto anche di Y, perché $V \subseteq Z \subseteq Y$ ed è aperto di X ; ✓

$\Rightarrow$) : sia anzitutto $y \in U \subseteq Y$ con U aperto opportuno di X ; se ora è anche $y \in A \subseteq Z$ con A un aperto di Y, allora deduciamo $y \in A \cap U \ (\subseteq Z)$ e in effetti $A \cap U$ è un aperto di X : ‖ infatti considero $U \subseteq X$ come sottosp. di X, ed essendo un aperto di X basta provare (per (2)) che $A \cap U$ è aperto in U ;

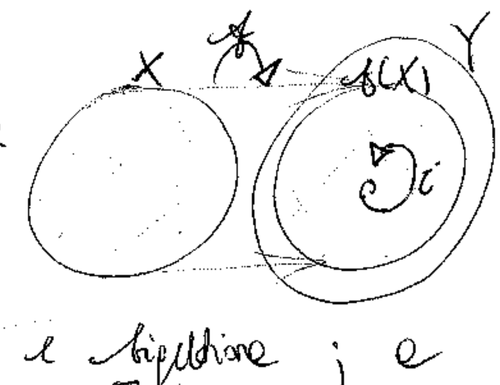
questo è vero in quanto A è aperto in Y, diciamo $A = Y\cap V$ con V aperto di X, e $U \subseteq Y$, $\Rightarrow A\cap U = U\cap(Y\cap V) = U\cap V$ è aperto in U. $\square$

X, Y sp. top., e $f : X \to Y$ continua ed iniettiva ($\Rightarrow |X| \le |Y|$): f è UNA IMMERSIONE (TOPOLOGICA) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ topologia su $X \underset{(\subseteq)}{=} \{f^{-1}(A) \mid A \subseteq Y$ aperto di $Y\}$ (ES: $X \subseteq Y$ sottosp. e $f := i := i_X$!).

Ciò equivale a: [1] $\{$chiusi di $X\} \underset{(\subseteq)}{=} \{f^{-1}(C) \mid C \subseteq Y$ chiuso di $Y\}$; e [2] f induce un omeomorfismo $X \to \underset{(\text{sottosp. di } Y!)}{f(X)}$.

[1 $\Rightarrow$): $\forall\, B$ chiuso di X, se $B = X \setminus V$ con V aperto di X ($V := X\setminus B$!), allora $V = f^{-1}(A)$ con A aperto di Y $\Rightarrow$ $B = X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$: prendiamo $C := Y\setminus A$ chiuso di Y; ✓ $\Leftarrow$): $\forall$ aperto V di X, $V = X \setminus \underbrace{B}_{\text{chiuso in } X} = X \setminus f^{-1}(\underbrace{C}_{\text{chiuso in } Y}) = f^{-1}(Y\setminus C)$ e $Y \setminus C =: A$ è aperto di Y; ✓

[2] siano $f' : X \to f(X)$ data ponendo, $\forall x \in X$, $f'(x) := f(x)$, e $i := i_{f(X)}$ l'inclusione $f(X) \to Y$: allora $f = i \circ f'$, per



cui f continua ed iniettiva $\overset{(\text{IMMEDIATO})}{\Longleftrightarrow}$ f' continua e biiettiva; e questo posto f immersione $\overset{(\mathrm{I})}{\Longleftrightarrow}$ f' immersione $\overset{(\mathrm{II})}{\Longleftrightarrow}$ f' omeomorfismo (che è la tesi): infatti vale (I) semplicemente perché, $\forall$ aperto V di X e $\forall$ aperto A di Y, $V = f^{-1}(A) \overset{(\text{QUASI TAUTOLOGICA})}{\Longleftrightarrow} V = f^{-1}(f(X) \cap A)$; vale infine (II) in quanto f' è anche suriettiva, visto che in generale vale il seguente risultato:

$f: X \to Y$ continua e biiettiva ; f immersione $\Leftrightarrow$ f omeo.

Sia $g \doteq f^{-1}: Y \to X$; $\Leftarrow$) : essendo g continua, $\forall$ aperto V di X è $A := g^{-1}(V)$ aperto di Y ; ma $V = f^{-1}(A)$! e
$\Rightarrow$) : $\forall$ aperto V di X, se $f^{-1}(A) = V$ per un opportuno aperto A di Y, allora $g^{-1}(V) = A$ è effettivamente aperto in Y, per cui g è continua. □ □

$f: X \to Y$ continua ed iniettiva ; f chiusa (risp. aperta) $\Rightarrow$ f è un'immersione (chiusa (risp. aperta)).

Sappiamo che $f': X \to f(X)$ è continua e biiettiva ; in realtà f chiusa $\Rightarrow$ f' chiusa : $\forall$ chiuso C di X, dato che $f(C)$ è chiuso di Y, essendo $f(C) \subseteq f(X)$ abbiamo effettivamente che banalmente $f(C)$ è chiuso anche in $f(X)$; e in conclusione f' è un omeomorfismo ! Il caso f aperta è analogo. □

Poiché f continua (ed iniettiva) $\not\Rightarrow$ f aperta né chiusa, non tutte le immersioni sono aperte o chiuse ; in effetti, precisamente, per $f: X \to Y$ immersione vale che f è chiusa (risp. aperta) $\Leftrightarrow$ $f(X)$ è chiuso in Y (risp. aperto).

Sappiamo infatti che tra l'altro $f': X \to f(X)$ è chiusa, cioè che, $\forall$ chiuso C di X, $f'(C)$ è chiuso in $f(X)$; ma $f(X)$ chiuso in Y $\Rightarrow$ $f'(C)$ è chiuso pure in Y, ed infine $f'(C) = f(C)$ in modo ovvio ; il caso aperto è analogo. □

EX. 1. Elencare tutte le strutture topologiche per i seguenti tre insiemi: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{a,b\}$. Osservare quindi che una topologia su un insieme finito può avere sia un numero pari di aperti, sia un numero dispari di aperti.

[Per $\emptyset$: $\{\emptyset\}$; per $\{a\}$: $\{\emptyset, \{a\}\}$; per $\{a,b\}$: $\{\emptyset, \{a,b\}\}$, $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$, $\{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}$ e $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.] (Volendo considerare una topologia su un insieme X, potremmo sempre supporre $X \neq \emptyset$.)

EX. 2. X insieme; LA TOPOLOGIA COFINITA SU X resta definita ponendo $C \subseteq X$ chiuso $\overset{d}{\Leftrightarrow}$ C è finito o $C = X$. Allora X finito $\Leftrightarrow$ tale topologia è $\mathcal{P}(X)$, mentre X infinito $\Rightarrow$ $\forall A, B$ aperti $\neq \emptyset$ di X, $A \cap B \neq \emptyset$.

[Anzitutto in effetti i chiusi di X soddisfano (C1), (C2) e (C3) (: $\emptyset$ è chiuso perché finito, e X è chiuso per def.; $(C_i)_{i \in I}$ chiusi $\Rightarrow$ se $\forall i \in I$ $C_i = X$, allora in effetti $\bigcap_{i \in I} C_i = X$ è chiuso; se altrimenti $\exists\, j \in I$ tale che C_j è finito, allora a maggior ragione $\bigcap_{i \in I} C_i \subseteq C_j$ è finito (quindi chiuso); infine C, D chiusi $\Rightarrow$ $C \cup D = X$ se almeno uno dei due è X, altrimenti è certamente finito.), cioè gli aperti di X sono esattamente i complementari di tali chiusi. Dunque X finito $\Rightarrow$ sono aperti tutti i suoi sottoinsiemi perché (equivalentemente) sono chiusi tutti i suoi sottoinsiemi; d'altra parte, per X infinito non sono certamente aperti i suoi sottoinsiemi $\neq \emptyset$ finiti. A proposito, $\forall$ aperto

A, B di $X \neq \emptyset$, se per assurdo $A \cap B = \emptyset$ allora (equiv.) $B \subseteq A^c := X \setminus A \overset{(X\setminus A \text{ diverso } \neq X)}{\Longrightarrow} B$ finito, che è assurdo (oppure: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \underset{(\text{finito})}{A^c} \cup \underset{(\text{finito})}{B^c} = X$, che è assurdo in modo analogo); capiamo allora che neanche tutti i sottoinsiemi infiniti di X sono mai aperti. $\square$

EX. 3. Con X insieme $\neq \emptyset$ e $\infty \in X$ fissato, è topologia su X $\mathcal{T} := \{ A \subseteq X \mid \infty \notin A \text{ oppure } X \setminus A \text{ finito} \}$.

(A1): $\emptyset \in \mathcal{T}$ perché $\infty \notin \emptyset$, mentre $X \in \mathcal{T}$ perché $X \setminus X = \emptyset$ è finito. / (A2): $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{T} \Rightarrow A := \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ perché: $\forall i \in I$, $\infty \notin A_i \underset{(A_j \in \mathcal{T})}{\Rightarrow} \infty \notin A$, mentre $\exists j \in I$ tale che $\infty \in A_j \Rightarrow X \setminus A_j$ è finito, per cui $X \setminus A = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \subseteq X \setminus A_j$ è finito. / (A3): $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$ perché: $\infty \notin A$ oppure $\infty \notin B \Rightarrow \infty \notin A \cap B$ $\left(\begin{smallmatrix} \subseteq A \\ \subseteq B \end{smallmatrix} \right)$; altrimenti necessariamente entrambi $X \setminus A$ e $X \setminus B$ sono finiti, per cui anche $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ è finito. $\square$

EX. 4. Se $(X, \leq)$ è un ins. $\neq \emptyset$ ordinato (parzialmente), allora $\mathcal{M} := (M_x)_{x \in X}$, con $M_x := \{ y \in X \mid x \leq y \}$, è base di una topologia su X.

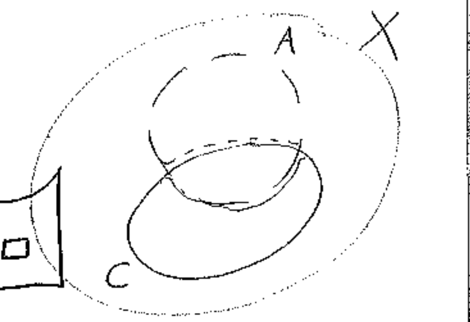
(1) $X \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{x \in X} M_x$ perché semplicemente, $\forall \bar{x} \in X$, $\bar{x} \in M_{\bar{x}}$ $(\bar{x} \overset{\text{RIFL.}}{\leq} \bar{x})$. /

(2) $\forall x, z \in X$, $\forall \bar{x} \underset{\left(\begin{smallmatrix} x \leq \bar{x} \\ z \leq \bar{x} \end{smallmatrix} \right)}{\in} M_x \cap M_z$ (che possiamo supporre $\neq \emptyset$), è $\bar{x} \in M_{\bar{x}} \subseteq M_x \cap M_z$ perché $\bar{x} \leq y \overset{\text{TRANS.}}{\Longrightarrow} x \leq y$ e $z \leq y$. / Notiamo di non aver usato che $\leq$ è antisimmetrico. $\square$

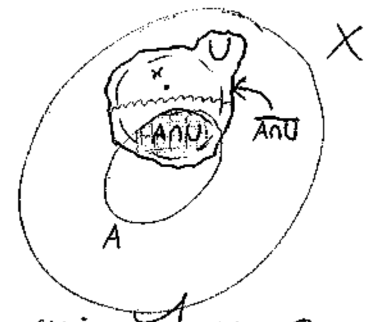
EX. 5. X sp. top. ; A aperto di X e C chiuso di X $\Rightarrow$ $A \setminus C$ è aperto di X e $C \setminus A$ è chiuso di X.

[$A \setminus C = A \cap \underbrace{(X \setminus C)}_{\text{(aperto!)}}$ è aperto, e

analogamente $C \setminus A = C \cap \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{(chiuso!)}}$ è chiuso. □]



EX. 6. X sp. top. ; $A \subseteq X$ denso in X $\Rightarrow$ $\forall$ aperto U di X, $U \subseteq \overline{U \cap A}$.



[Posso supporre $U \neq \emptyset$, ~~ma anche~~ anzi $U \not\subseteq A$; se per assurdo esistesse aperto U di X (con $U \not\subseteq A$ e) $U \not\subseteq \overline{U \cap A}$, cioè tale per cui $\exists\, x \in U \setminus \overline{U \cap A} =: V$ (aperto di X!), allora si ha la contraddizione che $V \neq \emptyset$ è un aperto per il quale però $A \cap V = \emptyset$ $\left(U \cap A \subseteq \overline{U \cap A} \Rightarrow V = U \setminus \overline{U \cap A} \subseteq U \setminus (U \cap A) = U \setminus A \,! \right)$, mentre per ipotesi A è denso in X. □]

EX. 7. X sp. top. ; $\forall A, B \subseteq X$, valgono

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(2) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, mentre $\supseteq$ è falso in generale ;

(3) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;

(4) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$, mentre $\subseteq$ è falso in generale.

[(1) $\subseteq$: $\begin{cases} A \subseteq \overline{A} \\ B \subseteq \overline{B} \end{cases} \Rightarrow A \cup B \subseteq \underbrace{\overline{A} \cup \overline{B}}_{\text{(chiuso!)}} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$; ✓

$\supseteq$: $\underset{\text{(chiuso!)}}{\overline{A \cup B}} \supseteq A \cup B \supseteq \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supseteq \begin{cases} \overline{A} \\ \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. ✓

NOTA : più in generale certamente $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \underset{*}{\subseteq} \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$!

(2) $\begin{cases} A \subseteq \overline{A} \\ B \subseteq \overline{B} \end{cases} \Rightarrow A \cap B \subseteq \underbrace{\overline{A} \cap \overline{B}}_{\text{(chiuso!)}} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, e

anzi più in generale $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$. ✓ Infine

in generale $\overline{A} \cap \overline{B} \nsubseteq \overline{A \cap B}$: basta prendere $A \cap B = \phi$ (cioè $\overline{A \cap B} = \phi$) ma $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \phi$ purché $\overline{B} = X$ e $\overline{A} \neq \phi$ (magari $\overline{A} = A \neq \phi$) . ✓

(3) $X \setminus (\overline{A \cup B}) = (X \setminus (A \cup B))^\circ = ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ$

$\overset{(1)}{\|}$

$X \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = (X \setminus \overline{A}) \cap (X \setminus \overline{B}) = (X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ$,

$\Rightarrow ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))^\circ = (X \setminus A)^\circ \cap (X \setminus B)^\circ$; ma qui $C, D \subseteq X$ sono della forma $C = X \setminus A$ e $D = X \setminus B$ (purché $A := X \setminus C$ e $B := X \setminus D$) , per cui $(C \cap D)^\circ = C^\circ \cap D^\circ$ per ogni $C, D \subseteq X$. ✓

NOTA : più in generale vale (analogamente) $\bigcap_{i \in I} A_i^\circ \underset{*}{\supseteq} \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^\circ$!

(4) $\begin{cases} A^\circ \subseteq A \\ B^\circ \subseteq B \end{cases} \Rightarrow \underbrace{A^\circ \cup B^\circ}_{\text{(aperto!)}} \subseteq A \cup B \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, e

anzi più in generale $\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ$. ✓ Infine in

generale $(A \cup B)^\circ \nsubseteq A^\circ \cup B^\circ$: $B := X \setminus A \Rightarrow A \cup B = X$ (cioè $(A \cup B)^\circ = X$) , mentre $A^\circ \cup (X \setminus A)^\circ = A^\circ \cup (X \setminus \overline{A}) \underset{(A^\circ \subseteq \overline{A})}{=}$

$= X \setminus (\overline{A} \setminus A^\circ)$; allora basta inoltre prendere A tale che (3)
$\overline{A} \setminus A^\circ \neq \emptyset$, come $A \neq X$ tale che $\overline{A} = X$ ($\overline{A} \setminus A^\circ =$
$= X \setminus A^\circ \neq \emptyset$ perché $\exists\, x \notin A \supseteq A^\circ$!) . $\square$

EX. 8. LA TOPOLOGIA EUCLIDEA SU $\mathbb{R}$, "$\mathcal{T}_\mathcal{E}$", è definita ponendo $A \in \mathcal{T}_\mathcal{E} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, J$ insieme e $a_j < b_j$ reali tali che $A = \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j)$, ossia considerando aperti tutte e sole le unioni di intervalli aperti finiti di $\mathbb{R}$: verificarlo. Vedere inoltre che, $\forall a \in \mathbb{R}$, $(-\infty, a) \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$ (e anche $(a, +\infty) \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$), che $\forall a \leq b$ (reali) $[a,b]$ è chiuso in $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ (così come $[a, +\infty)$ e $(-\infty, a]$) e che quindi ogni sottoinsieme FINITO di $\mathbb{R}$ è chiuso, mentre sicuramente ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$ e $\neq \emptyset$ NON è aperto. Infine dimostrare che, $\forall a < b$ reali, $[a, b)$ è né aperto né chiuso (così come $(a, b]$).

[Che $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ sia una topologia equivale (data la def. di $\mathcal{T}_\mathcal{E}$) al fatto che $\mathcal{B} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = (a,b)$ con $a<b$ reali$\}$ soddisfi (1) $\mathbb{R} = \bigcup_{\substack{a<b \\ \text{reali}}} (a,b)$ (che è facile) e (2) $\forall a<b$ e $c<d$ reali, $\forall x \in (a,b) \cap (c,d)$, $\exists\, c' < b'$ reali tali che $x \in (c', b') \subseteq (a,b) \cap (c,d)$; ma possiamo supporre (per simmetria) $a \leq c$, nel caso $a < c$ se anche $b \leq c$ allora banalmente $(a,b) \cap (c,d) = \emptyset$; se invece $c \lneq b$, allora $(a,b) \cap (c,d) = (c,b)$ (per cui pongo $c' := c$ e $b' := b$) ; nel caso $a = c$, semplicemente

$(a,b) \cap (\underset{(=a)}{c},d) = (a, b \wedge d)$. ✓ ~~A~~ questo punto, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, a) = \bigcup_{n \geq 1} (a-n, a)$ e $(a, +\infty) = \bigcup_{n \geq 1} (a, a+n)$ $\Rightarrow$

$(-\infty, a), (a, +\infty) \in \mathcal{T}_\varepsilon$; ma allora, $\forall a \leq b$ reali,

$[a,b]$ è chiuso perché $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, in

particolare $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{a\}$ è chiuso, e il fatto che i singoletti

siano chiusi equivale al fatto che i sottoinsiemi finiti siano chiusi;

inoltre $\mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a)$ (cioè $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a) = [a, +\infty)$) e

$\mathbb{R} \setminus (-\infty, a] = (a, +\infty)$ sono chiusi. Poi un sottoinsieme $\neq \emptyset$

aperto, dovendo contenere almeno un (a,b) ($a<b$ reali), non

è numerabile perché piuttosto ha la cardinalità del continuo;

in effetti i sottoinsiemi numerabili di $(X, \mathcal{T})$ sp. top. sono aperti $\overset{(A2)}{\Leftrightarrow}$ in

realtà $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, mentre ora $\mathcal{T}_\varepsilon \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Infine, se per assurdo $[a,b) = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ ($a<b$ reali, $a_i < b_i$

reali), allora $\forall i \in I$ $(a_i, b_i) \subseteq [a,b) \Leftrightarrow \forall i \in I$, $b_i \leq b$ e

$a \leq a_i$; ma allora $a \in [a,b) \setminus \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ in quanto

piuttosto $a \notin (a_i, b_i)$ per ~~alcun~~ ogni $i \in I$ (ed è evidente che per

$(a,b]$ è analogo). Allora

se per assurdo $[a,b)$ fosse chiuso (per almeno due $a<b$ reali)

avremmo che $\underset{(=(-\infty,b))}{(-\infty,a] \cup [a,b)}$ sarebbe chiuso, cioè che

$[b,+\infty)$ sarebbe aperto, e quindi, preso $c > b$ reale, che

$[b,c) = \underset{(\text{"aperto"})}{[b,+\infty)} \setminus \underset{(\text{chiuso})}{[c,+\infty)}$ è aperto: assurdo! Per

$(a,b]$ è analogo. ✓ (Notiamo che quindi, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$(-\infty, a]$ e $[a,+\infty)$ NON sono aperti, cioè $(-\infty,a)$ e $(a,+\infty)$ non sono chiusi, CIOÈ (facile) gli $[a,b]$ NON sono aperti e gli (a,b) non sono chiusi! Allora certamente $\overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = [a,b]$, $\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$ e $\overline{(a,+\infty)} = [a,+\infty)$, mentre $[a,b)^\circ = (a,b]^\circ = (a,b)$, $[a,b]^\circ = (a,b)$, $(-\infty,a]^\circ = (-\infty,a)$ e $[a,+\infty)^\circ = (a,+\infty)$. Osserviamo comunque come i suoi risultati sono raggiunti ragionando cogli intorni dei punti.) □]

EX. 9. LA TOPOLOGIA DELLA SEMICONTINUITÀ SUPERIORE SU $\mathbb{R}$, "$\mathcal{T}_{ss}$", è definita ponendo $A \in \mathcal{T}_{ss} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists$ $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che $A = (-\infty, a)$ oppure $A = \phi$. Invece LA RETTA DI SORGENFREY è $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ dove $A \in \mathcal{T}_s \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists$ J insieme e $a_i < b_i$ reali tali che $A = \bigcup_{i\in J}[a_i,b_i)$.
Verificare che sono topologie e che $\mathcal{T}_{ss} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{E}} \subsetneq \mathcal{T}_s$.

[$\mathcal{T}_{ss}$: $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{ss}$ per def.; $\bigcup_{i\in I}(-\infty,a_i) \underset{(2)}{=} (-\infty, \sup_{i\in I} a_i)$; $(-\infty,a) \cap (-\infty,b) = (-\infty, a\wedge b)$. ✓ $\mathcal{T}_s$: $\mathbb{R} \underset{(5)}{=} \bigcup_{\substack{a<b\\ \text{reali}}}[a,b)$ è ovvio; $\forall\, a<b$ e $c<d$ reali, possiamo supporre $a \le c$, se $a=c$ allora $[a,b) \cap \underset{\substack{\text{4p}\\(a)}}{[c,d)} = [a, b\wedge d)$; se $a<c$, $b \le c \Rightarrow [a,b) \cap [c,d) = \phi$, mentre $c<b$ $\Rightarrow [a,b) \cap [c,d) = [c,b)$. ✓ Abbiamo $\mathcal{T}_{ss} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$:
$\subseteq$ perché, come visto, $(-\infty,a) \in \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$, e $\neq$ perché

dalle stesse def. di $\mathcal{T}_{\infty}$ è $(a,b) \notin \mathcal{T}_{\infty}$ $\forall a<b$ reali (o anche $b=+\infty$). ✓ Infine $\mathcal{T}_{\mathcal{E}} \subsetneqq \mathcal{T}_{s}$: $\subseteq$ perché, $\forall a<b$ reali, $(a,b) = \bigcup_{\substack{c>a \\ \text{reali}}} [c,b)$, e $\neq$ perché come visto $[a,b) \notin \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ $\forall a<b$ reali. □]

EX. 10. Dati $\mathbb{K}$ campo e $m \geq 1$ (intero), e posto $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$, definiamo LA TOPOLOGIA DI ZARISKI SU $\mathbb{K}^m$ quella di base $\mathcal{B} := \{\mathcal{D}(f)\}_{f \in A}$, dove $\forall f \in A$ $\mathcal{D}(f) := \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m \mid f(a_1, \dots, a_m) \neq 0\}$: verifichiamo la buona definizione e dimostriamo che tutti e soli i chiusi di tale topologia sono, al variare degli ideali I di A, i sottoinsiemi $\mathcal{V}(I)$ se poniamo $\mathcal{V}(f) := \mathbb{K}^m \setminus \mathcal{D}(f)$ $\forall f \in A$ e, $\forall E \subseteq A$, $\mathcal{V}(E) := \bigcap_{f \in E} \mathcal{V}(f)$.

[Anzitutto in effetti $\mathbb{K}^m \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{f \in A} \mathcal{D}(f)$ perché $\mathbb{K}^m \underset{(\subseteq)}{=} \mathcal{D}(1)$, e inoltre $\forall f, g \in A$ $\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(f \cdot g)$. ✓ Allora $\mathcal{V}(f) = \mathbb{K}^m \setminus \mathcal{D}(f) = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m \mid f(a_1, \dots, a_m) = 0\}$ è un chiuso, per cui $\forall E \subseteq A$, $\mathcal{V}(E) = \bigcap_{f \in E} \mathcal{V}(f) = \{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^m \mid f(a_1, \dots, a_m) = 0 \ \forall f \in E\}$ è ancora un chiuso : in particolare son chiusi tutti i $\mathcal{V}(I)$, con I ideale di A. Ora, grazie pure all'osservazione $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}((f))$ (essendo $(f) = A \cdot f = \{g \cdot f \mid g \in A\}$ l'ideale generato da f), possiamo considerare (E) ($\supseteq E$, $\neq \emptyset$ perché $(\emptyset) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{V}((\emptyset)) = \mathbb{K}^m = \mathcal{V}(\emptyset)$) : $f \in (E) \Leftrightarrow \exists\, m \geq 1$, $g_1, \dots, g_m \in A$ e

$f_1, \dots, f_m \in E$ tali che $f = g_1 f_1 + \dots + g_m f_m$, per cui chiaramente $V(E) \subseteq V((E))$; mentre d'altra parte $E \subseteq (E) \Rightarrow V((E)) \subseteq V(E)$, concludiamo $V(E) = V((E))$ $\forall E \subseteq A$ e dunque in effetti i $V(I)$ sono i soli chiusi. $\square$

EX. 11. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 1$, sia $N_{a,b} := \{a + kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(1) $\mathcal{B} := \{N_{a,b}\}_{a,b \in \mathbb{Z}, b \geq 1}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.

(2) Ogni $N_{a,b}$ è pure chiuso in tale topologia.

(3) Se $\mathcal{P} \subsetneq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi, allora $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{p \in \mathcal{P}} N_{0,p}$; dedurne che in effetti i numeri primi sono infiniti.

$\boxed{(1)}$ $\mathbb{Z} \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}, b \geq 1} N_{a,b}$ perché, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $m = 0 + 1 \cdot m \Rightarrow m \in N_{0,1}$ (cioè banalmente perché $\mathbb{Z} = N_{0,1}$); inoltre, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ con $\underset{(\Rightarrow b \cdot d \geq 1)}{b, d \geq 1}$, $N_{a,b} \cap N_{c,d} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists h, k \in \mathbb{Z} : m = a + kb = c + hd\} = \bigcup_{s \in N_{a,b} \cap N_{c,d}} N_{s,bd} = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists h, k \in \mathbb{Z}, \exists k' \in \mathbb{Z} : m = s + k'(bd) \text{ e } s = a + kb = c + hd\}$ ($\subseteq$: $k' = 0$; $\supseteq$: ad esempio, $m = s + k'(bd) = a + kb + k'(bd) = a + (k + k'd)b$). $\checkmark$

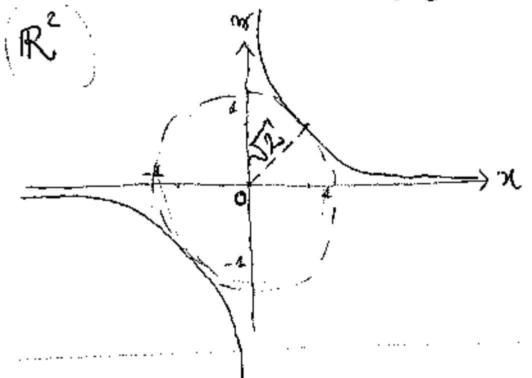
(2) $N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus (N_{a+1,b} \cup \dots \cup N_{a+b-1,b})$ (perché, $\forall 1 \leq i \leq b-1$, $a + kb = (a+i) + hb \Leftrightarrow (k-h)b = i$, assurdo; escluderebbe il caso $b = 1$, ma in realtà $\forall a \in \mathbb{Z}$ $N_{a,1} = \mathbb{Z}$ è chiuso). $\checkmark$

(3) $\underset{(\subseteq)}{\supseteq}$ è evidente: ogni numero intero $\neq \pm 1$ è divisibile $\underset{(\text{in } \mathbb{Z})}{}$

per almeno un numero primo (notare che $p\in\mathbb{P} \Rightarrow p\geq 2$!) . Se quindi per assurdo $\mathbb{P}$ fosse finito, allora $\mathbb{Z}\setminus\{-1,1\}$ sarebbe chiuso, cioè $\{-1,1\}$ sarebbe aperto, mentre invece ogni aperto $\neq$ $\neq \emptyset$ di $\mathcal{T}$ è infinito giacché contiene almeno un $N_{a,b}$. □]

EX. 12. Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo la topologia $\mathcal{T}$ definita ponendo $A\in\mathcal{T} \overset{d}{\Leftrightarrow} A=\emptyset$ o $A=\mathbb{R}^2$ o $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<r^2\}$ per un certo $r>0$. Chi è $\overline{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}}$?

[Innanzitutto $\mathcal{T}$ è una topologia : $\emptyset,\mathbb{R}^2\in\mathcal{T}$ per def. ; $\forall I\subseteq$ $\subseteq(0,+\infty)$, $\bigcup_{r\in I}\{x^2+y^2<r^2\} = \{x^2+y^2<(\sup_{r\in I} r)^2\}$; $\forall r,s>0$, $\{x^2+y^2<r^2\}\cap\{x^2+y^2<s^2\} = \{x^2+y^2<(r\wedge s)^2\}$; Allora $\mathbb{R}^2\setminus\overline{\{xy=1\}} = (\mathbb{R}^2\setminus\{xy=1\})^\circ$ = il più grande aperto contenuto in $\mathbb{R}^2\setminus\{xy=1\} = \{x^2+y^2<2\}$ chiaramente :



; cioè $\overline{\{xy=1\}} = \mathbb{R}^2\setminus\{x^2+y^2<2\}$. □]

EX. 13. Considerato $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$, $\{[-2^{-n},2^{-n}]\}_{n\geq 0}$ è un sistema fondamentale d'intorni di 0 . Per $\mathbb{R}$ con $\mathcal{T}_s$ o $\mathcal{T}_d$?

[$\forall U\in\mathcal{I}(0)$, $\exists$ $a<0<b$ reali tali che $0\in(a,b)\subseteq U$; da $2^{-n}\downarrow_{n\uparrow+\infty} 0$ deduciamo subito che $\exists$ $n\geq 0$ tale che $[-2^{-n},2^{-n}]\subsetneq$ $\subsetneq(a,b)$ ✓ Vale la stessa conclusione per $(\mathbb{R},\mathcal{T}_s)$: $\forall U$ $\in\mathcal{I}(0)$, $\exists$ $a>0$ reale tale che $0\in(-\infty,a)\subseteq U$, e ora

$\exists\, m \geq 0$ tale che $2^{-m} < e$. Inoltre per $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ la tesi è falsa: considerando $[0, b)$ con $b > 0$ reale, $[0, b) \in \mathcal{I}(0)$ e contemporaneamente $[-2^{-m}, 2^{-m}] \nsubseteq [0, b)$ $\forall m \geq 0$. $\square$

EX. 14. $(X, \mathcal{T})$ è UNO SPAZIO TOPOLOGICO T1 $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ è uno spazio topologico tale che ogni sottoinsieme finito è chiuso, cioè tale che è chiuso ogni suo singoletto. Dimostrare che
$(X \neq \emptyset)$

$$\underset{(\neq \emptyset)}{X} \text{ è } T1 \iff \forall x \in X,\ \{x\} \overset{(2)}{=} \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U .$$

$\boxed{\Leftarrow}$: se per assurdo $\exists\, x \in X$ tale che $\{x\}$ NON è chiuso, allora $X \setminus \{x\}$ non è aperto, cioè non è intorno di ogni suo punto; ciò equivale al fatto che $\exists\, y \neq x$ tale che, $\forall$ aperto V di X con $y \in V$, è però $V \nsubseteq X \setminus \{x\}$, cioè $x \in V$: allora chiaramente $\{x, y\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{I}(y)} U \overset{\text{ip.}}{=} \{y\}$ è assurdo. $\Rightarrow$): analogamente, se per assurdo $\exists\, x \in X$ tale che $\exists\, y \in X$ tale che, $\forall U \in \mathcal{I}(x)$, $y \in U$ ma $y \neq x$, allora $\{y\}$ non è chiuso perché (equiv.) $X \setminus \{y\}$ non è aperto: appunto $x \in X \setminus \{y\}$ è tale che ogni aperto di X che contiene x NON è tutto contenuto in $X \setminus \{y\}$, contenendo y.
(che è interno di x!)
Abbiamo concluso anche perché $X = \{x\} \Rightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, \{x\}\} = \mathcal{P}(X)$, dunque banalmente X sarebbe T1 e con le proprietà studiate. $\square$

(Notiamo invece che $\{x, y\}$ con $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ NON è T1: $\{x\}$ non è chiuso, e infatti $U \in \mathcal{I}(y) \iff U = \{x, y\} \ni x$.)

EX. 15. X sp. top. $\neq \phi$; $\{U_n\}_{n\geq 1}$ sistema fondamentale di intorni di un $x \in X \Rightarrow$ tale è $\{V_n\}_{n\geq 1}$ se $V_n := \bigcap_{k=1}^{n} U_k$.

[Chiaramente, $\forall n \geq 1$, $V_n \subseteq U_n$, e allora sapendo che, $\forall U \in \mathcal{I}(x)$, $\exists n \geq 1$ tale che $U_n \subseteq U$, abbiamo anche che $\forall U \in \mathcal{I}(x)$, $\exists n \geq 1$ tale che $V_n (\subseteq U_n) \subseteq U$. $\square$]

EX. 16. X insieme; supponiamo data, $\forall x \in X$, una $\mathcal{I}(x) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{P}(X)$ che soddisfi le seguenti cinque condizioni:

1. $\forall x \in X$, $X \in \mathcal{I}(x)$;
2. $\forall U \in \mathcal{I}(x)$, $x \in U$;
3. $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$;
4. $U, V \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{I}(x)$;
5. $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow \exists V \subseteq U$ tale che $x \in V$ e, $\forall y \in V$, $V \in \mathcal{I}(y)$.

Dimostrare che $\exists!$ topologia $\mathcal{T}$ su X rispetto alla quale, $\forall x \in X$, $\mathcal{I}(x)$ è esattamente la famiglia degli intorni di x.

[Anzitutto l'unicità è immediata: gli aperti di $\mathcal{T}$ sarebbero infatti tutti e soli i sottoinsiemi di X che sono intorno di ogni proprio punto (per cui ogni $A \in \mathcal{T}$, $A \neq \phi$, starebbe in almeno un $\mathcal{I}(x)$). Definiamo allora $A \in \mathcal{T} \overset{d}{\Leftrightarrow} \forall x \in$ $\in A$, $A \in \mathcal{I}(x)$: (A1) $X \in \mathcal{T}$ è 1., mentre $\phi \in \mathcal{T}$ in quanto "$\forall x \in \phi$, $\phi \in \mathcal{I}(x)$" equivale a "$x \in \phi \Rightarrow \phi \in \mathcal{I}(x)$", che è vera in quanto del tipo "$F \Rightarrow \ldots$"; (A2) $\forall (A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{T}$, $A := \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$ in quanto, $\forall x \in A$, diciamo $x \in A_i$, è $A_i \in \mathcal{I}(x)$, ma $A_i \subseteq A \overset{(3.)}{\Rightarrow} A \in \mathcal{I}(x)$; (A3) $\forall A, B \in T$, $A \cap B \in T$ perché $\forall x \in A \cap B$ $\begin{cases} x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{I}(x) \\ x \in B \Rightarrow B \in \mathcal{I}(x) \end{cases}$ $\overset{(4.)}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{I}(x)$ ✓. Possiamo quindi definire $\forall x \in X$ la famiglia $\mathcal{J}(x)$ degli intorni di x: $U \in \mathcal{J}(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \exists V \in T$ tale che $x \in V \subseteq U$. In realtà è $\mathcal{J}(x) = \mathcal{I}(x)$ $\forall x \in X$: $\subseteq$: $U \in \mathcal{J}(x) \Rightarrow \exists V \in T$ tale che $x \in V \subseteq U$; ma $V \in T$ $\Rightarrow$ in particolare $V \in \mathcal{I}(x)$, $\overset{3.}{\Rightarrow} U \in \mathcal{I}(x)$ ✓; $\supseteq$: $U \in \mathcal{I}(x) \overset{5.}{\Rightarrow} \exists V \subseteq U$ tale che $x \in V$ e, $\forall y \in V$, $V \in \mathcal{I}(y)$; l'ultima proprietà equivale per def. a $V \in T$, dunque riconosciamo subito (ancora per def.) che $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{J}(x)$. $\square$

EX. 17. X insieme; chiamiamo OPERATORE DI CHIUSURA SU X un'applicazione $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti quattro proprietà (dette DI KURATOWSKI):

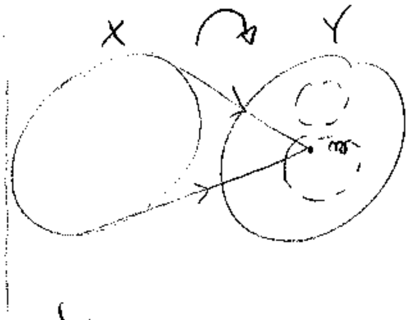
1. $\forall A \subseteq X$, $A \subseteq C(A)$ ($\not\Rightarrow X = C(X)$);
2. $\forall A \subseteq X$, $C(C(A)) = C(A)$;
3. $C(\emptyset) = \emptyset$;
4. $\forall A, B \subseteq X$, $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$.

Dimostrare che, per ogni topologia su X, $C : A \mapsto \overline{A}$ ($\forall A \subseteq X$) è operatore di chiusura, e che viceversa, per ogni operatore di chiusura C su X, $\exists!$ topologia T su X rispetto alla quale sia, $\forall A \subseteq X$, $C(A) = \overline{A}$.

$A \mapsto \overline{A}$ è di chiusura: $A \subseteq \overline{A}$, $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ è ormai tutto evidente. ✓

Sia fissato C di chiusura su X e definiamo $\mathcal{T}$ considerando come chiusi i $B \subseteq X$ tali che $C(B) \underset{(\subseteq)_{\text{gratis}}}{=} B$: (C1) X è chiuso per 1. e $\emptyset$ è chiuso per 3. ; (C2) osservando per cominciare che $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B)$ (in quanto $C(B) = C(A \cup B) \overset{(4.)}{=} C(A) \cup C(B) \Leftrightarrow C(B) \supseteq C(A)$), allora $(B_i)_{i \in I}$ chiusi $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i$ chiuso in quanto, $\forall j \in I$, $\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq B_j \Rightarrow C(\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq C(B_j) = B_j \ \forall j \in I$, cioè appunto $C(\bigcap_{i \in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$; (C3) $\forall A, B$ chiusi, $A \cup B$ chiuso in quanto $C(A \cup B) \overset{(4.)}{=} C(A) \cup C(B) = A \cup B$ (Notiamo che 2. è necessaria per la nuova definizione di B chiuso!). A questo punto, $\mathcal{T}$ topologia su $X \Rightarrow B$ è chiuso se e solo se $\underset{(B = C(B))}{}$ $B = \overline{B}$, per cui ovviamente $C(B) = \overline{B}$. Infine tale topologia è la sola per la quale $C(B) = \overline{B}$: ogni altra topologia $\mathcal{T}'$ su X sarebbe infatti tale che B chiuso in $\mathcal{T}' \Leftrightarrow B = \overline{B} = C(B)$, ossia $\mathcal{T}'$ e $\mathcal{T}$ avrebbero esattamente gli stessi chiusi. $\square$

EX. 18. X, Y sp. top. $\neq \emptyset$; $f : X \to Y$ costante è sicuramente continua.



[Sia $y \in Y$ tale che $f(x) = y \ \forall x \in X$; allora, $\forall$ aperto A di Y, $y \notin A \Rightarrow$ $f^{-1}(A) = \emptyset$ è aperto, ma pure $y \in A \Rightarrow f^{-1}(A) = X$ è aperto : in ogni caso $f^{-1}(A)$ è aperto di X. $\square$]

EX. 19. X ins. $\neq \emptyset$ e $\mathcal{R}, \mathcal{T}$ due topologie su X; $id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{R})$ è continua $\Leftrightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$.

[id_X " continua $\Leftrightarrow \forall$ aperto A di $\mathcal{R}$, $A = id_X^{-1}(A)$ è aperto di $\mathcal{T}$, cioè appunto $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$. $\square$]

EX. 20. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, siano $\forall c \in \mathbb{R}$ $M(c) := \{f > c\}$ e $m(c) := \{f < c\}$, e consideriamo $\mathcal{T}_\varepsilon$ su $\mathbb{R}$: allora f è continua $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$, $M(c)$ e $m(c) \in \mathcal{T}_\varepsilon$.

[$\Rightarrow$): $\forall c \in \mathbb{R}$, $M(c) = f^{-1}((c, +\infty))$ e $m(c) = f^{-1}((-\infty, c))$ sono chiaramente aperti; $\Leftarrow$): $\forall a < b$ reali, è quindi aperto $M(a) \cap m(b) = f^{-1}((a, +\infty)) \cap f^{-1}((-\infty, b)) = f^{-1}((a, +\infty) \cap (-\infty, b)) = f^{-1}((a, b))$. $\square$]

EX. 21. X sp. top. $\neq \emptyset$; $A, B \subseteq X$ ADERENTI $\stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset$, cioè se almeno uno fra $A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} \cap B$ è $\neq \emptyset$ (e, ad esempio, $A \cap \overline{B} \neq \emptyset \Leftrightarrow$ fra i punti aderenti a B ce ne è almeno uno di A); altrimenti sono SEPARATI. Dimostrare che un'applicazione è continua se e solo se preserva la relazione di aderenza fra insiemi: con Y sp. top. $\neq \emptyset$, $f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow \forall A, B \subseteq X$ aderenti, anche $f(A), f(B) \subseteq Y$ sono aderenti.

$\boxed{\Rightarrow)}$: sapendo che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ e $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$,

$\phi \neq f((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = f(A\cap\overline{B}) \cup f(\overline{A}\cap B) \subseteq$
$\subseteq (f(A) \cap f(\overline{B})) \cup (f(\overline{A}) \cap f(B)) \subseteq (f(A) \cap \overline{f(B)}) \cup$
$\cup (\overline{f(A)} \cap f(B))$. ✓ $\Leftarrow)$: se per assurdo f non fosse continua, allora (equiv.) $\exists$ chiuso C di Y tale che $f^{-1}(C)$ non è chiuso in X, cioè $\exists\, x \in \overline{f^{-1}(C)} \setminus f^{-1}(C)$ ($\Rightarrow f(x) \notin C$) ; allora banalmente $\{x\}$ e $f^{-1}(C)$ sono adiacenti, dunque per ipotesi $\{f(x)\} \cap \overline{f(f^{-1}(C))} \neq \phi$ oppure $\overline{\{f(x)\}} \cap f(f^{-1}(C)) \neq \phi$; ma $f(f^{-1}(C)) \subseteq C \Rightarrow \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq$
$\subseteq \overline{C} = C$, dunque avremmo $f(x) \notin \overline{f(f^{-1}(C))}$ e quindi dovrebbe essere $\overline{\{f(x)\}} \cap \underbrace{f(f^{-1}(C))}_{(\subseteq C)} \neq \phi$, $\Rightarrow$
$\phi \neq \overline{\{f(x)\}} \cap C$, $\Rightarrow \phi = \overline{\phi} \neq \overline{(\overline{\{f(x)\}} \cap C)} \subseteq \overline{\{f(x)\}} \cap$
$\cap\, \overline{C} = \{f(x)\} \cap C$, cioè $f(x) \in C$: assurdo. $\square$

EX. 22. (1) X sp. top. $\neq \phi$; $\underset{\sim}{\mathrm{Omeo}}(X) := \{f : X \to X \mid f$ è un omeomorfismo$\}$, con $\circ$, è un gruppo (non abeliano).
(2) Preso un altro sp. top. $Y \neq \phi$, $X \underset{\sim}{\sim} Y \overset{\text{di}}{\Leftrightarrow} X$ è omeomorfo a Y è una relazione di equivalenza (chiamata EQUIVALENZA TOPOLOGICA) sulla classe degli sp. top. $\neq \phi$.

---

(1) $\forall f, g : X \to X$ omeo, $f \circ g$ è ben definita ~~[illegible]~~ $X \to X$

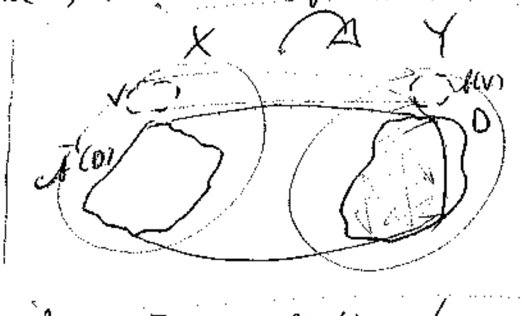
$f \circ g$ è omeo.: è continua (o di continue!), è bigettiva con inversa $(f\circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ continua; inoltre $\circ$ è associativa in tutta generalità (ma non commutativa), e ha elemento neutro $id_X \in Omeo(X)$, rispetto al quale ogni omeo. f ha inverso f^{-1}, pure omeo. ✓

(2) $X \sim X$ grazie a id_X; $X \sim Y$ grazie a $f: X \to Y$ omeo. $\Rightarrow$ $Y \sim X$ grazie a f^{-1}; $X \sim Y$ per f e $Y \sim Z$ per g $\Rightarrow$ $X \sim Z$ per $g \circ f$. □

EX. 23. X, Y sp. top. $\neq \emptyset$, $\mathcal{B}$ base della topologia di X e $f: X \to Y$ ~~continua~~; f aperta $\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{B}$, $f(A)$ è aperto in Y.

[$\forall$ aperto A di X, $\exists I$ insieme e $(A_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{B}$ tale che $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ $\Rightarrow$ $f(A) = f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \underset{(\text{aperti!})}{f(A_i)}$ è aperto. □]

EX. 24. X, Y sp. top. $\neq \emptyset$; $f: X \to Y$ aperta e $D \subseteq Y$ denso $\Rightarrow$ $f^{-1}(D)$ denso in X.



[Se per assurdo $\exists$ aperto $V \neq \emptyset$ di X tale che $f^{-1}(D) \cap V = \emptyset$, allora $U := f(V) \neq \emptyset$ sarebbe un aperto tale che $D \cap f(V) = \emptyset$: contraddizione rispetto alla densità di D (in Y). □]

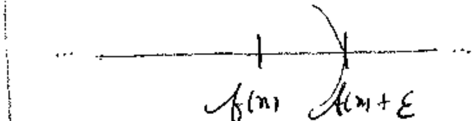
EX. 25. X, Y, Z sp. top. $\neq \emptyset$; sia dato commutativo il diagramma
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$
(cioè $g = h \circ f$):

allora f continua e suriettiva, e g chiusa (risp. aperta) $\Rightarrow$ h chiusa (risp. aperta).

[La tesi è: $\forall$ chiuso C di Y, $h(C)$ è chiuso di Z; ma infatti, $\forall$ chiuso $C \subseteq Y$, f suriettiva $\Rightarrow$ $C \underset{(\subseteq)}{=} f(f^{-1}(C))$, e f continua $\Rightarrow f^{-1}(C)$ è chiuso in X; essendo g chiusa $\Rightarrow g(f^{-1}(C))$ è chiuso in Z, ed infine $h(C) = g(f^{-1}(C))$ essendo poiché $h(C) = h(f(f^{-1}(C))) = \underbrace{(h \circ f)}_{=g}(f^{-1}(C))$. $\square$]

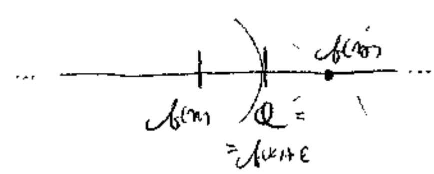
EX. 26. X sp. top. $\neq \emptyset$; $f: X \to \mathbb{R}$ "semicontinua superiormente" $\overset{d.}{\Leftrightarrow}$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\underset{(=\{f<a\})}{f^{-1}((-\infty, a))}$ è aperto in X (cioè f continua considerando su $\mathbb{R}$ la $\mathcal{T}_{ss}$): provare che ciò equivale a $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists U := U_\varepsilon \in \mathcal{I}(x)$ tale che, $\forall y \in U$, $f(y) < f(x) + \varepsilon$.

[$\Rightarrow$): $\forall x \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$, $U := U_\varepsilon :=$



$:= f^{-1}((-\infty, f(x)+\varepsilon))$ è dunque aperto di X, ed essendo $x \in U$ ($f(x) < f(x)+\varepsilon$!) è $U \in \mathcal{I}(x)$; per sua def. è poi evidente che $y \in U \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon$.

$\Leftarrow$): se per assurdo $\exists\, e \in \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}((-\infty,e))$ non è un aperto di X, allora (equiv.) $\exists\, x \in f^{-1}((-\infty,e))$ (cioè con $f(x) < e$: sia $\varepsilon := e - f(x)$ (>0), cioè tale che $f(x)+\varepsilon = e$) tale che $f^{-1}((-\infty,e)) \notin \mathcal{J}(x)$: allora (equiv.), $\forall$ aperto V di X, $x \in V \Rightarrow$



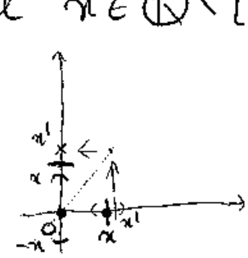
$\Rightarrow V \not\subseteq f^{-1}((-\infty,e))$, ossia $\exists\, y \in V \setminus f^{-1}((-\infty,e))$, cioè tale che $f(y) \geq e = f(x) + \varepsilon$; essendo d'altra parte evidente che avere tale situazione per V aperto equivale $(\Rightarrow)$ ad averla per $U \in \mathcal{J}(x)$, abbiamo quindi dedotto la negazione dell'ipotesi. $\square$

EX. 27. Esiste $f : [0,1] \to [0,1]$ T_ε-continua SOLO in 0.

[Se $\mathcal{D}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} = I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, allora sia

$f(x) := x \cdot \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; f è così

continua in $x=0$, cioè $\forall$ intorno U di $f(0)=0$ $\exists$ intorno V di 0 tale che $f(V) \subseteq U$: $V := U \Rightarrow f(V) = (U \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\} \subseteq U$. / f NON è continua in alcun $x \neq 0$: considerando infatti un intorno U di $f(x) \underset{(\neq 0!)}{=} x$, nel caso $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, tale che $0 \notin U$, allora $\forall$ intorno V di x è $f(V) \not\subseteq U$ in quanto $0 \in f(V) \setminus U$ (in un intorno di x c'è sempre un razionale!) ; se invece $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, ad esempio $x > 0$ e razionale, posso prendere $U := (-x, x)$ come intorno di $0 = f(x)$ affinché



$\forall$ intorno V di x sia $f(V) \nsubseteq U$ in quanto $\exists\, x' \in V$ tale che $x' \geq x$ e $x' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow f(x') = x'$), $\Rightarrow x' \in f(V) \setminus U$. ✓
È ovvio infine che dunque $f|_{[0,1]}$ è continua solo in 0. $\square$]
($\to [0,1]$!)

EX. 28. Sia $A \subsetneq \mathbb{R}$ numerabile: esiste $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ τ_ε-continua in tutti e soli i punti di $\mathbb{R} \setminus A$.

[Se $A = \{x_n\}_{n \geq 1}$, allora sia $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1/n & \text{se } x = x_n \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow f(x) \in [0,1]$); f è continua su $\mathbb{R} \setminus A$: $\forall x \notin A$, $\forall$ intorno $U \subseteq [0,1]$ di 0, prendo $\varepsilon \in (0,1]$ tale che $U \subseteq [0,\varepsilon]$ e considero $V :=$ un qualsiasi intorno di x tale che gli x_n a lui appartenenti hanno $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ ($\Rightarrow f(V) \subseteq U$; è chiaro che V esiste: posso prendendolo aperto e togliervi un numero finito opportuno di x_n!). f non è continua su A: $\forall\, n \geq 1$, prendo un intorno U di $f(x_n) = 1/n$ tale che $0 \notin U$, ottenendo così che $\forall$ intorno V di x_n è $f(V) \nsubseteq U$ in quanto $0 \in f(V) \setminus U$ ($\forall$ intorno V di x_n c'è almeno un $x \notin A$ tale che $x \in V$!). $\square$

(Se $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ con A_n finiti, allora più in generale va bene $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ \dfrac{1}{\min\{n \geq 1 \mid x \in A_n\}} & \text{se } x \in A \end{cases}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) e lo si vede esattamente allo stesso modo. ✓)]

EX. 29*. X sp. top. $\neq \emptyset$ e $f: X \to \mathbb{R}$ applicazione; dimostrare che $\{x \in X \mid f$ è T_ε-continua in $x\}$ è intersezione numerabile di aperti di X.

Notiamo anzitutto che in effetti, in riferimento ai due EX. precedenti, $\{0\} = \bigcap_{n \geq 1} (-n^{-1}, n^{-1})$ e $\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus (\bigcup_{n \geq 1} \underset{\text{(finiti)}}{A_n}) = \bigcap_{n \geq 1} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus A_n)}_{\text{(aperti!)}}$.

Siano ora, $\forall n \geq 1$, $A_n := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{I}(x) : \forall y, z \in U, |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}\}$ e $B_n := \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{I}(x) : \forall y \in U, |f(y) - f(x)| < \frac{1}{n}\}$: allora $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{n \geq 1} B_n$; infatti $A_n \overset{(z:=x)}{\subseteq} B_n$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow$ il $\subseteq$, mentre $(\bigcap_{n \geq 1} B_n \subseteq) B_{2n} \subseteq A_n$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow$ il $\supseteq$ ($B_{2n} \subseteq A_n$ perché $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$) ✓. Allora $\bigcap_{n \geq 1} B_n = \{x \in X \mid \forall n \geq 1, \exists U \in \mathcal{I}(x) : \forall y \in U, |f(x) - f(y)| < 1/n\}$ è esattamente $= \{x \in X \mid f$ è T_ε-continua in $x\}$ (perché, $\forall$ intorno V di $f(x)$, $\frac{1}{n} \underset{n \uparrow +\infty}{\downarrow} 0 \Rightarrow \exists n \geq 1$ tale che $(f(x) - 1/n, f(x) + 1/n) \subseteq V$, e in effetti $|f(x) - f(y)| < 1/n \Leftrightarrow f(y) \in (f(x) - 1/n, f(x) + 1/n)$) e per l'uguaglianza con $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ ho certamente la tesi se gli A_n sono aperti di X; ma infatti, $\forall n \geq 1$, A_n è intorno di ogni suo punto: $\forall x \in A_n$, se $U \in \mathcal{I}(x)$ è tale che $|f(y) - f(z)| < 1/n$ $\forall y, z \in U$, allora l'aperto V di X tale che $x \in V \subseteq U$ è certamente pure $V \subseteq A_n$ (in quanto banalmente, $\forall x' \in V$, V stesso (che è aperto) fa da $V \in \mathcal{I}(x')$ tale per cui,

$\forall x, z \in V$, $|f(x)-f(z)|<1/n$ essendo che $V \subseteq U$ e ciò vale su tutto U !) . $\square$

(Notiamo che quindi i B_n sono serviti per una "traduzione comoda" dell'insieme dell'enunciato, mentre gli A_n per raggiungere facilmente la tesi.)

EX. 30. (1) X, Y sp. top. $\neq \emptyset$ dotati delle due topologie R_X, T_X e R_Y, T_Y rispettivamente, e $f : (X, T_X) \to (Y, T_Y)$ continua : allora $R_X \supseteq T_X$ e $R_Y \subseteq T_Y \Rightarrow f : (X, R_X) \to (Y, R_Y)$ continua.

(2) Composizione di aperte (risp. chiuse) è aperta (risp. chiusa).

(3) Far vedere che, per un'applicazione tra sp. top. $\neq \emptyset$, è continua $\not\Rightarrow$ né aperta né chiusa, e viceversa aperta o chiusa $\not\Rightarrow$ continua (anche anzi aperta e chiusa $\not\Rightarrow$ continua).

[(1) $\forall$ aperto A di $R_Y \subseteq T_Y$, per ipotesi $f^{-1}(A)$ è aperto di $T_X \subseteq R_X$. ✓

(2) X, Y, Z sp. top. $\neq \emptyset$ e $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ aperte $\Rightarrow g \circ f$ è aperta in quanto, $\forall$ aperto A di X, $f(A)$ è un aperto di $Y \Rightarrow (g \circ f)(A) = g(f(A))$ è un aperto di Z ; è evidente che tutto è analogo per le chiuse. ✓

(3) X, Y insiemi $\neq \emptyset$; se su Y consideriamo la topologia indiscreta $\{\emptyset, Y\}$, ogni $f : X \to Y$ è continua a prescindere dalla topologia fissata su X : infatti altrimenti

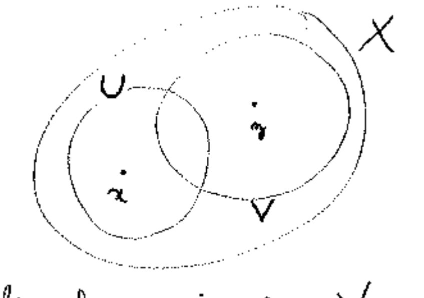
$f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ e $f^{-1}(Y)=X$ sono aperti di X ; dunque ogni $f: X \to Y$ con $A:=f(X) \subsetneq Y$ $(\neq\emptyset!)$ è continua ma né aperta né chiusa, essendo appunto ogni $A \neq \emptyset$ e $A \neq Y$ né aperto né chiuso, se inoltre Y NON è un singoletto. //

Viceversa, se su Y consideriamo la topologia discreta $\mathcal{P}(Y)$, allora ogni $f: X \to Y$ è aperta e chiusa contemporaneamente e prescindere dalla topologia fissata su X : infatti $\forall A \subseteq X$, è $f(A) \subseteq Y$, cioè $f(A) \in \mathcal{P}(Y)$; dunque una tale f non sarà continua se la topologia su X è "troppo piccola"... (prendo $X = Y$ con la topologia indiscreta $\{\emptyset, Y\}$ e Y NON singoletto (così che $\{\emptyset, Y\} \subsetneq \mathcal{P}(Y)$), e $f = id_Y$. □

EX. 31. (1) X sp. top. $(\neq\emptyset$ e $\neq$ singoletto$)$; dimostrare che X è $T1 \Leftrightarrow$ $\forall x \neq y \in X$, $\exists$ aperti U e V di X tali che $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$. Osservare che la topologia cofinita su X è quella meno fine che rende X $T1$.

(2) Più in generale, X è UNO SPAZIO TOPOLOGICO $T0$ $\overset{d.}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \neq y \in X$, $\exists$ aperto U di X tale che $x \in U$ ma $y \notin U$ (oppure $\exists$ aperto V di X tale che $y \in V$ ma $x \notin V$) ; far vedere che esistono spazi topologici NON $T0$.

(1) Per def. X è $T1 \Leftrightarrow$ ogni singoletto di X è un chiuso di X ; allora



$\Leftarrow$) : $\forall x \in X$ fissato, ogni altro $y \neq x$ in X è tale che $\exists$ aperto V_y di X tale per cui $y \in V_y$

ma $x \notin V_y$, per cui deduciamo subito che $\{x\} = X \setminus \underbrace{\bigcup_{\substack{y \neq x \\ \text{in } X}} V_y}_{(\text{aperto!})}$ $\Rightarrow$ $\{x\}$ è chiuso. ✓ $\Rightarrow$): $\forall x \neq y \in X$, $\{x\}$ e $\{y\}$ chiusi $\Rightarrow$ $V := X \setminus \{x\}$ e $U := X \setminus \{y\}$ sono aperti, e ovviamente $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$. ✓ Infine siano $(X, \mathcal{T})$ T1, e "$\mathcal{T}_{cof}$" la topologia cofinita su X (cioè tale che i chiusi di X sono i suoi sottoinsiemi finiti e X stesso): è allora evidente che $(X, \mathcal{T}_{cof})$ sia T1, ma pure che $\mathcal{T}_{cof} \subseteq \mathcal{T}$. ✓ (Notiamo inoltre che, per X finito, $(X, \mathcal{T})$ T1 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. ✓)

(2) Intanto X T1 $\Rightarrow$ X T0 banalmente, e inoltre $\Leftarrow$ è in generale falsa: $X := \{x, y\}$ $(x \neq y)$ con la topologia $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ è T0 ma non T1! Non è invece T0 ogni insieme sul quale consideriamo la topologia indiscreta, o meno banalmente $\{x, y, z\}$ (x, y, z tutti $\neq$) con la topologia $\{\emptyset, \{x\}, \{x, y, z\}\}$ (non "separiamo" y e z!). $\square$

EX. 32. $(X, \mathcal{T})$ sp. top. e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. (1) $\mathcal{B}$ base di $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{T}$ se e solo se, $\forall x \in A$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tale per cui $x \in B \subseteq A$. (2) Sia $\mathcal{B}$ effettivamente base di $\mathcal{T}$: allora, $\forall x \in X$, $U \in \mathcal{I}(x) \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq U$.
(3) Sia $\mathcal{T}'$ altra topologia su X con base $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}'$: allora $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall B' \in \mathcal{B}', \forall x \in B', \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq B'$.

(1) $\mathcal{B}$ base di $\mathcal{T}$ $\Leftrightarrow$ $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $\exists (B_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{B}$

tale che $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ ($\supseteq B_i$), cosa che equivale chiaramente alla tesi. ✓ (2) $\Leftarrow$): essendo B aperto e $x \in B$, è $B \in \mathcal{J}(x)$, e $B \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{J}(x)$ (anzi vale ciò per def.!) ; $\Rightarrow$): per def. $\exists$ aperto $A \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A \subseteq \subseteq U$ ($\Rightarrow A \neq \phi$) ; ma per (1) $\exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq \subseteq A, \subseteq U$. ✓ (3) $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{T}$ ($\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = \mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$), cioè, $\forall B' \in \mathcal{B}', B' \in \mathcal{T}$, $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \forall B' \in \mathcal{B}'$, $\forall x \in B'$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq B'$. □

EX. 32. (1) (X, d) sp. metrico ; $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$, $C := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ è chiuso nella d-topologia su X.
(2) X insieme $\neq \begin{cases} \phi \\ \{x\} \end{cases}$; $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}, \forall x, y \in X$, è una distanza su X che induce precisamente la topologia discreta su X (per cui $(X, \mathcal{P}(X))$ è metrizzabile).
(3) In generale, per (X, d) sp. metr., $\{y \in X \mid d(x,y) \leq r\} \neq \overline{B(x,r)}$.

(1) $X \setminus C$ è infatti aperto in X : $\forall y \in X \setminus C$, cioè tale che $s := d(x,y) - r > 0$, $B(y, s) \subseteq X \setminus C$ in quanto, $\forall z \in X$, $d(z,y) < s$ (cioè $-d(z,y) > -s$) $\Rightarrow d(x,z) \overset{\text{(dis. tr.)}}{\geq} \geq \underbrace{d(x,y)}_{(= s + r)} - d(z,y) > (s + r) - s = r$. ✓

(2) $d(x,y) \geq 0$, ed è $= 0 \Leftrightarrow x = y$, e $d(x,y) = d(y,x)$ sono facili ; $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ perché, potendo supporre $x \neq \neq y$, non può essere $z = x$ e $z = y$. ✓ Ora, $\forall x \in X$,

$\mathcal{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } 0 < r \leq 1 \\ X & \text{se } 1 < r \end{cases} \Rightarrow$ i singoletti di X sono aperti, cioè ogni sottoinsieme di X è aperto (cioè le stesse cose per i chiusi)

(3) Se (X,d) è lo sp. metr. di (2), allora $\mathcal{B}(x,1) = \{x\}$ ha $\overline{\mathcal{B}(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}$ (tutto è chiuso in X!) mentre chiaramente $\{y \in X \mid d(x,y) \leq 1\} = X \supsetneqq \{x\}$. $\square$

EX. 33. Dato $n \geq 1$ intero, sono distanze su $\mathbb{R}^n$ d_1, d_2 e d_∞ così definite: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $d_2(x,y) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$ e $d_\infty(x,y) :=$ max $\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$. Essendo $d_\infty(x,y) \leq d_2(x,y) \leq$ $\leq d_1(x,y) \leq n \cdot d_\infty(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, tali distanze sono equivalenti. (d_2 è LA DISTANZA EUCLIDEA SU $\mathbb{R}^n$, mentre la topologia indotta è LA TOPOLOGIA EUCLIDEA (o CLASSICA) su $\mathbb{R}^n$.)

La positiva definizione e la simmetria delle d_1, d_2 e d_∞ sono chiare; per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, per d_1 e d_∞ equivale a $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$ in modo immediato, mentre per d_2 discende da un fatto noto (basilare): $\langle x; y \rangle_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ è (chiaramente) un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ che induce la norma $\|x\|_2 := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2}$ che a sua volta induce effettivamente la distanza $d_2(x,y) = \|x - y\|_2$, per cui la sua dis. tr. equivale alla (nota) disuguaglianza di Schwarz.

Dunque, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $d_\infty(x,y) \le d_2(x,y)$ perché $d_2(x,y) = \{(d_\infty(x,y))^2 + \text{"termini} \ge 0\text{"}\}^{1/2} \ge d_\infty(x,y)$; $d_2(x,y) \le d_1(x,y)$ perché (equiv.) $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \le \{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|\}^2$, usando che in generale, $\forall e_1, \dots, e_n \ge 0$, $e_1^2 + \dots + e_n^2 \le (e_1 + \dots + e_n)^2$ (chiaramente); $d_1(x,y) \le d_\infty(x,y) \cdot n$ perché $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \le \sum_{i=1}^n d_\infty(x,y)$, e ciò conclude usando infine che: $\exists \alpha, \beta > 0$ tali che, $\forall x, y \in X$ ins. $\neq \emptyset$ con distanze d e h, $\alpha h(x,y) \le d(x,y) \le \beta h(x,y)$ $\Rightarrow$ d e h sono equivalenti [h-top. $\subseteq$ d-top.: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow h(x,y) < \varepsilon$: basta prendere $\delta := \alpha \varepsilon$; analogamente d-top. $\subseteq$ h-top.: $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists \delta' > 0$ tale che, $\forall y \in X$, $h(x,y) < \delta' \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon'$ considerando infatti $\delta' := \frac{\varepsilon'}{\beta}$. $\square$]. $\square$

(Notiamo che, per $n = 1$, $d_2(x,y) = |x - y|$ $(= d_1(x,y) = d_\infty(x,y)!)$ e che allora la d_2-topologia su $\mathbb{R}$ è esattamente $\mathcal{T}_\varepsilon$.

[Le due topologie hanno infatti la stessa base: $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall r > 0$, $B(x,r) = (x - r, x + r)$ (in quanto, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r$) e quindi, d'altra parte, $\forall a < b$ reali è $(a,b) = B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$. $\square$] Dunque, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall r > 0$, vale che $\overline{B(x,r)} = \overline{(x-r, x+r)}$ $(= [x - r, x + r] = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| \le r\}$.)

EX. 34. (X, d) spazio metrico; (1) distanza infinita distanze su X equivalente a d; (2) $A \subseteq X$ limitato $\Leftrightarrow$ $\exists x \in A$ e $\exists r > 0$ tali che $A \subseteq B(x,r)$; (3) Definiamo LA LIMITAZIONE STANDARD DI d ponendo, $\forall x, y \in X$, $\bar{d}(x,y) := 1 \wedge d(x,y)$: $\bar{d}$ è una distanza equivalente a d. (4) La limitatezza di sottoinsiemi NON è una proprietà topologica.

[(1) $\forall c > 0$, infatti, cd è una distanza su X (immediato!) ed equivale a d in quanto tali due distanze hanno le stesse palle: $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$, $B_d(x,r) = B_{cd}(x, cr)$ (perché $d(x,y) < r \Leftrightarrow cd(x,y) < cr$, $\forall y \in X$) e d'altra parte $B_{cd}(x,r) = B_d(x, \frac{r}{c})$ ($cd(x,y) < r \Leftrightarrow d(x,y) < \frac{r}{c}$, $\forall y \in X$). ✓

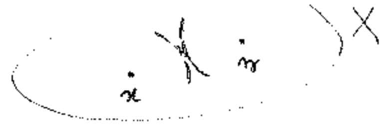
(2) $\Leftarrow$): preso $M := 2r\ (>0)$, è, $\forall a, b \in A$, $d(a,b) \le d(a,x) + d(x,b) < r + r = 2r = M$; ✓ $\Rightarrow$): preso un $r > M$ e un $x \in A$, è $\forall a \in A$ $d(a,x) \overset{(\mathrm{def})}{\le} \cancel{d(a,b)+d(b,x)}\ M < r$ ✓

(3) Definizione positiva e simmetria sono ovvie; per la disuguaglianza triangolare, essendo in generale $\bar{d} \le 1$, possiamo chiaramente supporre $\bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y) < 1$; ma in tal caso necessariamente $\bar{d}(x,z) = d(x,z)$ e $\bar{d}(z,y) = d(z,y)$, per cui $\bar{d}(x,y) \le d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y)$. ✓ Abbiamo d-topologia $\subseteq$ $\bar{d}$-topologia perché semplicemente, $\forall x, y \in X$, $\frac{1 \wedge d(x,y)}{1} = 1 \wedge d(x,y) \underset{(\le)}{=} \bar{d}(x,y)$, mentre $\bar{d}$-topologia $\subseteq$ d-topologia perché analogamente $\frac{1 \wedge \bar{d}(x,y)}{1} = 1 \wedge (1 \wedge d(x,y)) \overset{(\text{ovvio})}{=} 1 \wedge d(x,y) \le d(x,y)$ $\forall x, y \in X$. (4) Ciò ben significa naturalmente che, per un insieme

$X \neq \emptyset$, possono esistere due distanze equivalenti ma tali che un (15)
sottoinsieme di X $(\neq \emptyset)$ sia limitato per una e illimitato per l'altra.
Infatti il punto è che, per (X,d) sp. metr., rispetto a $\bar{d}$ ogni sottoinsieme di X è limitato, perché lo è X: per ogni $x,y \in X$ è infatti banalmente $\bar{d}(x,y) \le 1$ (in effetti X deve essere una palla, ed è $X \underset{(\subseteq)}{=} B_{\bar{d}}(x,r)$ con $x \in X$ e $r > 1$ qualsiasi: $\forall y \in X$, $\bar{d}(x,y) \le 1 < r$). A questo punto basta esibire uno spazio metrico (X,d) dove esistono sottoinsiemi di X illimitati, cioè dove X stesso è illimitato: $X := \mathbb{R}$ e $d := d_2$. □
(Sottolineamo che, per ogni (X,d) sp. metr., $\emptyset$ è limitato (tautologicamente) ed ogni palla è limitata.)

EX. 35. (X,d) spazio metrico; (1) (X,d) è $T1$; (2) definiamo LA DISTANZA DA UN SOTTOINSIEME DI X come segue: $\forall \emptyset \neq Z \subseteq X$ fissato, $d_Z : X \to \mathbb{R}_+$ è data ponendo, $\forall x \in X$, $d_Z(x) := \inf_{z \in Z} d(x,z)$ (per cui $\forall z \in Z$, $d_Z(z) = 0$ e, $\forall y \in X$, $d(x,y) = d_{\{y\}}(x)$ $\forall x \in X$); dimostrare che, $\forall x,y \in X$, $|d_Z(x) - d_Z(y)| \le d(x,y)$ osservando che ciò implica la τ_d-continuità di d_Z; (3) $d_Z(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{Z}$.

[(1) $\forall x \neq y \in X$, $x \neq y \Leftrightarrow r := d(x,y) > 0$ e allora $U := B(x,\frac{r}{2})$ e $V := B(y,\frac{r}{2})$ sono due aperti di X tali che $x \in U \setminus V$ e $y \in V \setminus U$, in quanto ($x \in U$, $y \in V$ e) addirittura $U \cap V = \emptyset$ (infatti $z \in U \cap V \Rightarrow \underset{(=r)}{d(x,y)} \le$



$\leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, che è assurdo) .

(2) Per simmetria la tesi equivale a $d_Z(y) - d_Z(x) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in X$; per definizione di d_Z , $\forall y \in X$ e $\forall z \in Z$ è $d_Z(y) \leq$ $\leq d(y,z)$, $\leq d(x,y) + d(x,z)$ $\forall x \in X$; ma, ancora per def. di d_Z , $\forall x \in X$, e $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{z} \in Z$ tale che $d(x,\bar{z}) \leq$ $\leq d_Z(x) + \varepsilon$: deduciamo quindi che , $\forall x,y \in X$ e $\forall \varepsilon > 0$, $d_Z(y) \leq d(y,\bar{z}) \leq d(x,y) + d(x,\bar{z}) \leq d(x,y) + d_Z(x) + \varepsilon$, da cui $d_Z(y) - d_Z(x) \leq d(x,y) + \varepsilon$, che per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ equivale alla tesi . Infine la continuità di d_Z è immediata : $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall y \in X$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(d_Z(x), d_Z(y)) = |d_Z(x) - d_Z(y)| < \varepsilon$ grazie a $\delta := \varepsilon$ stesso (che inoltre NON dipende da x !) .

(3) $\Leftarrow$) è per continuità : $d_Z(\overline{Z}^X) \subseteq \overline{d_Z(Z)}^{\mathbb{R}} \subseteq \overline{\{0\}} = \{0\}$.
$\Rightarrow$) : se per assurdo $x \notin \overline{Z}$, cioè $x \in X \setminus \overline{Z} = (X-Z)^\circ$, allora (equiv.) $\exists r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq X \setminus Z$ e ovviamente, $\forall z \in Z$, $z \notin B(x,r)$, cioè $d(x,z) \geq r$, cioè $d_Z(x) \geq r \ (>0)$: contraddizione . $\square$

EX 36 . (X,h) e (Y,k) spazi metrici ; se $f : (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$ è tale che 1. $f(a,b) = 0 \Leftrightarrow a=b=0$ e 2. $\forall a_1, b_1, c_1$ e $a_2, b_2, c_2 \geq 0$, $c_1 \leq a_1 + b_1$ e $c_2 \leq a_2 + b_2 \Rightarrow f(c_1,c_2) \leq$ $\leq f(a_1,a_2) + f(b_1,b_2)$, allora $d : (X \times Y)^2 \to \mathbb{R}_+$ data da $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := f(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2))$ $(\forall x_1, x_2 \in X$ e $\forall y_1, y_2 \in Y)$ è una distanza su $X \times Y$. In particolare lo sono quelle univocamente determinate da $f_1(a,b) := a+b$,

$f_2(a,b) := \sqrt{a^2+b^2}$ e $f_\infty(a,b) := a \vee b$ $(\forall a,b \geq 0)$, cioè (16)

$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = h(x_1,x_2) + k(y_1,y_2)$, $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := (h(x_1,x_2)^2 + k(y_1,y_2)^2)^{1/2}$ e $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := h(x_1,x_2) \vee k(y_1,y_2)$, che inoltre sono equivalenti perché $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 \cdot d_\infty$.

È chiaro che d sia ben definita $(h, k \geq 0)$, che sia ≥ 0 $(f \geq 0)$ e anzi definita positiva: $f(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2)) = 0 \overset{(1.)}{\Leftrightarrow} h(x_1,x_2) = k(y_1,y_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2 \Leftrightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$; è poi simmetrica: $d((x_2,y_2),(x_1,y_1)) = f(h(x_2,x_1), k(y_2,y_1)) = f(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2))$. Infine vale la dis. tr.: essendo $h(x_1,x_2) \leq h(x_1,x_3) + h(x_3,x_2)$ e $k(y_1,y_2) \leq k(y_1,y_3) + k(y_3,y_2)$, è $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = f(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2)) \overset{(2.)}{\leq} f(h(x_1,x_3), k(y_1,y_3)) + f(h(x_3,x_2), k(y_3,y_2)) = d((x_1,y_1),(x_3,y_3)) + d((x_3,y_3),(x_2,y_2))$.

~~Adesso~~, per tutte f_1, f_2 e f_∞ la proprietà 1. è evidente, mentre per la 2. siano $a_1,b_1,c_1, a_2,b_2,c_2 \geq 0$ con $c_1 \leq a_1 + b_1$ e $c_2 \leq a_2 + b_2$: allora $f_1(c_1,c_2) = c_1 + c_2 \leq (a_1+b_1) + (a_2+b_2) = (a_1+a_2) + (b_1+b_2) = f_1(a_1,a_2) + f_1(b_1,b_2)$; per f_2 vogliamo $\sqrt{c_1^2+c_2^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}$, cioè $c_1^2 + c_2^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$, e sappiamo che certamente $c_1^2 \leq a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1$ e $c_2^2 \leq a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2$, $\Rightarrow c_1^2 + c_2^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ e quindi avremo la voluta disuguaglianza se valesse $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}$, cioè se $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$, cioè se $a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 +$

$+ 2a_1b_1a_2b_2 \leq a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2$: ma infatti (equiv.) $a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$; ✓ per d_∞ abbiamo invece $c_1 \vee c_2 \leq a_1 \vee a_2 + b_1 \vee b_2$; usando che in generale $c_1 \leq d_1 \Rightarrow c_1 \vee c_2 \overset{\text{(ovvio)}}{\leq} d_1 \vee c_2$, è $c_1 \vee c_2 \leq$ $\leq (a_1 + b_1) \vee (a_2 + b_2)$ e dunque basta essere che $(a_1+b_1) \vee (a_2+b_2)$ $\leq a_1 \vee a_2 + b_1 \vee b_2$, che è immediato (se infatti $(a_1+b_1) \vee (a_2+b_2) = a_1+b_1$, allora $a_1 \geq a_2$ o $b_1 \geq b_2$, ad es. $a_1 \geq a_2$ e quindi in effetti $a_1 + b_1 \leq a_1 + b_1 \vee b_2$). ✓ Infine $d_2 =$ $= (d_\infty^2 + \text{"termine} \geq 0\text{"})^{1/2} \geq d_\infty$ $\to d_1 \leq d_\infty + d_\infty = 2d_\infty$ e $d_2 \leq d_1$ in quanto $h^2 + k^2 \leq (h+k)^2$. □

EX. 37. (X,d) spazio metrico ; la disuguaglianza triangolare in X equivale alla DISUGUAGLIANZA QUADRANGOLARE in X, cioè alla seguente proprietà di X : $\forall x, y, z, w \in X$, è $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$.

Dis. quadr. $\Rightarrow$ Dis. tr. : $z = w$! (Notiamo invece che per $w = y$ otteniamo $|d(x,y) - d(z,y)| \leq d(x,z)$.) ✓ Dis. tr. $\Rightarrow$ Dis. quadr. : per simmetria la tesi equivale a $d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(y,w)$, cioè a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,w) + d(z,w)$; ma infatti $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, e $d(z,y) \leq$ $\leq d(z,w) + d(w,y)$. □

EX. 38. (1) La topologia indotta da una distanza è la

meno fine per cui le palle aperte sono degli aperti;
(2) (X,d) sp. metr. e X finito $\Rightarrow$ d-topologia $= \mathcal{P}(X)$;
(3) X insieme con $|X| \geq 2$ $\Rightarrow$ $(X, \{\emptyset, X\})$ NON è metrizzabile;
(4) (X,d) sp. metr.; una palla aperta di raggio 1 NON può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2, e anzi vale ciò per $r>0$ e $2r$; invece è possibile in generale che una palla aperta di raggio 2 contenga propriamente una palla aperta di raggio 3.

(1) Intanto, per le topologie indotte da una distanza le palle aperte sono degli aperti; se tale topologia è T_d, e se T è una topologia tale che $\mathcal{B} := \{\text{le palle aperte}\} \subseteq T$, allora $T_d = \langle \mathcal{B} \rangle \subseteq T$ essendo $\mathcal{B}$ base di T_d. ✓
(2) (X,d) spazio metrico è certamente T1, quindi se X è finito allora necessariamente la sua topologia è quella discreta. ✓
(Altra soluzione: poniamo supporre $|X| \geq 2$, quindi definiamo, $\forall x \in X$, $r := \min_{\substack{y \in X,\\ y \neq x}} d(x,y)$ (>0) e sappiamo, per finitezza di X, che $\exists\, \bar{y} \in X \setminus \{x\}$ tale che $d(x,\bar{y}) = r$; allora in effetti è tutto aperto perché, $\forall x \in X$, $B(x,r) = \{x\}$ ($\forall y \in X$, $d(x,y)<r \Leftrightarrow y = x$), e a proposito osserviamo che $\{x\} = \overline{B(x,r)} \neq$ $\neq \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\} \ni \bar{y}$. ✓)
(3) Se X con la topologia indiscreta fosse metrizzabile, allora sarebbe T1, cioè $|X| \leq 1$: assurdo. ✓ (Altrimenti: X sarebbe una palla aperta e quindi, $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X$, dovendo essere A uguale ad un'unione $\neq \emptyset$ di palle aperte di X (da

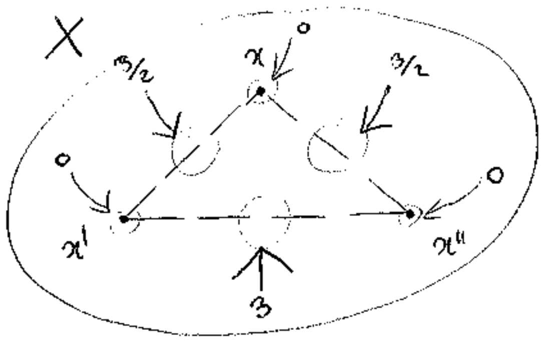
essendo che il solo aperto $\neq X$ è $\emptyset$), sarebbe $A = X$ e dunque l'assurdo $|X| = 1$. ✓)

(4) Supponiamo per assurdo che $\exists\, x, x' \in X$ tali che $B(x',2) \subsetneq B(x,1)$; allora in particolare $x' \in B(x,1)$, cioè $d(x,x') < 1$, per cui $\forall\, y \in B(x,1)$ sarebbe $d(x',y) \leq d(x',x) + d(x,y) < 1 + 1 = 2 \Rightarrow B(x,1) \subseteq B(x',2)$: assurdo!

(Più in generale, se $\exists\, x, x' \in X$ e $\exists\, r > 0$ tali che $B(x', 2r) \subsetneq B(x,r)$, allora $d(x,x') < r$ e quindi, $\forall\, y \in B(x,r)$, è $d(x',y) \leq d(x,y) + d(x,x') < r + r = 2r \Rightarrow B(x,r) \subseteq B(x',2r)$, che è assurdo. (Notiamo che certamente dovrebbe essere $x' \neq x$, in quanto altrimenti $0 < r \leq s \Rightarrow B(x,r) \subseteq B(x,s)$ ($\forall\, y \in X$, $d(x,y) < r$ e $r \leq s \Rightarrow d(x,y) < s$).))

Sia infine X insieme, con $|X| \geq 2$, dotato della distanza così definita: $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 3 & \text{se } x \neq y \end{cases}$, $\forall\, x, y \in X$; allora, $\forall\, y \in X$, è $B(y,r) = \begin{cases} \{y\} & \text{se } 0 < r \leq 3 \\ X & \text{se } 3 < r \end{cases}$ e quindi, presi $x \neq x'$ in X, vediamo che $\{x'\} = B(x',3) \not\subsetneq B(x,2) = \{x\}$ (andrebbe bene anche $x' = x$, oppure d definita col 2 invece che col 3 ($X \not\subsetneq \{x\}$!) o col 1 ($X \not\subsetneq X$!)), ma se $x' = x$ allora $\{x'\} = \{x\} = B(x,3) \subseteq B(x,2) = \{x\}$ perché sono $=$.

Alle soprattutto è possibile che $B(x',3) \subsetneq B(x,2)$; osserviamo anzitutto che necessariamente sarebbe $x' \in B(x,2)$, cioè $d(x,x') < 2 < 3 \Rightarrow x \in B(x',3)$ e allora $\{x,x'\} \subseteq B(x',3) \subsetneq B(x,2)$ $\Rightarrow \exists\, x'' \in B(x,2) \setminus B(x',3)$ e quindi $x'' \notin \{x,x'\}$, da cui necessariamente $|X| \geq 3$; in effetti se è così mostra lo spazio metrico



, cioè $X \doteq \{x, x', x''\}$

(x, x', x'' tutti $\neq$) con $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ data da : $d(x,x) = d(x',x') = d(x'',x'') \doteq 0$, $d(x,x') = d(x',x) = d(x,x'') = d(x'',x) \doteq 3/2$ (< 2 !) e infine $d(x',x'') = d(x'',x') \doteq 3$

(è evidente che d è ben definita, definita positiva e simmetrica, ma pure che svolge la dis. tr. : è ovvio cioè che, $\forall u, v$ e $w \in X$, $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ in quanto $d \geq 0 \Rightarrow$ possiamo supporre $u \neq v$, e allora anche $w \notin \{u,v\}$, dunque tutte e sole le possibilità per u, v, w sono (per simmetria)

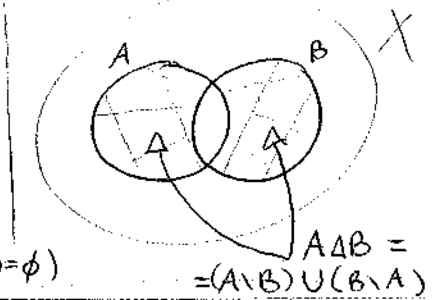
u	v	w	
x	x'	x''	$\Rightarrow 3/2 \leq 3/2 + 3$; ok
x	x''	x'	$\Rightarrow 3/2 \leq 3/2 + 3$; ok
x'	x''	x	$\Rightarrow 3 \underset{(=)}{\leq} 3/2 + 3/2$; ok

) :

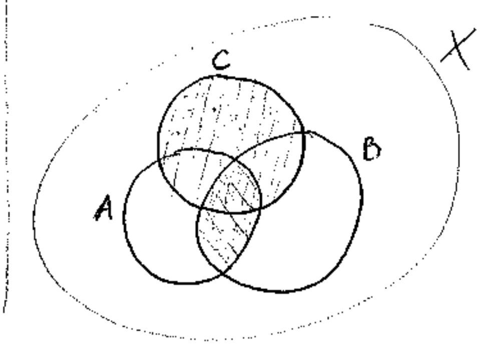
infatti $\{x, x'\} = B(x', 3) \subsetneq B(x, 2) = \{x, x', x''\} (= X)$. □

EX. 39. Siano X ins. finito e $Y := \mathcal{P}(X)$; $\forall A, B \in Y$, $d(A,B) := |A| + |B| - 2|A \cap B|$ è una distanza su Y.

[X finito $\Rightarrow$ d è ben definita, cioè $d \in \mathbb{R}$, e anzi $d \geq 0$ perché $d(A,B) = |A \Delta B| \underset{(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset}{=}$



$= |A\setminus B| + |B\setminus A|$ (infatti $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$ che $|A\setminus B| = |A| - |A\cap B|$, e lo stesso per $B\setminus A$); e questo punto positiva definizione e simmetria sono evidenti, mentre ($\forall A,B,C\subseteq X$) vale $d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B) \Leftrightarrow |A|+|B|-2|A\cap B| \le |A|+|C|-2|A\cap C|+|B|+|C|-2|B\cap C| \Leftrightarrow |C|+|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|\ge 0$, che è ovvio in quanto il membro di sinistra è $= |C\setminus(A\cup B)| + |(A\cap B)\setminus C|$. $\square$

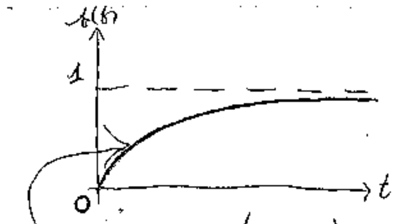


EX. 40. (X,d) sp. metr.; (1) se $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ è tale che 1. $f(a)=0\Leftrightarrow a=0$ e 2. $\forall a,b,c\ge 0$, $c\le a+b \Rightarrow f(c)\le f(a)+f(b)$, allora $h:=f\circ d$ è un'altra distanza su X; (2) $\forall x,y\in X$, $\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ è una distanza su X equivalente a d; (3) in effetti, se la f di (1) è continua, allora $h = f\circ d$ è equivalente a d.

(1) h è ben definita $X\times X\to\mathbb{R}_+$ ($d\ge 0$), è definita positiva per 1. ($h(x,y)=f(d(x,y))=0 \overset{1.}{\Leftrightarrow} d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$), è chiaramente simmetrica (lo è d) e soddisfa la dis. tr. per 2.: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y) \Rightarrow h(x,y)=f(d(x,y)) \le$
$\le f(d(x,z))+f(d(z,y)) = h(x,z)+h(z,y)$. ✓

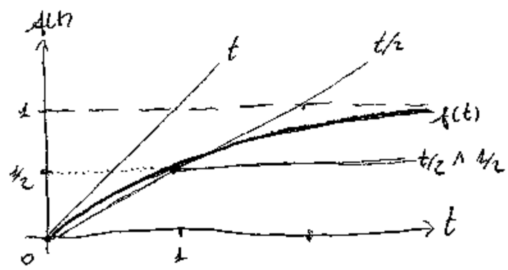
(2) $\delta = f\circ d$ dove $f(t):=\frac{t}{1+t}$, $\forall t\ge 0$ (quindi f è

ben definita ($1+t \geq 1 > 0$) ed è $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$); f soddisfa facilmente 1., e soddisfa 2. perché è (strettamente) crescente e concava, motivo per cui in particolare, $\forall t \geq 0$ e $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda f(t) \leq f(\lambda t)$ (in quanto $\lambda f(t) + (1-\lambda)\cancel{f(0)} \leq f(\lambda t + (1-\lambda)0)$): infatti allora, $\forall a,b,c \geq 0$, $c \leq a+b$ $\Rightarrow f(c) \leq f(a+b) = \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(a+b)$ $\leq f(a) + f(b)$ (chiaramente possiamo supporre $a+b>0$!) ✓



($f(t) = \frac{t}{1+t}$, $\Rightarrow$ $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, $\Rightarrow$ $f''(t) = -\frac{2}{(1+t)^3}$)

ciò implica che in effetti δ è distanza su X, e essa è equivalente a d perché, $\forall x,y \in X$, $\frac{\bar{d}(x,y)}{2} \leq \delta(x,y) \leq$ $\leq d(x,y)$ (ovvero, $\forall t \geq 0$, $\underbrace{\frac{1 \wedge t}{2}}_{(=\frac{t}{2} \wedge \frac{1}{2})} \leq \frac{t}{1+t} \leq t$:



; più rigorosamente: $\frac{t}{1+t} \leq t \Leftrightarrow t \leq t(1+t) =$ $= t + t^2$, che è ovvio; $\frac{1 \wedge t}{2} \leq \frac{t}{1+t}$ perché $t \leq 1$, cioè $1 \wedge t = t$, $\Rightarrow \frac{t}{2} \leq \frac{t}{1+t}$ in quanto per $t=0$ è addirittura un $=$, altrimenti equivale a $1 + t \leq 2$, cioè appunto $t \leq 1$; se invece $1 \leq t$, cioè $1 \wedge t = 1$, allora $1/2 \leq \frac{t}{t+1} \Leftrightarrow 1 + t \leq 2t$ $\Leftrightarrow t \geq 1$, appunto. ✓): infatti allora d-topologia $\supseteq$ $\supseteq$ δ-topologia perché $\delta \leq 1 \Rightarrow \frac{\delta \wedge 1}{1} = \delta \leq d$, mentre δ-top. $\supseteq$ d-top. perché $\frac{1 \wedge d}{2} = \frac{\bar{d}}{2} \leq \delta$. ✓

(3) d-top. $\supseteq$ h-top. $\Leftrightarrow (\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X,$ $d(x,y) < \delta \Rightarrow h(x,y) = f(d(x,y)) < \varepsilon)$, che è vero per continuità di f in 0 (basta anche 0: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall a > 0$, $a < \delta \Rightarrow f(a) < \varepsilon$); ✓ per h-top. $\supseteq$ d-top. usiamo le stesse equivalenze ma dopo le due seguenti osservazioni:

(a) f è non decrescente, cioè $0 \le a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)$ (perché banalmente $a \le b = b+0 \overset{(2)}{\Rightarrow} f(a) \le f(b) + \underbrace{f(0)}_{=0\,(1.)}$!) ; notiamo che allora, $\forall\, a,b \ge 0$, $f(a) < f(b) \Rightarrow a \le b$;

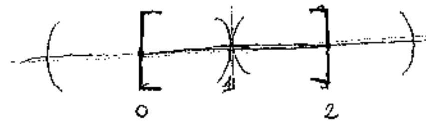
(b) $\forall\, m \ge 1$ intero, $\frac{f(1)}{m} \le f(\frac{1}{m})$ $\left(\underset{(\ast\le)}{1} = \underbrace{\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{m \text{ volte}} \overset{(2.)}{\Rightarrow} f(1) \le f(\frac{1}{m}) \cdot m \right)$. Allora in effetti, $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall y \in X$, $h(x,y) < \delta \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$: prendiamo infatti un $m \ge 1$ tale che $\frac{1}{m} < \varepsilon$ $\left(\frac{1}{m} \underset{m \uparrow +\infty}{\downarrow} 0 !\right)$ e quindi $\delta := \frac{f(1)}{m}$, cosicché $h(x,y) = f(d(x,y)) < \delta = \frac{f(1)}{m} \le f(1/m)$ $\overset{(a)}{\Rightarrow} d(x,y) \le 1/m < \varepsilon$. □

EX. 41. (X,d) sp. metr.; (1) fissato $\emptyset \ne Z \subseteq X$, $\forall x \in X$ è $d_Z(x) = \inf\{r > 0 \mid B(x,r) \cap Z \ne \emptyset\}$; (2) $\forall\, \emptyset \ne A, B \subseteq X$ chiusi con $A \cap B = \emptyset$, $\exists\, U, V \subseteq X$ aperti con $U \cap V = \emptyset$ tali che $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

(1) $d_Z(x) = \inf_{z \in Z} d(x,z)$ è l'estremo inferiore di $\{r > 0 \mid B(x,r) \cap Z \ne \emptyset\}$ per definizione di inf : infatti, $\forall r > 0$ tale che $\exists\, \bar z \in Z \cap B(x,r)$, $\bar z \in Z$ è tale che $d(x,\bar z) < r \overset{(d_Z(x) \le d(x,\bar z))}{\Rightarrow} d_Z(x) < r$; d'altra parte è anche vero che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \bar r > 0$ tale che $\bar r < d_Z(x) + \varepsilon$ con $B(x,\bar r) \cap Z \ne \emptyset$, perché in corrispondenza di tale $\varepsilon > 0$ c'è $\bar z \in Z$ tale che $d(x,\bar z) < d_Z(x) + \varepsilon$, e allora prendiamo $\bar r > 0$ tale che $d(x,\bar z) < \bar r < d_Z(x) + \varepsilon$, essendo anche $\bar z \in Z \cap B(x,\bar r)$.

(2) $f : X \to \mathbb{R}_+$ data da, $\forall x \in X$, $f(x) := \frac{2 d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ è ben

definibile perché $d_A(x)=0 \Leftrightarrow x \in \overline{A} = A$ e $d_B(x)=0 \Leftrightarrow x \in B$, per cui $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow d_A + d_B > 0$, chiaramente, e inoltre d_A, d_B continue $\Rightarrow f$ continua; osservato oltre che $f(A) = 0$ e $f(B) = 2$, e che $f \in [0,2]$, consideriamo $U := f^{-1}([0,1))$ e $V := f^{-1}((1,2])$: U e V sono quindi aperti di X disgiunti e tali che $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$. $\square$



EX. 42. (1) X, Y sp. top. $\neq \emptyset$ e $f: X \to Y$; f continua e iniettiva $\not\Rightarrow f$ immersione; (2) un sottospazio discreto di uno spazio metrico può NON essere chiuso; la chiusura di un sottospazio discreto può NON essere discreta; (3) per $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$, $\mathbb{Z}$ è un sottospazio discreto mentre $\mathbb{Q}$ no; (4) (X, d) sp. metr. e $\emptyset \neq Y \subseteq X$: la topologia su Y indotta da $d_{|Y \times Y}$ coincide con la topologia di sottospazio (di X) su Y.

(1) Preso X con $|X| \geq 2$, $id_X : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \{\emptyset, X\})$ è continua ed iniettiva (anzi biettiva) ma NON immersione; ✓
(2) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ (d_2) sia $Y := \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1 \text{ (intero)}\}$, che è discreto in quanto, $\forall n \geq 2$, $\{\frac{1}{n}\} = Y \cap (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1})$ mentre $\{1\} = Y \cap (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; però NON è chiuso "in quanto" risulta $\overline{Y} = Y \cup \{0\}$ (infatti $\mathbb{R} \setminus \overline{Y}$ è intorno di ogni suo punto!), e in più tale $\overline{Y}$ non è un discreto (ogni aperto che contiene 0, contiene pure addirittura infiniti elementi di Y!); ✓ (per quest'ultimo controesempio bastava considerare $X := \{x, y\}$ (con $x \neq y$) dotato della topologia

indiscreta $\{\emptyset, X\} = \{\emptyset, \{x,y\}\}$, quindi $Y := \{x\}$: infatti Y è banalmente discreto con però $\overline{Y} = X$ non discreto! ✓

(3) $\forall z \in \mathbb{Z}$, $\{z\} = \mathbb{Z} \cap (z-1, z+1)$; invece, $\forall$ aperto $V \neq \emptyset$ di $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $|\mathbb{Q} \cap V| = \aleph_0$! ✓ (4) anzitutto è chiaro che d distanza su $X \Rightarrow d_{|Y \times Y}$ distanza su Y ; ora d-top. su $Y \subseteq$ top. di sottosp. su Y perché (equiv.) $\{$palle aperte di $Y\} \subseteq$ top. di sottosp. su Y : infatti, $\forall y \in Y$ e $\forall s > 0$ con $B_Y(y,s) \subseteq Y$, ~~$B(y,s)$ aperto di $X \Rightarrow B(y,s)$ aperto di Y~~ $B_Y(y,s) = \{z \in Y \mid d(y,z) < s\} = Y \cap B_X(y,s) \Rightarrow B_Y(y,s)$ è aperto in Y ; analogamente vale il viceversa : $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$, $Y \cap B_X(x,r)$ è aperto pure delle d-top. su Y perché (equiv.), $\forall y \in Y \cap B_X(x,r)$, $\exists s > 0$ tale che $B_Y(y,s) \subseteq Y \cap B_X(x,r)$; infatti, $\forall y \in B_X(x,r)$, $\exists s > 0$ tale che $B_X(y,s) \subseteq B_X(x,r) \Rightarrow B_Y(y,s) = Y \cap B_X(y,s) \subseteq Y \cap B_X(x,r)$. $\square$

EX. 43.

$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \iff$ (IMMEDIATO) $\forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B}$ tale che $\underline{x \in B \subseteq A}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$; esiste top. $\mathcal{T}$ su X di base $\mathcal{B}$

$\iff$ ($\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$)
(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ($\subseteq$) ;

(2) $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $\forall x \in A \cap B, \exists C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$,

(cioè $A \cap B$ è unione di elementi C di $\mathcal{B}$, $C \subseteq A \cap B$)

($\Leftarrow$) "$A \in \mathcal{T} \overset{\text{DEF}}{\iff} A$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$" è def. necessaria, ma che va bene: X è unione per (1), e $\phi \in \mathcal{T}$ perché $\bigcup_{\emptyset} (*) = \phi$; poi unione di unioni è unione ; infine $(\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$, e ora $\underline{\text{per (2)}}$ $A_i \cap B_j$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

(NOTA: tale $\mathcal{T}$ è allora $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$!)

$\underline{\text{MORALE}}$: $\mathcal{T} \xrightarrow{\text{SEMPL.}} \mathcal{B}$, e in $\mathcal{B} \longrightarrow$

avendo fatto le unioni SOLO per X e per le intersezioni del tipo $A\cap B$ con $A,B\in\mathcal{B}$!

$\boxed{\text{OSS. 1}}$ (2) è automaticamente (banalmente) vera se $A\cap B=\emptyset$;

$\boxed{\text{OSS. 2}}$ (2) è vera se $A\cap B\in\mathcal{B}$. <u>Dunque</u>

$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ tale che $X \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ e $\mathcal{B}$ stabile per $\cap$ finite $\Rightarrow$ $\exists$ topologia su X di base $\mathcal{B}$

$$\mathcal{T} := \{\text{unioni di el. di } \mathcal{B}\} = \langle\mathcal{B}\rangle$$

$\boxed{\text{NOTA:}}$ ancora più semplice se $X\in\mathcal{B}$!

$\boxed{\text{OSS.}}$: se $\mathcal{B}$ è <u>base</u> di X e $U\subseteq X$ è aperto, considerato $\mathcal{B}_U := \{B\in\mathcal{B} \mid B\subseteq U\}$ allora è (chiaramente) $U \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{B\in\mathcal{B}_U} B$!

<u>NOTA</u>: per una base $\mathcal{B}$ non può supporre sempre $\emptyset\in\mathcal{B}$!

$B \subseteq X$; $\quad B^\circ := \bigcup_{\substack{A \subseteq B, \\ A \text{ aperto}}} A$ è il più grande aperto contenuto (ES: $A=\emptyset$)

in B, mentre $\overline{B} := \bigcap_{\substack{C \supseteq B, \\ C \text{ chiuso}}} C$ è il più piccolo chiuso (ES: $C=X$)

contenente B, per cui chiaramente

(1) $B^\circ \subseteq B \subseteq \overline{B}$, e B aperto $\iff B \underset{(\subseteq)}{=} B^\circ$ e

B chiuso $\iff B \underset{(\supseteq)}{=} \overline{B}$;

(2) $\partial B \doteq \overline{B} \setminus B^\circ$ è un chiuso [chiuso $\setminus$ aperto è intersezione di due chiusi!!] ;

(3) $B^\circ = X \iff B = X$ e $\overline{B} = \emptyset \iff B = \emptyset$;

(4) $X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ$ $\left[X \setminus \bigcap_{\substack{C \supseteq B, \\ C \text{ chiuso}}} C = \bigcup_{\substack{C \supseteq B, \\ C \text{ chiuso}}} (X \setminus C) \overset{\text{IMPORTANTE!}}{=} \bigcup_{\substack{A \subseteq X \setminus B, \\ A \text{ aperto}}} A \right]$. (Cioè $\overline{B} = X \setminus (X \setminus B)^\circ$!)

<u>Caratterizziamo</u> B° e $\overline{B}$ grazie al concetto di "intorno":

$\forall x \in X$, $\mathcal{U}(x) := \{ U \subseteq X \mid x \in U^\circ \}$, ossia $U \in \mathcal{U}(x)$

$\iff \exists$ aperto V (di una base, equiv.!) tale che $x \in V \subseteq U$ (ES: $x \in U$ e U aperto!) ; è ovvio così che

$B^\circ = \{ x \in B \mid B \in \mathcal{U}(x) \}$, per cui B è aperto $\iff$ B è interno di ogni suo punto! Dunque

$x \in \overline{B} \iff \forall U \in \mathcal{I}(x)$ (aperto (di una base)), $U \cap B \neq \emptyset$ [$x \notin \overline{B} \iff$

$x \in X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ$, ossia $\exists\, U$ aperto tale che

$x \in U \subseteq X \setminus B$ (e $U \subseteq X \setminus B \iff U \cap B = \emptyset$) : ciò

equivale perfettamente alla negazione delle nostre proposizioni!].

Più che ci serve, notiamo che chiaramente

(1) $X \in \mathcal{I}(x)$ MA $\emptyset \notin \mathcal{I}(x)$; (2) $U \in \mathcal{I}(x),\ U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$, e in particolare $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{I}(x) \Rightarrow \bigcup_i U_i \in \mathcal{I}(x)$;
(3) $U, V \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{I}(x)$; (4) $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow X \setminus U \notin \mathcal{I}(x)$.

Se poi $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}(x)$ SIST. FOND. D'INT. $\iff \forall U \in \mathcal{I}(x)$ (aperto (di una base)), $\exists A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subseteq U$, allora

$\boxed{\text{ES 1}}$: fissato $V \in \mathcal{I}(x)$, posto $\mathcal{J}_V := \{A \in \mathcal{I}(x) \mid A \subseteq V\}$

[$\forall U \in \mathcal{I}(x)$, considero $A := U \cap V$!];

$\boxed{\text{ES 2}}$: con $\mathcal{B}$ base, posto $\mathcal{J}_{\mathcal{B}} := \{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$ (aperto!)

[$\forall U \in \mathcal{I}(x)$, considero V aperto tale che $x \in V \subseteq U$; ma

V è unione di elementi di $\mathcal{B}$!]

$A \neq \phi$, $A \subseteq X$; A denso in $X \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{A} = X$, e

allora $\left\| \overline{A} = X \Leftrightarrow \forall \text{ aperto } V \neq \phi,\ A \cap V \neq \phi \right\|$ (cioè con i aperti base!)

[($\Leftarrow$) se fosse $\overline{A} \subsetneq X$, allora $X \setminus \overline{A}$ sarebbe un aperto $\neq \phi$ che, non intersecando $\overline{A}$, non interseca certamente A!

($\Rightarrow$) se fosse che aperto $V \neq \phi$ tale che $A \cap V = \phi$,

allora $X \setminus V \subsetneq X$ e' un chiuso contenente A

$(A \cap V = \phi \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus V)$, da cui $\overline{A} \subseteq X \setminus V \subsetneq X$!]

$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ [$A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, chiuso !]

$\{U_n\}_{n \geq 1}$ sist. fond. d'intorni di $x \in X \Rightarrow$ tale è $\{V_n\}_{n \geq 1}$

con $V_n := U_1 \cap \dots \cap U_n$ $\left(\text{ma con la notevole differenza che}, \forall n \geq 1,\ V_n \supseteq V_{n+1} \right)$!

[$\forall$ intorno U di x, $U_n \subseteq U \overset{(U_n \subseteq V_n)}{\Rightarrow} V_n \subseteq U$!]

$f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$ vale una fra:

(1) $\forall$ aperto $A \subseteq Y$, $f^{-1}(A)$ è aperto (di X); (DEF.)

(2) stessa cosa, ma coi chiusi $\left[f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) ! \right]$

(3) stessa cosa, ma con gli aperti di una base (di Y):

se vale per loro, infatti, allora sì: $f^{-1}\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$!

|| Da (1) (o (2)) $\Rightarrow$ composizione di continue è continua ||

$\left[X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z,\ A \subseteq Z \text{ aperto};\ (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) ! \right]$

$\boxed{\bullet}$ Caratterizzazione con "continuità in un punto" $x \in X$, ossia:

$f : X \to Y$ continua in $x \in X \overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow} \forall$ intorno U di $f(x)$, esiste intorno V di x tale che $f(V) \subseteq U$; (ovviamente ciò equivale a "$\forall$ intorno aperto U' di $f(x)$, ecc." $\left[\forall \text{ intorno } U \text{ di } f(x), \text{ se } U' \text{ è aperto tale che } f(x) \in U' \subseteq U, \text{ allora prendo } V \text{ con } f(V) \subseteq U' \subseteq U ! \right]$),

e questa equivale alla stessa proposizione ma con V' intorno aperto

$\left[x \in V' \subseteq V,\ f(V) \subseteq U \overset{(f(V') \subseteq f(V))}{\Rightarrow} f(V') \subseteq U ! \right]$, e in conclusione entrambi gli intorni possono essere considerati aperti! (di una base!)

|| $f : X \to Y$ continua $\Leftrightarrow$ lo è in ogni punto di X. ||

($\Rightarrow$) $\forall x \in X$, $\forall$ intorno aperto U di $f(x)$, si ha facilmente $f(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-1}(U) =: V$ aperto, tale che $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U$!

($\Leftarrow$) $\forall$ aperto $A \subseteq Y$, avremo che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto: se $f^{-1}(A) = \emptyset$, allora è aperto; altrimenti sia $x \in f^{-1}(A)$ qualsiasi, per cui $\underbrace{f(x) \in A}_{\text{(è U!)}}$: esiste allora aperto V tale che $x \in V$ e $f(V) \subseteq A$, per cui $V \subseteq f^{-1}(f(V)) \subseteq$
$\subseteq f^{-1}(A)$!

Caratterizzazione per punti aderenti:

$f: X \to Y$ continua $\Leftrightarrow \forall A \subseteq X, f(\overline{A}^X) \subseteq \overline{f(A)}^Y$.

($\Rightarrow$) $\overline{f(A)}$ chiuso $\Rightarrow f^{-1}(\overline{f(A)})$ chiuso, e inoltre $f(A) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, da cui $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ e quindi la tesi

($\Leftarrow$) Mostriamo usando i chiusi $C \subseteq Y$: $f^{-1}(C)$ è tale che certamente $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))}$; ma

$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C \Rightarrow \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$, da cui

$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C$ e quindi $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, ossia

$f^{-1}(C)$ è chiuso. $\square$

---

f continua: sono equivalenti (1) f omeomorfismo; (2) f bigettiva e chiusa; (3) f bigettiva e aperta (in particolare un omeo. è contemporaneamente chiuso e aperto!!)

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Sia $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ l'inversa; $\forall$ chiuso C di X, $f(C) = g^{-1}(C)$ è chiuso!

(2) $\Rightarrow$ (3) $f(X \setminus \overset{\text{(chiuso)}}{C}) \underset{\substack{(\subseteq)\\ \text{INIET.}\\ (\supseteq \text{ per SU})}}{=} Y \setminus f(C)$ è aperto!

(NON implica le altre)

(3) $\Rightarrow$ (1) g è continua perché, $\forall$ aperto A di X, $g^{-1}(A) = f(A)$

Posso equivalentemente verificare la proprietà di essere aperta solo su una base: infatti se $A = \bigcup_i A_i \Rightarrow f(A) = \bigcup_i f(A_i)$!

~~NOTA: vale per $f: X \to Y$ iniettiva che f chiusa $\Rightarrow$ f aperta !~~

~~$f(A) = f(X \setminus C) = f(X) \setminus f(C)$!~~

Composizione di omeomorfismi è omeomorfismo!

$f: X \to Y$ continua : $\forall x \in X$, $U \in \mathcal{I}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{I}(x)$.

[Preso aperto $V \subseteq Y$ tale che $f(x) \in V \subseteq U$, è allora ovviamente $x \in \underset{(\text{aperto})}{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(U)$!]

(analoga notazione......)

$f: X \to Y$ aperta : $\forall x \in X$, $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow f(U) \in \mathcal{I}(f(x))$ (in Y o in $f(X)$)

[$x \in A$ aperto $\subseteq U$ $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ $f(x) \in f(A)$ aperto $\subseteq f(U)$!]

Composizione di aperte (risp. chiuse) è aperta (risp. chiusa) !

[$A \subseteq X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$: considero $f(A)$, $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$!]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g = h\circ f", "\text{chiusa}"'] \arrow[d, "f"', "\text{continua e surgettiva}"] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ h chiusa! (Analogo con g aperta!)

[$\forall\, C \subseteq Y$ chiuso, essendo $C \underset{(\overset{su}{\subseteq})}{=} f(f^{-1}(C))$, ho $h(C) \overset{h\circ f = g}{=} g(\underbrace{f^{-1}(C)}_{(\text{chiuso!})})$ che è chiuso poiché g è chiusa!]

$f : X \to Y$ aperta e continua: U s.f.d.i. di $x \in X$

$\overset{(\text{cioè?})}{\Rightarrow}$ "$f(U)$" s.f.d.i. di $f(x)$ $_{(\text{in } Y \text{ o in } f(X))}$!

---

d distanza (o metrica) su X $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa, per ogni coppia di elementi di X, (1) $d \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ $\Leftrightarrow x = y$; (2) $d(x,y) = d(y,x)$; (3) $d(x,y) \leq$ $\leq d(x,z) + d(z,y)$ ("disuguaglianza triangolare"). (X,d) è in tal caso uno spazio metrico, e considerate le palle aperte di centro $x \in X$ e raggio $r>0$ (in X) $B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}_{(\subseteq X)}$ definiamo su X la topologia $\mathcal{T}$ indotta dalla distanza d come segue: « $\forall A \subseteq X$, $A \in \mathcal{T} \overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A$, $\exists r>0$ tale che $B(x,r) \subseteq A$ » ! [Innanzitutto chiaramente, $\forall x \in X$ e $\forall r>0$, $x \in B(x,r)$, inoltre $r \leq r' \Rightarrow B(x,r) \subseteq B(x,r')$.] $\emptyset \in \mathcal{T}$ tautologicamente, mentre ad esempio $X \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{x \in X} B(x,1)$! Poi $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{T} \Rightarrow A := \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ è ovvio: $\forall x \in A$, diciamo $x \in A_j$, esiste $r>0$ tale che $B(x,r) \subseteq A_j (\subseteq A)$! Infine $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow$ $A \cap B \in \mathcal{T}$: $\forall x \in A \cap B$, $\begin{cases} x \in A \Rightarrow \exists r_A > 0 : B(x,r_A) \subseteq A \\ x \in B \Rightarrow \exists r_B > 0 : B(x,r_B) \subseteq B \end{cases} \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} B(x, r_A \wedge r_B) \subseteq$ $\subseteq B(x,r_A) \cap B(x,r_B) \subseteq A \cap B$!]

(1) $\mathcal{B} := \{B(x,r)\}_{x \in X, r>0}$ è base della topologia $\mathcal{T}$ su (X,d) !

[Giacché (per def.) che, $\forall A \in \mathcal{T}$, $A \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{\substack{x \in A, \\ r>0 \text{ tale che} \\ B(x,r) \subseteq A}} B(x,r)$, resta solo che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$: $\forall x \in X$ e $\forall r > 0$, $\forall y \in B(x,r)$, in

Infatti $B(y, r - d(x,y)) \subseteq B(x,r)$ $\left(z \in B(y, r-d(x,y)) \Rightarrow \right.$

$d(x,z) \overset{\text{(dis.tr.)}}{\leq} d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + (r - d(x,y)) = r$ $\left.\right)$!]

(2) $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ continua in $x \in X$ $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che, $\forall x' \in X$, se $d_X(x,x') < \delta$ allora

$d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$!

La seconda proposizione coincide con la frase sintetica « $\forall B_Y(f(x), \varepsilon)$, $\exists B_X(x, \delta)$ tale che $f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(f(x), \varepsilon)$ », per cui $\Rightarrow$ è facile ; $\Leftarrow$: $\forall B_Y(y, r)$ tale che $f(x) \in B_Y(y,r)$, preso $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq B_Y(y,r)$, basta considerare $B_X(x,\delta)$ tale che $f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(f(x),\varepsilon) \subseteq B_Y(y,r)$!]

(X,d) spazio metrico : la distanza da un sottoinsieme fissato Z di X è $d_Z : X \to \mathbb{R}$ data da $d_Z(x) := \inf_{z\in Z} d(x,z)$ (per cui (ovviamente) $d_{\{y\}}(\cdot) = d(\cdot, y)$ $\forall y \in X$!) ; allora (ovviamente), $\forall z \in Z$, $d_Z(z) = 0$, ma più in generale vale che

$d_Z(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Z}$ [$(\forall x\in X,)$ $\inf_{z\in Z} d(x,z) = 0 \overset{(ovvio)}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon>0$, esiste $z\in Z$ tale che $d(x,z)<\varepsilon \overset{(ovvio)}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0, B(x,\varepsilon)\cap Z \neq \emptyset$ $\overset{(come\ prima!!)}{\Leftrightarrow}$ ogni palla aperta contenente x interseca Z $\overset{(noto)}{\Leftrightarrow} x \in \overline{Z}$!] !

Inoltre, $\forall x,y \in X$, $|d_Z(x) - d_Z(y)| \leq d(x,y)$, $\Rightarrow$ $d_Z : X \to \mathbb{R}$ è continua ! ($\forall x\in X, \forall \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tale che, $\forall y\in X$, $d(x,y)<\delta \Rightarrow |d_Z(x) - d_Z(y)|<\varepsilon$: $\varepsilon =: \delta$!)

$\forall x,y\in X$, $d_Z(y) - d_Z(x) \leq d(x,y)$ perché (per def. di d_Z)

$\begin{cases} \forall x\in X \text{ e } \forall\varepsilon>0,\ \exists\, \overline{z}\in Z \text{ tale che } d(x,\overline{z}) < d_Z(x)+\varepsilon \\ \forall y\in X \text{ e } \forall z\in Z,\ d_Z(y) \leq d(y,z) \quad \left(\overset{DIS.TR.}{\leq} d(x,y) + d(x,z)\right) \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\forall x,y\in X$ e $\forall\varepsilon>0$, $d_Z(y) \leq d(y,\overline{z}) \leq d(x,y) + d(x,\overline{z}) <$ $< d(x,y) + d_Z(x) + \varepsilon$, da cui $d_Z(y) - d_Z(x) < d(x,y) + \varepsilon$!

($\boxed{\text{NOTA}}$: grazie alla continuità (anche) di d_Z avevi di nuovo $x\in\overline{Z} \Rightarrow d_Z(x)=0$! [$d_Z(\overline{Z}) \overset{(cont.!)}{\subseteq} \overline{\underbrace{d_Z(Z)}_{(\subseteq\{0\}!)}} \subseteq \overline{\{0\}} = \{0\}$!])

$(X, \mathcal{T})$; $Y \subseteq X$ ha la topologia di sottospazio

$\{Y \cap V \mid V \in \mathcal{T}\}$ [$Y = Y \cap X$ e $\emptyset = Y \cap \emptyset$;

$\bigcup_i (Y \cap V_i) = Y \cap (\bigcup_i V_i)$; $(Y \cap V_1) \cap (Y \cap V_2) =$

$= Y \cap (V_1 \cap V_2)$] ; chiaramente estende il concetto di

topologia ($X \cap V = V$!) .

(1) $\{$chiusi di $Y\} = \{Y \cap B \mid B$ chiuso di $X\}$ [C chiuso

di $Y \Leftrightarrow C = Y \setminus A$ con A aperto di Y, ovvero $A =$

$= Y \cap V$ con V aperto di X, per cui $C = Y \setminus (Y \cap V) =$

$= Y \setminus V = Y \cap \underbrace{(X \setminus V)}_{(=: B)}$!] ;

(2) $\mathcal{B}$ base di $\mathcal{T} \Rightarrow \{Y \cap V \mid V \in \mathcal{B}\}$ base della top. di Y

[$\forall$ aperto V di X, $Y \cap V = Y \cap (\bigcup_i \underset{(\text{in } \mathcal{B})}{V_i}) = \bigcup_i (Y \cap V_i)$!] ;

(3) $\forall Z \subseteq Y$, Z aperto (risp. chiuso) di $X \Rightarrow$ " di Y.

[$Z = Y \cap Z$!] ;

(4) $i_Y : Y \to X$, $y \mapsto y$ d'inclusione è continua (e

anzi lo è nel modo "più economico" possibile, nel senso che la top. di sottosp. su Y è la meno fine fra esse i_Y continua)

$\forall$ aperto V di X, $i_Y^{-1}(V) = Y \cap V$ è aperto di Y!

(5) Z, X sp. top., $Y \subseteq X$ sottosp. ; $f : Z \to Y$ continua

$\Leftrightarrow$ $i_Y \circ f : Z \to X$ continua.

[($\Rightarrow$) composizione di continue! ($\Leftarrow$) $\forall$ aperto $Y \cap \underbrace{V}_{\text{ap. di } X}$ di Y,

$f^{-1}(Y \cap V) = f^{-1}(i_Y^{-1}(V)) = (i_Y \circ f)^{-1}(V)$ è aperto di Z!]

(6) $Z \subseteq Y$ aperto (risp. chiuso) di Y ; Y aperto (risp. chiuso) di X $\Rightarrow$ Z aperto (risp. chiuso) di X.

[$Z = Y \cap V$, con V aperto (risp. chiuso) di X !]

(7) $\forall Z \subseteq Y$, Z intorno di un certo $y \in Z \subseteq Y$ in X $\Rightarrow$ Z intorno di tale y in Y.

[Se $V \subseteq X$ aperto di X tale che $y \in V \subseteq Z$, allora banalmente tale V è aperto di Y poiché all'effetto $Y \subseteq Z \subseteq Y$!]

(8) $\forall Z \subseteq Y$, Z intorno di y in Y e Y intorno di

x in X $\Rightarrow$ Z intorno di x in X.

[So che $\begin{cases} x \in A \subseteq Z \text{, } A \text{ aperto di } Y \\ x \in U \subseteq Y \text{, } U \text{ aperto di } X \end{cases}$, per un certo insieme

$x \in A \cap U$ $(\subseteq Z)$: basta provare che $A \cap U$ è un aperto di X; ma infatti, essendo $A \cap U \subseteq U$ e U aperto di X, basta provare che $A \cap U$ è aperto in U : ciò è immediato in quanto $A = Y \cap \underbrace{V}_{\text{ap. di } X} \Rightarrow A \cap U = U \cap (Y \cap V) \underset{(U \subseteq Y)}{=} U \cap V$!]

9) $\forall A \subseteq Y$, $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}^X$.

$$\left[\overline{A}^Y = \bigcap_{\substack{C \supseteq A, \\ C \text{ chiuso in } Y}} C \overset{(B \supseteq Y\cap B = C \supseteq A)}{=} \bigcap_{\substack{B \supseteq A, \\ B \text{ chiuso in } X}} (Y \cap B) = Y \cap \underbrace{\Big(\bigcap_{\substack{B \supseteq A, \\ B \text{ chiuso in } X}} B \Big)}_{= \overline{A}^X} \right]$$

$f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ $\forall Z \subseteq X$ sottosp., $f_{|Z} : Z \to Y$ continua.

[$\forall A \subseteq Y$ aperto, $f_{|Z}^{-1}(A) = Z \cap \underbrace{f^{-1}(A)}_{\text{(ap. di } X\text{)}}$ è aperto di Z!]

(infatti semplicemente $f|Z = f \circ i_{Z \to X}$)

($\Rightarrow$ (omeo) restrizione di omeo. è omeo.!)

$Y \subseteq X$ sottosp. ; $U \subseteq X$ tale che $Y \cap U$ aperto (risp. chiuso) di Y $\Rightarrow$ con $A \subseteq X$, $(Y \cap A) \cap U$ aperto (risp. chiuso) di $Y \cap A$!

$$\left[\; Y \cap U = Y \cap \underset{(\text{aperto di } X)}{V} \overset{(\cap A!)}{\Rightarrow} (Y \cap A) \cap U = (Y \cap A) \cap V \; ! \;\right]$$

X, Y sp. top. ; $\begin{cases} X = A \cup B \text{ con } A, B \text{ aperti (o chiusi)} \\ f_1 : A \to Y, \; f_2 : B \to Y \text{ continue} \\ f_1|_{A \cap B} = f_2|_{A \cap B} \end{cases}$ $\Rightarrow$

(buona def.!)

$\Rightarrow$ $f : X \to Y$, $f|_A := f_1$ e $f|_B := f_2$, è continua!

[$\forall V \subseteq Y$, $f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V) \cup f_2^{-1}(V)$: se V è aperto (o chiuso), allora (cont.) tale è $\underset{(\subseteq A)}{f_1^{-1}(V)}$ in A e $\underset{(\subseteq B)}{f_2^{-1}(V)}$ in B, quindi in X perché e loro volta A e B sono aperti (o chiusi) di X !]

$Y \subseteq X$ e $y \in Y$: Z intorno di y in X $\Rightarrow$ $Y \cap Z$ intorno di y in Y !

$$\left[\; y \in V \,(\text{aperto di } X) \subseteq Z \overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} y \in Y \cap V \,(\text{aperto di } Y) \subseteq Y \cap Z \; ! \;\right]$$

NOTA : $V \subseteq X$ intorno (in X) di un certo $x \in V$: $\mathcal{J}$ sist. fond. di intorni di x in X $\overset{\text{(immediato)}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{J}_V := \{A \in \mathcal{J} \mid A \subseteq V\}$ sist. ($\subseteq \mathcal{J}$) fond. di intorni di x in V!

$f : X \to Y$ continua e iniettiva $\overset{\text{(ovvio)}}{\Longrightarrow}$ $f|_{X \setminus \{\bar{x}\}} : X \setminus \{\bar{x}\} \to Y \setminus \{f(\bar{x})\}$ ($\subseteq Y$) continua (ed iniettiva)! (In particolare $f : X \to Y$ omeo. $\overset{\text{(ovvio)}}{\Longrightarrow}$ $f|_{X \setminus \{\bar{x}\}} : X \setminus \{\bar{x}\} \to Y \setminus \{f(\bar{x})\}$ omeo.!)

NOTA : posso prendere $A \subseteq X$ ($\neq \emptyset$) e $f(A)$ al posto di $\{\bar{x}\}$ e $\{f(\bar{x})\}$!

$x \in X$ e $U \in \mathcal{J}(x)$: $\mathcal{J}$ s.f.d.i. di x in U $\overset{\text{(imm.)}}{\Longrightarrow}$ lo è anche in X!

$f : X \to Y$ aperta (risp. chiusa) e $A \subseteq X$ aperto (risp. chiuso) $\Longrightarrow$ $f|_A : A \to f(A)$ ($\subseteq Y$) aperta (risp. chiusa)!

$\forall$ aperto $V \subseteq A$ di A (cioè di X), $f|_A(V) = f(V) \subseteq f(A)$ è aperto di Y e cioè di $f(A)$! $\square$

$f: X \to Y$ continua ed iniettiva ; f è un'immersione

$\overset{DEF.}{\iff}$ $\{$aperti di $X\}$ $\underset{(\subseteq)}{=}$ $\{f^{-1}(A) \mid A \subseteq Y$ aperto$\}$ (ESTENSIONE DI OMEO.....)

$\iff$ $\{$chiusi di $X\}$ $\underset{(\subseteq)}{=}$ $\{f^{-1}(C) \mid C \subseteq Y$ chiuso$\}$.

[$\Rightarrow$] $B \subseteq X$ chiuso è $B = X \setminus V$, $V \subseteq X$ aperto , per cui $B =$

$= X \setminus V \underset{\substack{\uparrow \\ (V = f^{-1}(A), \\ A \subseteq Y \text{ aperto})}}{=} X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\underbrace{Y \setminus A}_{=: C \text{ (chiuso di } Y!)})$! ($\Leftarrow$) Viceversa :

$V = X \setminus B = X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$.]

(1) $f: X \to Y$ continua e biettiva ; f omeo. $\iff$ f immersione

[$\Rightarrow$] $\forall V \subseteq X$ aperto lo scrivo come $f^{-1}(\underbrace{f(V)}_{\text{aperto!}})$, usando che f omeo $\Rightarrow$ f aperta ! ($\Leftarrow$) $g = f^{-1} : Y \to X$ è

continua perché, $\forall$ aperto V di X, $g^{-1}(V) = f(V) =$

$= f(f^{-1}(\underset{(\subseteq Y \text{ aperto})}{A})) = A$ è aperto di Y !]

(2) $f: X \to Y$ immersione $\iff$ $f': X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è omeo

("cioè" f induce un omeo. $X \to f(X)$) .

[Chiaramente $f = i_{f(X)} \circ f'$, dunque chiaramente f continua ed iniettiva $\Leftrightarrow$ f' continua ed biettiva, e che f immersione $\Leftrightarrow$ f' immersione ($\Leftrightarrow$ f' omeo): $\forall V \subseteq X$ aperto e $\forall A \subseteq Y$ aperto, è $V = f^{-1}(A) \Leftrightarrow V = f^{-1}(f(X) \cap A)$]

(3) $f: X \to Y$ continua ed iniettiva; f chiusa (risp. aperta) $\Rightarrow$ f immersione (chiusa (risp. aperta))

[Certamente $f': X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è continua e biettiva, ed inoltre f chiusa $\Rightarrow$ f' chiusa e' un omeo! Infatti, $\forall C \subseteq X$ chiuso, $f(C)$ chiuso (in Y) e $f(C) \subseteq f(X)$ $\Rightarrow$ banalmente $f(C)$ chiuso anche in $f(X)$!]

(4) $f: X \to Y$ immersione; f è chiusa (risp. aperta) $\Leftrightarrow$ $f(X)$ è chiuso (risp. aperto) (in Y).

[($\Rightarrow$) $X \subseteq X$ chiuso! ($\Leftarrow$) $f': X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$ è omeo, in particolare è chiusa: $\forall C \subseteq X$, $f'(C) = f(C)$ è chiuso in $f(X)$, quindi in Y perché $f(X)$ lo è in Y!]

$Y \subseteq X$ sottosp. : l'inclusione $i : Y \to X$, $y \mapsto y$ è immersione!

i è iniettiva e continua, e in effetti ogni aperto A di Y è della forma $A = i^{-1}(V) = Y \cap V$ per un certo V aperto di X!

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, dashed, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad \left\{ \begin{array}{l} g \text{ immersione} \\ g\circ f \text{ continua} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ continua!}$$

$\forall A \subseteq Y$ aperto, certamente $A = g^{-1}(B)$ per un $B \subseteq Z$ aperto (g immers.!), e allora $f^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g\circ f)^{-1}(B)$ è un aperto di X ($g\circ f$ cont.)! $\square$

$(\mathcal{T}_i)_i$ topologie su X $\Rightarrow$ $\bigcap_i \mathcal{T}_i$ topologia su X (ovvio), e se una tra le $\mathcal{T}_i$ è "$\neq \emptyset$" (top. $\mathcal{P}(X)$) allora $\bigcap_i \mathcal{T}_i$ è $\neq \emptyset$!

X, Y sp. top., $P \subseteq X$ sottosp. e $Q \subseteq Y$ sottosp.; la topologia prodotto $\mathcal{T}$ su $P \times Q$ è l'intersezione ($\neq \emptyset$) delle topologie su $P \times Q$ che rendono continue le proiezioni canoniche $p: P \times Q \to P$, $(x,y) \mapsto x$ (suriettive)
e $q: P \times Q \to Q$, $(x,y) \mapsto y$, ossia è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue p e q. $\boxed{\text{OSS.}}$ Ovviamente in $\mathcal{T}$ ci stanno $p^{-1}(U) = U \times Q$ $\forall$ aperto $U \subseteq P$ e $q^{-1}(V) = P \times V$ $\forall$ aperto V di Q, per cui anche $(U \times Q) \cap (P \times V) = U \times V$.

$\boxed{\text{I}}$ $\mathcal{B} := \{U \times V \mid U \subseteq P \text{ aperto}, V \subseteq Q \text{ aperto}\}$ è veramente la base di $\mathcal{T}$ ("base canonica").

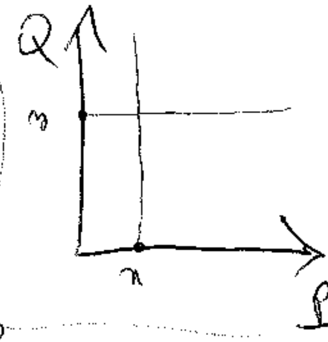
Ora $P \times Q \in \mathcal{B}$, e inoltre $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{B}$, per cui $\mathcal{B}$ è effettivamente base di $\langle \mathcal{B} \rangle$. (b) $\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \mathcal{T}$ perché infatti come visto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. (c) $\mathcal{T} \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ perché p e q sono continue rispetto a $\langle \mathcal{B} \rangle$: ad es., come visto, $p^{-1}(\underset{(\subseteq P \text{ aperto})}{U}) = U \times Q \in \mathcal{B}$!

$\boxed{\text{II}}$ p e q sono aperte.

[Lo sono rispetto a $\mathcal{B}$: ad esempio, $p(U \times V) = U$!]

$\boxed{\text{III}}$ $p_{|P \times \{y_0\}}$ e $q_{|\{x_0\} \times Q}$ sono omeo. $(\forall x_0 \in X, y_0 \in Y)$

[Banalmente, essendo iniettive, sono biiettive, e la loro continuità è evidente; basta allora verificare che sono aperte: consideriamo ad esempio



$p_{|P \times \{y_0\}} : P \times \{y_0\} \to P$, e volendo verificare "l'apertura" su una base, sapendo che $P \times Q$ ha base canonica $\mathcal{B}$ $\Rightarrow$ $P \times \{y_0\} \subseteq P \times Q$ ha base $\{(P \times \{y_0\}) \cap B \mid B \in \mathcal{B}\} =$

$$= \{\underbrace{(P \times \{y_0\}) \cap (U \times V)}_{= \begin{cases} U \times \{y_0\} & \text{se } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}} \mid U \subseteq P \text{ aperto}, V \subseteq Q \text{ aperto}\} =$$

$= \{U \times \{y_0\} \mid U \subseteq P \text{ aperto}\}$, e questo in effetti

$f(U \times S^{n-1}) = U$! ⌋

$\boxed{\text{IV}}$ $f : X \to P \times Q$ continua $\Leftrightarrow$ le sue componenti $f_1 := p \circ f : X \to P$ e $f_2 := q \circ f : X \to Q$ sono continue.

($\Rightarrow$) composizioni di continue! ($\Leftarrow$) f è continua se, e solo se, lo è sulla base canonica, cioè $\forall U \subseteq P$ aperto e $\forall V \subseteq Q$ aperto $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ è aperto in X: ciò che accade se f_1 e f_2 sono continue! ⌋

X, Y sp. top., $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sottosp.: la topologia prodotto su $A \times B$ coincide con la topologia di sottospazio su $A \times B \subseteq X \times Y$!

(Infatti la forma la base $\{U \times V \mid U \subseteq A$ aperto (di A) $(U = A \cap U', U'$ aperto di $X)$, e $V \subseteq B$ aperto (di B) $(V = B \cap V', V'$ aperto di $Y)\} = \{(A \times B) \cap (U' \times V') \mid U'$ aperto di X, V' aperto di $Y\}$, e questa è una chiaramente base della seconda topologia!)

$f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ continue (risp. aperte) $\Rightarrow$

$$f \times g : X \times Z \to Y \times W, \quad (x, z) \longmapsto (f(x), g(z))$$

continua (risp. aperta)!

Basta considerare gli aperti della base canonica e osservare che $f\times g$ ha $(f\times g)^{-1}(U\times V)=f^{-1}(U)\times g^{-1}(V)$ e $(f\times g)(A\times B)=f(A)\times g(B)$!

X omeo. a Y, Z omeo. a W $\Rightarrow$ $X\times Z$ omeo. a $Y\times W$!

Uso infatti $f\times g$ del risultato precedente osservando ovviamente che f,g biiettive $\overset{\text{(immediato)}}{\Leftrightarrow}$ $f\times g$ biiettiva!

$\mathcal{B}$ base di X e $\mathcal{B}'$ base di Y $\Rightarrow$ $\mathcal{G}:=\{A\times B \mid A\in\mathcal{B}, B\in\mathcal{B}'\}$ base di $X\times Y$! Infatti ogni elemento della base canonica $\{U\times V \mid U\subseteq X \text{ aperto}, V\subseteq Y \text{ aperto}\}$ di $X\times Y$ è unione di elementi di $\mathcal{G}$: $U=\bigcup_i A_i$, $V=\bigcup_j B_j$ $\Rightarrow$ $U\times V=(\bigcup_i A_i)\times(\bigcup_j B_j)\overset{\text{(ovvio)}}{=}\bigcup_{i,j}(A_i\times B_j)$!

$A\subseteq X$ denso e $B\subseteq Y$ denso $\Rightarrow$ $A\times B\subseteq X\times Y$ denso!

$A\times B$ interseca infatti ogni aperto della base canonica di $X\times Y$:
$\forall\, U\subseteq X$ aperto e $V\subseteq Y$ aperto, $A\cap U\neq\emptyset$ e $B\cap V\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ $(A\times B)\cap(U\times V)=(A\cap U)\times(B\cap V)\neq\emptyset$!

NOTA: $\forall\, G\subseteq P\times Q$, ovviamente $G\subseteq p(G)\times q(G)$!!

Prodotto di intorni è intorno !

[$x \in X$ e $y \in Y$: $x \in A \subseteq U$ e $y \in B \subseteq V$ $\Rightarrow$ $(x,y) \in$ $\in A \times B \subseteq U \times V$, per cui $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ $\Rightarrow$ $U \times V \in \mathcal{I}((x,y))$!]

$x \in X$ e $y \in Y$: $\mathcal{J}_x$ sist. fond. d'int. di x e $\mathcal{J}_y$ sist. fond. d'int. di y $\Rightarrow$ $\{A \times B \mid A \in \mathcal{J}_x, B \in \mathcal{J}_y\}$ sist. fond. d'int. di (x,y) !

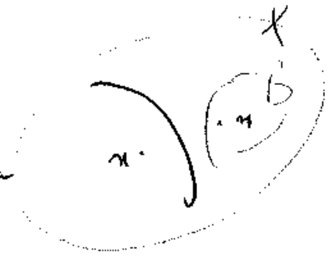
[Intanto sono tutti intorni di (x,y) ; poi, $\forall Z$ intorno di (x,y), si $(x,y) \in U \times V \subseteq Z$ con $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ aperti, allora certamente esistono $A \in \mathcal{J}_x$ e $B \in \mathcal{J}_y$ tale che $A \times B \subseteq U \times V (\subseteq Z)$!]

NOTA : il prodotto di spazi topologici è associativo !
(Ossia ottengo la stessa topologia su $X \times Y \times Z$ che su $(X \times Y) \times Z$ (o $X \times (Y \times Z)$) : $U \times V \times W = (U \times V) \times W$, e viceversa
$\left[\bigcup_i (U_i \times V_i)\right] \times W = \bigcup_i (U_i \times V_i \times W)$!)

X sp. top. $\underline{T_2}$ $\overset{(DEF.)}{\Longleftrightarrow}$ punti distinti ammettono intorni disgiunti, $\overset{ovvio}{\Longleftrightarrow}$ punti distinti ammettono int. aperti disgiunti, $\overset{ovvio}{\Longleftrightarrow}$ punti distinti ammettono int. (aperti) di una base disgiunti.

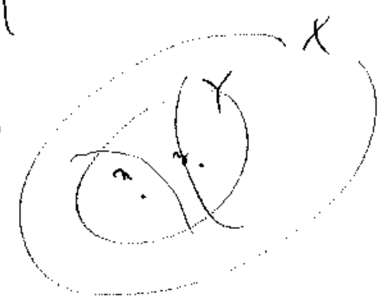
$\boxed{1}$ I singoletti di un T_2 sono chiusi (ossia ciò per i sottoinsiemi finiti!) (ovvio)

[Vediamo chiaramente suppongo $|X| \geq 2$, sia $x \in X$: mostro $X \setminus \{x\}$ intorno di ogni suo punto; sia allora $y \neq x$: per ip. $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subseteq X$ aperti, e allora $y \in B \subseteq X \setminus \{x\}$!]



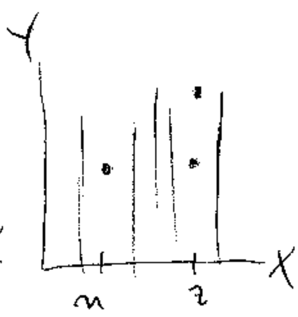
$\boxed{2}$ Sottosp. di un T_2 è T_2.

[$Y \subseteq X$ sottosp., $x \neq y$ in Y: $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \subseteq X$ aperti; basta allora prendere $Y \cap A$ e $Y \cap B$!]



$\boxed{3}$ Prodotto di T_2 è T_2.

[X, Y T_2, $(x,y) \neq (z,w)$ in $X \times Y$, diciamo $x \neq z$: $x \in A$, $z \in B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subseteq X$ aperti; allora basta prendere $A \times Y$ e $B \times Y$!]



$\boxed{4}$ X è $T_2 \Longleftrightarrow \Delta \subseteq X \times X$ è chiuso

(⇒) Infatti $(X\times X)\setminus\Delta$ è aperto: $(x,y)\in(X\times X)\setminus\Delta \Leftrightarrow$ $x\neq y$, e allora $x\in A$, $y\in B$, $A\cap B=\emptyset$, $A,B\subseteq X$ aperti; cioè equivale a avere $(x,y)\in A\times B$ aperto $\subseteq (X\times X)\setminus\Delta$!

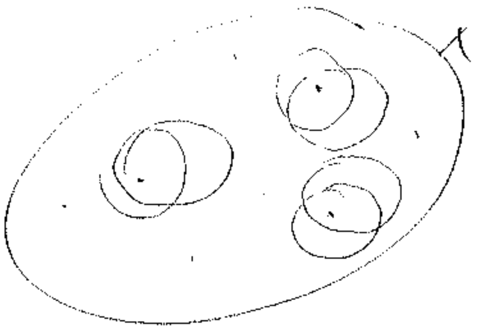
(⇐) "Quasi a ritroso": $\forall\, x\neq y$, ci sono aperti A,B di X tali che $(x,y)\in A\times B\subseteq (X\times X)\setminus\Delta$, per cui inoltre $A\cap B=\emptyset$!]

$\boxed{6}$ $f,g: X\to Y$ continue in Y T_2 $\Rightarrow$ $\{f=g\}$ è un chiuso (di X)

$(f,g): X\to Y\times Y$, $x\mapsto (f(x),g(x))$ è continua (e in un T_2) allora è

naturalmente $\{f=g\} = (f,g)^{-1}(\Delta)$ (chiuso!) !]

$\boxed{6}$ In un T_2 vale la proprietà di separazione per un qualsiasi numero finito $n\geq 2$ di suoi punti.



$\forall\, i\neq j$, separo x_i da x_j con A_{ij} e separo x_j da x_i con A_{ji}, nel senso che A_{ij} e A_{ji} sono aperti tali che $x_i\in A_{ij}$, $x_j\in A_{ji}$ e $A_{ij}\cap A_{ji}=\emptyset$: separo allora x_i da ogni altro punto all'aperto $A_i := \bigcap_{j\neq i} A_{ij}$!]

X T_2, $f: X \to Y$ omeo. $\Rightarrow$ Y T_2 :

$\forall\, y_1 \neq y_2$ di Y, per cui $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, con $x_1 \neq x_2$ di X per in., e allora $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A, B \subseteq X$ aperti, $\overset{f \text{ aperta}}{\Longrightarrow}$ $f(A), f(B) \subseteq Y$ aperti separano y_1 e y_2!

X sp. top. T_2 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\{x\} \overset{(2)}{=} \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$!

[X non è T_2 $\Leftrightarrow$ esistono $x \neq y$ tali che, per ogni intorno U di x e intorno V di y, sia $V \cap U \neq \emptyset$, $\Leftrightarrow$ esiste x, esiste $y \neq x$ tale che, per ogni intorno U di x, $y \in \overline{U}$ $\Leftrightarrow$ esistono $x \in X$ e $y \neq x$ tale che $y \in \bigcap_{U \in I(x)} \overline{U}$!]

$f, g : X \to Y$ continue in Y T_2 : $f_{|A} \equiv g_{|A}$ con $A \subseteq X$ denso $\Rightarrow$ $f \equiv g$!

[$A \overset{\text{(ip.)}}{\subseteq} \{f = g\} \Rightarrow X = \overline{A} \subseteq \overline{\{f = g\}} \overset{\text{(visto!)}}{=} \{f = g\}$!]

$|X| \geq 2$, $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$: $A, B \neq \emptyset \Leftrightarrow A, B \neq X$.

X sp. top. connesso $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ (tutto e') i soli suoi sottoinsiemi contemp. aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X; altrimenti e' sconnesso.

Posso supporre $|X| \geq 2$; X e' sconnesso $\Longleftrightarrow$ X e' unione disgiunta di due aperti (o chiusi) propri.

($\Rightarrow$) Sia $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$ aperto e chiuso: allora $\emptyset \subsetneq X \setminus A \subsetneq X$ e' aperto e chiuso, e $(X \setminus A) \cup A = X$!

($\Leftarrow$) Se $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A e B aperti (o chiusi), allora necessariamente $A = X \setminus B$, che quindi e' anche chiuso (o aperto)!

(1) X sp. top., $A \subseteq X$ aperto e chiuso, $Y \subseteq X$ sottosp. connesso $\Rightarrow Y \subseteq A$ o $Y \cap A = \emptyset$.

[$A \subseteq X$ aperto e chiuso $\Rightarrow Y \cap A \subseteq Y$ aperto e chiuso di Y, che pero' e' connesso: $Y \cap A = Y$ o $Y \cap A = \emptyset$!

(2) X connesso, $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow f(X)$ connesso.

[Sia $Z \subseteq f(X)$ ivi aperto e chiuso, e $\neq \emptyset$: allora $Z = f(X)$; infatti siano $A \subseteq Y$ aperto e $C \subseteq Y$ chiuso tali che $Z = f(X) \cap A = f(X) \cap C$: per continuità e' aperto $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(X) \cap A) = f^{-1}(Z)$ ed e' analog. chiuso $f^{-1}(C) = f^{-1}(Z)$, $\overset{(X \text{ connesso})}{\underset{(f^{-1}(B)\neq\emptyset)}{\Longrightarrow}}$ $f^{-1}(B) = X$, ossia $Z \underset{(\supseteq)}{=} f(X)$!

(3) Y connesso, $f: X \to Y$ continua e suriettiva tale che, $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ $\left(:= f^{-1}(\{y\})\right)$ è connesso in X; f aperta (o chiusa) $\Rightarrow$ X connesso.

Siano $A, B \subseteq X$ aperti (o chiusi) $\neq \emptyset$ tale che $X = A \cup B$: allora $A \cap B \neq \emptyset$; infatti $Y \overset{(su)}{=} f(X) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ con $f(A), f(B)$ $(\neq \emptyset)$ aperti (o chiusi) $\overset{(Y \text{ connesso})}{\Longrightarrow}$ esiste $y \in f(A) \cap f(B)$, per cui $\underset{(\text{equiv.})}{}$ $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$ e $f^{-1}(y) \cap B \neq \emptyset$; essendo ovviamente $f^{-1}(y) \cap A$, $f^{-1}(y) \cap B$ aperti (o chiusi) $(\neq \emptyset)$ di $f^{-1}(y)$ tale che $(f^{-1}(y) \cap A) \cup (f^{-1}(y) \cap B) =$
$= f^{-1}(y) \cap \underbrace{(A \cup B)}_{X} = f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y)$ connesso $\Rightarrow$ $f^{-1}(y) \cap A \cap B \neq \emptyset$, $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$!

(4) Prodotto di due connessi è connesso.

X, Y connessi; $q: X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ è continua e suriettiva e aperta, e inoltre, $\forall y \in Y$, $q^{-1}(y) = X \times \{y\}$ è un connesso di $X \times Y$: infatti $f_{|X\times\{y_0\}}: \underset{(x,y_0)\mapsto x}{X\times\{y_0\}\to X}$ è un omeo.,

e allora certamente $X\times\{y_0\}$ è immagine del connesso X tramite una applicazione continua! $\square$

$\boxed{5}$ Sia $x\in X$; $(Z_i)_{i\in I}$ sottosp. connessi di X che contengono x

$\Rightarrow$ $Z := \bigcup_{i\in I} Z_i$ sottosp. connesso (che contiene x).

(in particolare A, B sottosp. connessi con $A\cap B\neq\emptyset \Rightarrow A\cup B$ connesso!)

Sia $A\subseteq Z \neq\emptyset$, aperto e chiuso ; allora certamente, $\forall i\in I$,

$Z_i\subseteq A$ o $Z_i\cap A=\emptyset$; ma essendo A non vuoto e $\subseteq Z$,

almeno un $i\in I$ c'è tale che $Z_i\cap A\neq\emptyset$, ossia $Z_i\subseteq A$: in particolare $x\in A$, $\Rightarrow$ $Z_i\cap A\neq\emptyset$ $\forall i\in I$, ossia $Z_i\subseteq A$ $\forall i\in I$,

ossia $Z \underset{(\subseteq)}{=} A$! $\square$

$\boxed{6}$ X sp. top. ; $Y\subseteq X$ connesso, $Y\subseteq W\subseteq \overline{Y}$ $\Rightarrow$ W connesso (in particolare Y connesso $\Rightarrow$ $\overline{Y}$ connesso!).

Sia $A\subseteq W \neq\emptyset$, aperto e chiuso (in W); allora certamente

$Y \cap A$ è aperto e chiuso di Y, che però è connesso: $Y \cap A = \phi$ o $Y \cap A = Y$ (cioè $Y \subseteq A$). Ora, A aperto di W e Y denso in W $\left(\overline{Y}^W = W \cap \overline{Y} \overset{(W \subseteq \overline{Y})}{=} W !\right) \Rightarrow$ $Y \cap A \neq \phi$, CIOÈ (connessione!) $Y \subseteq A$; ma d'altra parte A è chiuso in W e allora $\overline{Y}^W = W$, dunque $W \subseteq A$, cioè $\boxed{W = A!}$

X sp. top. ; $C \subseteq X$ componente connessa di X $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C \text{ connesso} ; \\ C \subseteq A,\ A \text{ connesso} \Rightarrow A = C \end{cases}$$

(1) Le componenti connesse sono dei chiusi.

[C connesso $\Rightarrow \overline{C}$ connesso ; $C \subseteq \overline{C} \Rightarrow \overline{C} = C$!]

(2) Se ogni punto possiede un intorno connesso, allora le comp. conn. sono anche aperte.

[C comp. conn. ; $\forall x \in C$, sia U int. conn. di x ; allora $x \in C \cap U \underset{(C, U \text{ conn.})}{\Rightarrow} C \cup U$ connesso ; ma $C \subseteq C \cup U$ $\Rightarrow C \cup U = C$, cioè $U \subseteq C$: C è intorno di ogni suo punto !]

(3) Due spazi omeomorfi hanno lo "stesso numero" di comp. conn.

[$f : X \to Y$ omeo, $C \subseteq X$ comp. conn. $\Rightarrow f(C) \subseteq Y$ comp. conn. ; infatti è senz'altro connesso (continuità), e allora sia $A \subseteq Y$ connesso tale che $f(C) \subseteq A$: ossia $C \subseteq f^{-1}(A) \overset{(f^{-1} = g)}{=} g(A)$, e g continua $\Rightarrow C = g(A)$, ossia $f(C) = A$. Risulta violata la corrispondenza biunivoca tra comp. connesse! ∎

(4) Sia $x \in X$: $C(x) := \bigcup_{\substack{x \in Y \subseteq X, \\ Y \text{ connesso}}} Y$ è una comp. conn. di X (che contiene x) ("la comp. conn. di x in X").

[So già che $C(x)$ è un connesso di X (che $\supseteq \{x\}$); se oltre $C(x) \subseteq A$ con A connesso, allora $x \in A$ e quindi A è uno degli "Y": $\underset{\Rightarrow =}{A \subseteq C(x)}$! ∎

(5) Ogni spazio topologico è unione disgiunta delle proprie componenti connesse (cioè ogni suo punto sta in una e una sola componente connessa).

[Basta provare che due componenti connesse sono sempre disgiunte (o coincidono):

C, D comp. conn., $C \cap D \neq \emptyset \Rightarrow C \cup D$ connesso; ma

$\begin{cases} C \cup D \supseteq C \\ C \cup D \supseteq D \end{cases} \Rightarrow C = C \cup D = D$! ∎

NOTA: se $\{C_i\}_{i \in I}$ sono tutte comp. conn. di X, allora $X \underset{(5)}{=} \bigcup_{i \in I} C_i \Rightarrow$ sono le sole comp. conn. di X!

$\{C_i\}_{i\in I}$ le comp. conn. di X e $\{D_j\}_{j\in J}$ le comp. conn. di Y $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\{C_i \times D_j\}_{i\in I, j\in J}$ le comp. conn. di $X \times Y$!

$$\bigcup_{i\in I, j\in J}(C_i \times D_j) = \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} D_j\right) = X \times Y,$$ e in

effetti sono tutte comp. conn.: se $C_i \times D_j \subseteq G$ connesso di $X \times Y$, allora $C := p(G)$ e $D := q(G)$ sono connessi di X e Y risp. tali che, a maggior ragione, $C_i \times D_j \subseteq \underset{(\text{conn.!})}{C \times D}$, cioè $\begin{cases} C_i \subseteq C \\ D_j \subseteq D \end{cases}$, cioè $\begin{cases} C_i = C \\ D_j = D \end{cases}$ $\Rightarrow$ $C_i \times D_j = C \times D \Rightarrow C_i \times D_j = G$!!

NOTA: $\{C_i\}_{i\in I}$ connessi chiusi (disgiunti) $(\neq \emptyset)$ di X tali che $X = \dot{\bigcup_{i\in I}} C_i$:

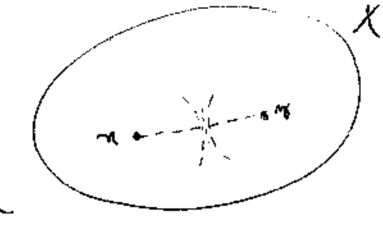
$\forall i \in I$, C_i aperto di X $\Rightarrow$ $\{C_i\}_{i\in I}$ sono le comp. conn. di X !

[$\forall$ connesso $D \subseteq X$ tale che $C_i \subseteq D$ (per un certo $i \in I$), è a maggior ragione C_i chiuso e aperto in D, $\Rightarrow$ $C_i = D$!]

La topologia "standard" su $\mathbb{R}$ è quella euclidea, ovvero quella di base gli intervalli aperti (a_i, b_i), $a_i < b_i$ reali, e cioè quella indotta dalla distanza $d_2(x,y) := |x-y|$; $\forall n \geq 2$, la topologia standard su $\mathbb{R}^n$ è dunque quella prodotto!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\mathbb{R}^n$ è T_2 perché $\mathbb{R}$ lo è, ed $\mathbb{R}$ è T_2 perché è uno spazio metrico! | (X,d) spazio metrico $\Rightarrow X$ T_2 | : infatti

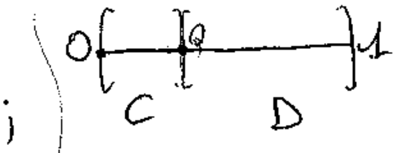
$x \neq y \iff d(x,y) > 0$, e si separano con $B(x,r)$ e $B(y,r)$ dove $0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$, essendo che



$z \in B(x,r) \cap B(y,r) \Rightarrow d(x,y) \overset{(dis.tr.)}{\leq} d(x,z) + d(z,y) < 2r < d(x,y)$, assurdo! |

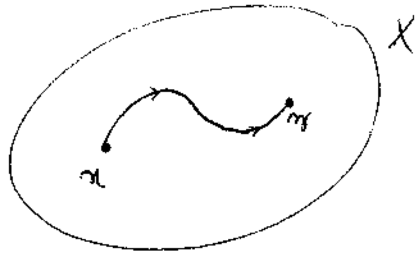
(II) $[0,1]$ è connesso.

| $[0,1] = C \cup D$, C, D chiusi $\neq \emptyset \Rightarrow C \cap D \neq \emptyset$; |



infatti posso supporre $0 \in C$, e posso considerare $d = \inf D$ il quale ovviamente è tale che ogni suo intorno interseca D, e cioè $d \in \overline{D} = D$; in realtà è anche $d \in C$: se anche fosse che $d > 0$, allora di nuovo $C \cap [0,d]$ è un chiuso e allora, contenendo $\underset{(\subsetneq C \text{ perché di } d!)}{[0,d)}$, contiene d (ogni intorno di d, intersecando $[0,d)$, interseca $C \cap [0,d]$)! |

X sp. top. connesso per archi $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$ $\forall x,y \in X$, esiste $\alpha:[0,1]\to X$ continua tale che $\alpha(0)=x$ e $\alpha(1)=y$



(ossia $\beta:[0,1]\to X$ continua tale che $\beta(0)=y$ e $\beta(1)=x$: $\beta(t):=\alpha(1-t)$!) $(X\neq\emptyset!)$

II) X connesso per archi e $f:X\to Y$ continua $\Rightarrow$ $f(X)$ conn. per archi

[$\forall\, y_1=f(x_1) \neq y_2=f(x_2)$ di $f(X)$, considerato $\alpha:[0,1]\to X$ continua tale che $\alpha(0)=x_1$ e $\alpha(1)=x_2$, $f(\alpha):[0,1]\to f(X)$ è continua e tale che $f(\alpha)(0)=f(x_1)=y_1$ e $f(\alpha)(1)=y_2$!]

III) Uno spazio connesso per archi è connesso.

[X connesso per archi e $A,B\subseteq X$ aperti $\neq\emptyset$ tali che $A\cup B=X$ $\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$; dati infatti $x\in A$ e $y\in B$, e $\alpha:[0,1]\to X$ continua tale che $\alpha(0)=x$ e $\alpha(1)=y$: $\alpha^{-1}(A)$ e $\alpha^{-1}(B)$ sono allora due aperti $\neq\emptyset$ con ovviamente $[0,1] \underset{(\subseteq)}{=} \alpha^{-1}(A)\cup\alpha^{-1}(B)$ $(= \alpha^{-1}(A\cup B) = \alpha^{-1}(X)!)$, $\overset{([0,1]\text{ connesso})}{\Longrightarrow}$ esiste $t\in \alpha^{-1}(A)\cap\alpha^{-1}(B) = \alpha^{-1}(A\cap B)$, cioè $\alpha(t)\in A\cap B$!]

IV) Un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è conn. per archi.

[$A\subseteq\mathbb{R}^n$ convesso $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$ $\forall x,y\in A$, $\forall t\in[0,1]$, $tx+(1-t)y\in A$; considero allora, $\forall x,y\in A$, $\alpha:[0,1]\to A$ data da $\alpha(t):=tx+(1-t)y$!]

V) Per $I \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti: (1) I è un intervallo (ossia un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}$); (2) I è connesso per archi; (3) I è connesso.

[(1) $\Rightarrow$ (2) è per (IV); (2) $\Rightarrow$ (3) è per (III); (3) $\Rightarrow$ (1): potendo supporre $|I| \geq 2$ ma $I \subsetneqq \mathbb{R}$, se per assurdo I non fosse un intervallo (ossia convesso) allora equiv. (ovvio) esisterebbero reali $a<b<c$ con $a, c \in I$ ma $b \notin I$, per cui $I \underset{(\subseteq)}{=} [I \cap (-\infty, b)] \cup [I \cap (b, +\infty)]$ sarebbe una ripartizione di I in due aperti (di I) $\neq \phi$ e disgiunti!]

NOTA: $\mathbb{R}$ connesso $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ connesso $\Rightarrow$ $\forall n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ è connesso! (Allora, ad esempio, $\{0\}$ non può essere anche aperto!) {Anzi $\mathbb{R}^n$, in quanto convesso, è connesso per archi!}

|| Prodotto di connessi per archi è connesso per archi! ||

[Siano X, Y conn. per archi; $\forall (x,y), (x',y') \in X \times Y$, se presa $\alpha_1 : [0,1] \to X$ continua con $\alpha_1(0) = x$ e $\alpha_1(1) = x'$, e se $\alpha_2 : [0,1] \to Y$ è continua tale che $\alpha_2(0) = y$ e $\alpha_2(1) = y'$, allora chiaramente $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) : [0,1] \to X \times Y$ è continua e con $\alpha(0) = (x,y)$ e $\alpha(1) = (x',y')$!]

$\forall n \geq 1$, le palle aperte di $\mathbb{R}^n$ sono connesse per archi !

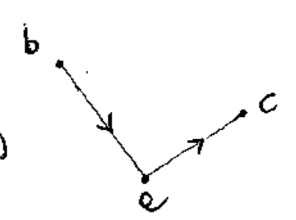
[In effetti sono convesse, ossia $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall r > 0$, $\forall y, z \in B(x,r)$ e $\forall t \in [0,1]$, $[(1-t)y + tz] \in B(x,r)$:

$$|x - [(1-t)y + tz]| \overset{(\pm tx)}{=} |t(x-z) + (1-t)(x-y)| \leq$$

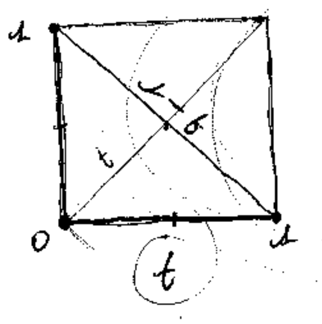
$$\leq t|x-z| + (1-t)|x-y| < tr + (1-t)r = r \text{ !} \quad]$$

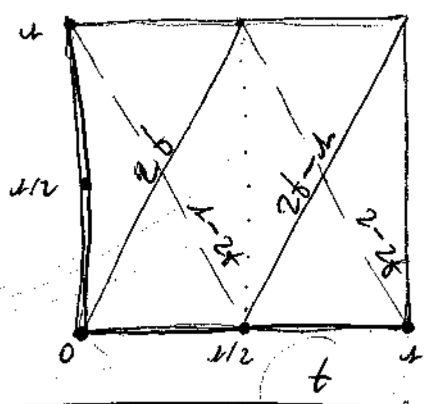
(Basterebbe anche osservare che $B(x,r)$ è "stellato" (ad esempio) rispetto a x stesso, cioè che $\forall y \in B(x,r)$ e $\forall t \in [0,1]$ è $(1-t)x + ty \in B(x,r)$: $|x - [(1-t)x + ty]| = t|x-y| < tr \leq r$! Infatti $A \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto ad $a \in A$, $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow} \forall b \in A$ e $\forall t \in [0,1]$, $[(1-t)a + tb] \in A$, è ovviamente connesso per archi : $\forall b, c \in A$,

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n \text{ data da } \alpha(t) := \begin{cases} (2t)a + (1-2t)b & \text{in } [0,1/2] \\ (2-2t)a + (2t-1)c & \text{in } [1/2,1] \end{cases}$$



è in A, è continua ("incollamento"!) e con $\alpha(0) = b$ e $\alpha(1) = c$!!)





(Somma 1!)

(velocità doppie!)

h, k interi positivi : $h \neq k \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{h \text{ punti (distinti)}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{k \text{ punti (distinti)}\}$!

[Infatti, $\forall\, n \geq 0$ intero, $\mathbb{R} \setminus \{n \text{ punti (distinti)}\}$ ha chiaramente $n+1$ componenti connesse !]

$A \subseteq Y \subseteq X$: A connesso (per archi) come sottosp. di $Y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ lo è come sottosp. di X !

[Sono continue $A \xrightarrow{i_{A \to Y}} Y \xrightarrow{i_{Y \to X}} X$!] $(i_{A \to X})$

$A \subseteq V \subseteq X$ e V aperto (o chiuso) di X : A connesso (per archi) come sottosp. di $X \Rightarrow$ lo è come sottosp. di V !

[A connesso $\subseteq X$: vedendo A come $A \subseteq V$, se $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1, A_2 \subseteq A$ aperti$_{(\neq \emptyset)}$ in $A \subseteq V$, diciamo $A_1 = A \cap B_1$ e $A_2 = A \cap B_2$ con $B_1, B_2 \subseteq V$ aperti di V, allora V aperto $\Rightarrow$ sono anche aperti di X, per cui $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$! A connesso per archi $\subseteq X$: ogni cammino in A $\alpha : [0,1] \to A$ continuo vedendo $A \subseteq X$ resta continuo vedendo $A \subseteq V$, in quanto ogni aperto di $A \subseteq V$ è del tipo $A \cap B$ con

B aperto di V e quindi di X, per cui $A\cap B$ è aperto di A come $A\subseteq X$! $\square$

$A,B\subseteq X$ aperti (o chiusi) : $A\cap B$ connesso e $A\cup B$ connesso ($\Rightarrow A\cap B\neq\emptyset$!)

$\Rightarrow$ A e B connessi !

Posso supporre che A e B siano propri, e anzi non confrontabili rispetto a $\subseteq$, e posso dimostrare la tesi solo per A ! ; A aperto di X $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ tutti gli aperti di A sono anche aperti di X, $\overset{(A\subseteq A\cup B)}{\underset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}}$ tutti gli aperti di A sono anche aperti di $A\cup B$, così come B è aperto in $A\cup B$: se allora $A=A_1\cup A_2$ con $A_1,A_2\subseteq A$ aperti $\neq\emptyset$ di A, sarebbe

$A\cup B=(A_1\cup A_2)\cup B=\begin{cases}A_1\cup(A_2\cup B)\\ A_2\cup(A_1\cup B)\end{cases}$, $\overset{(A\cup B\text{ connesso})}{\Rightarrow}$ $\begin{cases}A_1\cap A_2\neq\emptyset \text{ o } A_1\cap B\neq\emptyset\\ A_2\cap A_1\neq\emptyset \text{ o } A_2\cap B\neq\emptyset\end{cases}$;

anche nel caso $\begin{cases}A_1\cap B\neq\emptyset\\ A_2\cap B\neq\emptyset\end{cases}$ avremmo comunque $A_1\cap A_2\neq\emptyset$: infatti avremmo

dall'inizio $A\cap B=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)$ ($A_i\cap B$ aperti di X e $\subseteq A\cap B$ $\Rightarrow$ $A_i\cap B$ aperto di $A\cap B$!), $\overset{(A\cap B\text{ connesso})}{\Rightarrow}$ $A_1\cap A_2\cap B\neq\emptyset$! $\square$

X connesso, K chiuso $\subseteq X$ ($X\setminus K$ aperto), U aperto $\subseteq X$ ($\Rightarrow U\setminus K$ aperto; $\subseteq X\setminus K$) e $K\subseteq U\subseteq X$:

$U\setminus K$ connesso (di X o di $X\setminus K$!) $\Rightarrow$ $X\setminus K$ connesso !

Siano infatti $A,B\subseteq X\setminus K$ (per assurdo) aperti $\neq\emptyset$ e disgiunti di $X\setminus K$ (ossia di X) tali che

$X \setminus K = A \cup B$; allora è facile che A e B siano anche chiusi in $X \setminus K$, quindi (per ip.) $U - K \subseteq A$ (cioè $(U \setminus K) \cap B = \emptyset$) o $U \setminus K \subseteq B$ (cioè $(U \setminus K) \cap A = \emptyset$), diciamo $U \setminus K \subseteq A$: segue chiaramente che $\underset{(\text{aperto!})}{A \cup U} \underset{(\subseteq)}{=} A \cup K$, per cui otteniamo l'assurdo che $A \cup K$ e $\underset{(\subseteq X \setminus K!)}{B}$ sono due aperti disgiunti di X tali che $X = (X \setminus K) \cup K = (A \cup K) \cup B$! $\square$

$\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad ogni propria palla aperta !

[$\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall r > 0$, è omeo. $\underset{(\text{ovvio})}{}$ $\begin{array}{rcl} B(0,1) & \longrightarrow & B(x,r) \\ y & \longmapsto & ry + x \end{array}$;

inoltre $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & B(0,1) \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1+|x|^2}} \end{array}$ ha inversa $\begin{array}{rcl} B(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ y & \longmapsto & \dfrac{y}{\sqrt{1-|y|^2}} \end{array}$!]

$\forall n \geq 1$ e $\forall f: S^n \to \mathbb{R}$ continua, esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$! (In particolare, f non è mai iniettiva, $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ $\forall n \geq 2$, gli aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi a quelli di $\mathbb{R}^n$!)

[Esiste $x \in S^n$ tale che $\begin{array}{rcl} g: S^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(y) - f(-y) \end{array}$ ha $g(x) = 0$:

infatti f continua e S^n connesso $\Rightarrow$ $f(S^n) \subseteq \mathbb{R}$ connesso, cioè convesso, $\Rightarrow$ $\forall x \in S^n$, visto che ovviamente $f(x), f(-x) \in f(S^n)$, in $f(S^n)$ sta pure la combinazione convessa $\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \overset{\text{disp.}}{=} 0$!

X sp. top. localmente connesso (per archi) $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ ogni punto di X possiede un sistema fondamentale d'intorni connessi (per archi), ovvero un s.f.d.i. conn. (per archi)!

($\boxed{\text{NOTA}}$: X loc. conn. per archi $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ X loc. conn., $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ ogni punto di X ammette un intorno connesso, $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ le componenti connesse di X sono anche aperte!)

I prodotto di loc. connessi (per archi) è loc. connesso (per archi)!

[$\forall x \in X$ e $y \in Y$, $\mathcal{J}_x$ s.f.d.i. di x e $\mathcal{J}_y$ s.f.d.i. di y $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_{(x,y)} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{J}_x, B \in \mathcal{J}_y\}$ s.f.d.i. di (x,y), e essendo A, B conn. (per archi) $\Rightarrow$ $A \times B$ conn. (per archi)!]

II Gli aperti di un loc. connesso (per archi) sono loc. connessi (per archi)!

[$V \subseteq X$ aperto, ossia intorno (in X) di ogni proprio punto, $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ $\forall x \in V$, se $\mathcal{J}$ è s.f.d.i. in X di x, allora $\mathcal{J}_V := \{A \in \mathcal{J} \mid A \subseteq V\}$ è s.f.d.i. in V di x!]

III X loc. connesso (per archi) e $f: X \to Y$ aperta e continua $\Rightarrow$ $f(X)$ loc. connesso (per archi) ! (in Y)

[$\forall\, y = f(x) \in f(X)$, se U è un s.f.d.i. di x, allora "$f(U)$" è un s.f.d.i. di y !]

NOTA: Ogni punto di X ammette un intorno (aperto!) loc. connesso (per archi)

$\Leftrightarrow$ X è loc. connesso (per archi) !

[$\forall\, x \in X$, preso $U \in \mathcal{I}(x)$, se U è s.f.d.i. di x in U, allora lo è anche in X !]

Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di X è (a) localmente finito $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in X$, esiste aperto $V \subseteq X$ tale che $x \in V$ e $V \cap A \neq \phi$ per al più una quantità finita di $A \in \mathcal{A}$; è (b) fondamentale $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$ e $U \subseteq X$, se $A \cap U$ è aperto di A allora U è aperto di X (il viceversa è ovvio in generale!).

$\boxed{\text{NOTA}}$: in corrispondenza di un ricopr. loc. finito $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{V}$ di X tale che, $\forall V \in \mathcal{V}$, $\{V \cap A_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento finito di V

$\forall x \in X$, prendo quell'aperto $V_x := V$ di X tale che $x \in V_x$ e che interseca al più una quantità finita di A_i: pongo quindi $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X}$! Osserviamo poi che $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ricopr. aperto (risp. chiuso) di X $\Rightarrow$ $\{V \cap A_i\}_{i \in I}$ ricopr. aperto (risp. chiuso) di V (nelle stesse ipotesi)!

Potendo supporre $|X| \geq 2$, posso anche supporre $|\mathcal{A}| \geq 2$.

$\boxed{\text{I}}$ Il ricoprimento aperto sono fondamentali.

Sia $\mathcal{A}$ ricopr. aperto di X: $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, A aperti; se $U \subseteq X$ è tale che, $\forall A \in \mathcal{A}$, $A \cap U$ sia un aperto di A, allora (A aperto) $A \cap U$ è un aperto di X, per cui è aperto di X anche $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A \cap U) = \underbrace{\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right)}_{(=X!)} \cap U = U$!]

II I ricoprimenti chiusi finiti sono fondamentali.

$X = C_1 \cup \ldots \cup C_m$, C_k chiusi (e $m \geq 2$); se $U \subseteq X$ è tale che $C_k \cap U$ è aperto in C_k per ogni k, allora equiv. $C_h \setminus (C_h \cap U) = C_h \cap (X \setminus U)$ è chiuso in C_h $\forall h$, $\xRightarrow{(C_h \text{ chiuso})}$ $C_h \cap (X \setminus U)$ è chiuso in X $\forall h$, $\Rightarrow \bigcup_{h=1}^{m} [C_h \cap (X \setminus U)] = X \setminus U$ (finito!) è chiuso in X, ossia U è aperto in X!]

III I ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.

Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ ricoprimento chiuso loc. finito di X, e sia $\mathcal{A}$ quel ricoprimento aperto associato (di X) tale che, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\{A \cap C_i\}_{i \in I}$ sia un ricoprimento chiuso finito di A; dunque, se $U \subseteq X$ è tale che $C_i \cap U$ è aperto in C_i per ogni $i \in I$, allora, $\forall A \in \mathcal{A}$, $(A \cap C_i) \cap U$ è aperto in $(A \cap C_i)$ per ogni $i \in I$, $\xRightarrow{(II)}$ $\forall A \in \mathcal{A}$, $A \cap U$ è aperto in A ($(A \cap C_i) \cap U = (A \cap C_i) \cap (A \cap U)$, e $A \cap U \subseteq A$!), $\xRightarrow{(I)}$ U aperto di X!]

$\boxed{IV}$ $\mathcal{A}$ ricopr. fondamentale di X : $f: X \to Y$ continua

$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}$, $f_{|A}: A \to Y$ ($f(A)$) continua
$x \mapsto f(x)$

$\boxed{(\Rightarrow) \text{ Noto! } (\Leftarrow)}$ $\forall U \subseteq Y$ aperto, certamente per ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto (di A) $f_{|A}^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$, $\overset{(\mathcal{A} \text{ fondam.})}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$ aperto di X!

NOTA: una base è sempre un ricoprimento aperto !!

$\boxed{\text{NOTA}}$: il "lemma di incollamento di funzioni continue" si ha pure in virtù di (IV) !!

$\{A_i\}_{i \in I}$ ricoprimento fondamentale : $\forall i \in I$, $A_i \subseteq B_i \Rightarrow$
$\Rightarrow \{B_i\}_{i \in I}$ (ricoprimento) fondamentale !

$\forall U \subseteq X$, $B_i \cap U$ aperto in B_i $\forall i \in I$ $\overset{(\text{visto!})}{\Rightarrow}$
$(B_i \cap U) \cap A_i \overset{(A_i \subseteq B_i)}{=} A_i \cap U$ aperto in $B_i \cap A_i = A_i$ $\forall i \in I$,
$\overset{(\text{ip.})}{\Rightarrow} U$ aperto di X !

La proprietà dei ricoprimenti fondamentali è equivalente per chiusi !

$\forall A, U \subseteq X$, $A \cap U$ chiuso in A $\Leftrightarrow$ $A \cap (X \setminus U)$ aperto in A :

$A \cap (X \setminus U) = A \setminus (A \cap U)$!

(e quella di sotto è una tautologia!)

NOTA : $f : X \to Y$ e $\{V\}_{V \in \mathcal{V}}$ ricoprimento di $f(X)$ $\overset{(ovvio)}{\Rightarrow}$ $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ ricoprimento di X !

$B \subseteq A_1 \cup A_2 \overset{\text{(ovvio?)}}{\Longleftrightarrow} (B\cap A_1) \cup (B \cap A_2) \underset{(\subseteq)}{=} B$!

X sp. top. <u>Compatto</u> $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ ogni ricoprimento aperto di X consente un sottoricoprimento finito.

(1) Possiamo supporre X infinito! (Per quel ricoprimento aperto di un insieme finito, prendo uno dei suoi aperti per ciascun punto!)

(2) $K \subseteq X$ sottosp. compatto $\Longleftrightarrow$ per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che $K \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.

[($\Rightarrow$) Se $K \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ con A aperti di X, allora $\{K\cap A\}_{A\in\mathcal{A}}$ è un ricopr. aperto di K! ($\Leftarrow$) Quasi è ritroso: prendo un ricopr. aperto $\mathcal{V}$ di K, ossia aperti V di K tali che $K = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$, se $V = K\cap A$ con A $(\in\mathcal{A})$ aperto di X allora $K = \bigcup_{A\in\mathcal{A}}(K\cap A) = K \cap \left(\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\right)$, cioè $K \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, $\Rightarrow K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$, ossia $K = K\cap(A_1 \cup \dots \cup A_n) = (K\cap A_1) \cup \dots \cup (K \cap A_n) = V_1 \cup \dots \cup V_n$!]

(3) X compatto, $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow f(X)$ compatto.

[Se $f(X) \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ con $A \subseteq Y$ aperti (di Y), allora (facilmente) $\{f^{-1}(A)\}_{A\in\mathcal{A}}$ è un ricopr. aperto di X, dunque in realtà sono ovvero $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, ossia

$f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$!

(4) Sottoins. chiusi di un compatto sono compatti.

X compatto, $Y \subseteq X$ sottoins. chiuso; se $Y \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ con A aperti di X, allora $\mathcal{A} \cup \{\underbrace{X \setminus Y}_{(\text{aperto!})}\}$ è un ricoprimento aperto di X, $\Rightarrow$ lo è $\{A_1, \dots, A_n, X \setminus Y\}$: dovremmo $Y \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$!

(5) Unione di due sottoins. compatti è un compatto.

$K_1, K_2 \subseteq X$ sottoins. compatti; se $K_1 \cup K_2 \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ con $A \subseteq X$ aperti,

$$\begin{cases} K_1 \subseteq K_1 \cup K_2 \\ K_2 \subseteq K_1 \cup K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1 \subseteq A_1^{(1)} \cup \dots \cup A_n^{(1)} \\ K_2 \subseteq A_1^{(2)} \cup \dots \cup A_m^{(2)} \end{cases}$$

, da cui $K_1 \cup K_2$ è contenuto in un'unione finita di $A \in \mathcal{A}$!

(6) La proprietà di compattezza è equivalente prendendo gli aperti di una base.

Suppongo che da ogni ricoprimento di X fatto di elementi di una sua base $\mathcal{B}$ si possa estrarre un sottoricoprimento finito: allora ciò vale per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X; se infatti, $\forall U \subseteq X$ aperto, $\mathcal{B}_U := \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$ e allora $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$, otteniamo che $\mathcal{G} \doteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$ è un ricopr. aperto di X ma fatto con elementi di $\mathcal{B}$: ricoprono X anche $B_1, \dots, B_n$, e allora basta prendere $A_1, \dots, A_n$ con $A_k \supseteq B_k$!

7) $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$ chiusi, non vuoti e compatti $\Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset$.

$\forall n\geq 1_{(2)}$, K_n chiuso in X ($\supseteq K_1$) $\Rightarrow K_1\setminus K_n$ è aperto in K_1; ora, $\{K_1\setminus K_n\}_{n\geq 1 \, (2)}$ è ricoprimento (aperto) di K_1 $\Leftrightarrow$

$\bigcap_{n\geq 1} K_n = \emptyset$ $\left(\text{perché } K_1 \underset{(\subseteq)}{=} \left[\bigcup_{n\geq 1 \, (2)} (K_1\setminus K_n)\right] \cup \left[\bigcap_{n\geq 1} K_n\right] \text{ !}\right)$,

e in effetti $\{K_1\setminus K_n\}_{n\geq 1 \, (2)}$ non può ricoprire K_1: infatti altrimenti (K_1 compatto) sarebbe possibile ricoprirlo con una quantità finita di $K_1\setminus K_n$! □

(NOTA: basta K_1 compatto, ma allora $K_n \subseteq K_1$ chiuso $\Rightarrow K_n$ compatto!)

8) Y compatto, $f: X\to Y$ suriettiva e chiusa tale che, $\forall y\in Y$, $f^{-1}(y)$ compatto di X $\Rightarrow$ X compatto.

Sfruttiamo la chiusura di f associando ad ogni aperto $A\subseteq X$ di X un aperto $A'\subseteq Y$ di Y: $A' := \{y\in Y \mid f^{-1}(y)\subseteq A\}$ ("[illegible]")

(infatti $Y\setminus A' \underset{(\subseteq)}{=} f(\underbrace{X\setminus A}_{\text{chiuso!}})$!). Sia allora $\mathcal{A}$ un ricop. aperto di X: tale è a maggior ragione $\mathcal{B}$:= la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$; allora $\mathcal{B}' := \{B'\}_{B\in\mathcal{B}}$ è un ricoprimento (aperto!) di Y: infatti, $\forall y\in Y$, $f^{-1}(y)$ è un compatto di X, per cui esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $f^{-1}(x) \subseteq$ $\subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n =: B$, ossia $x \in B'$! Allora $Y = B'_1 \cup \dots \cup B'_m$,

$\underset{(ovvio)}{\overset{(def.)}{\Rightarrow}} \underset{(\subseteq)}{X = B_1 \cup \dots \cup B_m}$, che è unione finita di elementi di $\mathcal{A}$!]

$K, C \subseteq X$ chiusi; K compatto $\Rightarrow$ $K \cap C$ compatto!

[$K \cap C$ è un chiuso $\subseteq K$ compatto!]

$K \subseteq X \subseteq Y$, X aperto di Y; K compatto come sottosp. di Y $\Rightarrow$ lo è come sottosp. di X!

[Se $K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ con A aperto di X, essendo X aperto tale A sono anche aperto di Y, quindi in realtà $K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$!]

$K \subseteq X \subseteq Y$; K compatto come sottosp. di X $\Rightarrow$ come sottosp. di Y!

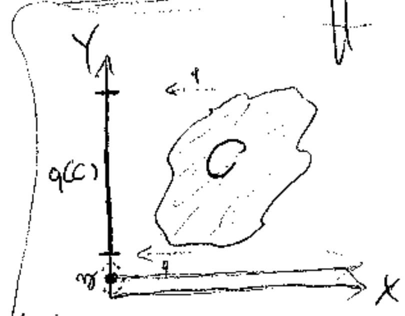
[Semplicemente perché $K \subseteq \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ A \text{ aperto di } Y}} A \overset{(K \subseteq X)}{\Longleftrightarrow} K \subseteq \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A},\\ A \text{ aperto di } Y}} \underbrace{(X \cap A)}_{\text{aperto di } X!!}$!]

(o meglio: $\underset{(i_{X \to Y} \circ i_{K \to X})}{i_{K \to Y}}$ è continua!)

WALLACE: X, Y sp. top., $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ sottoins. compatti; $W \subseteq X \times Y$ aperto tale che $A \times B \subseteq W \Rightarrow$ esistono $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ aperti tali che $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $U \times V \subseteq W$, cioè $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.

Possiamo chiaramente supporre $A \neq \emptyset$ ($\emptyset \times B = \emptyset$!), sia $a \in A$ qualsiasi: allora $\{a\}$ è compatto, e $A \times B \subseteq W \Rightarrow$ $\{a\} \times B \subseteq W$, ossia $\forall y \in B$ $(a,y) \in W$, $\overset{(W \text{ aperto})}{\Rightarrow}$ $\forall y \in B$, esistono aperti U_y di X e V_y di Y tali che $(a,y) \in U_y \times V_y \subseteq W$; allora $\{V_y\}_{y \in Y}$ è un ricopr. aperto di B, $\overset{(B \text{ compatto})}{\Rightarrow}$ lo è anche $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$, nel senso $B \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$; visto che effettivamente $a \in U_y$ $\forall y \in B$, considerando gli aperti $U_a := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ e $V_a := V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ fa avere che $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \overset{(\text{ovvio})}{\subseteq} \bigcup_{k=1}^{n} (U_{y_k} \times V_{y_k}) \overset{(\text{ovvio})}{\subseteq} W$: riassumendo, $\forall a \in A$ esistono aperti U_a di X e V_a di Y tali che $\{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$! Allora $\{U_a\}_{a \in A}$ è un ricopr. aperto di A, $\overset{(A \text{ compatto})}{\Rightarrow}$ lo è $\{U_{a_1}, \dots, U_{a_m}\}$, nel senso $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m} =: U$: posto $V := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m}$, è infine $A \times B \underset{(\forall a \in A,\ B \subseteq V_a !)}{\subseteq} U \times V \underset{(\text{ovvio, come prima})}{\subseteq} W$!!

(I) X compatto $\Rightarrow$ $q: X\times Y \to Y$ è (pure) chiusa.



Sia $C \subseteq X\times Y$ chiuso tale che $q(C) \neq Y$, e quindi sia $y \notin q(C)$: $X \subseteq X$ e $\{y\} \subseteq Y$ sono due compatti tali che $X\times\{y\} \overset{\text{(ovvio)}}{\subseteq} (X\times Y)\setminus C =: W$, aperto di $X\times Y$, $\overset{\text{(Wallace)}}{\Longrightarrow}$ esiste un aperto V di Y tale che $X\times\{y\} \subseteq X\times V \subseteq W$, in particolare $y \in V \overset{\text{ovvio}}{\subseteq} Y\setminus q(C)$!

(II) Prodotto di due compatti è un compatto.

X, Y compatti; X compatto $\Rightarrow$ $q: X\times Y \to Y$ è chiusa, oltre ad essere suriettiva; quindi se Y compatto e fibre $q^{-1}(y) = X\times\{y\}$ compatte $\forall y\in Y$ (essendo omeomorfe ad X!) $\Rightarrow$ $X\times Y$ compatto!

(III) Sottospazi compatti di spazi T2 sono dei chiusi.

Siano X T_2 e $K \subseteq X$ sottosp. compatto $(\neq \emptyset)$; $\forall x \notin K$, è equiv. $(\{x\}\times K)\cap\Delta = \emptyset$, "cioè" $\{x\}, K \subseteq X$ sono compatti tali che $\{x\}\times K \subseteq (X\times X)\setminus\Delta =: W$, aperto di $X\times X$ (X T_2 $\Leftrightarrow$ Δ chiuso!), $\overset{\text{(Wallace)}}{\Longrightarrow}$ esistono aperti U, V di X tali che $\{x\}\times K \subseteq U\times V \subseteq W$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Longrightarrow}$ $x \in U \subseteq X\setminus K$!

(IV) X compatto e Y T_2 : $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow f$ chiusa

[$\forall\, C \subseteq X$ chiuso, C è compatto (X è compatto!) $\overset{(f \text{ continua})}{\Longrightarrow} f(C)$ è un sottoinsieme compatto di Y, $\overset{(Y\ T_2)}{\Longrightarrow} f(C)$ è chiuso!]

(V) X compatto, Y connesso e T_2, $f: X \to Y$ continua e suriettiva; $\forall\, y \in Y$, $f^{-1}(y)$ connesso $\Rightarrow X$ connesso.

[X compatto e Y T_2 e f continua $\overset{(IV)}{\Longrightarrow} f$ chiusa; ora Y connesso, $f: X \to Y$ continua e suriettiva e chiusa con le proprietà delle fibre connesse $\overset{(\text{NOTO})}{\Longrightarrow} X$ connesso!]

$f: X \to Y$: f è propria $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow} f$ è continua e tale che, $\forall\, K$ compatto $\subseteq Y$, $f^{-1}(K)$ compatto $(\subseteq X)$.

(Allora $f: X \to Y$ omeomorfismo $\underset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow} f, f^{-1}$ proprie!)

X sp. top. **localmente compatto** $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$ ogni punto di x ammette un intorno compatto.

$\boxed{\text{NOTA}}$: X compatto $\overset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow}$ X loc. compatto !

1) Sottospazi chiusi di un loc. compatto sono loc. compatti !

[X loc. compatto e $Y \subseteq X$ chiuso ; $\forall y \in Y$, certamente esiste intorno compatto U di y in X, $\overset{(\text{vista})}{\Longrightarrow}$ $Y \cap U$ è intorno di y in Y ; è compatto perché $U \cap \underset{(\text{chiuso})}{Y}$ è chiuso in U compatto !]

2) Prodotto di loc. compatti è compatto !

[$U \in \mathcal{I}_X(x)$ e $V \in \mathcal{I}_Y(y) \Rightarrow U \times V \in \mathcal{I}_{X\times Y}((x,y))$, e prodotto di compatti è compatto !]

3) X loc. compatto e $T2$ $\Rightarrow$ ogni punto di X possiede un s.f.d.i. compatto !

[$\forall x \in X$, se $K \in \mathcal{I}(x)$ compatto (ossia K compatto e $x \in K^\circ$), allora X T_2 $\Rightarrow$ $\mathcal{J} := \{Z \in \mathcal{I}(x) \text{ compatto} \mid Z \subseteq K\}$ è un s.f.d.i. (compatto) di x : se infatti A è un aperto che contiene x, allora $K \setminus A$ chiuso in K $\underset{(K \text{ compatto})}{\Longrightarrow}$ $K \setminus A$ compatto,

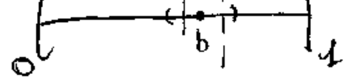
è tale che $x \notin K \setminus A$, cioè ovviamente $\underbrace{\{x\}}_{(\text{compatto!})} \times (K \setminus A) \subseteq$
$\subseteq (K \times K) \setminus \Delta_{K \times K}$ $(\subsetneq K \times K)$; ma X T_2 e $K \subseteq X \Rightarrow$
K T_2, cioè $(K \times K) \setminus \Delta$ aperto (in $K \times K$): per Wallace
esistono quindi aperti U e V di K tali che $\{x\} \times (K \setminus A) \subseteq$
$\subseteq U \times V \subseteq (K \times K) \setminus \Delta$, ossia $x \in U$, $K \setminus A \subseteq V$
(cioè $K \setminus V \subseteq K \cap A$) e $U \cap V = \emptyset$ (cioè $U \subseteq K \setminus V$).
Ma K compatto in X $T_2 \Rightarrow K$ chiuso, $\xRightarrow{\text{ovvio}}$ $K \setminus V$ chiuso,
$\Rightarrow \overline{U} \subseteq K \setminus V$, per cui $x \in K^\circ \cap U \subseteq U \subseteq \boxed{\overline{U}} \subseteq$
$\subseteq K \setminus V \subseteq K \cap A$ $(\subseteq K)$: ovvio che $K^\circ \cap U$ aperto in
K° $(\subseteq K)$ e che K° è aperto di X, anche $K^\circ \cap U$ è aperto
di X e posso prendere $Z := \overline{U}$ (che è tra l'altro compatto
in quanto chiuso $\subseteq K$!)! $\square$

X loc. compatto $\Rightarrow$ X "compattamente generato", cioè la
famiglia di tutti i suoi sottosp. compatti forma un suo ricoprimento
fondamentale.

[X loc. compatto $\xRightarrow{\text{ovvio}}$ $\{K^\circ\}_{K \subseteq X,\ K \text{ compatto}}$ è un ricoprimento di X; essendo
aperto, è fondamentale, e $K^\circ \subseteq K \Rightarrow$ tale è $\{K\}_{K \subseteq X,\ K \text{ compatto}}$!]

$\boxed{\text{I}}$ $[0,1]$ è compatto.

Siano $A \in \mathcal{A}$ aperti di $\mathbb{R}$ tali che $[0,1] \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, e sia $X := \{t \geq 0 \mid [0,t] \subseteq$ unione finita di elementi di $\mathcal{A}\}$; visto che certamente $0 \in A$ per almeno un $A \in \mathcal{A}$, $0 \in X$ e quindi $X \neq \emptyset$: posso considerare ~~il reale~~ $b \doteq \sup X$; se fosse $b > 1$, allora esiste $t \geq 0$ tale che $1 \leq t \leq b$, per cui $[0,1] \subseteq [0,t] \overset{(\text{def.})}{\subseteq}$ unione finita di elementi di $\mathcal{A}$! In effetti $b \leq 1$ è impossibile: altrimenti infatti $b \in A$ per almeno un $A \in \mathcal{A}$, che è aperto $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $(b-\delta, b+\delta) \subseteq A$; ora,



ovviamente esiste $t \in X$ tale che $b - \delta < t \leq b$, e appunto con $[0,t] \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$: $\forall\, 0 \leq h < \delta$, è allora
$$[0, b+h] = [0,t] \cup (t, b+h] \subseteq [0,t] \cup (b-\delta, b+\delta) \subseteq (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A,$$
per cui anche $b + h \in X$! $\square$

$\boxed{\text{II}}$ $A \subseteq \mathbb{R}$ sottosp.: A compatto $\Leftrightarrow$ A chiuso e limitato.

($\Leftarrow$) Se $e > 0$ è tale che $A \subseteq [-e, e]$ (limitatezza!), allora A chiuso di $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ A chiuso di $[-e,e]$, il quale è compatto (perché omeo. a $[0,1]$!): anche A lo è!

($\Rightarrow$) A compatto $\subseteq \mathbb{R}$ T_2 $\Rightarrow$ A chiuso; infine è limitato:

$A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} (-n,n) \; (= \mathbb{R}) \overset{A \text{ compatto}}{\Longrightarrow} A \subseteq (-n_1,n_1) \cup \ldots \cup (-n_s,n_s)$, $\Rightarrow$

$A \subseteq (-N,N)$ con $N := \max\{n_1,\ldots,n_s\}$! $\Box$

$\boxed{\text{III}}$ X compatto e $f: X \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f ammette massimo e minimo

$f(X)$ è un compatto di $\mathbb{R}$, ossia un chiuso e limitato di $\mathbb{R}$! $\Box$

$\boxed{\text{IV}}$ $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme: A compatto $\Leftrightarrow$ A chiuso e limitato.

($\Leftarrow$) Essendo A limitato, c'è $e>0$ tale che $A \subseteq [-e,e]^n$; ma $[-e,e]$ compatto $\Rightarrow$ $[-e,e]^n$ compatto, e A è anche un chiuso in esso: A è compatto! ($\Rightarrow$) A compatto $\subseteq \mathbb{R}^n$ T_2 $\Rightarrow$ A chiuso; infine è limitato: $\|\cdot\|_2 : A \to \mathbb{R}$ è continua su un compatto, per cui certamente ammette massimo ! $\Box$

NOTA: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è certamente non compatto, in quanto è non limitato ma neanche chiuso!

$\forall\, n \geq 0$ intero, $\underline{S^n} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subsetneq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è la sfera unitaria di dimensione n.
$\quad$ (cioè $|x|^2 = 1$)

(1) $\forall\, n \geq 0$, S^n è T_2.

Infatti lo è $\mathbb{R}^{n+1}$, e quindi $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$! $\square$

(2) $\forall\, n \geq 0$, S^n è compatta (cioè chiusa e limitata)!

S^n è chiusa perché $N := |\cdot| : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è continua e ha $N^{-1}(\{1\}) = S^n$, e $\{1\} \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso! $\square$

(3) $\forall\, n \geq 1$, S^n è connessa per archi ($\Rightarrow$ connessa)!

S^1 lo è chiaramente; $\forall\, n \geq 2$, invece, e $\forall\, x, y \in S^n$, considero un piano V contenente x, y e O (è uno solo, se $x \neq y$!); e ho che $x, y \in V \cap S^n$ $(\subseteq S^n)$: qui certamente x e y sono connessi con un arco perché $V \cap S^n$ è omeomorfo a S^1!

Ad esempio, "$\mathbb{R}^2$" $\cap S^2$ è omeo. a S^1: infatti $\mathbb{R}^2 \cap S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, per cui in $\mathbb{R}^2$ ci sono le triplette del tipo $(x, y, 0)$, e se tali sono in S^2 allora equiv. $x^2 + y^2 (+0^2) = 1$; basta quindi considerare

$$\mathbb{R}^2 \cap S^2 \to S^1$$
$$(x, y, 0) \mapsto (x, y)$$

! $\square$ $\square$

NOTA: $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ è connesso per archi, ad esempio perché è omeomorfo con $S^n \times \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$!

È ovvio per $n=1$, ed è analogo per $n>1$: infatti considero

$$S^1 \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$$

$$(x,y,z) \longmapsto (xe^z, ye^z),$$

che ha inversa

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \log(\sqrt{u^2+v^2})\right)!!$$

NOTA: $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\underline{0}\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\text{un punto}\}$, ad esempio perché ciò vale per $n=0$!

Considero

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{p\}$$

$$x \longmapsto x+p$$

!

NOTA: segue facilmente che sono omeomorfi gli $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\text{un punto}\}$!!

Introduciamo con $(x_0, \dots, x_n) := x \in \mathbb{R}^{n+1}$: è omeomorfismo

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow H := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 0\} \subsetneq \mathbb{R}^{n+1}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (0, x_1, \dots, x_n)$$

($H = \{0\} \times \mathbb{R}^n$!)

È facilmente continua e bigettiva, e inoltre è aperta: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall r > 0$, $B_{\mathbb{R}^n}(x, r)$ ha infatti immagine $\{0\} \times B_{\mathbb{R}^n}(x,r) \overset{(imm.)}{=} H \cap B_{\mathbb{R}^{n+1}}((0,x), r)$ aperto in H!

(più semplicemente considera $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e quindi $q_{|\{0\} \times \mathbb{R}^n}$!)

$\forall n \geq 1$, $S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ (o un suo punto) è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ grazie (ad esempio) alla proiezione stereografica

$$S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \dots, x_n),$$

di inversa

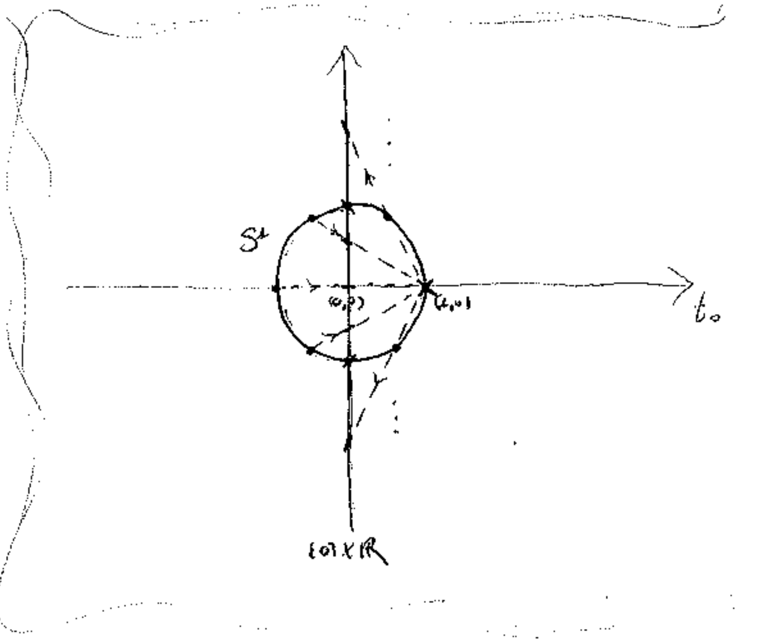
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$$
$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto \frac{1}{1 + \sum_k (y_k)^2} \left(\sum_k (y_k)^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n \right)$$

(infatti $\frac{1}{1 + \sum_k \left(\frac{x_k}{1-x_0}\right)^2} = \frac{(1-x_0)^2}{\underbrace{(1-x_0)^2 + \sum_k (x_k)^2}_{(2-2x_0)}} = \frac{1-x_0}{2}$, e $\sum_k \left(\frac{x_k}{1-x_0}\right)^2 - 1 =$

$= \frac{1}{(1-x_0)^2} \left[\underbrace{\sum_k (x_k)^2}_{(1-(x_0)^2)} - \underbrace{(1-x_0)^2}_{(1+(x_0)^2-2x_0)} \right] = \frac{2x_0}{1-x_0}$!) : stiamo associando ad ogni $(x_0, \dots, x_n) \in S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$ il punto d'intersezione fra $\mathbb{R}^n$ "=" $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ e la retta passante per $(1, 0, \dots, 0)$ e $(x_0, \dots, x_n)$

(la quale, $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$, ha facilmente immagine $\frac{1}{x_0-1}(x_1(t_0-1),\dots,x_n(t_0-1))$)

da cui la formula! (per $t_0=0$) !



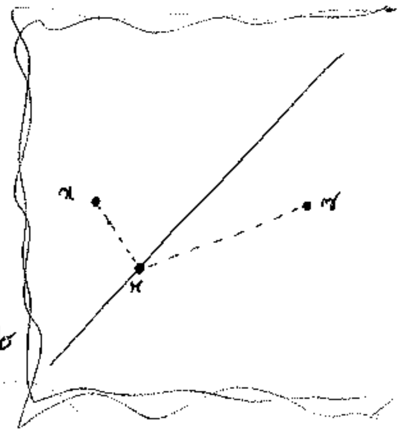
$\boxed{\text{NOTA}}$: $(-1,0,\dots,0) \longmapsto 0 \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$

$S^n \setminus \{(1,0,\dots,0),(-1,0,\dots,0)\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$!

$\forall\, n\geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ numerabile $\Rightarrow \mathbb{R}^{n+1}\setminus A$ è connesso per archi !

[Siano $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus A$ qualsiasi, e sia R una retta non passante né per x né per y : considerato quindi

$R' := \{r \in R \mid$ il segmento di estremi x e r è tutto contenuto in $\mathbb{R}^{n+1}\setminus A\}$, essendo $|A|\leq \aleph_0$ e $|R| = c$ risulta evidente che esiste almeno un $r\in R'$, e che anzi $|R'| \underset{(\geq)}{=} c$! Pertanto finito allo stesso modo coi segmenti di estremi r' e y con $r' \in R'$!]



X sp. top. , $\{K_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{C}(X)$ di sottoinsiemi compatti ; $\{K_n\}_{n\geq 1}$ esaustione in compatti di X $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} (1) \ X \underset{(\subseteq)}{=} \bigcup_{n\geq 1} K_n \ ; \\ (2) \ \forall n\geq 1, \ K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1} \ (\subseteq K_{n+1}) . \end{cases}$

$\boxed{\text{NOTA}}$: in tal caso avremo chiaramente che $\{\mathring{K}_n\}_{n\geq 1}$ è un ricopr. aperto di X, per cui $\forall \, H \subseteq X$ sottoinsieme compatto esiste un $n\geq 1$ tale che $H \subseteq \mathring{K}_n$ $(\subseteq K_n)$!

X sp. top. e $\infty \notin X$: la compattificazione di Alexandroff $\hat{X}$ di X è $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ munito della topologia

$$\mathcal{T} := \{A \mid A \text{ aperto di } X\} \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \text{ chiuso e compatto di } X\} .$$

È effettivamente una topologia (su $\hat{X}$) : (1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ perché è aperto di X, e $\hat{X} \in \mathcal{T}$ perché $\hat{X} = \hat{X} \setminus \emptyset$; (2) $(A_i)_{i\in I}$ aperto di $\hat{X}$ $\Rightarrow$ $A := \bigcup_{i\in I} A_i$ aperto di $\hat{X}$; se infatti a $J \subseteq I$ corrispondono quegli A_j della forma $A_j = \hat{X} \setminus K_j$, K_j chiuso e compatto di X, allora $A = \left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i\in I\setminus J} A_i\right)}_{=:B \text{ aperto di } X ,}$ $=$ $\longrightarrow$

$\cancel{\hat{X} \setminus (\bigcap_{j\in J} K_j)}$

$\cancel{= \left[\bigcup_{j\in J} (\hat{X} \setminus K_j)\right] \cup \left[\hat{X} \setminus (\hat{X} \setminus B)\right]} = \cancel{\hat{X} \setminus \left[(\bigcap_{j\in J} K_j) \cap (\hat{X} \setminus B)\right]}$ ~~quindi aperto di $\hat{X}$~~

$B \cup \underbrace{\bigcup_{j\in J}(\hat{X}\setminus K_j)}_{\left(=\hat{X}\setminus\left(\underbrace{\bigcap_{j\in J}K_j}_{(\text{chiuso e compatto di } X!)}\right)\right)}$, dunque la tesi è uguale ad avere che

A aperto di X e K chiuso e compatto di $X \Rightarrow A\cup(\hat{X}\setminus K)$ aperto di $\hat{X}$: in effetti $A = \hat{X}\setminus(\hat{X}\setminus A) \Rightarrow A\cup(\hat{X}\setminus K) =$

$= \hat{X}\setminus[K\cap(\hat{X}\setminus A)]$, e ora $K\cap(\hat{X}\setminus A) \subseteq K \subseteq X$

è un chiuso di X (quindi compatto) perché semplicemente

$K\cap(\hat{X}\setminus A) \underset{(\subseteq)}{=} K\cap(X\setminus A)$!

(3) se $A, B \in \mathcal{T}$, allora $A\cap B \in \mathcal{T}$: se $A = \hat{X}\setminus K$ e $B = \hat{X}\setminus H$, allora $A\cap B = \hat{X}\setminus(K\cup H)$; se invece A è aperto di X e ancora $B = \hat{X}\setminus H$, allora semplicemente $A\cap B \subseteq A \Rightarrow A\cap B = A\cap(\hat{X}\setminus H) = A\cap(X\setminus H)$ è aperto di X (se H è chiuso)! $\square$

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: è chiaro che la topologia di sottospazio su $X \subseteq \hat{X}$ coincide con quella iniziale di X, e allora $i: \begin{matrix} X & \to & \hat{X} \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$ è (un') immersione aperta ($\forall A\subseteq X,\ i(A) = A$!) !

NOTA 2: per ogni $K \subseteq X$ compatto, $K \subseteq X \subseteq \hat{X} \Rightarrow K$ è compatto anche come sottosp. di $\hat{X}$!

(I) $\hat{X}$ è compatto.

Se $\hat{X} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ con A aperto di $\hat{X}$, allora sicuramente esiste $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che $\infty \in A_0$ della forma $A_0 = \hat{X} \setminus K$, con $K \subseteq X$ chiuso e compatto; ma allora $K = \hat{X} \setminus A_0$ è certamente ricoperto (in $\hat{X}$) dagli aperti di $\mathcal{A} \setminus \{A_0\}$: essendo un compatto pure di $\hat{X}$, è in realtà $K \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$, da cui $\hat{X} \subseteq A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$!

(II) $\hat{X}$ è T_2 $\Leftrightarrow$ X è T_2 e ogni punto di X ammette un intorno compatto (chiuso!).

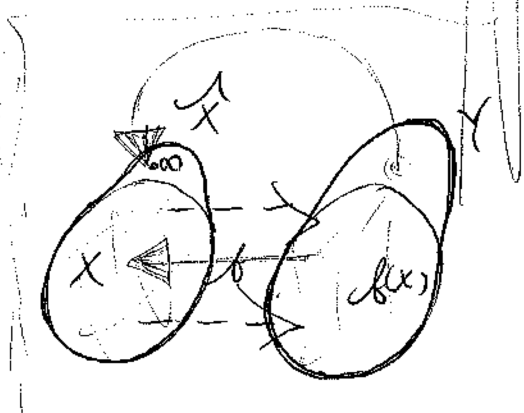
($\Leftarrow$) $\forall x \neq y$ in $\hat{X}$, se $x, y \in X$ allora li separo con aperti (disgiunti) di X e quindi di $\hat{X}$; se invece $x \in X$ e $y = \infty$, allora considero un intorno compatto $K \subseteq X$ di x: $x \in A$ aperto $\subseteq K$ $(\subseteq X)$, mentre ovviamente $y \in \hat{X} \setminus K$!

($\Rightarrow$) $X \subseteq \hat{X}$ sottosp. e $\hat{X}$ T_2 $\Rightarrow$ X T_2; sia ora $x \in X$: per separabilità di x da ∞, dovendo essere $\infty \in \hat{X} \setminus K$ con K (chiuso e) compatto di X, è in ogni caso $x \in K$ e

Precisamente $x \in A$ aperto $\subseteq K$ o $x \in (\hat{X} \setminus H) \subseteq K$ con H compatto di X; il secondo caso ricade nel primo in quanto $x \in (\hat{X} \setminus H) \Leftrightarrow x \in (X \setminus \underset{\text{(chiuso!)}}{H})$, per cui $x \in K^\circ$!]

$\boxed{\text{III}}$ X, Y T_2, $f: X \to Y$ immersione aperta $\Rightarrow$ $g: Y \to \hat{X}$, $g(y) := \begin{cases} x & \text{se } y = f(x) \quad (\text{è iniettiva!}) \\ \infty & \text{se } y \notin f(X) \end{cases}$ è continua (e suriettiva);

$\Rightarrow$ ogni spazio Y T_2 e compatto ($\neq \emptyset$) è omeomorfo a $\widehat{Y \setminus \{y\}}$, $\forall y \in Y$ scelto!



• Sia U aperto di $\hat{X}$: se $U \subseteq X$ è aperto di X, allora in effetti $g^{-1}(U) \overset{(\text{ovvio})}{=} f(U)$ è aperto di Y (f aperta!); se invece $U = \hat{X} \setminus K$ con K compatto (e chiuso) di X, allora $g^{-1}(U) \overset{(\text{ovvio})}{=} Y \setminus f(K)$ è comunque aperto di Y (in quanto $K \subseteq X$ compatto e f continua $\Rightarrow f(K) \subseteq Y$ compatto, e Y $T_2 \Rightarrow f(K)$ chiuso!).

• Sia allora $X := Y \setminus \{y\} \subseteq Y$: Y $T_2 \Rightarrow X$ T_2; inoltre $f := i: X = Y \setminus \{y\} \to Y$, $x \mapsto x$ è (immersione) aperta semplicemente perché $i(X) = X = Y \setminus \{y\}$ è un aperto di Y, in questo Y $T_2 \Rightarrow \{y\}$ chiuso! Comunque dal punto precedente che quella $f : Y \to \hat{X}$ è continua (e surgettiva), dunque in realtà è chiaramente continua e bigettiva; è infine chiusa perché è continua da un compatto ad un T_2: in effetti $\hat{X}$ è T_2 perché ((II)) X lo è e qui $x \in X$ ha un intorno compatto; infatti, $\forall\, U \subseteq X$, U intorno di x in $X \Leftrightarrow$ U intorno di x in Y $\{(\Leftarrow)$ sempre! $(\Rightarrow)$ X intorno di x in Y perché X è ivi aperto!$\}$, e allora ce n'è uno di questi tali che $y \notin \overline{U} := \overline{U}^{Y}$, ossia $\overline{U} \subseteq X$ $\left(\{y\} = \bigcap_{(2)\ U \in I(x)} \overline{U}\ !\right)$; ma allora $\underset{(\supseteq U)}{\overline{U}}$ è un intorno di x anche in X, ed è un chiuso in un compatto (Y) e quindi è un compatto: allora $\overline{U} \subseteq X \subseteq Y$, X aperto di Y e $\overline{U}$ compatto di $Y \Rightarrow \overline{U}$ compatto di X!!

(NOTA: X è detto "localmente compatto" nel caso che qui ogni punto abbia un intorno compatto!)

$f : X \to Y$ continua, surgettiva e aperta, e $\{K_n\}_{n \geq 1}$ una esaustione in compatti di X $\Rightarrow$ $\{f(K_n)\}_{n\geq 1}$ es. in comp. di Y!

[$\forall n \geq 1$, K_n compatto $\overset{(\text{cont.})}{\Rightarrow}$ $f(K_n)$ compatto; poi $X = \bigcup_{n \geq 1} K_n \Rightarrow$

$Y \overset{(so)}{=} f(X) = \bigcup_{n\geq 1} f(K_n)$; infine $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ $(\subseteq K_{n+1}) \overset{(ovvio)}{\Rightarrow}$

$f(K_n) \subseteq f(\mathring{K}_{n+1})$ $(\subseteq f(K_{n+1}))$, ma f aperta $\Rightarrow$

$f(\mathring{K}_{n+1})$ è aperto $(\subseteq f(K_{n+1}))$ $\Rightarrow$ $f(\mathring{K}_{n+1}) \subseteq f(K_{n+1})^\circ$,

da cui $f(K_n) \subseteq f(K_{n+1})^\circ$! ◁

$f : X \to Y$ propria $\Rightarrow$ $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ è continua

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X \\ \infty_Y & \text{se } x = \infty_X \end{cases}$$

(perché $A \subseteq Y \overset{(ovvio)}{\Rightarrow} \hat{f}^{-1}(A) = f^{-1}(A)$!) ; in particolare $f : X \to Y$ omeo

$\overset{(ovvio)}{\Rightarrow}$ $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ omeo. ! $(\hat{f}^{-1} = \widehat{f^{-1}}!)$

($\boxed{\text{NOTA}}$: segue allora che, $\forall n \geq 1$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(compatto e } T_2!)}}{S^n}$ è omeomorfo a $\widehat{\mathbb{R}^n}$!)

X, Y sp. top., $f: X \to Y$ continua e suriettiva :

f identificazione $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\{$aperti di $Y\} \underset{(\supseteq)}{=} \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A)$ aperto di $X\}$, $\Longleftrightarrow$ $\{$chiusi di $Y\} \underset{(\supseteq)}{=} \{C \subseteq Y \mid f^{-1}(C)$ chiuso di $X\}$.

! $B \subseteq Y$ è tale che $f^{-1}(B)$ chiuso (risp. aperto) di X $\overset{\text{ovvio}}{\Longleftrightarrow}$ $B \subseteq Y$ è tale che $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ aperto (risp. chiuso) di X, $\overset{\text{(UNA DEF.)}}{\Longleftrightarrow}$ $B \subseteq Y$ è tale che $Y \setminus B$ è aperto (risp. chiuso) di Y !

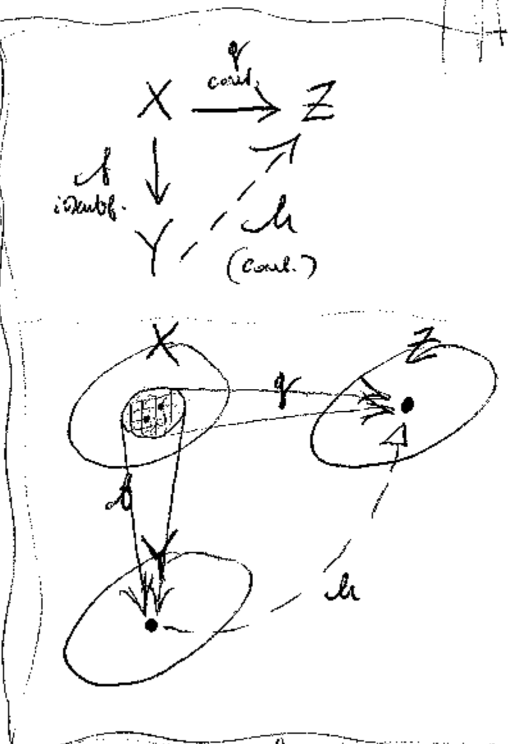
(I) $f: X \to Y$ continua e bigettiva : f omeo. $\Leftrightarrow$ f identif. (ossia aperta (o chiusa))

[$(\Rightarrow)$ $\forall A \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(A)$ è aperto di X, f aperta $\Rightarrow$ è aperto di Y $(f(f^{-1}(A)) = A)$! $(\Leftarrow)$ f è aperta poiché, $\forall V \subseteq X$ aperto, $f(V) \subseteq Y$ è tale che $f^{-1}(f(V)) = V$!]

(II) $f: X \to Y$ continua e suriettiva : f chiusa (o aperta) $\Rightarrow$ f identificazione.

[$\forall C \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(C)$ è chiuso di X, f chiusa $\Rightarrow$ è chiuso di Y $f(f^{-1}(C)) \underset{\text{su } (\supseteq)}{=} C$! ✓]

III Sia $f: X \to Y$ identificazione e $g: X \to Z$ continua: esiste $h: Y \to Z$ continua tale per cui $h \circ f = g$ (f surgettiva!) $\Longleftrightarrow$ g è costante sulle fibre di f.
(cioè: $\forall x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, è anche $g(x_1) = g(x_2)$!)



($\Rightarrow$) Ovvio: $\forall x_1, x_2 \in X$, se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $g(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = g(x_2)$! ($\Leftarrow$) $\forall y \in Y$, definiamo $h(y) := g(x)$ con $x \in X$ un qualsiasi punto $x \in f^{-1}(y)$: allora h è ben definita (per surg. di f e) per ipotesi su g, e inoltre banalmente $h \circ f = g$! Infine h è continua: $\forall A \subseteq Z$ ~~tale~~ aperto, $h^{-1}(A)$ è un aperto di Y in quanto f è un'identificazione e $f^{-1}(h^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$ è un aperto di X (per continuità di g)!

Composizione di identificazioni è identificazione.

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$; $\forall A \subseteq Z$ tale che $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

è aperto di X, f identif. $\Rightarrow$ $g^{-1}(A)$ è aperto di Y,

$\overset{g\ (\text{identif.})}{\Longrightarrow}$ A aperto di X ! $\lrcorner$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h:=g\circ f", "\text{identif.}"'] \arrow[d, "f"', "\substack{\cancel{\text{identif.}}\\ \text{continua}}"] & Z \\
Y \arrow[ur, "g"', "\text{continua}"] &
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ g identificazione !

[Soddisfatto g suriettiva $\Leftarrow$ h suriettiva, che è; infine, $\forall A\subseteq Z$ tale che $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y, f continua $\Rightarrow$ $f^{-1}(g^{-1}(A)) = h^{-1}(A)$ è un aperto di X, $\overset{(h\ \text{identif.})}{\Longrightarrow}$ A aperto di Z! $\rfloor$

Ricordiamo che, data $f: X\to Y$, $A\subseteq X$ è f-saturo $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ se $x\in A$, e se $x'\in X$ è tale che $f(x')=f(x)$, allora anche $x'\in A$, $\Longleftrightarrow$ $A=f^{-1}(B)$ per un certo $B\subseteq Y$.

[($\Leftarrow$) Se $x\in A$, e se $x'\in X$ t.c. $f(x')=f(x)\in B$, allora equiv. $x'\in f^{-1}(B)=A$! ($\Rightarrow$) $A=f^{-1}(f(A))$: infatti $\subseteq$) è ovvio (in generale), mentre $\supseteq$) è perché se $x'\in f^{-1}(f(A))$

onde $f(x') \in f(A)$, dicendo $f(x') = f(x)$ per un opportuno $x \in A$, allora effetto $x' \in A$ per ipotesi! $\rfloor$

Se allora $f: X \to Y$ suriettiva e continua: f identificazione $\Leftrightarrow$ $\{$aperti di $Y\} = \{f(V) \mid V \subseteq X$ aperto f-saturo$\}$; in tal caso allora «tutti gli aperti di X sono f-saturi $\Rightarrow$ f aperta»!

Infatti, per suriettività di f, $\{f(V) \mid V \subseteq X$ aperto f-saturo$\} =$
$= \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A)$ aperto di $X\}$: $\subseteq$ $V \subseteq X$ aperto f-saturo è della forma $V = f^{-1}(A)$, $A \subseteq Y$ opportuno, e ora $f(V) =$
$= f(f^{-1}(A)) \underset{\text{su}}{=} A$! $\supseteq$ Banale: $V := f^{-1}(A)$ aperto di X è anche f-saturo, e che $f(V) = A$!
Se infine tutti gli aperti di X sono f-saturi, $\forall V \subseteq X$ aperto è V f-saturo automaticamente, e allora banalmente $f(V)$ è un aperto di Y!

NOTA: il complementare di un f-saturo è un f-saturo!!

$A = f^{-1}(B) \Rightarrow X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$!

X sp. top., $f : X \to Y$ surgettiva : la topologia quoziente su Y rispetto a f è $\{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A)$ è un aperto di $X\}$, il [illegible] rende f continua, o meglio

(1) è l'unica topologia su Y che rende f un'identificazione,
(2) è la più fine fra quelle che rendono f continua.

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad e \quad f^{-1}(Y) = X \; ; \quad f^{-1}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(A_i) \; ;$$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad !$$

In particolare consideriamo una relazione d'equivalenza $\sim$ su X e $\pi : \begin{array}{l} X \longrightarrow X/\sim \\ x \longmapsto [x] \end{array}$ (surgettiva!) : $X/\sim$ munito della top. quoziente rispetto a π è spazio quoziente ; questo è quindi il solo modo per avere che π è identificazione (e la "potenza" che sia "più troppo continua"!) ! Quindi allora esiste (unica) h continua che faccia commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \text{ continua}"] \arrow[d, "\pi\ (\text{identif.})"'] & Z \\ X/\sim \arrow[ur, dashed, "h\ (\text{continua})"'] & \end{tikzcd}$$

se, e solo se, g è costante sulle classi di equivalenza di X !

Deduciamo che $f: X \to Y$ continua e suriettiva induce uno speciale omeomorfismo, nel caso sia un'identificazione: sia infatti per convenienza $f: X \to Y$ continua; consideriamo su X la rel. d'eq. corrispondente al partizionamento di X nelle fibre di f, ossia $\forall x, y \in X,\ x \sim y \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y)$: allora f è banalmente costante nelle classi di equivalenza, per cui f induce al quoziente $X/\sim$ un'altra appl. continua $\bar{f}$, e $\bar{f} \circ \pi = f$. Evidentemente, in realtà, $\bar{f}$ è iniettiva, e quindi

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f \text{ continua}"] \arrow[d, "\pi\ (\text{identif.})"'] & Y \\
X/\sim \arrow[ur, dashed, "\bar{f}\ (\text{continua})"'] &
\end{tikzcd}
$$

f identificazione $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ omeomorfismo.

Attenzione f suriettiva $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ suriettiva! (cioè biiettiva) ($\Leftarrow$) Ovvio: $\bar{f}$, in quanto biiettiva, è un'identif. (come π), e inoltre $f = \bar{f} \circ \pi$!

($\Rightarrow$) Guardando il diagramma sopra, $\left\{\begin{array}{l} f \text{ identificazione (visto)} \\ \pi \text{ continua} \\ \bar{f} \text{ continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{f}$ identif., cioè (per biiettività) $\bar{f}$ omeo.

(NOTA: in tal caso π aperta $\overset{(\text{visto})}{\Rightarrow}$ f aperta!)

Quoziente di un connesso (per archi), risp. compatto, è a sua volta un connesso (per archi), risp. compatto!

[Semplicemente $\pi : X \to X/\sim$ è continua e suriettiva !!]

$f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ identificazioni aperte (cioè cont., surg. e aperte) $\Rightarrow$

$f \times g : X \times Z \to Y \times W$ identificazione aperta.
$(x, z) \longmapsto (f(x), g(z))$

[Essendo facilmente che f, g suriettive $\Leftrightarrow$ $f \times g$ suriettiva, la tesi è ovvia: f, g cont. e aperte $\Rightarrow$ $f \times g$ cont. e aperta!]

$f : X \to Y$ identificazione aperta (cont. e surg.) : $A \subseteq X$ f-saturo $\Rightarrow$ anche A° e $\overline{A}$ sono f-saturi!

! Basta provare che A° è f-saturo (ossia che la parte interna di un f-saturo è un f-saturo): infatti in tal caso, essendo A f-saturo $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ f-saturo $\Rightarrow$ $(X \setminus A)^\circ$ f-saturo, è f-saturo anche $X \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{A}$!). Ora, $A^\circ \subseteq A \Rightarrow f(A^\circ) \subseteq f(A)$; ma f aperta $\Rightarrow$ $f(A^\circ)$ aperto, quindi $f(A^\circ) \subseteq f(A)^\circ$:

$$A^\circ \subseteq f^{-1}(\underbrace{f(A^\circ)}_{\text{aperto}}) \subseteq f^{-1}(\underbrace{f(A)^\circ}_{\text{aperto}}) \overset{(f(A)^\circ \subseteq f(A))}{\subseteq} f^{-1}(f(A)) \overset{(A \text{ saturo})}{=} A$$, e

allora necessariamente $A = f^{-1}(f(A^\circ))$ $(= f^{-1}(f(A)^\circ))$.

$f: X \to Z$ identificazione : Z è $T2$ $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in X$ tali che $f(x) \neq f(y)$ $(\Rightarrow x \neq y)$, esistono intorni aperti saturi disgiunti di x e y.

~~Basta f continua e suriettiva~~ ($\Rightarrow$) $\forall z \overset{(\text{se})}{=} f(x) \neq f(y) \overset{(\text{se})}{=} z'$, certamente ci sono intorni aperti disgiunti A, B di $f(x)$ e $f(y)$ rispettivamente : per continuità $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ lo sono per x e y risp. !

($\Leftarrow$) La diagonale di $Z \times Z$ è chiusa : infatti, $\forall (z, z') \notin \Delta$, ossia $z \neq z'$, essendo per suriettività $z = f(x)$ e $z' = f(y)$ so che esistono intorni aperti disgiunti $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ di x e y risp. : dunque $(z, z') \in A \times B \overset{(A \cap B = \emptyset)}{\subseteq} (Z \times Z) \setminus \Delta$, e $A, B \subseteq Z$ aperti in quanto f è identificazione !!

$$X \xrightarrow[\text{immersione}]{f} Y \xrightarrow[\text{identificaz.}]{g} Z \Rightarrow g(f) \text{ identificaz. ! (no)}$$

$\forall n \geq 1$ intero, $\underline{D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}}$ $\subsetneq \mathbb{R}^n$ è il disco
$(|x|^2 \leq 1)$

unitario di dimensione n. È evidente che sia T_2, compatto e connesso per archi (in questo convesso ($|x|, |x'| \leq 1 \Rightarrow \forall t \in [0,1]$, $|(1-t)x + tx'| \leq (1-t)+t = 1$!) !), così come $[0,1]^n$!

Scelto $A \subseteq X$, «$\forall x,y \in X$, $x \sim y \overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow} x=y$ o $x,y \in A$» è facilmente una rel. d'eq. su X che "contrae" A ad un punto! Indichiamo $X/A \doteq X/\sim$.

$$f : D^n \longrightarrow S^n := \{(y,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mid y^2+|x|^2 = 1\}$$ è
$$x \longmapsto (\underset{\substack{\text{su} \\ (\text{in } [-1,1])}}{2|x|^2 - 1}, \ 2x\sqrt{1-|x|^2})$$

chiaramente suriettiva e $\underset{(\text{compatto} \to T_2)}{\text{continua}}$, dunque chiusa e cioè è un'identificazione chiusa; inoltre $f^{-1}((1,\underset{\mathbb{R}^n}{0})) = \partial D^n$ $(= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\})$, e

$f_{|D^n \setminus \partial D^n} : \underset{(\mathring{D}^n)}{D^n \setminus \partial D^n} \rightarrow S^n \setminus \{(1,0)\}$ è facilmente iniettiva, "ovvia" un omeomorfismo ! Non solo: avendo che, $\forall x,y \in D^n$,

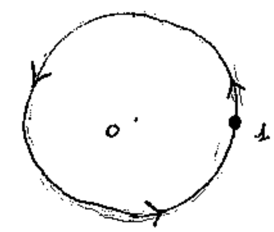
$f(x) = f(y) \overset{(\text{visto ora})}{\Leftrightarrow} x=y$ o $x,y \in \partial D^n = f^{-1}((1,0))$, possiamo dire che f contrae il bordo del disco al punto $(1,0)$ della sfera, e Λ identificazione $\Rightarrow$ induce omeomorfismo $D^n/\partial D^n \xrightarrow{\bar{f}} S^n$!

($\boxed{\text{NOTA}}$: essendo $[0,1]^n \cong D^n$ ($\partial[0,1]^n \mapsto \partial D^n$), è chiaro che pure stesso risultato avviene per $[0,1]^n$ con S^n !)

Pensando a S^1 come sottoinsieme di $\mathbb{C}$, consideriamo

$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t}\end{aligned}$$

: è continua e



suriettiva, ed è pure chiusa in quanto continua da un compatto ad un T_2, ossia è un'identificazione chiusa!

(Alla non aperta: ad esempio $[0,\frac{1}{2})$ non ha immagine aperta in S^1! In effetti non è iniettiva, e ciò esclusivamente perché entrambi $0, 1 \mapsto 1$!)

X sp. top.; $(\mathrm{Omeo}(X), \circ)$ è chiaramente un gruppo (in gen. non abeliano) e fissiamo allora un qualsiasi suo sottogruppo $G < \mathrm{Omeo}(X)$ per quozientare X: «$\forall x,y \in X$, $x \sim y \overset{def.}{\iff} y = g(x)$ per un $g \in G$» definisce chiaramente una rel. d'eq. $\sim$ su X! Indicando $X/G :=$ $:= X/\sim$, e chiamando le sue classi d'eq. "orbite di G", la vediamo inoltre come spazio quoziente: cioè $\pi : X \to X/G$ è un'identificazione! $\boxed{\text{NOTA}}$: è evidente che, $\forall A \subseteq X$,

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A) \quad !$$

(π saturo!)

(I) π è aperta; se G è finito, allora π è pure chiusa.

[$\forall A \subseteq X$ aperto, $\pi(A) \subseteq X/G$ è aperto in quanto, essendo certamente che $g(A) \subseteq X$ è aperto $\forall g \in G$, è aperto (in X) anche $\bigcup_{g \in G} g(A) = \pi^{-1}(\pi(A))$, e π è identif.!
Da questa dim. è ovvia la seconda parte.]

(II) X/G è $T_2 \iff K := \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$ è chiuso

[$\pi : X \to X/G$ identif. aperta $\overset{(visto)}{\Longrightarrow}$ $p := \pi \times \pi : X \times X \to X/G \times X/G$, $(x,y) \mapsto (\pi(x), \pi(y))$ identificazione (aperta), ed essendo chiaramente che $p^{-1}(\Delta) = K$ $(\Delta := \Delta_{X/G \times X/G})$, è allora Δ chiusa $\iff$ K chiuso!]

III) X T_2 ; $A \subseteq X$ è aperto $\neq \emptyset$ tale che

(1) A interseca ogni orbita di G (cioè $\pi_{|A}$ è surgettiva),

(2) $\{g \in G \mid A \cap g(A) \neq \emptyset\}$ è finito $(id \in)$

$\Rightarrow$ anche X/G è T_2 !! $\underset{(\text{con } X\ T_2!)}{\overset{(A:=X)}{\Rightarrow}}$ Se G è finito, allora certamente X/G è T_2 !!

Essendo $\pi : X \to X/G$ identif., la tesi equivale ad avere che, $\forall\, x \neq y$ di X con $\pi(x) =: p \neq q := \pi(y)$, esistono intorni aperti π-saturi disgiunti di x e y ! Per (1) possiamo supporre con $x, y \in A$, e inoltre possiamo per (2) elencare come $g_1, \dots, g_n$ tutti e soli i $g \in G$ tali che $A \cap g(A) \neq \emptyset$; ora, $\pi(x) \neq \pi(y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} x \neq y$ e anzi $x \neq g(y)$ $\forall g \in G$! In particolare ciò vale con $g = g_k$, e quindi X T_2 $\Rightarrow$ $\forall k = 1, \dots, n$, esistono aperti U_k, V_k di X tali che $x \in U_k$, $g_k(y) \in V_k$ e $U_k \cap V_k = \emptyset$, $\Rightarrow$

$U := A \cap \left[\bigcap_{k=1}^{n} U_k\right]$ e $V := A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} g_k^{-1}(V_k)\right)$ sono (aperti) tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$ (se $g_1 := id_X$, allora in effetti $U \subseteq U_1$ e $V \subseteq V_1$!) , anzi : $U \cap g(V) = \emptyset$ $\forall g \in G$!!!

$$\begin{cases} g = g_k \Rightarrow U \cap g_k(V) \overset{(V \subseteq g_k^{-1}(V_k))}{\subseteq} U_k \cap V_k = \emptyset \ ! \\ g \neq \text{ogni } g_k, \text{ ossia } A \cap g(A) = \emptyset \Rightarrow U \cap g(V) \overset{(U,V \subseteq A)}{\subseteq} A \cap g(A) = \emptyset \ ! \end{cases}$$

Possiamo così infine concludere $\begin{cases} x \in U \underset{(\text{ovvio})}{\subseteq} \pi^{-1}(\pi(U)) \underset{(\text{visto})}{=} \bigcup_{g \in G} g(U) \\ y \in V \subseteq \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{h \in G} h(V) \end{cases}$ (disgiunti!!)

da osservare che in effetti $\emptyset = \left(\bigcup_{g\in G} g(U)\right) \cap \left(\bigcup_{h \in G} h(V)\right)$, $=$

$= \bigcup_{g,h\in G} [g(U) \cap h(V)]$: se fosse infatti $g(U) \cap h(V) \neq \emptyset$, allora

dunque $\emptyset \neq g^{-1}(g(U) \cap h(V)) = U \cap (\underbrace{g^{-1} \circ h}_{\in G})(V)$, che è una contraddizione rispetto all'ultimo fatto accertato !!

X sp. top. con rel. d'eq. $\sim$: le classi d'eq. di X sono aperte $\Rightarrow$ le classi d'eq. di X sono aperte e chiuse.

Il complementare della generica classe d'eq. è unione delle altre classi d'eq., quindi unione di aperti !

$\forall\, n \geq 1$ intero, « $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, $x \sim y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} x = \lambda y$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ » definisce chiaramente una relazione d'equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, e ovvio quozientare $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ per tale relazione è quozientarlo per il gruppo delle sue omotetie$_{\text{(reali)}}$: $(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim =$
$= (\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})/\{\text{sue omotetie}\} =: \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è lo spazio proiettivo reale, e considerandolo come spazio quoziente otteniamo $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una identificazione aperta! (La classe di equivalenza di $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ è indicata $[x_0, \dots, x_n]$!)

($\boxed{\text{NOTA}}$: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è in biiezione naturale con l'insieme dei sottospazi vettoriali 1-dimensionali di $\mathbb{R}^{n+1}$!)

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi, compatto e $T2$!

Esiste infatti un omeomorfismo fra $S^n/\sim$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, motivo per cui S^n conn. per archi e compatto $\Rightarrow S^n/\sim$ tale $\Leftrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale, e soprattutto S^n T_2 e $S^n/\sim \,= S^n/\{\underbrace{id, -id}_{\text{gruppo}}\}$ $\overset{\text{(visto)}}{\Longrightarrow} S^n/\sim$ $T2$ $\Leftrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale! Vediamo: considerato

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\pi\circ i"] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
S^n/\sim \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

, $\left\{\begin{array}{l}\pi \text{ cont. e surj.} \\ i \text{ cont.}\end{array}\right. \Rightarrow \pi \circ i$ continua e suriettiva, ed essendo palesemente costante sulle classi di equivalenza (di S^n) ne deduciamo l'esistenza$_{\text{(ed unica)}}$ di una f continua tale che $f \circ \pi' = \pi \circ i$, $\Rightarrow f$ è anche surgettiva; è ovvio che in realtà è pure iniettiva, ossia bigettiva! Completando il diagramma in

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\pi' \circ r"] & S^n \arrow[d, "\pi'"] \\ S^n/\sim \arrow[r, "f"'] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r, dashed, "g"'] & S^n/\sim \end{tikzcd}$$

, $r(x) := x/|x|$ (continua!), allora

$\pi' \circ r$ è continua e costante nelle classi (di $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$), per cui $\exists$ g continua con $g \circ \pi = \pi' \circ r$, $\Rightarrow g$ surgettiva; non solo è pure chiaramente iniettiva, ma talmente $g = f^{-1}$! $\square$

NOTA: per la conn. per archi e la compattezza di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ bastava che $\pi \circ i : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è continua e surgettiva!

$\forall n \geq 0$ intero, definiamo analogamente $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ come il quoziente di $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ per il gruppo delle sue omotetie complesse, considerato come spazio quoziente: $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è identif. aperta! Visto che $2(n+1) - 1 = 2n+1$, considerando $S^{2n+1} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z| = 1\}$ otteniamo che $\pi \circ i : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è continua e surgettiva: allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è

Connesso per archi e compatto! Inoltre $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è T_2, in quanto $K := \{(x, y) \in (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})^2 \mid x = \lambda y \text{ per un } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$ è chiuso (nel prodotto): vedendo gli elementi di $\mathbb{C}^{n+1}$ come vettori colonna, $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})^2$ = «insieme delle matrici complesse $(n+1) \times 2$ con colonne non nulle», mentre $K = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})^2 \cap$ «matrici di rango 1», per cui K resta definito dall'annullarsi dei determinanti minori di ordine 2!

$\boxed{\text{NOTA}}$: le proiezioni $\pi \circ i$ $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, essendo continue e suriettive, sono identificazioni chiuse! (Infatti $\pi \circ i$ continua «compatto» $\to$ «T_2» $\Rightarrow$ chiusa $\overset{\text{(suriettiva)}}{\Rightarrow}$ identificazione!)

$\boxed{\text{NOTA}}$: visto che un'omotetia complessa $y \mapsto \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$, include anche una rotazione (in generale), ~~allora che~~ (mentre $\mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ non è definito)

$|\mathbb{P}^0(\mathbb{C})| = 1$!

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \hat{\mathbb{R}} \cong S^1$!!

X sp. top. : X è primo-numerabile $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ ogni suo punto possiede un sistema fondamentale d'intorni numerabile ; X è secondo-numerabile o a base numerabile $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ ammette una base numerabile ; X è separabile $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ contiene un sottoinsieme denso numerabile.

(1) X a base numerabile $\Rightarrow$ X primo-numerabile e separabile !

[Sia $\mathcal{B}$ base numerabile di X : allora, $\forall x \in X$, $\{A \in \mathcal{B} \mid x \in A\}$ è un sist. fond. d'int. di x (numerabile) ! Inoltre X è separabile : $\forall B \in \mathcal{B}$, sia p_B un punto di B, per cui $\{p_B \mid B \in \mathcal{B}\}$ è palesemente denso (numerabile) !]

(2) Sottospazi di spazi a base numerabile sono a base numerabile. Prodotto di spazi a base numerabile è a base numerabile.

[$Y \subseteq X$, $\mathcal{B}$ base di X $\Rightarrow$ $\{Y \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ base di Y ! Poi $\mathcal{A}$ base di X e $\mathcal{B}$ base di Y $\Rightarrow$ $\mathcal{C} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ base di $X \times Y$!]

(3) In uno spazio a base numerabile, ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile !

[X con base num. $\mathcal{B}$ e ricop. aperto $\mathcal{A}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in X$, esistono $B_x \in \mathcal{B}$ e $U_x \in \mathcal{A}$ tali che $x \in B_x \subseteq U_x$, $\Rightarrow$ $\{B_x\}_{x \in X}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{B}$ (così come $\{U_x\}_{x \in X}$ lo è di $\mathcal{A}$!), per cui necessariamente numerabile : esiste $E \subseteq X$ numerabile tale che $\{B_x\}_{x \in X} =$

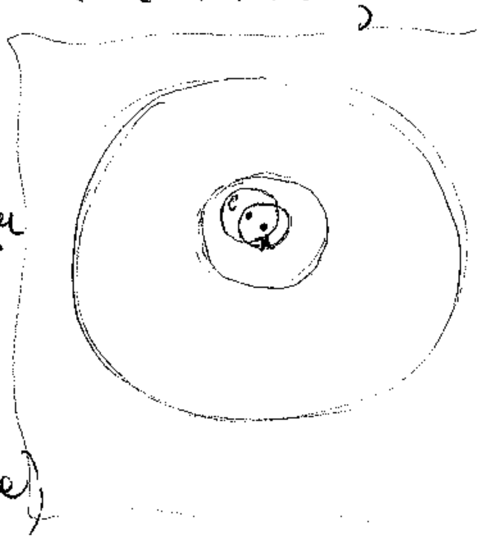
$= \{B_x\}_{x\in E}$, e allora è ovvio che pure $\{U_x\}_{x\in E}$ ricopre !

(4) Gli spazi metrici sono primo-numerabili

[(X,d) sp. metr. : $\forall x\in X$, $\{B(x,2^{-n})\}_{n\geq 0}$ è un suo sist. fond. d'int.!]

(5) Gli spazi metrici separabili sono a base numerabile!

[(X,d) sp. metr. e $E\subseteq X$ denso numerabile $\Rightarrow \mathcal{B} \doteq \{B(e,2^{-n})\}_{e\in E,\, n\geq 0}$ base (numerabile) di X ; infatti, $\forall x\in X$ e $\forall r>0$, $B(x,r)$ è unione di palle in $\mathcal{B}$: se $n\geq 0$ è tale che $B(x, \underbrace{2^{1-n}}_{(2\cdot 2^{-n})}) \subseteq B(x,r)$, per cui $B(x,2^{-n}) \subseteq B(x,r)$ (ovvio), allora considerato un $e\in E$ tale che $e\in B(x,2^{-n})$ è (per simmetria) $x\in B(e,2^{-n})$! Basta infine osservare che $B(e,2^{-n}) \subseteq B(x,r)$:



$B(e,2^{-n}) \subseteq B(x,2^{1-n})$ in quanto $d(y,e)<2^{-n} \Rightarrow d(y,x) \overset{(\text{dis. tr.})}{\leq} d(y,e)+d(e,x) < 2^{-n}+2^{-n} = 2^{1-n}$!

NOTA : per uno spazio primo-numerabile, si può supporre che il generico sist. fond. d'int. numerabile sia una catena discendente !

Prodotto di spazi separabili è spazio separabile.

$$\left[A \subseteq X \text{ e } B \subseteq Y \text{ densi} \Rightarrow A \times B \subseteq X \times Y \text{ denso } ! \right]$$

$\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ è primo-numerabile in questo spazio metrico, e anche perché è a base numerabile [visto che ciò vale per $\mathbb{R}$: considero gli (a_i, b_i) con $a_i < b_i$ razionali!] !

In effetti $\mathbb{R}^n$ è pure separabile [visto che $\mathbb{R}$ lo è, considerando $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$] !

X sp. top., $(a_n)_{n\ge1}$ succ. in X e $p\in X$: $(a_n)_{n\ge1}$ converge a p $\overset{DEF.}{\iff}$ $\forall$ intorno U di p, $\exists\, N\ge1$ tale che $a_m\in U$ per ogni $m\ge N$ ("appartenenza definitiva") ; p è punto di accumulazione di $(a_n)_{n\ge1}$ $\overset{DEF.}{\iff}$ $\forall$ intorno U di p e $\forall N\ge1$, esiste $m\ge N$ tale che $a_m\in U$ ("appartenenza frequente"). (È facile che gli U possono equiv. essere considerati come aperti (di una base)!)

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: è chiaro che $(a_n)_{n\ge1}$ convergente a p $\Rightarrow$ p punto di accumulazione di $(a_n)_{n\ge1}$!

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: in uno spazio $T2$ una successione converge al più ad un punto!

[Se per assurdo $(a_n)_{n\ge1}$ converge a p e a $q\neq p$, allora considerando $U\in\mathcal{I}(p)$ e $V\in\mathcal{I}(q)$ tali che $U\cap V=\emptyset$ allora avremmo che

$$\begin{cases} m\ge N \Rightarrow a_m\in U \\ m\ge M \Rightarrow a_m\in V \end{cases} \Rightarrow \text{se } m\ge \max\{N,M\}\text{, allora } a_m\in U\cap V! \text{]}$$

$\boxed{1}$ $(a_n)_{n\ge1}$ succ. in $A\subseteq X$ con punto di accumulazione p $\Rightarrow$ $p\in\overline{A}$ (in particolare vale così se $(a_n)_{n\ge1}$ converge a p!)

[Semplicemente perché ogni intorno di p interseca A ("grazie" agli elementi di $(a_n)_{n\ge1}$)!]

$\boxed{2}$ Esiste sottosuccessione $(a_{k(n)})_{n\ge1}$ di $(a_n)_{n\ge1}$ che converge a p $\Rightarrow$ p di accumulazione per $(a_n)_{n\ge1}$!

Osservo: $\forall$ intorno U di p, ho in effetti almeno un $a_m \in U$ per $m \geq 1$ arbitrariamente grande in quanto $(a_{k(n)})_{n\geq 1}$ finisce definitivamente in U (e $k : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ è strett. crescente)!

$\boxed{B}$ Per X primo-numerabile, $x \in X$ e $A \subseteq X$, sono equivalenti:

(1) esiste una successione in A convergente a x;

(2) x è punto di acc. per una succ. in A;

(3) $x \in \overline{A}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) è ben noto, e (2) $\Rightarrow$ (3) è ok! (3) $\Rightarrow$ (1): sapendo che ogni intorno di x interseca A, e considerato un sist. fond. d'int. numerabile $\{U_n\}_{n\geq 1}$ tale che $U_n \supseteq U_{n+1}$, ho $\forall n \geq 1$ un $a_n \in A \cap U_n$, e $(a_n)_{n\geq 1}$ converge quindi a x in quanto, $\forall$ intorno U di x, se $N \geq 1$ è tale che $U_N \subseteq U$, allora $a_m \in U_m \subseteq U_N \subseteq U$ $\forall m \geq N$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: considerate, $\forall m \geq 1$, le "code" $\{a_n \mid n \geq m\}$ di $(a_n)_{n\geq 1}$, e quindi i chiusi $C_m := \overline{\{a_n \mid n \geq m\}}$, è x di accumulazione di $(a_n)_{n\geq 1}$ $\Leftrightarrow$ $\bigcap_{m\geq 1} C_m \ni x$!

[$\forall m \geq 1$, $x \in C_m$ $\Leftrightarrow$ $\forall m \geq 1$ e $\forall$ intorno U di x, U interseca $\{a_n \mid n \geq m\}$!]

$\boxed{4}$ Su uno spazio compatto, ogni successione possiede punto di accum.!

X compatto e $(e_n)_{n\geq 1}$ in X; consideriamo i $C_m := \overline{\{e_n \mid n \geq m\}}$ $(\neq \phi !)$, essendo chiusi in X compatto sono e loro volta compatti, e inoltre $\{e_n \mid n\geq m\} \overset{(m+1>m)}{\supseteq} \{e_n \mid n \geq m+1\} \Rightarrow C_m \supseteq C_{m+1}$, $\overset{(\text{VISTO!})}{\Rightarrow} \bigcap_{m\geq 1} C_m \neq \phi$! $\square$

X compatto per successioni $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ ogni successione in X possiede una sottosuccessione convergente.

$\boxed{\text{NOTA}}$: Palesemente X comp. per succ. $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ ogni succ. in X possiede punto di accumulazione!

$\boxed{5}$ Per X primo-numerabile, ogni succ. in X possiede punto di accumulazione $\Leftrightarrow$ X compatto per successioni!

(In particolare X compatto primo-numerabile $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ X compatto per successioni!)

Siano $(e_n)_{n\geq 1}$ succ. in X e x un suo punto di acc.; preso un suo sist. fond. d'int. numerabile $\{U_n\}_{n\geq 1}$ con $U_n \supseteq U_{n+1}$, posso chiaramente definire $(k(m))_{m\geq 1}$ nel modo seguente: $k(1)$ tale che $e_{k(1)} \in V_1$, $k(2) :=$ il primo (intero) $> k(1)$ tale che $e_{k(2)} \in U_2$, e in generale $k(m) :=$ il primo intero $> k(m-1)$

tale che $a_{k(m)} \in U_m$. Allora $(a_{k(m)})_{m\ge1}$ converge a x: infatti, $\forall$ intorno U di x, se $N \ge 1$ è tale che $U_N \subseteq U$, allora $a_{k(m)} \in U_m \subseteq U_N \subseteq U$ $\forall\, m \ge N$! ◁

$\boxed{6}$ Per X a base numerabile, sono equivalenti:

(1) X è compatto;

(2) ogni successione in X possiede punto di accumulazione;

(3) X è compatto per successioni.

(1)$\Rightarrow$(2) è (4), mentre (2)$\Rightarrow$(3) è (5)! (3)$\Rightarrow$(1): sia per assurdo $\mathcal{A}$ un ricopr. aperto di X che non ammette sottoricopr. finiti; essendo X a base numerabile, come anche visto in precedenza, $\mathcal{A}$ ammette però un sottoricopr. numerabile $\{A_n\}_{n\ge1} \subseteq \mathcal{A}$, il quale a sua volta non può ovviamente ammettere sottoricopr. finiti: allora, $\forall n \ge 1$, esiste $a_n \in X \setminus \left(\bigcup_{h=1}^{n} A_h\right)$; allora, $(a_n)_{n\ge1}$ non ammette sottosucc. convergenti non ammettendo punto di accumulazione: infatti, $\forall\, k: \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$ strett. crescente e $\forall p \in X$, visto che ovviamente $p \in A_N$ (aperto!) per almeno un $N \ge 1$, uno A_N in questo (ovvio) $a_{k(n)} \notin A_N$ per ogni $k(n) \ge N$! ◁

(X, d) spazio metrico ($\not\exists T_2$ e (non numerabile!)) ; $(a_n)_{n \geq 1}$ in X di Cauchy $\overset{DEF.}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ tale che, $\forall n, m \geq N$, $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

$\boxed{\text{NOTA}}$: $(a_n)_{n \geq 1}$ convergente in X $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ di Cauchy (in X) !

$a_n \to p \in X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ tale che $d(a_n, x) < \varepsilon$ $\forall n \geq N$ ($U := B(x, \varepsilon)$!), $\Rightarrow \forall n, m \geq N$, $d(a_n, a_m) \leq$

$\leq d(a_m, x) + d(x, a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$!

(X, d) completo $\overset{DEF.}{\Leftrightarrow}$ ogni sua successione di Cauchy è in esso convergente.

(I) $(a_n)_{n \geq 1}$ di Cauchy : $(a_n)_{n\geq 1}$ ha punto di accumulazione $p \overset{(suc)}{\Rightarrow} a_n \to p$!

Infatti, $\forall \varepsilon > 0$, da un certo n in poi è $d(p, a_n) < \varepsilon$: in corrispondenza di tale ε $\underset{(Cauchy)}{\text{ho}}$ $M \geq 1$ tale che $n, m \geq M \Rightarrow$ $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$, e rispetto pure a tale M $\underset{(p\text{ d'acc.})}{\text{ho}}$ $N \geq M$ tale che $d(p, a_N) < \varepsilon/2$; in definitiva $\forall m \geq M$ ho $d(p, a_m) \leq d(p, a_N) + d(\underset{(=m)}{a_N}, a_m) < \varepsilon$!

(II) ogni spazio metrico compatto per successioni è completo.

Infatti ogni sua successione di Cauchy, ammettendo sottosucc. convergente, ammette almeno un punto di accumulazione, e quindi (I) converge! $\lrcorner$

III (X,d) spazio metrico completo e $A \subseteq X$: A è completo (rispetto alla metrica indotta) $\overset{\text{sse}}{\Leftrightarrow}$ A è chiuso!

($\Rightarrow$) Ogni successione a valori in A che converge ad un $a\ (\in \bar{A})$ è ovviamente di Cauchy, quindi (ip.) convergente per forza in A stesso!

($\Leftarrow$) Ogni successione di Cauchy in A lo è fortemente in X, quindi (ip.) è convergente in X ad un $a \in X$; ma tale successione è a valori in A, per cui $a \in \bar{A} \overset{(\text{ip.})}{=} A$! $\lrcorner$

$\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ è completo.

[$(a_n)_{n\geq 1}$ di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ $\overset{\text{(chiaro)}}{\Longrightarrow}$ $\exists N \geq 1$ tale che,

$\forall n \geq N$, $|a_n - a_N| < 1$ ($\Rightarrow |a_n| - |a_N| < 1$, ossia

$|a_n| < |a_N| + 1$, $\forall n \geq N$) : posto $R := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|\}$,

allora chiaramente $\{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R + 1\}$,

ossia la succ. è a valori in D; ma tale $D \subseteq \mathbb{R}^n$,

essendo palesemente chiuso e limitato, è un compatto:

ne segue che $(a_n)_{n\geq 1}$ debba possedere punto di accumulazione (in D),

e quindi $_{\text{(Cauchy)}}$ debba convergere (in D)! (In effetti $\mathbb{R}^n$ è

base numerabile $\Rightarrow$ D a base numerabile, per cui D compatto $\Leftrightarrow$ D

compatto per successioni, ed essendo metrico è completo!)]

X spazio topologico e $a, b \in X$: lo spazio dei cammini in X di estremi a e b è $\Omega(X,a,b) := \{\alpha : [0,1] \to X$ continue $|$ $\alpha(0) = a$ e $\alpha(1) = b\}$; $\Omega(X,a,a) =: \Omega(X,a)$.

(1) $\Omega(X,a) \neq \emptyset$: $1_a : [0,1] \to X$, $t \mapsto a$ è in $\Omega(X,a)$!

(2) $\Omega(X,a,b) \neq \emptyset \iff \Omega(X,b,a) \neq \emptyset$: infatti

$\alpha(t) : [0,1] \to X$ continua $\Rightarrow$ $\beta(t) := \alpha(1-t) : [0,1] \to X$ continua!

Resta quindi definito l'operatore (biiettivo) "di inversione"

$i : \Omega(X,a,b) \to \Omega(X,b,a)$, $i(\alpha)(t) := \beta(t) = \alpha(1-t)$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $i(i(\alpha)) = \alpha$!

(3) $\Omega(X,a,b) \neq \emptyset$ e $\Omega(X,b,c) \neq \emptyset \Rightarrow \Omega(X,a,c) \neq \emptyset$:

$\alpha(t) \in \Omega(X,a,b)$ e $\beta(t) \in \Omega(X,b,c)$ $\overset{\text{(infatti)}}{\Longrightarrow}$ $\gamma : [0,1] \to X$ data da

$\gamma(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{su } [0,1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{su } [1/2,1] \end{cases}$ è in $\Omega(X,a,c)$!

Resta quindi definito l'operatore "di giunzione"

$$\begin{aligned} * : \Omega(X,a,b) \times \Omega(X,b,c) &\to \Omega(X,a,c) \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \alpha * \beta \equiv \gamma \end{aligned}$$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$!

$$(i(\beta) * i(\alpha))(t) \doteq \begin{cases} i(\beta)(2t) & [0,1/2] \\ i(\alpha)(2t-1) & [1/2,1] \end{cases} = \begin{cases} \beta(1-2t) & [0,1/2] \\ \alpha(2-2t) & [1/2,1] \end{cases}, \text{e}$$

in effetti $i(\alpha * \beta)(t) \doteq (\alpha * \beta)(1-t) \doteq \begin{cases} \alpha(2-2t) & [1/2,1] \\ \beta(1-2t) & [0,1/2] \end{cases}$!

In altre parole, è $\forall a,b \in X$, $a \sim b \overset{\text{DEF.}}{\iff} \Omega(X,a,b) \neq \phi$ è una rel. d'eq. su X : indichiamo $\pi_0 := \pi$, quindi $X/\sim =: \pi_0(X)$, e chiamiamo le classi d'eq. le componenti connesse per archi di X ! (Ossia, $\forall a \in X$, $A \doteq [a] = \{b \in X \mid \Omega(X,a,b) \neq \phi\}$, tautologicamente connessa per archi !)

$\boxed{\text{NOTA}}$: X connesso per archi $\overset{\text{(ovvio)}}{\iff}$ $\pi_0(X) = \text{"}0\text{"}$ (ossia banale) !

$\boxed{4}$ X loc. connesso per archi $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ ogni punto di X ammette un intorno connesso per archi $\Rightarrow$ le componenti conn. per archi di X sono esattamente le sue componenti connesse (quindi chiuse e aperte) !!

Sia $A \subseteq X$ comp. conn. per archi ; basta provare che A è sia aperta sia chiusa : se (necessariamente) $A = [a]$, allora infatti

$a \in A \cap C(a) \Rightarrow A \cap C(a) \neq \emptyset \Rightarrow C(a) \subseteq A$, ma da A connesso $\Rightarrow C(a) = A$! In effetti poi basta che A sia aperto, perché è classe d'eq.; allora, $\forall\, b \in A$, se $U \in \mathcal{U}(b)$ connesso per archi, allora semplicemente $U \subseteq A$: $\forall\, c \in U$, certamente c'è $\beta \in \Omega(X, b, c)$; ma essendo $b \in A$ c'è pure $\alpha \in \Omega(X, a, b)$: $\alpha \# \beta \in \Omega(X, a, c)$! !

$\boxed{\text{NOTA}}$: qui "cammino" in X può essere effettivamente considerato come definito su $[r,s]$! ($\forall\, \alpha : [r,s] \to X$ continua $(r<s)$, otteniamo $\tilde{\alpha} \in \Omega(X, \alpha(r), \alpha(s))$ con la "parametrizzazione standard" di α : $\forall\, t \in [0,1]$, $\tilde{\alpha}(t) := \alpha((1-t)r + ts)$!)

$f : X \to Y$ continua $\overset{\text{ovvio}}{\Rightarrow}$ se $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, allora $f\alpha \in \Omega(\underset{(f(X))}{Y}, f(a), f(b))$; considerando quindi il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "(\text{continua})"'] \arrow[d, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_0 \circ f"] & Y \arrow[d, "\pi_0"] \\ \pi_0(X) \arrow[r, dashed, "\pi_0(f)"'] & \pi_0(Y) \end{tikzcd}$$

, è $a \sim b \Rightarrow [f(a)] = [f(b)]$, ossia $\pi_0 \circ f$ è costante sulle classi d'eq. di X : essendo pure continue (è ovvio), deduco che $\exists!\ \pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ continua e tale che $\pi_0 \circ f = \pi_0(f) \circ \pi_0$ (è ovvio!), cioè $[x] \xmapsto{\pi_0(f)} [f(x)]$!

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: $Y := X$ e $f := id_X \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$!

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ continue $\Rightarrow \pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$!

$[x] \xmapsto{\pi_0(g\circ f)} [g(f(x))]$, e ora uso l'unicità! in quanto anche $[x] \xmapsto{\pi_0(g)\circ\pi_0(f)} \pi_0(g)[f(x)] =$
$= [g(f(x))]$!

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_0"] & Z \arrow[d, "\pi_0"] \\ \pi_0(X) \arrow[r, "\pi_0(f)"'] \arrow[rr, bend right, "\pi_0(g\circ f)"'] & \pi_0(Y) \arrow[r, "\pi_0(g)"'] & \pi_0(Z) \end{tikzcd}$$

$\{K_n\}_{n\geq 1}$ esaustione in compatti di X : $\forall n \geq 1$, l'inclusione $i : X \setminus K_{n+1} \to X \setminus K_n$ è tale che $\pi_0(i) : \pi_0(X\setminus K_{n+1}) \to \pi_0(X \setminus K_n)$ sia una biiezione (ossia lo stesso per $\pi_0(X\setminus K_m) \to \pi_0(X\setminus K_n)$ con $m<n$!) $\Rightarrow$ le cardinalità dei $\pi_0(X\setminus K_n)$ non dipende dalle particolari esaustioni in compatti di X (ossia è "un invariante topologico") !

Se infatti $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots$ è un'altra esaustione in compatti di X, visto che ogni compatto di X è contenuto in un certo compatto dell'esaustione, è ovvio (ovvio) $H_n \subseteq K_n \subseteq H_k \subseteq K_m$ per opportuni $n < k$ e $n < m$: dunque le inclusioni

$$X \setminus K_m \xrightarrow{i} X \setminus H_k \xrightarrow{j} X \setminus K_n \xrightarrow{k} X \setminus H_n$$

inducono

$$\begin{tikzcd} \pi_0(X\setminus K_m) \arrow[r, "\pi_0(i)"] \arrow[rr, bend left, "(\pi_0(j)\circ\pi_0(i))"] & \pi_0(X\setminus H_k) \arrow[r, "\pi_0(j)"] \arrow[rr, bend right, "(\pi_0(k)\circ\pi_0(j))"'] & \pi_0(X\setminus K_n) \arrow[r, "\pi_0(k)"] & \pi_0(X\setminus H_n) \end{tikzcd}$$

e in conclusione $\begin{cases} \pi_0(j)\circ\pi_0(i) \text{ biiettiva} \\ \pi_0(k)\circ\pi_0(j) \text{ biiettiva} \end{cases} \Rightarrow \pi_0(j)$ biiettiva!

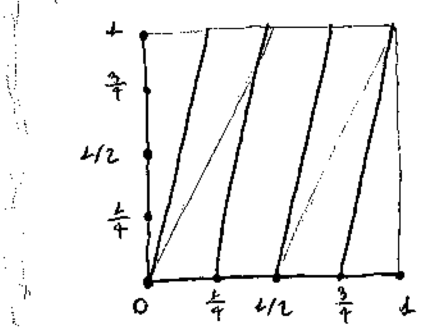
(In effetti: $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "(g\circ f)"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "(h\circ g)"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$ con $\begin{cases} g\circ f \text{ biiettiva} \\ h\circ g \text{ iniettiva} \end{cases}$ ($\Rightarrow g$ iniettiva) $\Rightarrow f$ biiettiva! $\begin{cases} g\circ f \text{ iniettiva} \\ h\circ g \text{ iniettiva} \end{cases} \Rightarrow f, g$ iniettive; f è pure suriettiva in quanto, $\forall b \in B$, $g(b) \in C$ e $g\circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ $\exists a \in A$ tale che $\underbrace{(g\circ f)(a)}_{g(f(a))} = g(b) \overset{(g \text{ in.})}{\Rightarrow} b = f(a)$!)

$f: X \to Y$ omeomorfismo $\Rightarrow \pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ omeo.! (con $\pi_0(f)^{-1} = \pi_0(f^{-1})$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_0"] & Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\pi_0"] & X \arrow[d, "\pi_0"] \\ \pi_0(X) \arrow[r, dashed, "\pi_0(f)"'] & \pi_0(Y) \arrow[r, dashed, "\pi_0(f^{-1})"'] & \pi_0(X) \end{tikzcd}$$

Come visto, $id_{\pi_0(X)} = \pi_0(id_X) = \pi_0(f \circ f^{-1}) = \pi_0(f) \circ \pi_0(f^{-1})$!

$\pi_0(\{m\}) = \{\{m\}\}$, $\Rightarrow |\pi_0(\{m\})| = 1$!



$\boxed{\text{NOTA}}$: $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$ e $\gamma \in \Omega(X, c, d)$ $\Rightarrow$ $\alpha * (\beta * \gamma)$, $(\alpha * \beta) * \gamma$ $\in \Omega(X, a, d)$, e rispettivamente (ovvero dalle def.)

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & [0, 1/2] \\ \beta(4t-2) & (1/2, 3/4] \\ \gamma(4t-3) & (3/4, 1] \end{cases}$$, mentre

$$(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & [0, 1/4] \\ \beta(4t-1) & (1/4, 1/2] \\ \gamma(2t-1) & (1/2, 1] \end{cases}$$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\forall \alpha \in \Omega(X, a, b)$, $1_a * \alpha(t) = \begin{cases} a & [0, 1/2] \\ \alpha(2t-1) & (1/2, 1] \end{cases}$

e $\alpha * 1_b(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & [0, 1/2] \\ b & (1/2, 1] \end{cases}$, mentre $\alpha * i(\alpha)(t) =$

$= \begin{cases} \alpha(2t) & [0, 1/2] \\ \alpha(2-2t) & (1/2, 1] \end{cases}$ $\left(\text{e} \quad i(\alpha) * \alpha(t) = \begin{cases} \alpha(1-2t) & [0, 1/2] \\ \alpha(2t-1) & (1/2, 1] \end{cases} \right)$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $f: X \to Y$ continua $\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \Omega(X, a, b)$ e

($\Rightarrow f(\alpha) \in \Omega(Y, f(a), f(b))$!)

$\forall \beta \in \Omega(X,b,c)$ $\big(f(\beta) \in \Omega(Y, f(b), f(c))!\big)$, è evidente che se $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$ e $i(f(\alpha)) = f(i(\alpha))$!

$$\Omega(X \times Y, (a,b), (a',b')) \underset{(\text{ovvio})}{=} \Omega(X,a,a') \times \Omega(Y,b,b') \quad (\alpha = (\alpha_1,\alpha_2))\ !$$

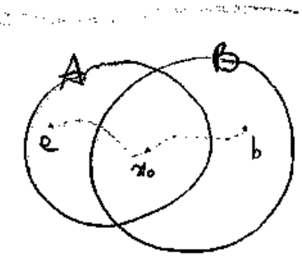
Inoltre $(1_a, 1_b) \overset{(\text{ovvio})}{=} 1_{(a,b)}$ e $(i(\alpha_1), i(\alpha_2)) \overset{(\text{ovvio})}{=} i((\alpha_1,\alpha_2))$,

mentre $\beta = (\beta_1,\beta_2) \in \Omega(X \times Y, (a',b'), (a'',b'')) \Rightarrow$

$$(\alpha_1,\alpha_2) * (\beta_1,\beta_2) \overset{(\text{ovvio})}{=} (\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2)\ !$$

$A, B \subseteq X$: A, B connessi per archi con $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B$ conn. per archi!

[Posso supporre A, B non ($\subseteq$-confrontabili; $\forall a,b \in A \cup B$, posso supporre $a \in A \setminus B$ e $b \in B \setminus A$; se scelgo $x_0 \in A \cap B$, $\begin{cases} a \in A \\ x_0 \in A \end{cases} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \Omega(A, a, x_0)$, e allo stesso modo $\begin{cases} b \in B \\ x_0 \in B \end{cases} \Rightarrow \exists\, \beta \in \Omega(B, x_0, b)$: $\alpha * \beta \in \Omega(A \cup B, a, b)$!]



Ogni aperto connesso di uno spazio loc. connesso per archi è connesso per archi! [È a sua volta loc. conn. per archi, dunque le sue comp. connesse coincidono con le sue comp. connesse per archi!]

$\Rightarrow$ In particolare, uno spazio connesso e loc. conn. per archi è conn. per archi!

Y loc. conn. per archi $\Rightarrow$ ogni $y \in Y$ ammette un intorno aperto connesso (per archi)!

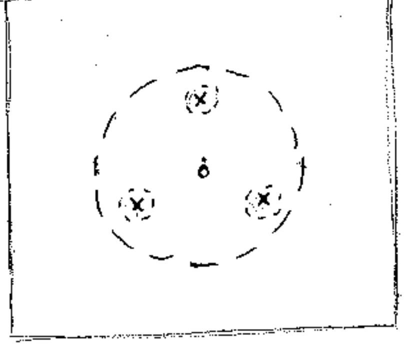
[$y \in A$ aperto $\subseteq U$ conn. per archi; ma pure A è loc. conn. per archi: prendo allora la componente connessa $W \subseteq A$ di y in A!]

$\forall\, n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ è loc. connesso per archi !

Infatti lo è ogni suo aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $\forall x \in A$, se $r>0$ è tale che $B(x,r) \subseteq A$, allora $\{B(x,t)\}_{\substack{0<t<r,\\ t\downarrow 0}}$ è un s.f.d.i. connessi per archi di x !

---

h, k interi positivi : $h \neq k \Rightarrow \forall\, m \geq 2$, $\mathbb{R}^m \setminus \{h \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m \setminus \{k \text{ punti}\}$!



Siano $p_1, \dots, p_h$ h punti (distinti) di $\mathbb{R}^m$ e consideriamo $\mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}$ (che è un aperto di $\mathbb{R}^m$!) : se $\forall n \geq 1$

$K_n := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \leq n,\ |x - p_i| \geq 1/n \ \forall\, 1 \leq i \leq h\}$, allora

$K_n \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\} \subsetneq \mathbb{R}^m$ e K_n compatto di $\mathbb{R}^m$ (perché limitato e chiuso!) $\Rightarrow$ K_n compatto di $\mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}$; è anzi evidente che $\{K_n\}_{n \geq 1}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}$ $\left(n < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}\right)$! Ora, è chiaro che da un certo n "abbastanza grande" in poi $(\mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}) \setminus K_n$

possiede esattamente $h+1$ componenti connesse per archi, che coincidono con le componenti connesse ($\mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}$ aperto di $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ è loc. conn. per archi!) : c'è quindi una naturale biezione

$\pi_0(X \setminus K_{n+1}) \to \pi_0(X \setminus K_n)$, $X := \mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_h\}$, e

allora $h+1$ è un invariante topologico di X!

Dunque, se per assurdo esistesse omeo. $f : \mathbb{R}^m \setminus \{h \text{ punti}\} =: X \to$

$\to \mathbb{R}^m \setminus \{k \text{ punti}\} =: Y$, allora $\underset{\text{(visto)}}{} \{f(K_n)\}_{n \geq 1}$ è esaustione in compatti

di $\mathbb{R}^m \setminus \{k \text{ punti}\} = Y$, e inoltre $\underset{\text{(ovvio)}}{}$ sarebbe omeo. $f|_{X \setminus K_n} : X \setminus K_n \to$

$\to f(X \setminus K_n) \underset{(2)}{=} Y \setminus f(K_n)$: per n "abbastanza grande" ho l'assurdo

che $X \setminus K_n$ ha $h+1$ conf. conn., mentre $Y \setminus f(K_n)$ ne ha

$k+1$ ($\neq h+1$) !! $\square$

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è anche, se connesso, connesso per archi!

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è certamente loc. conn. per archi, per cui ha comp. connesse per archi coincidenti con le proprie comp. connesse! $\square$

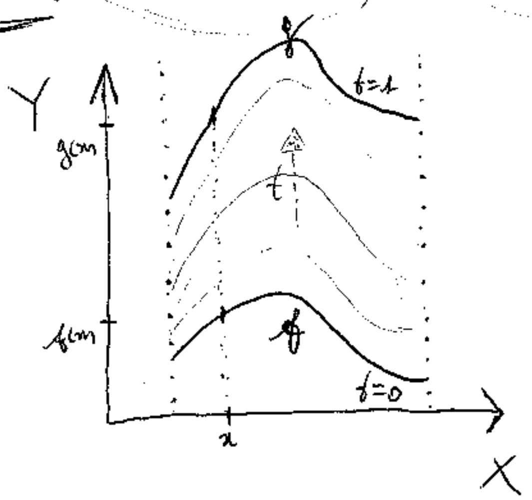
X, Y sp. top. e $\mathcal{C}(X,Y) := \{f: X \to Y \mid f \text{ continue}\}$:

«$\forall f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f \sim g \overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow} \exists\, F: X \times [0,1] \to Y$

continua tale che $\begin{cases} F(\cdot, 0) = f(\cdot) \\ F(\cdot, 1) = g(\cdot) \end{cases}$ » Costruisce una rel.

di eq. su $\mathcal{C}(X,Y)$! Se $f \overset{F}{\sim} g$ diciamo che f è omotopa a

g grazie alla omotopia F



(NOTA : $\forall t \in [0,1]$, $F(\cdot, t) \in \mathcal{C}(X,Y)$!)
(mentre, $\forall a \in X$, $F(a, \cdot) \in \Omega(Y, f(a), g(a))$!)

$f \sim f$ grazie a $F: X \times [0,1] \to Y$, $(x,t) \longmapsto f(x)$!

$f \sim g$ grazie a $F(x,t) \Rightarrow g \sim f$ grazie a $F(x, 1-t)$!

$f \overset{F}{\sim} g$ e $g \overset{G}{\sim} h \Rightarrow f \overset{H}{\sim} h$, con $H: X \times [0,1] \to Y$

data da $H(x,t) \doteq \begin{cases} F(x, 2t) & \text{per } t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t-1) & \text{per } t \in (1/2, 1] \end{cases}$!

(1) $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$ omotope $\Rightarrow \pi_0(f) = \pi_0(g)$ $(\in \mathcal{C}(\pi_0(X), \pi_0(Y)))$!

$\pi_0(f) = \pi_0(g) \overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X$, $f(x)$ e $g(x)$ sono nelle stesse componenti connesso per archi; ma infatti, $\forall x \in X$, se $f \overset{F}{\simeq} g$ allora $F(x, \cdot) \in \Omega(Y, f(x), g(x))$! $\rbrack$

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_0"'] \arrow[rr, bend left=60, "(g_1 \circ f_1)"] \arrow[rr, bend right=60, "(g_0 \circ f_0)"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_0"'] & Z \end{tikzcd}$$

$\left.\begin{matrix} f_0 \simeq f_1 \\ g_0 \simeq g_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$!

(In particolare, se $g_0 \simeq g_1$ e $f_1 = f_0$, allora $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$!)

$\lbrack$ $f_0 \overset{F(x,t)}{\simeq} f_1$ e $g_0 \overset{G(y,t)}{\simeq} g_1 \Rightarrow g_0 \circ f_0 \overset{H(x,t)}{\simeq} g_1 \circ f_1$ con $H: X \times [0,1] \to Z$ data da $H(x,t) := G(F(x,t), t)$! $\rbrack$

(3) $f_0, f_1 \in C(X,Y)$ omotope e $g_0, g_1 \in C(Z,W)$ omotope $\Rightarrow f_0 \times g_0,\ f_1 \times g_1$ ($\in C(X \times Z, Y \times W)$) omotope!

$\lbrack$ $f_0 \overset{F(x,t)}{\simeq} f_1$ e $g_0 \overset{G(z,t)}{\simeq} g_1 \Rightarrow f_0 \times g_0 \overset{H((x,z),t)}{\simeq} f_1 \times g_1$, con $H: (X \times Z) \times [0,1] \to Y \times W$ data da $H((x,z),t) :=$

$:= (F(x,t), G(z,t))$! $\rbrack$

DEF.

$f \in \mathcal{C}(X,Y)$ è una equivalenza omotopica tra X e Y $\Leftrightarrow$

esiste $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ tale che $\begin{cases} g \circ f \sim id_X \\ f \circ g \sim id_Y \end{cases}$, e in tal caso

X e Y sono omotopi o omotopicamente equivalenti o con lo stesso tipo di omotopia! (Notiamo che questo concetto estende quello di omeomorfismo!)

NOTA: "L'inversa omotopica" g di f è unica a meno di omotopia! [Se infatti $h \in \mathcal{C}(Y,X)$ è tale che $\begin{cases} h \circ f \sim id_X \\ f \circ h \sim id_Y \end{cases}$,

allora $h = h \circ id_Y \sim h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g \sim id_X \circ g = g$!]

(I) $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ equivalenza omotopica tra X e Y $\Rightarrow$ $\pi_0(f)$ è omeomorfismo! (Con $\pi_0(f)^{-1} = \pi_0(g)$, g inversa omotopica di f)

[$\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f) \overset{\text{(visto!)}}{=} \pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$, e allo stesso modo $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = \pi_0(id_Y) = id_{\pi_0(Y)}$!]

(II) La relazione di omotopia tra sp. top. soddisfa le tre proprietà di una relazione d'equivalenza!

[X omotopo a X grazie a $f := id_X$! X omotopo a Y grazie a f

$\Rightarrow$ Y omotopo a X grazie all'inversa omotopica g di f ! Infine,

"$X \overset{h_1}{\sim} Y \overset{h_2}{\sim} Z$" $\Rightarrow$ "$X \overset{h_2 \circ h_1}{\sim} Z$" :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_1"] \arrow[rr, bend left, dashed, "(h_2\circ h_1)"] & Y \arrow[l, bend left, "g_1"] \arrow[r, "h_2"] & Z \arrow[l, bend left, "g_2"] \arrow[ll, bend left, dashed, "(g_1\circ g_2)"] \end{tikzcd}$$

infatti, se g_i è l'inv. omotop. di h_i, $i \in \{1,2\}$, allora $g_1 \circ g_2 \in \mathcal{C}(Z,X)$ è tale che $(g_1 \circ g_2) \circ (h_2 \circ h_1) = g_1 \circ \underbrace{(g_2 \circ h_2)}_{(\sim id_Y !)} \circ h_1 \sim g_1 \circ h_1 \sim id_X$,

e analogamente $(h_2 \circ h_1) \circ (g_1 \circ g_2) \sim h_2 \circ g_2 \sim id_Z$!

(III) X omotopo a Y e Z omotopo a W $\Rightarrow$ $X \times Z$ omotopo a $Y \times W$!

$h_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$ eq. omo. e $h_2 \in \mathcal{C}(Z,W)$ eq. omo., con inverse omotopiche $g_1 \in \mathcal{C}(Y,X)$ e $g_2 \in \mathcal{C}(W,Z)$ rispettivamente, $\Rightarrow$ $h_1 \times h_2 \in \mathcal{C}(X \times Z, Y \times W)$ è equiv. omotop. (e con inversa omotop. $g_1 \times g_2$ $(\in \mathcal{C}(Y \times W, X \times Z))$) : infatti

$(g_1 \times g_2) \circ (h_1 \times h_2) \overset{(\text{ovvio})}{=} (g_1 \circ h_1) \times (g_2 \circ h_2) \overset{(\text{visto!})}{\sim} (id_X) \times (id_Z) \overset{(\text{ovvio})}{=} id_{(X \times Z)}$, e analogamente $(h_1 \times h_2) \circ (g_1 \times g_2) \sim id_{(Y \times W)}$!

X connesso per archi omotopo a Y $\Rightarrow$ Y connesso per archi !

X sp. top. <u>Contraibile</u> $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ X e' omotopo "al punto" (cioe' al singoletto) :

esistono $f : X \to \{x_0\}$ e $g : \{x_0\} \to X$ (sicuramente continue!!)

tali che $\begin{cases} g \circ f \sim id_X \\ f \circ g \sim id_{\{x_0\}} \end{cases}$ $(x_0 \in X)$

$\boxed{1}$ X contraibile $\Rightarrow$ X connesso per archi !

[$f : X \to \{x_0\}$ equiv. omotop. $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(\{x_0\})$ e' biiettiva, per cui $|\pi_0(X)| = |\pi_0(\{x_0\})| = 1$!]

$\boxed{2}$ X contraibile $\Longleftrightarrow$ id_X e' omotopa ad un'appl. costante!

[$(\Rightarrow)$ Ovvio : $id_X \sim g \circ f$, e g costante $\Rightarrow$ $g \circ f$ costante !

$(\Leftarrow)$ Se id_X e' omotopa a $f : X \to \{x_0\} \subseteq X$, allora banalmente prendo $g : \{x_0\} \to X$, $x_0 \mapsto x_0$ ($g := i_{\{x_0\}}$!) per avere

$\begin{cases} g \circ f = f \sim id_X \\ f \circ g = id_{\{x_0\}} \end{cases}$!]

$\boxed{3}$ Prodotto di contraibili e' contraibile.

["$X \sim \{x_0\}$" e "$Z \sim \{z\}$" $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ $X \times Z \sim \{x_0\} \times \{z\} = \{(x_0, z)\}$!]

X sp. top. e $Y \subseteq X$ sottosp. : Y è un retratto di X

$\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ esiste $r: X \to Y$ continua e tale che $r|_Y = id_Y$

(r "retrazione" di X su Y) ; Y è un retratto per deformazione (forte) di X $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ esiste $R: X \times [0,1] \to X$ continua e tale che

$$\begin{cases} (1) \; R(x,0) \in Y, \text{ e } R(x,1) = x, \; \forall x \in X ; \\ (2) \; R(y,t) = y \quad \forall y \in Y \text{ e } \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

. (R "deformazione" di X su Y)

$\boxed{\text{NOTA}}$: Y retratto per deformazione di X $\Rightarrow$ Y retratto di X !

$R: X \times [0,1] \to X$ deformazione di X su Y $\Rightarrow$ $r: X \to Y$ tale che $R(x,0) = i_Y(r(x))$ è chiaramente retrazione di X su Y!

$\boxed{\text{I}}$ $Y \subseteq X$ retratto per deformazione di X $\Rightarrow$ Y e X sono omotopi, con equivalenza omotopica i_Y !

Infatti $i_Y \in \mathcal{C}(Y,X)$ ha inversa omotopica $r \in \mathcal{C}(X,Y)$, dove r è la retrazione di X su Y associata alla deformazione R di X su Y, ossia tale che $R(\cdot,0) = (i_Y \circ r)(\cdot)$: da una parte semplicemente $r \circ i_Y \overset{\text{(ovvio)}}{=} id_Y$; d'altra parte $i_Y \circ r$

è omotopa a id_X perché (e però a $R : X \times [0,1] \to X$: è continua e tale che $\begin{cases} R(\cdot, 0) = (i_Y \circ r)(\cdot) \\ R(\cdot, 1) = id_X(\cdot) \end{cases}$ (totalmente)! $\square$

$\forall n \geq 1$, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ sottosp. convesso $\Rightarrow$ due qualsiasi funzioni continue a valori in Y sono omotope!

$\forall X$ sp. top. e $\forall f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f \overset{F}{\sim} g$ con $F: X \times [0,1] \to Y$ data da $F(x,t) := (1-t)f(x) + t g(x)$!

In particolare, tutti i sottoinsiemi convessi ($\neq \emptyset$) degli $\mathbb{R}^n$ sono fra loro omotopi!!

$\forall X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ convessi ($\neq \emptyset$), prendo $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ funzioni costanti qualsiasi: allora certamente $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ e pure $g \in \mathcal{C}(Y,X)$, ed avremo ovviamente $g \circ f \in \mathcal{C}(X, X)$ ($\ni id_X$) e $f \circ g \in \mathcal{C}(Y,Y)$ ($\ni id_Y$). Ma (per il risultato prec.) $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$!

($\forall n \geq 1$,) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow$ (ovvio) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ stellato rispetto ad un suo $p \in A$ $\Rightarrow$ $\{p\}$ è un retratto per deformazione di A $\Rightarrow$ (A è omotopo a $\{p\}$, quindi è contraibile!)

$R: A \times [0,1] \to A$, $R(x,t) := (1-t)p + tx$ è facilmente una deformazione di A in $\{p\}$!

S^n è, $\forall n \geq 1$, un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (per cui risultano omotopi!) : considero $R : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$!

$$(x,t) \longmapsto (1-t)\frac{x}{|x|} + tx$$

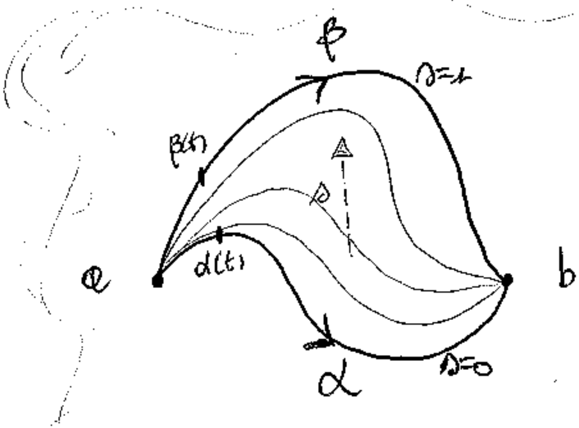
X spazio topologico e $a,b \in X$: « $\forall\, \alpha,\beta \in \underset{(\subsetneq C([0,1],X))}{\Omega(X,a,b)}$,

$\alpha \sim \beta \overset{DEF}{\iff} \exists\, F : [0,1]_t \times [0,1]_s \to X$ continua tale che

$$\begin{cases} (1) \begin{cases} F(\cdot,0) = \alpha(\cdot) \\ F(\cdot,1) = \beta(\cdot) \end{cases} ; \\ \\ (2) \begin{cases} F(0,\cdot) = a \\ F(1,\cdot) = b \end{cases} ; \end{cases}$$

» definisce una rel.

d'eq. su $\Omega(X,a,b)$! Per $\alpha \overset{F}{\sim} \beta$ diciamo che α e β sono cammini omotopi grazie alla omotopia di cammini F.



$\boxed{\text{NOTA1}}$: α,β omotopi come cammini $\overset{(ovvio)}{\Rightarrow}$ α,β omotope come applicazioni (continue)!

$\boxed{\text{NOTA2}}$: $\forall\, s \in [0,1]$, $F(\cdot,s) \in \Omega(X,a,b)$!

[$\alpha \sim \alpha$ grazie a $F : [0,1]\times[0,1] \to X$, $(t,s) \mapsto \alpha(t)$! $\alpha \overset{F(t,s)}{\sim} \beta \Rightarrow$

$\overset{F(t,1-s)}{\Rightarrow} \beta \sim \alpha$! $\alpha \overset{F}{\sim} \beta$ e $\beta \overset{G}{\sim} \gamma \Rightarrow \alpha \overset{H}{\sim} \gamma$ con H :

$[0,1]\times[0,1] \to X$ data da $H(t,s) := \begin{cases} F(t,2s) & s \in [0,1/2] \\ G(t,2s-1) & s \in (1/2,1] \end{cases}$!]

(1) $\alpha,\alpha' \in \Omega(X,a,b)$ cammini omotopi $\Rightarrow$ $i(\alpha), i(\alpha') \in \Omega(X,b,a)$

cammini omotopi!

$\left[\ \alpha \overset{F(t,s)}{\sim} \alpha' \Rightarrow i(\alpha) \overset{F(1-t,s)}{\sim} i(\alpha')\ !\ \right]$

(2) $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$ c. omotopi e $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$ c. omotopi

$\Rightarrow \alpha * \beta,\ \alpha' * \beta'$ $(\in \Omega(X, a, c))$ c. omotopi!

$\left[\ \alpha \overset{F}{\sim} \alpha'$ e $\beta \overset{G}{\sim} \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \overset{H}{\sim} \alpha' * \beta'$ con $H : [0,1] \times [0,1] \to X$

data da $H(t,s) \doteq \begin{cases} F(2t, s) & t \in [0, 1/2] \\ G(2t-1, s) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$! $\Big]$

(3) $f : X \to Y$ continua : $\forall\, \alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ $\alpha \sim \beta$
$(\Rightarrow f(\alpha), f(\beta) \in \Omega(Y, f(a), f(b))!)$

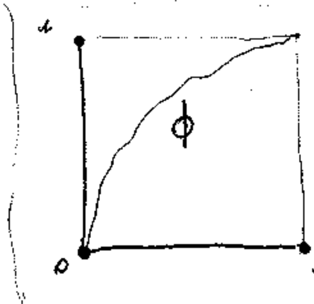
$\Rightarrow f(\alpha) \sim f(\beta)$!

$\left[\ \alpha \overset{F}{\sim} \beta \Rightarrow f(\alpha) \overset{f(F)}{\sim} f(\beta)\ !\ \right]$

(4) $\alpha \in \Omega(X, a, b)$: $\phi : [0,1] \to [0,1]$ continua e con

$\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$ $(\Rightarrow \alpha(\phi) \in \Omega(X, a, b)!)$ $\Rightarrow$

$\alpha \sim \alpha(\phi)$!



(ϕ "cambio di parametro")

$\Big[$ Considero infatti $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ data da

$F(t,s) := \alpha(\underbrace{s\phi(t) + (1-s)t}_{\in [0,1]!})$!! $\Big]$

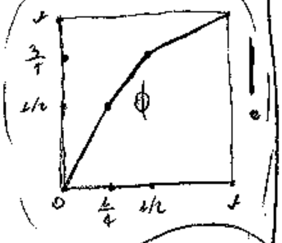
$(\phi(t) \le 1$ (; $\phi(t) \ge t \Leftrightarrow t \le \phi(t)$ ($)$

(5) * (di giunzione) è associativo a meno di omotopie di cammini !!

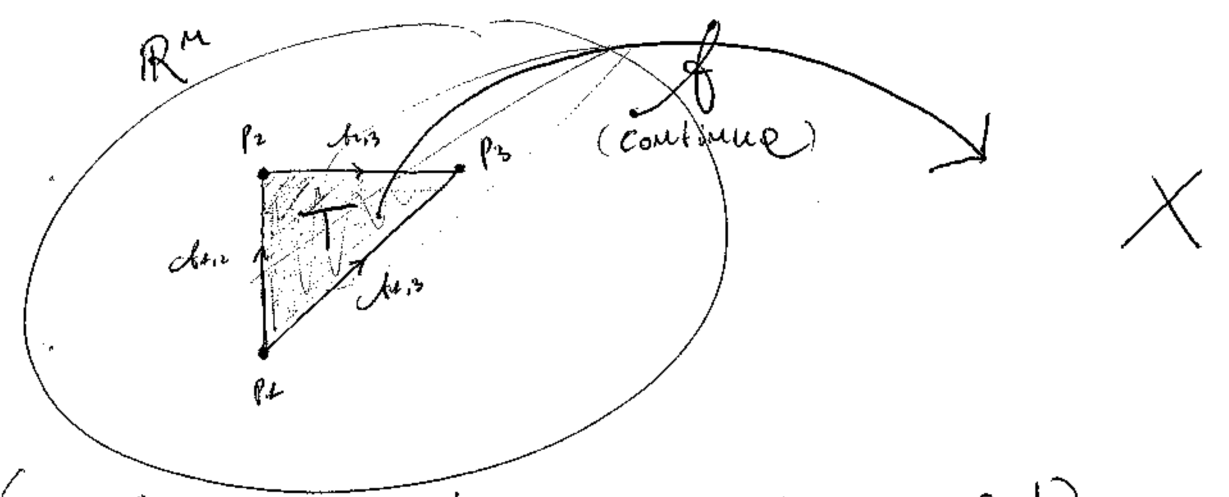
[$\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$ e $\gamma \in \Omega(X, c, d)$ $\Rightarrow$

$\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$ in quanto, ricordando le loro espressioni "analitiche", è $\forall\, t \in [0,1]$, $(\alpha * \beta) * \gamma(t) =$

$= \alpha * (\beta * \gamma)(\phi(t))$ con $\phi(t) := \begin{cases} 2t & [0, 1/4] \\ t + \frac{1}{4} & [1/4, 1/2] \\ \frac{t+1}{2} & [1/2, 1] \end{cases}$



(6)



($T = \{t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0$ e $t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$!)
("combinazioni convesse" dei p_i!!)

$\sigma_{i,j} : [0,1] \to X$ data da $\sigma_{i,j}(t) := f((1-t)p_i + t p_j)$ ($\in$

$\in \Omega(X, f(p_i), f(p_j))$!) $\Rightarrow$ $\sigma_{1,3} \sim \sigma_{1,2} * \sigma_{2,3}$!

[Considero infatti $F : [0,1] \times [0,1] \to X$, $F(t,s) := f(q(t,s))$, con $q : [0,1] \times [0,1] \to T$ data da

$$q(t,s) := \begin{cases} (1-t-ts)\,p_1 + (2ts)\,p_2 + (t-ts)\,p_3 & \forall t \in [0,1/2] \\ (1-t-s+ts)\,p_1 + (2(1-t)s)\,p_2 + (t-s+ts)\,p_3 & \forall t \in (1/2,1] \end{cases}$$

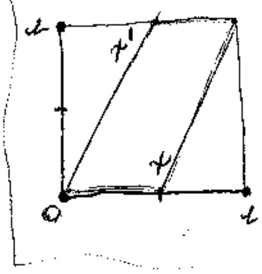
(che chiaramente è in T e continua!) !!

(17) $\forall \alpha \in \Omega(X,e,b)$, $\begin{cases} [a] & \alpha \sim 1_e * \alpha \sim \alpha * 1_b \\ [b] & 1_e \sim \alpha * i(\alpha) \end{cases}$!

[a] Semplicemente $1_e * \alpha(t) = \alpha(\varphi(t))$ con $\varphi(t) := \begin{cases} 0 & [0,1/2] \\ 2t-1 & [1/2,1] \end{cases}$

e $\alpha * 1_b(t) = \alpha(\varphi'(t))$ con $\varphi'(t) := \begin{cases} 2t & [0,1/2] \\ 1 & [1/2,1] \end{cases}$,

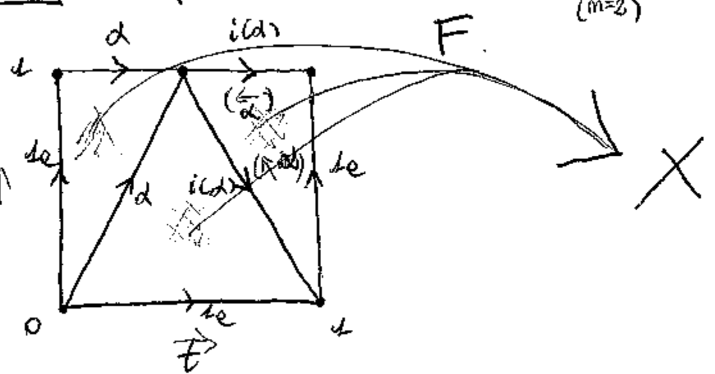
come è evidente!



[b] $1_e \overset{F}{\sim} \alpha * i(\alpha)$ dove $F : [0,1]\times[0,1] \to X$ è

$$F(t,s) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le s/2 \\ \alpha(s) & s/2 \le t \le 1-s/2 \\ \alpha(2-2t) & 1-s/2 \le t \le 1 \end{cases}$$!

NOTA 1: potrei anche usare $(6)_{(n=2)}$ in base al diagramma



(immediato!) !!

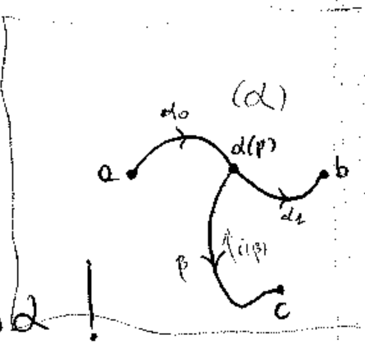
$\boxed{\text{NOTA 2}}$: con un procedimento ancora migliore, possiamo vedere $[0,1]$ come un triangolo degenere di $\mathbb{R}$ di vertici $p_1, p_2, p_3 \in \{0,1\}$, non tutti uguali tra loro, per poi applicare (6) e $\alpha : [0,1] \to X$ ottenendo (subito!)

p_1	p_2	p_3	omotopie di c. (ottenute)
0	0	1	$\alpha \sim 1_a * \alpha$
0	1	1	$\alpha \sim \alpha * 1_b$
0	1	0	$1_a \sim \alpha * i(\alpha)$
1	0	1	$1_b \sim i(\alpha) * \alpha$
1	1	0	$i(\alpha) \sim 1_b * i(\alpha)$
1	0	0	$i(\alpha) \sim i(\alpha) * 1_a$

!

(8) $\alpha \in \Omega(X,a,b)$ e $p \in [0,1]$: $\begin{cases} \alpha_0(t) := \alpha(tp) \\ \alpha_1(t) := \alpha((1-t)p+t) \end{cases}$ $\quad t \in [0,1]$

$\left(\begin{cases} \in \Omega(X,a,\alpha(p)) \\ \in \Omega(X,\alpha(p),b) \end{cases} ! \right) \Longrightarrow \alpha \sim \alpha_0 * \alpha_1$,



$\Longrightarrow \forall \beta \in \Omega(X, \alpha(p), c)$, $\alpha_0 * \beta * i(\beta) * \alpha_1 \sim \alpha$!

Semplicemente $\alpha_0 * \alpha_1(t) = \alpha(\phi(t))$ con $\phi(t) := \begin{cases} 2tp & [0,1/2] \\ p + (2t-1)(1-p) & [1/2,1] \\ (= (2t-1)+(2-2t)p) & \end{cases}$!

Infatti $\alpha_0 * \beta * i(\beta) * \alpha_1 \overset{(5)}{\sim} [\alpha_0 * \underbrace{(\beta * i(\beta))}_{(\overset{(7)}{\sim} 1_{\alpha(p)})}] * \alpha_1 \overset{(2)}{\sim} (\underbrace{\alpha_0 * 1_{\alpha(p)}}_{(\overset{(7)}{\sim} \alpha_0)}) * \alpha_1 \overset{(2)}{\sim}$

$\sim \alpha_0 * \alpha_1 \overset{\sim}{} \alpha$! $\rfloor$

$\boxed{\text{NOTA}}$: più in generale, se $\alpha \in \Omega(X,a,b)$ e $0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_n \leq 1$,

allora $(t \in [0,1])$
$$\begin{cases} \alpha_0(t) := \alpha(t p_1) \\ \alpha_1(t) := \alpha((1-t)p_1 + t p_2) \\ \quad \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) := \alpha((1-t)p_{n-1} + t p_n) \\ \alpha_n(t) := \alpha((1-t)p_n + t) \end{cases} \Rightarrow \alpha \sim \alpha_0 * \alpha_1 * \dots * \alpha_n \quad)$$

perché (ad esempio) $\alpha_{n-1} * \alpha_n \sim \alpha((1-t)p_{n-1} + t)$ (essendo

$$\alpha_{n-1} * \alpha_n(t) = \alpha(\underbrace{(1-\phi(t))p_{n-1} + \phi(t)}_{(p_{n-1} + \phi(t)(1-p_{n-1}))}) \text{ con } \phi(t) := \begin{cases} 2t \frac{p_n - p_{n-1}}{1-p_{n-1}} & [0,1/2] \\ \frac{(2-2t)p_n - p_{n-1} + (2t-1)}{1-p_{n-1}} & (1/2,1] \end{cases})$$

e in effetti $\alpha((1-t)p_{n-1} + t)$ è la parametrizzazione standard della restrizione di α a $[p_{n-1},1]$ (quindi usare (8)) !) !

$\boxed{\text{NOTA}}$: per $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$, $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha * i(\beta) \sim 1_a$!

($\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\alpha * i(\beta) \sim \beta * i(\beta) \overset{(7)}{\sim} 1_a$; $\overset{(1)}{\Leftarrow}$ $(\alpha * i(\beta)) * \beta \sim 1_a * \beta$,

e d'altronde $1_a * \beta \overset{(4)}{\sim} \beta$ mentre $(\alpha * i(\beta)) * \beta \overset{(5)}{\sim} \alpha * (\underbrace{i(\beta) * \beta}_{\overset{(7)}{\sim} 1_b}) \overset{(2)}{\sim} \alpha * 1_b \overset{(7)}{\sim} \alpha$!)

$$\forall\ \alpha, \beta \in \Omega(X \times Y, (a,b), (a',b')) = \Omega(X, a, a') \times \Omega(Y, b, b'),$$

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \overset{F := (F_1, F_2)}{\sim} \beta := (\beta_1, \beta_2) \overset{\text{(immediato)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 \overset{F_1}{\sim} \beta_1 \\ \alpha_2 \overset{F_2}{\sim} \beta_2 \end{cases}, \quad \text{"ossia"}$$

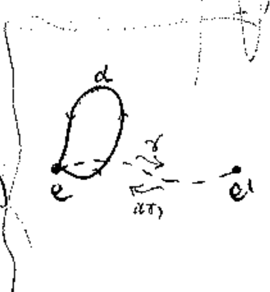
$$[\alpha] = [\beta] \Longleftrightarrow \begin{cases} [\alpha_1] = [\beta_1] \\ [\alpha_2] = [\beta_2] \end{cases} \overset{\text{(ovvio)}}{\Longleftrightarrow} ([\alpha_1], [\alpha_2]) = ([\beta_1], [\beta_2]) \quad !$$

$$\left([(\alpha_1, \alpha_2)] = [(\beta_1, \beta_2)] \right)$$

X sp. top. e $e\in X$; considerando su $\Omega(X,e)$ la rel. d'eq. $\sim$ di omotopia di cammini, « $\forall [\alpha],[\beta]\in \Omega(X,e)/\sim$, $[\alpha]\cdot[\beta] := [\alpha * \beta]$ » è chiaramente un'operazione su $\Omega(X,e)/\sim$ che lo rende un gruppo (con elemento neutro $[1_e]$ e operazione d'inverso $[\alpha]^{-1} := [i(\alpha)]$) : $\pi_1(X,e) := (\Omega(X,e)/\sim\,, \cdot)$ è "il gruppo <u>fondamentale</u> di X con punto base e" (o "primo gruppo di omotopia") ! ($\boxed{\text{NOTA}}$: visto che partiamo da e con cammini, stiamo solo nella componente connessa per archi di $e_{(\text{in } X)}$, <u>ossia</u> $\pi_1(X,e)$ dipende solo dalla comp. conn. p.a. di $e_{(\text{in } X)}$!)

(1) $\gamma \in \Omega(X,e,e')$ ($\Rightarrow i(\gamma)\in\Omega(X,e',e)$) $\Rightarrow$ $\gamma_*: \pi_1(X,e) \to \pi_1(X,e')$, $[\alpha] \mapsto [i(\gamma)*\alpha*\gamma]$

è un isomorfismo (di gruppi) !



γ_* è invertibile con inversa "$i(\gamma)_*$" ($[\alpha] \xmapsto{\gamma_*} [i(\gamma)*\alpha*\gamma]$ $\xmapsto{i(\gamma)_*} [\gamma*(i(\gamma)*\alpha*\gamma)*i(\gamma)] \overset{(\text{omot.})}{=} [\alpha]$!) ed è un omomorfismo

($[\alpha][\beta] \doteq [\alpha*\beta] \xmapsto{\gamma_*} [i(\gamma)*(\alpha*\beta)*\gamma] = [i(\gamma)*\alpha*\gamma*i(\gamma)*\beta*\gamma]$ $\doteq [i(\gamma)*\alpha*\gamma][i(\gamma)*\beta*\gamma] = \gamma_*[\alpha]\,\gamma_*[\beta]$!)

$\Rightarrow$ Se X è connesso per archi, ossia $\pi_0(X)=0$, allora denotiamo <u>con</u> "$\pi_1(X)$" la classe di isomorfismo di $\pi_1(X,e)$, $e\in X$ qualsiasi !)

(2) $\pi_1(X\times Y,(a,b)) \overset{\text{iso. gruppi}}{\cong} \pi_1(X,a)\times\pi_1(Y,b)$! (con struttura di gruppo prodotto!)*

$\forall\, \alpha \doteq (\alpha_1,\alpha_2) \in \Omega(X\times Y,(a,b)) = \Omega(X,a)\times\Omega(Y,b)$, abbiamo già visto che è biiezione $\pi_1(X\times Y,(a,b)) \to \pi_1(X,a)\times\pi_1(Y,b)$,

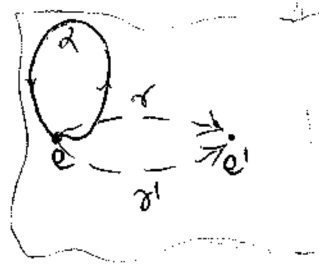
$$[(\alpha_1,\alpha_2)] \longmapsto ([\alpha_1],[\alpha_2])$$

e in realtà è (anche) omom.: $[(\alpha_1,\alpha_2)][(\beta_1,\beta_2)] \doteq [(\alpha_1,\alpha_2)*(\beta_1,\beta_2)] \overset{\text{(visto)}}{=}$

$= [(\alpha_1*\beta_1,\ \alpha_2*\beta_2)] \longmapsto ([\alpha_1*\beta_1],[\alpha_2*\beta_2]) \doteq ([\alpha_1][\beta_1],[\alpha_2][\beta_2]) =$

$= ([\alpha_1],[\alpha_2])\cdot([\beta_1],[\beta_2])$! $\square$

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\pi_1(X,a)$ abeliano $\Leftrightarrow$ l'isomorfismo $[\alpha] \overset{\gamma_*}{\longmapsto} [i(\gamma)*\alpha*\gamma]$ $(\pi_1(X,a) \to \pi_1(X,a'))$ non dipende dalla scelta di $\gamma \in \Omega(X,a,a')$!



($\Rightarrow$) $\forall\, \gamma,\gamma' \in \Omega(X,a,a')$ e $\forall\, \alpha \in \Omega(X,a)$,

$\gamma*i(\gamma')$, $\gamma'*i(\gamma) \in \Omega(X,a) \overset{\text{(ip.)}}{\Rightarrow} [\alpha*(\gamma*i(\gamma'))] =$

$= [(\gamma*i(\gamma'))*\alpha]$ $\underset{(\times[i(\gamma)]\text{ a SX})}{\Rightarrow}$ $[i(\gamma)*\alpha*\gamma*i(\gamma')] = [i(\gamma')*\alpha] \underset{(\times[\gamma']\text{ a DX})}{\Rightarrow} [i(\gamma)*\alpha*\gamma] =$

$= [i(\gamma')*\alpha*\gamma']$! ($\Leftarrow$) $\forall\, \alpha,\beta \in \Omega(X,a)$ e $\forall\, \gamma,\gamma' \in \Omega(X,a,a')$,

$[\alpha*\beta] \overset{\text{(visto)}}{=} i(\gamma)_*(\gamma_*[\alpha*\beta]) \overset{\text{(ip.)}}{=} i(\gamma)_*(\gamma'_*[\alpha*\beta]) = [\gamma*i(\gamma')*\alpha*\beta*\gamma'*i(\gamma)] =$

$\underset{\gamma' := \alpha*\gamma}{=} [\beta*\alpha]$! $\square$

$f : X \to Y$ continua $\Rightarrow$ $\pi_1(f) \doteq f_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(Y, f(e))$
$[\alpha] \longmapsto [f(\alpha)]$

è chiaramente omomorfismo (di gruppi) tale che

(a) $Y = X$ e $f := id_X \Rightarrow \pi_1(id_X) = id_{\pi_1(X,e)}$;

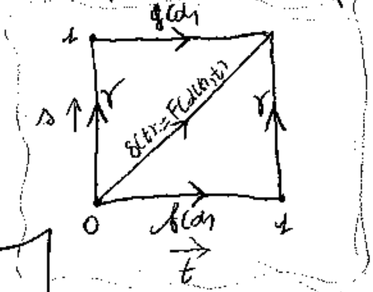
(b) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ continue $\Rightarrow \pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$!

$\boxed{\mathrm{I}}$ $f, g \in C(X,Y)$ e $e \in X$: $f \overset{F}{\sim} g$ e $\gamma(\cdot) := F(e,\cdot)$ $(\in \Omega(Y, f(e), g(e)))$ $\Rightarrow$ è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,e) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y, f(e)) \arrow[rr, "\gamma_*"'] & & \pi_1(Y, g(e)) \end{tikzcd}$$

(ossia $g_* = \gamma_*(f_*)$) !

[$\forall \alpha \in \Omega(X,e)$, $[g(\alpha)] = [i(\gamma) * f(\alpha) * \gamma] \Leftrightarrow [\gamma * g(\alpha)] =$
$= [f(\alpha) * \gamma]$, e questo è vero in quanto l'applicazione (continua)
$[0,1] \times [0,1] \to Y$
$(t,s) \longmapsto F(\alpha(t), s)$ "ha" (chiaramente)



, da cui

appunto $\gamma * g(\alpha) \sim \delta \sim f(\alpha) * \gamma$!]

$\boxed{\mathrm{II}}$ $g \in C(X,X)$ e $e \in X$: $id_X \sim g \Rightarrow g_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(X, g(e))$
è isomorfismo (di gruppi) !

[Uso (I) con $Y := X$, $f := id_X$ e $\gamma(\cdot) := F(e,\cdot)$ se $id_X \overset{F}{\sim} g$

otteniamo subito $g_* = \gamma_* \circ \underbrace{\pi_1(id_X)}_{(= id_{\pi_1(X)}!)} = \gamma_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(X, g(e))$!

$\boxed{\text{III}}$ $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ equivalenza omotopica tra X e Y $\Rightarrow$ $\forall e \in X$,

$f_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(Y, f(e))$ è isomorfismo (di gruppi) !!

(In particolare X, Y connessi per archi e omotopi $\Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$!)

Ovviamente, $\forall g \in \mathcal{C}(Y,X)$, sono omomorfismi tutti quelli in figura

$$(g_* \circ f_* = (g \circ f)_*)$$

$$\pi_1(X,e) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(e)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(e))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(e))))$$

$$(f_* \circ g_* = (f \circ g)_*)$$

;

ma se g è l'inversa omotopica di f, allora $\begin{cases} g \circ f \sim id_X \\ f \circ g \sim id_Y \end{cases} \overset{(\text{II})}{\Rightarrow}$ sono

isomorfismi $\begin{cases} (g \circ f)_* = g_* \circ f_* \\ (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \end{cases}$, in particolare sono biiettivi : lo è f_* !

($\boxed{\text{NOTA}}$: segue che $Y \subseteq X$ retratto per deformazione di X $\Rightarrow \forall e \in Y$,

$\pi_1(i_Y) : \pi_1(Y,e) \to \pi_1(X,e)$ è isomorfismo !)

X sp. top. semplicemente connesso $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ X connesso per archi e

$\pi_1(X) = 0$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: X semplicemente connesso omotopo a Y $\overset{(\text{III})}{\Rightarrow}$ Y sempl. conn. !

$\boxed{\text{NOTA}}$: $Y \subseteq X$ retratto di $X \Rightarrow \forall e \in Y$, $\pi_1(i_Y) : \pi_1(Y,e) \to \pi_1(X,e)$ è (omom.) iniettivo ! [$\forall \alpha \in \Omega(Y,e)$, $\pi_1(i_Y)[\alpha] = [\alpha]$ con α "vista" in $\Omega(X,e)$) $=$ "0" (cioè $[1_e]$ di X) $\Rightarrow [\alpha] = 0$ (in $\pi_1(Y,e)$) : infatti semplicemente , se $F : [0,1]\times[0,1] \to X$ è omotopia di c. $\alpha \overset{F}{\sim} 1_e$ (di X) e se $r : X \to Y$ è retrazione di X su Y , allora$_{\text{(ovvio)}}$ $\alpha \overset{r(F)}{\sim} 1_e$ in Y !]

(In effetti se Y retratto per deformazione di $X \Rightarrow \pi_1(i_Y)$ è anche suriettivo : se $R : X \times [0,1] \to X$ è deformazione di X su Y e $r(\cdot) = $ "$R(\cdot,0)$" retrazione associata , allora $\forall \beta \in \Omega(X,e)$, $r(\beta) \in \Omega(Y,e)$ ha $\pi_1(i_Y)[r(\beta)] = [\beta]$, essendo
($r(\beta)$ come in $\Omega(X,e)$!)

chiaramente $\begin{aligned} [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow X \\ (t,s) &\longmapsto R(\beta(t),s) \end{aligned}$ omotopia tra $r(\beta)$ e β !)

$\Omega(\{p\}, \underset{(p!)}{\cdot}) = \{1_p\} \Rightarrow \pi_1(\{p\}) = 0$!

(cioè $\{p\}$ sempl. conn.)

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\forall n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso (in questo, ad esempio, lo è qui suo stellato, essendo contrattile)!

Lo potrei anche verificare direttamente: infatti, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è stellato rispetto a $p \in A$, allora A è connesso per archi e basta che $\pi_1(A,p) = 0$! In effetti, $\forall \alpha \in \Omega(A,p)$, $\alpha \overset{F}{\sim} 1_p$ con $F: [0,1] \times [0,1] \to A$ data da $F(t,s) := (1-s)\alpha(t) + sp$!

$\Rightarrow$ sono semplicemente connessi pure D^n e $[0,1]^n$ ($\forall n \geq 1$)!

$f: (Y, d) \longrightarrow X$ continua su (Y, d) sp. metrico compatto $\Rightarrow$

$\forall$ ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X, esiste $\delta > 0$ tale che,

$\forall y \in Y$, $f(B(y,\delta)) \subseteq$ un aperto di $\mathcal{A}$!

(δ è "il numero di Lebesgue" !)

$\boxed{Y}$ compatto e f continua $\Rightarrow$ $f(Y) \subseteq X$ compatto, per cui ci saranno $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $f(Y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ (cioè $\overset{\text{(ovvio)}}{}$ $Y \subseteq f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$!) : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, sono chiusi (di Y) $C_k := f^{-1}(X \setminus A_k) \overset{\text{(ovvio)}}{=} Y \setminus f^{-1}(A_k)$ e sono chiaramente con $\bigcap_{k=1}^{n} C_k \underset{(*)}{=} \emptyset$; dunque, potendo chiaramente supporre $X \notin \mathcal{A}$ e anzi che $n \geq 2$ con almeno due fra gli A_k non confrontabili rispetto a "$\subseteq$", ho pure che i C_k sono $\neq \emptyset$: considero $d_{C_k}: Y \to \mathbb{R}$, $d_{C_k}(y) := \inf_{z \in C_k} d(y, z)$ (continua e tale che $d_{C_k}(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \overline{C_k} = C_k$!) $\overset{}{}_{\text{(visto)}}$, e quindi $g: Y \longrightarrow (0, +\infty)$, $y \longmapsto \max_{1 \leq k \leq n} (d_{C_k}(y))$;

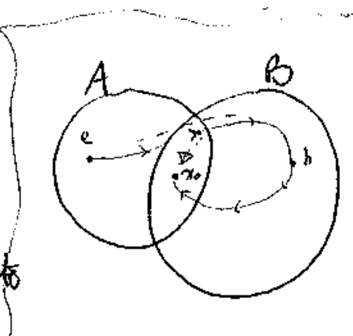
g continua su Y compatto $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ esiste $m = \min(g(Y))$ (>0), ossia tale che, $\forall y \in Y$, $g(y) \geq m$ $\overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow}$ $\forall y \in Y$, $d_{C_k}(y) \geq m$ per almeno un k °, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ (in tal caso) $y \notin C_k$, ossia $y \in f^{-1}(A_k)$; anzi tutta $B(y, m) \subseteq f^{-1}(A_k)$ (: se ci fosse $z \in C_k$ in $B(y,m)$, allora può

$\varpi(n,\delta) \overset{(\text{def } \varpi_{C_n})}{\geq} \varpi_{C_n}(m) \overset{(\text{def } m)}{\geq} m\,!$) : $\delta := m$!! $\square$

$\forall\, \alpha \in \Omega(X, a, b)$: $\forall$ ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X, esiste (almeno) $m \geq 1$ tale che, $\forall\, 0 \leq k \leq m-1$, $\alpha\left(\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]\right) \subseteq$
$\subseteq$ un aperto di $\mathcal{A}$!

$\alpha : [0,1] \to X$ continua su uno sp. metrico compatto $\overset{(\text{n.s. Lebesgue!})}{\Longrightarrow}$ esiste $\delta > 0$ tale che, $\forall\, t \in [0,1]$, $\alpha\left(B_{[0,1]}(t, \delta)\right) \subseteq$ un aperto di $\mathcal{A}$: prendo quindi $m \geq 1$ tale che $\left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right]$ sia contenuto in una palla aperta di raggio δ ! $\square$

$A, B \subseteq X$ aperti : $A \cap B$ conn. per archi e $A \cup B$ conn. per archi $\Longrightarrow$ A e B conn. per archi ! (se $A \cap B \neq \emptyset$!)



Posso supporre A, B non $\subseteq$-confrontabili e provare la tesi per A ; se $x_0 \in A \cap B$, allora è ovviamente sufficiente dimostrare che, $\forall\, a \in A \setminus B$, esiste un cammino che collega a e x_0 ($A \cap B$ è conn. per archi !) in A. Essendo $A \cup B$ conn. per archi, certamente esiste $\alpha \in \Omega(A \cup B, a, x_0)$, che supponiamo non interamente contenuto in A ; ora, essendo banalmente che $\{A, B\}$ è un ricoprimento aperto di $A \cup B$, posso prendere $n \geq 1$ intero tale che, $\forall\, 0 \leq k \leq n-1$, $\alpha\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq A$ o B, per cui se $\alpha_k :=$ la parametrizzazione standard di $\alpha_{|\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}$ allora effettivamente $\alpha_k \subseteq A$ o B.

Adesso, $\alpha_0(0) = a\ (\in A \setminus B) \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \alpha_0 \subseteq A$; se $\alpha_0(1)\ (=$ $= \alpha_1(0)) \in A \setminus B$, allora analogamente $\alpha_1 \subseteq A$; se invece $\alpha_0(1) \in$ $\underset{(\alpha_1(0))}{}$ $\in A \cap B$, allora avrei finito: preso $\beta \in \Omega(A \cap B, \alpha_0(1), x_0)$, avrei infatti $\alpha_0 * \beta \in \Omega(A, a, x_0)$! Anche immaginando $\underset{(=\alpha_1(0))}{\alpha_0(1)} \in A \setminus B$, è però chiaro che debba esistere $1 \leq h \leq n-1$ min. tale che $\underset{(=\alpha_{h-1}(1))}{\alpha_h(0)} \in A \cap B$ (altrimenti $\alpha \subseteq A$!), quindi prendo $\beta \in \Omega(A \cap B, \alpha_{h-1}(1), x_0)$ per avere $\alpha_0 * \ldots * \alpha_{h-1} * \beta \in \Omega(A, a, x_0)$!

(TEOREMA DI VAN KAMPEN IN FORMA SEMPLICE.) ("PRIMA PARTE")

$A, B \subseteq X$ aperti tali che $X = A \cup B$ e $x_0 \in A \cap B$: A, B e $A \cap B$ connessi per archi $\underset{(\Rightarrow X \text{ conn. per archi})}{\Rightarrow}$ $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di
$$\begin{cases} \pi_1(i_A) : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \pi_1(i_B) : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \end{cases}$$
(ossia ogni $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ è omotopo alla giunzione di un numero finito di cammini in $\Omega(X, x_0)$, ciascuno dei quali interamente contenuto in A o in B!) !

In particolare: $A, B \subseteq X$ aperti con $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cup B = X$, e A, B semplicemente connessi e $A \cap B$ conn. per archi $\Rightarrow X$ sempl. conn. !

(Soprattutto, il corollario è immediato: $\pi_1(X) \cong \pi_1(X,x_0)$ è generato dalle immagini di $\pi_1(i_A)$ e $\pi_1(i_B)$, e $\pi_1(A,x_0)$ "=" $\pi_1(B,x_0)$ "=" $\{1_{x_0}\}$!);

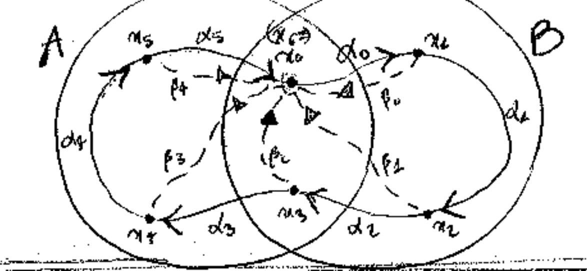
Posso supporre A,B non $\subseteq$-confrontabili e lavorare con $\alpha \in \Omega(X,x_0)$ non interamente contenuto in A o in B; $\{A,B\}$ ricoprimento aperto di $A \cup B \Rightarrow \exists\, m \geq 2$ tale che, $\forall\, 0 \leq n \leq m-1$, $\alpha([\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}]) \subseteq A$ o B: se $\alpha_n :=$ la riparametrizzazione standard di $\alpha_{|[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}]}$, allora $\alpha_n \in A$ o B! Se, $\forall\, 0 \leq n \leq m-1$, $x_n := \alpha_n(0)$ per cui $x_{n+1} = \alpha_n(1)$, ponendo $x_m = x_0$, allora $(x_0)x_{n+1} \in A$ risp. $\in B \overset{(x_0 \in A\cap B)}{\Longrightarrow} \exists\, \beta_n$ in $\Omega(A, x_{n+1}, x_0)$ risp. in $\Omega(B, x_{n+1}, x_0)$ ($\exists\, i(\beta_n)$ collega x_0 e x_{n+1}!), ponendo $\beta_{m-1} := 1_{x_0}$:

$\forall\, 0 \leq n \leq m-1$, a seconda che $\alpha_n \in A$ risp. $\in B$, prendo tale $\beta_n \in A$ risp. $\in B$, avendo così che i cammini
$$\begin{cases} \alpha_0 * \beta_0 \\ i(\beta_{n-1}) * \alpha_n * \beta_n, \ \forall\, 1 \leq n \leq m-1 \\ i(\beta_{m-2}) * \alpha_{m-1} \end{cases}$$

sono tutti in $\Omega(A,x_0)$ o $\Omega(B,x_0)$ e allora che

$$(\alpha_0 * \beta_0) * (i(\beta_0) * \alpha_1 * \beta_1) * (i(\beta_1) * \dots) * \dots * (\dots * \beta_{m-2}) * (i(\beta_{m-2}) * \alpha_{m-1}) \overset{(\text{ovvio})}{\sim}$$
$$\sim \alpha_0 * \alpha_1 * \dots * \alpha_{m-1} \underset{(\text{visto!})}{\sim} \alpha \,!$$

(Unica nota: $\forall\, 0 \leq n \leq m-2$, se il cammino α_n è interamente contenuto in B ma non in $A \cap B$ (perché $x_{n+1} \in B \setminus A$) (per cui così è per β_n), allora così è anche per α_{n+1}!)



$\forall\, n \geq 2$, S^n è semplicemente connesso!

[$S^n = A \cup B$ con $A := S^n \setminus \{(1,0,\dots,0)\}$ e $B := S^n \setminus \{(-1,0,\dots,0)\}$ sono aperti non disgiunti, e semplicemente connessi (in quanto omeomorfi a $\mathbb{R}^n$!), con (necessariamente) $A \cap B = S^n \setminus \{(1,0,\dots,0),(-1,0,\dots,0)\}$ connesso per archi (in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $n \geq 2$)!]

$\boxed{\text{NOTA}}$: segue che, $\forall n \geq 2$, anche $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \underset{\text{(un punto)}}{\{0\}}$ è semplicemente connesso!

$\forall\, n \geq 2$ e $\forall\, m \geq 0$, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{m \text{ suoi punti (distinti)}\}$ è sempl. connesso! (conn. per archi!)

[Posso supporre $m \geq 2$ e che $X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{m \text{ punti}\}$ sia ottenuto togliendo da $\mathbb{R}^{n+1}$, tra gli altri, anche O e $(1,0,\dots,0)$, per cui considero $A := \{(x_0,\dots,x_n) \in X \mid x_0 < 1\}$ ($(1,0,\dots,0)$ non c'è comunque!) e $B := \{x \in X \mid x_0 > 0\}$ (O non c'è comunque!) tale che $A \cap B = \{x \in X \mid 0 < x_0 < 1\}$ $(\neq \emptyset)$: in questo modo $X = A \cup B$ e A, B sono aperti semplicemente connessi, come è $A \cap B$, in quanto tutti omeomorfi a $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{m-1 \text{ punti}\}$ ($\leq m-2$) (ovvio) (e uso l'ipotesi induttiva!)!]

($\mathbb{R}^{n+1}_x \to \mathbb{R}^{n+1}_x \cap \{x_0 > 0\}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^{x_0}, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{R}^{n+1} \to \{x_0 < 1\}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 - e^{x_0}, x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbb{R}^{n+1} \to \{0 < x_0 < 1\}$, $x_0 \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(x_0) + \frac{1}{2}$ (applicato in x_0) sono tutti omeomorfismi!)

$\forall n \geq 0$, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso!

Posso procedere per induzione su $n \geq 1$: indicando con $(z_0, \dots, z_n) =: z \in \mathbb{C}^{n+1}$ e quindi con $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, anzitutto sono facilmente omeomorfi $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ e $H := \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_0 = 0\}$ (chiuso) $= \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, dunque (per ip. ind.) H è sempl. conn.: allora, ad esempio, lo è pure $B := \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\}$ in quanto (è conn. per archi e) H è un suo retratto per deformazione grazie a

$$R : B \times [0,1] \longrightarrow B$$
$$([z_0, z_1, \dots, z_n], t) \longmapsto [t z_0, z_1, \dots, z_n]$$

! Se dico $A := \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H$, allora ovviamente A, B sono due aperti tali che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = A \cup B$ e dunque basta considerare

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow A$$
$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto [1, z_1, \dots, z_n]$$

(omeo.!) per avere che pure A è sempl. conn., e che $A \cap B$ è conn. per archi grazie all'omeo. indotto $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to A \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\} = A \cap B$!

$f: X \to Y$ è omeomorfismo locale $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ f è continua tale che, $\forall x \in X$, esiste intorno aperto A di x tale che $f(A)$ è aperto di Y e $f_{|A}: A \to f(A)$ è omeomorfismo.

(**NOTA 1**: questo concetto, estendendo quello di applicazione continua, iniettiva ed aperta, estende quello di omeomorfismo!)

NOTA 2: per ogni aperto $U \subseteq A$ (di X o di A), $f(U)$ è un aperto di Y (essendolo di $f(A)$)!

I Un omeo. locale è un'applicazione aperta!

$f: X \to Y$ omeo. loc. $\Rightarrow$ $\forall V \subseteq X$ aperto, $f(V) \subseteq Y$ è intorno di ogni proprio punto: sia infatti $y = f(x) \in f(V)$ arbitrario, con appunto $x \in V$; dato che $x \in A$ aperto $\subseteq X$ con $f(A)$ aperto di Y e $f_{|A}: A \to f(A)$ omeo., $x \in A \cap V \Rightarrow y = f(x) \in f(A \cap V) \overset{(A\cap V \subseteq V)}{\subseteq} f(V)$, e $f(A \cap V)$ è un aperto (di Y) in quanto è $A \cap V$ aperto $\subseteq A$!

II $f: X \to Y$ continua e $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X: f è omeo. locale $\Leftrightarrow$ $\forall U \in \mathcal{U}$, $f_{|U}: U \to f(U) (\subseteq Y)$ è omeo. locale!

$\boxed{(\Rightarrow)}$: sia $x \in U$ arbitrario ; preso $A \subseteq X$ aperto tale che $x \in A$, $f(A)$ è aperto di Y e $f|_A : A \to f(A)$ è omeo., allora $x \in U \cap A \subseteq U$ aperto di U (o di X) ($\subseteq$ di A) e conseguentemente $f|_{U\cap A} : U \cap A \to f(U \cap A)$ ($\subseteq f(U)$) è omeo.,

$\Rightarrow f(U \cap A)$ è un aperto di $f(A)$ e quindi di Y!

$(\Leftarrow)$: sia $x \in X$; preso $U \in \mathcal{U}$ tale che $x \in U$, allora esiste $A \subseteq U$ aperto di U (o di X) tale che $x \in A$, $f_{|U}(A)$ è aperto (in $f(U)$ e quindi) in Y ($f(U)$ è aperto! (I)), e conseguentemente $f|_A$ omeo. $A \to f(A)$! $\square$

$\boxed{\text{NOTA}}$: le fibre di un omeo. locale sono discrete!

[$f : X \to Y$ omeo. locale e $y \in f(X)$; $\forall x \in f^{-1}(y)$, esiste aperto $V \subseteq X$ tale che $\{x\} = f^{-1}(y) \cap V$: preso infatti $V := A$!]

X sp. top. connesso e loc. conn. per archi ($\not\Rightarrow$ conn. per archi!) :

$p : E \to X$ è un rivestimento di X (di "base"
continua e suriettiva

X e "spazio totale" E) $\overset{DEF}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in X$, fra tutti i suoi

intorni aperti V connessi (per archi) ($\Leftarrow$ loc. conn. per archi), ne esiste almeno uno tale

che, $\forall U (\subseteq p^{-1}(V)) \subseteq E$ componente connessa di $p^{-1}(V)$ (aperto),

$p_{|U} : U \to p(U) \overset{(!!)}{=} V$ sia un omeomorfismo!

($\Leftarrow$ U conn. per archi e loc. conn. per archi $\Rightarrow$ aperto! ($p^{-1}_{|U}$))

(V "aperto banalizzante" di p.)

$\boxed{\text{NOTA}}$: visto che $\{V\}_{V \text{ ap. ban. di } p}$ ricoprimento (aperto) di X $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$

$\{p^{-1}(V)\}_{V \text{ ap. ban. di } p}$ ricoprimento (aperto) di E, quindi $e \in E$ ammette

un intorno aperto loc. conn. per archi (perché omeomorfo ad un intorno

dello stesso tipo di $p(e)$), cioè E è loc. conn. per archi!

(p è "connesso" se E lo è. (ossia E connesso per archi!))

$\boxed{\text{I}}$ Un rivestimento è un omeo. locale ($\not\Leftarrow$ è aperto, ossia è un'identificazione aperta)!

Semplicemente perché, $\forall V \subseteq X$ aperto banalizzante, $p_{|p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to p(p^{-1}(V)) \overset{(!!)}{=} V (\subseteq X)$

è omeo. locale! $\square$

$\boxed{\text{II}}$ Le fibre di un rivestimento hanno le stesse cardinalità.

Sia $x_0 \in X$ qualsiasi e $A := \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)|\}_{(\ni x_0)}$: essendo X connesso e $A \neq \emptyset$, basta provare che A è sia aperto sia chiuso! Ma, in effetto, $\forall V \subseteq X$ aperto banalizzante fissato e $\forall x \in V$, $p^{-1}(x)$ interseca ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ in uno e un solo punto, quindi tutte $p^{-1}(x)$ hanno le stesse cardinalità ($=$"numero" comp. conn. di $p^{-1}(V)$!) e allora ovviamente o $V \subseteq A$ o $V \cap A = \emptyset$: basta quindi osservare infine che per aperti banalizzanti, ricoprendo X, ricoprono A e $X \setminus A$!

(Il rivestimento è "di grado d" se le fibre hanno cardinalità d ecc.!)

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\underset{(\neq\emptyset)}{A}$ aperto connesso $\subseteq V$ aperto banalizzante $\Rightarrow A$ ap. banalizzante!

Sia U componente connessa di $p^{-1}(A)$ $(\subseteq p^{-1}(V))$ (per cui $\overline{U}^{p^{-1}(A)} = U$); visto che $p^{-1}(A)$ è un aperto in un loc. conn. per archi, a sua volta è un loc. conn. per archi e U è un aperto. Ora, U connesso in $p^{-1}(A)$ $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ U connesso in $p^{-1}(V)$, per cui tale è pure $\overline{U}^{p^{-1}(V)}$: preso U' comp. conn. di $p^{-1}(V)$ tale che $\overline{U}^{p^{-1}(V)} \subseteq U'$, usa il fatto che è omeo. $p_{|U'}: U' \to p(U') = V$ per avere che sono omeo. anche $p_{|\overline{U}^{p^{-1}(V)}}: \overline{U}^{p^{-1}(V)} \to p(\overline{U}^{p^{-1}(V)}) \subseteq V$ e $p_{|U}: U \to p(U) \subseteq A$; visto che $p(\overline{U}^{p^{-1}(V)})$ è un chiuso di V, e che $p(U)$ è un aperto di V ($\Rightarrow$ di A), da "$U = \overline{U}^{p^{-1}(A)} = p^{-1}(A) \cap \overline{U}^{p^{-1}(V)} \overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow} p(U) = A \cap p(\overline{U}^{p^{-1}(V)})$" segue che $p(U)$

è anche chiuso in A : $p(U) = A$ (per connessione)! $\lrcorner$

$\boxed{\text{III}}$ $p: E \to X$ rivestimento di X : $Y \subseteq X$ connesso e loc. connesso per archi ~~(aperto di X)~~ $\Rightarrow$ $p_{|p^{-1}(Y)} : p^{-1}(Y) \to \underset{(p(p^{-1}(Y)))}{Y}$ è un rivestimento di Y !

[Basta provare che, $\forall x \in Y$, esiste $A \subseteq X$ aperto banalizzante di p tale che $x \in \underset{(\text{aperto di } Y!)}{Y \cap A}$ sia connesso (per archi) (in Y) : infatti $Y \cap A$ sarebbe un aperto banalizzante di $p_{|p^{-1}(Y)}$! [Siano $\{A_i\}_{i \in I}$ tutte e sole le comp. conn. di $p^{-1}(A)$; dato che, $\forall i \in I$, è omeo. $p_{|A_i} : A_i \to p(A_i) = A$, è omeo. pure $p_{|p^{-1}(Y) \cap A_i} : p^{-1}(Y) \cap A_i \to$ $\to Y \cap p(A_i) = Y \cap A$! (Basta quindi osservare che $\{p^{-1}(Y) \cap A_i\}_{i \in I}$ sono tutte e sole le comp. conn. di $p^{-1}(Y \cap A) = p^{-1}(Y) \cap p^{-1}(A)$: sono tutte comp. conn. in quanto omeomorfe al connesso $Y \cap A$ (= una comp. conn. di x!) ; sono le sole in quanto $\bigcup_{i \in I}(p^{-1}(Y) \cap A_i) = p^{-1}(Y) \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = p^{-1}(Y) \cap p^{-1}(A)$!) $\lrcorner$

Sia allora $x \in Y$ arbitrario ; preso un $V \subseteq X$ aperto banalizzante di p tale che $x \in V$, allora $x \in Y \cap V$ aperto $\subseteq Y$ (loc. conn. per archi) : essendo le comp. conn. a loro volta aperte in $Y \cap V$ (e cioè in Y), la comp. conn. di x in $Y \cap V$ è della forma $Y \cap B$, con B

aperto di X, e allora $x \in Y\cap B \subseteq Y\cap V$; in particolare $Y\cap B \subseteq B\cap V$ aperto di X (loc. conn. per archi!), dunque $Y\cap B$ connesso in X (lo è in Y) $\Rightarrow$ $Y\cap B$ connesso in $B\cap V$: sia $A' \subseteq B\cap V$ la comp. conn. tale che $Y\cap B \subseteq A' \,(\subseteq B\cap V \subseteq V)$; allora $x\in A'$, A' è un aperto di $B\cap V$ (e cioè di X), è comunque un connesso di X e quindi $A' \subseteq V$ $\Rightarrow$ anche A' è aperto banalizzante! Inoltre $Y\cap A'$ è un connesso di Y perché $Y\cap B = Y\cap A'$, in quanto banalmente $Y\cap B \subseteq A' \subseteq B\cap V \overset{(ovvio)}{\Rightarrow} Y\cap B \subseteq Y\cap A' \subseteq Y\cap B\cap V \subseteq Y\cap B$! In conclusione $A := A'$. $\square$

$\boxed{\text{NOTA}}$: $p: E \to X$ rivestimento e X T_2 $\Rightarrow$ E T_2!

Essendo p un'identificazione, basta provare la separabilità per $e\neq e'$ $\in E$ con $p(e)=p(e')$. Diciamo $e,e' \in p^{-1}(V)$ con V un aperto banalizzante $\subseteq X$: se e,e' anche fossero nella stessa comp. conn. U di $p^{-1}(V)$, si separerebbero usando che $\underset{(\text{aperto})}{U} \cong V$ è T_2!

$\boxed{\text{NOTA}}$: $p: E \to X$ riv. di X e $q: F\to Y$ riv. di Y $\Rightarrow$ $p\times q : E\times F \to X\times Y$ riv. di $X\times Y$!

Infatti $V \subseteq X$ ap. ban. di p e $V' \subseteq Y$ ap. ban. di q $\Rightarrow$ $V \times V'$ è aperto banalmente di $p \times q$: osserviamo $\{U\}$ le comp. conn. di $p^{-1}(V)$ e $\{U'\}$ le comp. conn. di $q^{-1}(V')$ $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ $\{U \times U'\}$ le comp. conn. di $p^{-1}(V) \times q^{-1}(V') \overset{\text{(ovvio)}}{=} (p \times q)^{-1}(V \times V')$; ora $p|_U : U \to p(U) = V$ omeo. e $q|_{U'} : U' \to q(U') = V'$ omeo. $\overset{\text{(visto)}}{\Rightarrow}$ è omeo. anche $p|_U \times q|_{U'} \overset{\text{(ovvio)}}{=} p \times q|_{U \times U'} : U \times U' \to p(U) \times q(U') = V \times V'$!

NOTA: presi E, X connessi e loc. conn. per archi, un omeomorfismo $p : E \to X$ (ovvie p^{-1}) è banalmente un rivestamento (connesso) di X !

E sp. top. e $G < \mathrm{Omeo}(E)$: G agisce in modo propriamente discontinuo (su E) $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$ ogni $e \in E$ possiede un intorno (aperto) U tale che, $\forall g \in G \setminus \{id_E\}$, $U \cap g(U) = \phi$.

(NOTA : i $g(U)$ sono disgiunti! [$\forall g \neq h$, $g(U) \cap h(U) =$ $\overset{\text{(ovvio)}}{=} g(U \cap \underbrace{(g^{-1} \circ h)}_{(\in G!)}(U)) = g(\phi) = \phi$!])

E loc. conn. per archi e $G < \mathrm{Omeo}(E)$ che agisce in modo propr. disc. : E/G connesso $\Rightarrow$ $p := \pi : E \to E/G$ è un rivestimento di E/G!

Anzitutto, p continua e aperta (e surgettiva) $\Rightarrow$ E/G è loc. conn. per archi! Ora, $\forall e \in E$, considerato un suo intorno aperto U' di E (loc. conn. per archi), tale che $U' \cap g(U') = \phi$ $\forall g \neq id_E$, se $U \subseteq U'$ è la componente connessa di e in U' ($\Rightarrow$ U connesso di E), allora U è un aperto di U' e cioè di E, inoltre $U \subseteq U' \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} U \cap g(U) = \phi$ $\forall g \neq id_E$, e anche i $g(U)$ sono aperti e connessi di E! Visto dunque che tali $\{U\}$ ricoprono E e che (ovviamente) $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$, basta dimostrare che i $p(U)$ (aperto connesso!) sono "aperti banalizzanti" di p, dimostrando ad esempio che $\{g(U)\}_{g \in G}$ sono le comp. conn. di $p^{-1}(p(U))$ e che sono omeomorfismi gli $p_{|g(U)} : g(U) \to p(g(U)) \overset{\text{(ovvio)}}{=} p(U)$! Il primo fatto è evidente ($g(U)$ aperto $\Rightarrow$ $g(U)$ aperto e chiuso !) , mentre per il secondo osservo che $p_{|g(U)} : g(U) \xrightarrow{g^{-1}} U \xrightarrow{p_{|U}} p(U)$ (gli elementi di U sono equivalenti solo a sé stessi in U !) : infine g^{-1} è omeo. , e $p_{|U}$ è continua, aperta e bigettiva , ossia è omeo. ! $\square$

{ G agisce liberamente (su E) $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall g \in G \setminus \{id_E\}$, $g(e) \neq e$ $\forall e \in E$.

$\boxed{\text{NOTA}}$: (1) $\exists\, e \in E$ tale che $g(e) = g^{-1}(e)$ $\underset{(g^2(e)=e!)}{\Rightarrow}$ $g^{-1} \equiv g$ ($g^2 = id_E$) !

(2) $h \notin \{g, g^{-1}\}$ $\Rightarrow$ $\forall e \in E$, $h(e) \neq g(e)$! }

E T2 e $G < \mathrm{Omeo}(E)$ che agisce liberamente : ogni $e \in E$ possiede un intorno aperto A tale che $\{g \in G \mid A \cap g(A) \neq \emptyset\}$ è finito $\Rightarrow$ G agisce in modo propriamente discontinuo !

Sia $e \in E$ arbitrario e A int. aperto rispettivo ; indicato con $\{\underset{(id_E)}{g_1}, g_2, \dots, g_n\} \doteq$ $\doteq \{g \in G \mid A \cap g(A) \neq \emptyset\}$, e supposto $n \geq 2$, osservo in questo caso che $|\{g_1(e) = e, g_2(e), \dots, g_n(e)\}| = n$, E T2 $\Rightarrow$ esistono n aperti disgiunti $U_1, U_2, \dots, U_n$ di E tali che $g_1(e) = e \in U_1$, $g_2(e) \in U_2$, ..., $g_n(e) \in U_2$: $e \in U := A \cap \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{(=U_1)} \cap g_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap g_n^{-1}(U_n)$ è aperto chiaramente tale che , $\forall g \neq id_E$, $U \cap g(U) = \emptyset$! $\square$

$p : X \to Y$ (suriezione) : $s : Y \to X$ (iniezione) è una sezione di $p \overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow} \forall y \in Y$, $p(s(y)) = y$ (ossia $p \circ s = id_Y$).

($\boxed{\text{NOTA 1}}$: l'assioma delle scelte (AC) è esattamente l'esistenza di una sezione per un'appl. su.!)

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: $p : X \to Y$ continua e suriezione, e $s : Y \to X$ una sua sezione continua $\Rightarrow$ p identificazione!

[$\forall A \subseteq Y$, se $p^{-1}(A)$ è un aperto di X, allora (per continuità di s) è un aperto di Y $s^{-1}(p^{-1}(A)) = (p \circ s)^{-1}(A) = A$!]

(1) $p : X \to Y$ identificazione e $s : Y \to X$ una sua sezione continua: X T_2 $\Rightarrow$ s è (immersione) chiusa!

Essendo, $\forall C \subseteq Y$, $s(C) = s(Y) \cap p^{-1}(C)$ (ovvio), ciò equivale ad avere che "solo" $s(Y)$ è un chiuso (di X); ma infatti $x \in s(Y) \overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow} x = s(p(x))$, e cioè $s(Y) = \lambda^{-1}(\Delta_{X \times X})$ con

$$\lambda : X \to X \times X$$
$$x \mapsto (x, s(p(x)))$$

! $\square$

(2) $p: E \to X$ rivestimento di $X \Rightarrow \forall$ aperto banalizzante $V \subseteq X$ di p e $\forall\, b \in p^{-1}(V)$, $\exists!$ sezione continua $s_b : V \to p^{-1}(V)$ di $p_{|p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ tale che $s_b(p(b)) = b$!

(Noto ovviamente che $p_{|p^{-1}(V)}$ resta continua, surgettiva e aperta, ossia una identificazione aperta!) Con V ap. ban. e $b \in p^{-1}(V)$ fissato, se $U \subseteq p^{-1}(V)$ è la componente connessa di b in $p^{-1}(V)$ allora $p_{|U} : U \to p(U) = V$ è omeo. (per ipotesi), $\Rightarrow$ evidentemente $s_b := (p_{|U})^{-1} : V (= p(U)) \to \underset{\text{(aperto!)}}{U} \ (\subseteq p^{-1}(V))$ ha le proprietà volute! Sia quindi $u: V \to p^{-1}(V)$ un'altra sezione continua di $p_{|p^{-1}(V)}$ tale che $u(p(b)) = b$: V connesso $\overset{\text{(cont.)}}{\Rightarrow} u(V) \subseteq p^{-1}(V)$ connesso, e $b \in u(V) \Rightarrow u(V) \subseteq U$, ossia in realtà $u: V \to U$! Dato che $p_{|U} : U \to V$ è bigettiva, non può che essere $u = (p_{|U})^{-1}$.

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\forall$ aperto banalizzante $V \subseteq X$ di p e $\forall\, x \in V$, resta così definita e bigettiva

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times V &\longrightarrow p^{-1}(V) \\ (b, y) &\longmapsto s_b(y) \end{aligned}$$

! In realtà è chiaro che sia pure continua e aperta, quindi un omeo.!
(($p^{-1}(x)$ è discreto!!))

$p: E \to X$ un rivestimento (di X), $f: Y \to X$ continua e

$g: Y \to E$: g è un <u>sollevamento</u> di f $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ g è continua

e tale che $f = p \circ g$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

($\boxed{\text{NOTA1}}$: certamente, $\forall\, y \in Y$, $g(y) \in p^{-1}(f(y))$!)

($\boxed{\text{NOTA2}}$: con $\varphi \in \mathrm{Omeo}(Y)$, g sollevamento di f $\Rightarrow$ $g(\varphi)$ sollevamento di $f(\varphi)$!)

$\boxed{1}$ $p: E \to X$ rivestimento, Y <u>connesso</u> e $f \in \mathcal{C}(Y, X)$:

$g, h \in \mathcal{C}(Y, E)$ sollevamenti di f $\Rightarrow$ o $g = h$, oppure

$g(y) \neq h(y)$ $\forall\, y \in Y$!

$$\begin{tikzcd} & e \arrow[d, "p"] \\ y \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "f"'] & f(y) = p(e) \end{tikzcd}$$

(In particolare, comunque scelti $y \in Y$ ed $e \in E$ tale che $f(y) = p(e)$,

esiste al più un sollevamento $g \in \mathcal{C}(Y, E)$ di f con $g(y) = e$!) (ovvio)

Basta provare che $A := \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}$ è aperto e chiuso in Y :

siano allora $y \in Y$ ed abbiamo ($\exists\, f(y) \in X$), $V \subseteq X$ un aperto banalizzante di p tale

che $f(y) \in V$, e $U_g, U_h \subseteq p^{-1}(V)$ le comp. conn. di $g(y), h(y)$

rispettivamente ; in particolare U_g e U_h sono aperti di E, $\overset{\text{continuità}}{\Longrightarrow}$

$W := g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$ è aperto di Y, e sono omeomorfismi

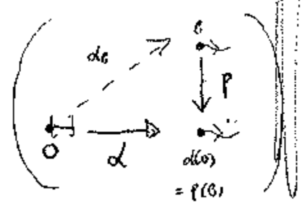
($\ast$)

$p_{|U_g}: U_g \to p(U_g) \equiv \underset{(\ni f(w))}{V}$ e $p_{|U_h}: U_h \to \underset{(\ni f(w))}{V}$. Pertanto, se $w \in A$, allora ovviamente $U_g = U_h$, e $\forall w \in W$, $g(w), h(w) \in U_g$ sono tali che $p(g(w)) \overset{ip.}{=} \underset{(\in V)}{f(w)} \overset{ip.}{=} p(h(w))$ $\overset{(p_{|U_g} \text{ in.})}{\Rightarrow} g(w) = h(w)$: in definitiva $(w \in) W \subseteq A$! Se invece $w \notin A$, allora ovviamente $U_g \cap U_h = \emptyset$ $\left(U_g = U_h \overset{(p(g(w)) = f(w) = p(h(w)))}{\Rightarrow} g(w) = h(w)! \right)$, e dunque è facile che $W \subseteq Y \setminus A$! ◁

$\boxed{\text{NOTA}}$: un sollevamento di un'applicazione costante su un connesso deve essere costante!

Se $f(\cdot) \equiv x$ $(\in X)$, allora tutte le possibili applicazioni $g(\cdot) \equiv e \in p^{-1}(x)$ sono sollevamenti di f!

$\boxed{2}$ $p: E \to X$ rivestimento, $\alpha: [0,1] \to X$ cammino (continuo) ed $e \in E$ tale che $\alpha(0) = p(e)$ $\Rightarrow$ esiste (unico) sollevamento $\alpha_0: [0,1] \to E$ di α con $\alpha_0(0) = e$!



Dato che X è ricoperto dai "[illegible]" aperti banalizzanti, certamente esistono $\underset{(2\dots)}{n \geq 1}$ intero e $V_1, \dots, V_n \subseteq X$ ap. ban. (di p) tali che, $\forall 1 \leq k \leq n$, $\alpha([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) \subseteq V_k$; si definiscono per ricorrenza n "cammini" in E $\gamma_k: [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \to E$ continui tali che

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = e \\ \alpha_{|[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} = p \circ \gamma_k & (\forall 1 \leq k \leq n) \\ \gamma_k(\frac{k}{n}) = \gamma_{k+1}(\frac{k}{n}) & (\forall 1 \leq k \leq n-1) \end{cases},$$

Allora ricorsivamente potrei prendere $\alpha_0 :=$ il loro incollamento! (Noto che per essere $\alpha|_{[\frac{n-1}{m},\frac{n}{m}]} = p\circ\gamma_n$ dovrei avere $\gamma_n \in p^{-1}(V_k)$, e $p(\gamma_n(\frac{n}{m})) = \underset{(\in V_k\cap V_{k+1})}{\alpha(\frac{n}{m})}$.) Ebbene, dato che V_1 è ap. ban. e $p(e)\in V_1$, considero la sezione continua $s_1 := s_0 : V_1 \to p^{-1}(V_1)$ di $p|_{p^{-1}(V_1)} : p^{-1}(V_1)\to V_1$ tale che $s_1(\underbrace{p(e)}_{(\alpha(0))}) = e$: su $[0,\frac{1}{m}]$, $\gamma_1 := s_1\circ\alpha$! Adesso, nell'ipotesi di aver definito γ_k con $1\le k\le m-1$, definisco su $[\frac{n}{m},\frac{n+1}{m}]$ $\gamma_{n+1} := s_{n+1}\circ\alpha$ dove $s_{n+1} : V_{n+1}\to p^{-1}(V_{n+1})$ è la sezione continua di $p|_{p^{-1}(V_{n+1})}$ tale che $s_{n+1}(p(e_n)) = e_n$ con $e_n := \gamma_n(\frac{n}{m})$ (per ipotesi ricorsiva $p(e_n) = p(\gamma_n(\frac{n}{m})) = \alpha(\frac{n}{m})$!) $\square$

(NOTA: $p(\alpha_0)=\alpha \Rightarrow \alpha_0(1)\in p^{-1}(\alpha(1))$!) (per cui $\alpha\in\Omega(X,p(e)) \Rightarrow \alpha_0$ ha estremi in $p^{-1}(p(e))$!)

$\Rightarrow$ con $e = p(\tilde{e})\in X$, il sollevamento di 1_e tale che $0\mapsto \tilde{e}$ è $1_{\tilde{e}}$! (cioè $(1_e)_0 = 1_{\tilde{e}}$)

$\boxed{3}$ $L := \{(t,s)\in[0,1]\times[0,1] \mid ts=0\} \xrightarrow{i} [0,1]\times[0,1]$, $p: E\to X$ rivestimento, $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ continua e $f: L\to E$ continua:

$p\circ f = F\circ i$ $\Rightarrow$ esiste (unico) sollevamento $G: [0,1]\times[0,1]\to E$ di F $(F = p\circ G)$, e tale che $f = G\circ i$!

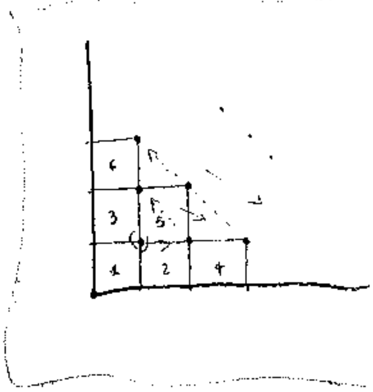
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \square \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & X \end{tikzcd}$$

Riesco a definire il caso particolare "$F\in V\subset X$ aperto banalizzante di p" $(\Rightarrow G\in p^{-1}(V))$: $p(f) = F(i) \overset{\text{(connesso)}}{\Rightarrow}$ $\underset{\text{(connesso!)}}{f(L)} \in p^{-1}(V)$, dunque $f(L)\subseteq U$ comp. conn. $\subseteq p^{-1}(V)$ ~~; considerato~~ l'omeo. $p|_U : U \to p(U) = V$, e quindi $s := (p|_U)^{-1} : V\to U$, faccio

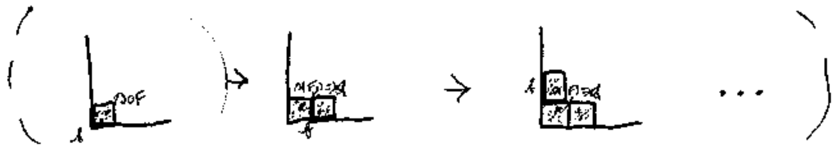
semplicemente $G := s \circ F$: chiaramente $p \circ G = F$ e $\lambda =$
$= s(p(\lambda)) \overset{!!}{=} s(F(i)) = G(i)$! (NOTA: $s(F)|_{L} = \lambda$!)

Tornando ora all'enunciato generale, visto che $F(\cdot, s), F(t, \cdot) : [0,1] \to X$ sono tutti cammini in X, e che gli aperti banalizzanti di p ricoprono X, esistono $n \geq 2$ intero e n^2 ap. ban. $V_{i,j}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, tale che $F(Q(i,j)) \subseteq V_{i,j}$ per ogni $Q_{i,j} := [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$; considerato quindi $(\mathbb{N}^2, \leq)$ dove $(i,j) \leq (h,k) \overset{DEF.}{\iff} \begin{cases} i+j < h+k \\ i+j = h+k, \text{ ma } j \leq k \end{cases}$

(chiaramente ordinamento totale!), è evidente che $\forall (h,k) \in \{1,\dots,n\}^2$ sia $Q(h,k) \cap \left[L \cup \bigcup_{(i,j) < (h,k)} Q(i,j) \right] =$



$=$ i due lati "L" di $Q(h,k)$: posso così definire ricorsivamente, grazie al caso precedente (è come nel), i sollevamento $G_{h,k} : L \cup \bigcup_{(i,j) \leq (h,k)} Q(i,j) \to E$ di $F|_{Q(h,k)}$, per poi porre $G \doteq G_{n,n}$! $\blacksquare$



$\boxed{4}$ $p : E \to X$ rivestimento, $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ continua e $\mathcal{Z} : [0,1] \to E$ cammino tale che $F(\cdot, 0) = p(\mathcal{Z}(\cdot))$ (in effetti $F(\cdot,0)$ è un cammino in X!) $\Rightarrow$ esiste (unico) sollevamento $G : [0,1] \times [0,1] \to E$ di F tale che $\mathcal{Z}(\cdot) = G(\cdot, 0)$!

(In particolare si sollevano pure le omotopie di cammini!)

$\boxed{F(0,\cdot) : [0,1] \to X}$ è un cammino con $F(0,0) \overset{\text{ip.}}{=} p(\underbrace{\tilde{\alpha}(0)}_{(\in E)})$, per cui certamente ammette un (solo) sollevamento $\tilde{\beta} : [0,1] \to E$ tale che $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\alpha}(0)$ [$\nexists$ $F(0,\cdot) = p(\tilde{\beta}(\cdot))$] : basta considerare $L \xrightarrow{f} E$

$$\begin{cases} (t,0) \longmapsto \tilde{\alpha}(t) \\ (0,s) \longmapsto \tilde{\beta}(s) \end{cases}$$

!

$\boxed{5}$ $p : E \to X$ rivestimento ; $\alpha, \beta \in \Omega(X, e, b)$ ed $\epsilon \in E$ tale che $p(\epsilon) = e$ $\nexists$ $\alpha_0, \beta_0 : [0,1] \to E$ rispettivi sollevamenti con $\alpha_0(0) = \beta_0(0) = \epsilon$; $\Rightarrow$ sono equivalenti (1) $\alpha \sim \beta$ e (2) $\alpha_0(1) = \beta_0(1)$ e $\alpha_0 \sim \beta_0$!

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$: p è continua e $\alpha = p(\alpha_0)$, $\beta = p(\beta_0)$! $(1) \Rightarrow (2)$: preso $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tale che $\alpha \overset{F}{\sim} \beta$, osservato $F(\cdot, 0) = \alpha(\cdot) \overset{\text{ip.}}{=} p(\alpha_0(\cdot))$ $\Rightarrow$ esiste (unico) sollevamento $G : [0,1] \times [0,1] \to E$ di F tale che $G(\cdot, 0) = \alpha_0(\cdot)$ [$\nexists$ $F = p(G)$] : in realtà $\alpha_0 \overset{G}{\sim} \beta_0$; infatti $\beta(\cdot) = F(\cdot, 1) = p(G(\cdot, 1))$, e $G(0,1) = \epsilon \overset{\text{(unicità)}}{\Rightarrow} G(\cdot, 1) = \beta_0(\cdot)$! (In effetti $F(0,\cdot) = e = 1(e)$ e $G(0,0) = \epsilon \overset{\text{(viso)}}{\Rightarrow} G(0,\cdot) = \epsilon$!) ; Infine $b \equiv F(1,\cdot) = p(G(1,\cdot)) \overset{\text{(viso)}}{\Rightarrow} G(1,\cdot)$ è costante, e in particolare $\alpha_0(1) = G(1,0) = G(1,1) = \beta_0(1)$!

$\boxed{6}$ X semplicemente connesso $\Rightarrow$ ogni suo rivestimento connesso

$p : E \to X$ è banale (ossia un omeo.) !
$\underset{(E \text{ conn. per archi})}{}$

Basta p iniettivo: siano allora $e, e' \in E$ tali che $p(e) = p(e') =: x \in X$;

preso un $\tilde{\alpha} \in \Omega(E, e, e')$, $p(\tilde{\alpha}) \in \Omega(X, x) \overset{(\pi_1(X)=0)}{\Longrightarrow} p(\tilde{\alpha}) \sim 1_x$,

e visto che $\tilde{\alpha}, 1_e$ sono sollevamenti di $p(\tilde{\alpha}), 1_x$ risp. con

$0 \mapsto e$ $\;(1 \overset{p}{\mapsto} x)$ $\Rightarrow \underset{(e')}{\tilde{\alpha}(1)} = \underset{(e)}{1_e(1)}$!

S^1 non è semplicemente connesso !!

($\not\Rightarrow$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è sempl. conn. ! Inoltre certamente S^1 non è contrattile,

e $S^1 \subsetneq D^2$ non può essere un retratto di D^2 !)

$e : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ è un rivestimento (connesso) di S^1 non iniettivo:
(di grado numerabile!)

$\forall\, a < b$ reali, essendo $e^{-1}(e((a,b))) \overset{(ovvio)}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (a+n, b+n)$, $|b-a| < 1$

$\overset{(ovvio)}{\Longrightarrow} \{(a+n, b+n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono le componenti connesse di $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (a+n, b+n)$,

e infine facilmente $e_{|(a+n, b+n)} : (a+n, b+n) \to e((a+n, b+n)) = e((a,b))$ è

omeomorfismo !

$p: E \to X$ rivestimento e $f: S^2 \to X$ continua $\Rightarrow$ comunque scelti $x \in S^2$ ed $e \in p^{-1}(f(x))$, esiste (unico) sollevamento $g: S^2 \to E$ di f tale che $g(x) = e$!

[Posso supporre $x \equiv (1,0,0)$; considero un'identificazione $q: [0,1]\times[0,1] \to S^2$ che contrae il bordo di $[0,1]\times[0,1]$ nel punto $x \in S^2$ e che al tempo stesso induce un omeomorfismo $(0,1)\times(0,1) \to S^2 \setminus \{x\}$ ($\Rightarrow \forall x \in S^2$, $q^{-1}(x)$ è un connesso di $[0,1]^2$!): allora $f(q): [0,1]\times[0,1] \to \underset{(\text{continua})}{X}$ ha

$f(q)((\underset{(\in \partial[0,1]^2)}{\cdot},0)) \equiv f(x) = p(e)$, $\Rightarrow$ ammette un (solo) sollevamento

$h: [0,1]\times[0,1] \to \underset{(p(h)=f(q))}{E}$ tale che $e \equiv h(\cdot,0)$, ossia $h(\cdot,0) = 1_e(\cdot)$!

Inoltre, $\forall x \in S^2$, $h_{|q^{-1}(x)}$ solleva $f(q)_{|q^{-1}(x)}$ ($x \mapsto f(x)$ costante) $\Rightarrow$ $h_{|q^{-1}(x)}$ costante: dato che q è identificazione, esiste

$k: S^2 \to E$ continua tale che $h = k(q)$

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]\times[0,1]} \arrow[urr, dashed, "h"] \arrow[rr, "f(q)"] \arrow[d, "q"] & & X \\ S^2 \arrow[urr, "f"] \arrow[uurr, dashed, "k"] & & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow p(k(q)) = p(h) = f(q)$, $\overset{(q \text{ su}!)\,(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ $p(k) = f$; essendo d'altra parte $k(x) = k(q(\overset{(\text{qualsiasi})}{t},0)) = h(t,0) = e$, pongo $g := k$!]

Non esistono $f: S^2 \to S^1$ continue tale che $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^2$! ("Borsuk")

[In altre parole, $\forall f: S^2 \to S^1$ continua, esiste $x_0 \in S^2$ tale che $f(-x_0) \neq -f(x_0)$: considerato infatti $e: \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ e il "sollevamento" $g: S^2 \to \mathbb{R}$ di f ($\Rightarrow f = e(g)$), certamente esiste $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ $f(x) = f(-x)$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ $-f(x) \neq f(-x)$: scelgo $x_0 \equiv x$!]

$\forall g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua, esiste $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$! ($\Rightarrow$ g non è iniettiva, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ $\forall n \geq 3$, gli aperti di $\mathbb{R}^2$ non sono omeomorfi a quelli di $\mathbb{R}^n$!)

[Se per assurdo fosse esistente $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua con $g(x) \neq g(-x)$ $\forall x \in S^2$, allora esisterebbe anche

$$f: S^2 \to S^1 \quad \text{(continua)}$$
$$x \mapsto \frac{g(x) - g(-x)}{|g(x) - g(-x)|}$$

tale che $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^2$: impossibile !]

Non esistono $r: D^2 \to S^1$ continue tali che $r(-x) = -r(x)$ $\forall x \in S^1$! ($\overset{\text{(come già noto)}}{\Rightarrow}$ S^1 non è un retratto di D^2 !)

[Infatti altrimenti esisterebbe

$$f : S^2 \longrightarrow S^1$$

$$(x,y,z) \longmapsto \begin{cases} r(x,y) & z \geq 0 \\ -r(-x,-y) & z \leq 0 \end{cases}$$

continua con $f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$!

(Infine, allora, $\forall x \in S^1$ $\begin{cases} r(x) = x \\ \Downarrow \\ r(-x) = -x \end{cases} \Rightarrow -r(x) = r(-x)$!) $\rfloor$

("Brouwer") Ogni $f : D^2 \to D^2$ continua possiede (almeno) un punto fisso!

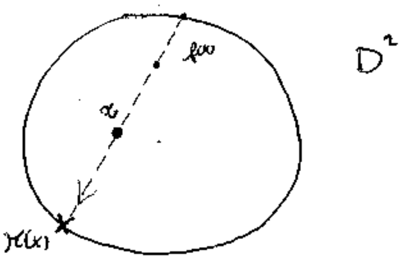
$\lceil$ Se per assurdo esistesse $f: D^2 \to D^2$ continua tale che $f(x) \neq x$ $\forall x \in D^2$, allora esisterebbe pure $g : D^2 \to S^1$ (continua) e

$$x \longmapsto \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}$$

quindi $r : D^2 \to S^1$ (continua), con $t \geq 0$ opportuno,

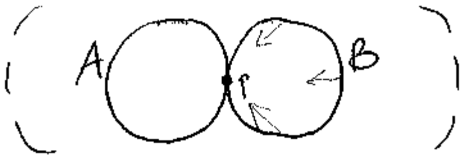
$$x \longmapsto x + t g(x)$$

tale che $r_{|S^1} = id_{S^1}$ (che è assurdo!) : infatti ($t \geq 0$ tale che) $|x + tg(x)|^2 = 1 \Leftrightarrow 1 = \langle x+tg(x) ; x+tg(x)\rangle = t^2 \cdot 1 + 2t(x \cdot g(x)) + |x|^2 \Leftrightarrow t^2 + 2(x \cdot g(x))t + |x|^2 - 1 = 0 \overset{(t\geq 0)}{\Leftrightarrow} t = -(x \cdot g(x)) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - |x|^2}$, e contemporaneamente $t = 0 \Leftrightarrow |x| = 1$! $\rfloor$

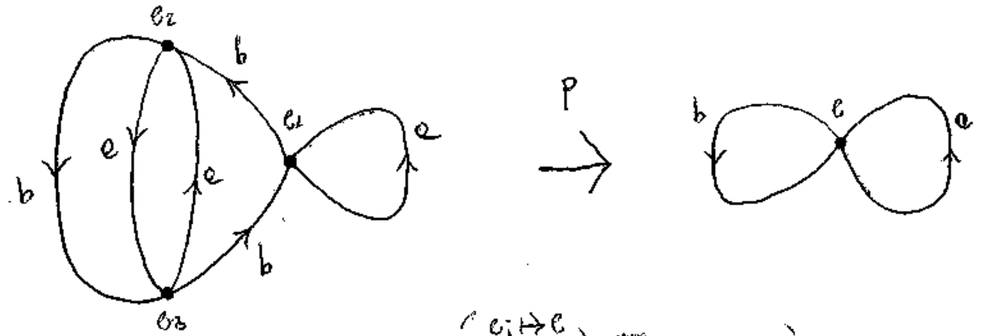


(senza punto fisso ho il segmento $\overline{x f(x)}$!)

L'unione di due circonferenze tangenti $A \cup B$ in p ("otto") si retrae su una delle due, diciamo A, grazie banalmente a $A \cup B \to A$, $x \mapsto \begin{cases} x & \text{se } x \in A \\ p & \text{se } x \in B \end{cases}$



Dunque A è un retratto di $A \cup B$: anche $A \cup B$ non è sempl. connesso! In effetti inoltre il suo gruppo fondamentale non è abeliano ($a * b \neq b * a$), come si evince subito osservando il suo rivestimento (connesso (non iniettivo) di grado 3)



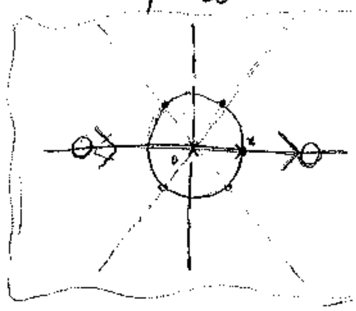
($e_i \mapsto e$, ovvero (lati interni lati $\mapsto$ lati interni lato))

!

$\forall\, n \geq 1$ (2), $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non è semplicemente connesso!

[La proiezione $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ($= \pi \circ i$) è un rivestimento (connesso) non iniettivo (precisamente di grado 2!): basta osservare che, $\forall x \in S^n$, è

$x \in U := \{y \in S^n \mid x \cdot y \neq 0\} \underset{(2)}{\overset{\text{(ovvio)}}{=}} p^{-1}(p(U))$, che



$U = \{y \in S^n \mid x \cdot y < 0\} \,\dot\cup\, \{y \in S^n \mid x \cdot y > 0\}$ e che

$p_{|\{x \cdot y < 0\}}$ e $p_{|\{x \cdot y > 0\}}$ sono omeomorfismi in $p(U)$!]

$\boxed{\text{NOTA}}$: $p : E \to X$ rivestimento è in particolare $p \in \mathcal{C}(E, X)$, per cui induce un omomorfismo (di gruppi) $\pi_1(p) \doteq p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(X, p(e))$
$[\alpha] \mapsto [p(\alpha)]$;
($\forall\, \alpha(1) = e$)

in realtà p_* è iniettivo ($\Rightarrow p_* \pi_1(E, e) \doteq p_*(\pi_1(E, e)) <$
$< \pi_1(X, p(e))$!) : basta infatti osservare che $\alpha(0) = e$
$\in p^{-1}(p(e)) \overset{(ovvio)}{\Longrightarrow} \alpha = (p(\alpha))_e$! ($\Rightarrow \pi_1(E, e) = 0 \Leftrightarrow p_* \pi_1(E, e) = 0$!)

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\forall\, \alpha \in \Omega(X, a, b)$ ed $e \in p^{-1}(a)$, $(i(\alpha))_{\alpha_e(1)} = i(\alpha_e)$!
($\Rightarrow i(\alpha) \in \Omega(X, b, a)$)

[$\alpha_e(0) = e$ e $\alpha_e(1) \in p^{-1}(b)$ (e $i(\alpha_e)(0) = \alpha_e(1)$), e inoltre $p(i(\alpha_e)) = i(p(\alpha_e)) = i(\alpha)$!]

$\boxed{\text{NOTA}}$: $\forall\, \alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$ ed $e \in p^{-1}(a)$, $\alpha * \beta \in \Omega(X, a, c)$
che $(\alpha * \beta)_e = \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}$!

[$\alpha_e(0) = e$ e $\alpha_e(1) \in p^{-1}(b)$, e inoltre $p(\alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}) = p(\alpha_e) * p(\beta_{\alpha_e(1)}) = \alpha * \beta$!]

$p: E \to X$ rivestimento : scelti $a, b \in X$, la **monodromia** di p (da a, b fissati) è l'applicazione

$$\mathrm{Mon} := \mathrm{Mon}_{a,b} : p^{-1}(a) \times \Omega(X, a, b) \to p^{-1}(b)$$
$$(e, \alpha) \longmapsto \alpha_e(1)$$

(1) $\forall \alpha \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta \in \Omega(X, b, c)$, se $e \in p^{-1}(a)$ allora

$$\mathrm{Mon}(e, \alpha * \beta) = \mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(e, \alpha), \beta) \; !$$

$$\left[(\alpha * \beta)_e \overset{\text{(visto?)}}{=} \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)} \; ! \right]$$

(2) Mon dipende solo dalla classe di omotopia di α (visto), $\Rightarrow$

$\forall e \in p^{-1}(a)$, $\mathrm{Mon}(e, \alpha * i(\alpha)) = \mathrm{Mon}(e, 1_a) \overset{\text{(visto)}}{=} e$!

$\Rightarrow$ Una bigezione fra le fibre del rivestimento è, a α fissato,

$$p^{-1}(a) \to p^{-1}(b) \qquad \text{l'inversa} \qquad p^{-1}(b) \to p^{-1}(a)$$
$$e \longmapsto \mathrm{Mon}(e, \alpha) \qquad\qquad e' \longmapsto \mathrm{Mon}(e', i(\alpha))$$

$$\left[\mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(e, \alpha), i(\alpha)) \overset{(1)}{=} \mathrm{Mon}(e, \alpha * i(\alpha)) = e \; ! \right]$$

(3) Mon induce $p^{-1}(a) \times \pi_1(X, \underset{p(e)}{a}) \to p^{-1}(a)$

$$(e, [\alpha]) \longmapsto \mathrm{Mon}(e, \alpha) =: e \cdot [\alpha] \quad ,$$

e questa soddisfa $e \cdot [1_a] = e$ e $e \cdot ([\alpha][\beta]) = (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]$! (evidente)

NOTA : $\forall \alpha, \beta \in \Omega(X, e)$ ed $b \in p^{-1}(e)$, $b \cdot [\alpha] = b \cdot [\beta] \Leftrightarrow$

$(b \cdot [\alpha]) \cdot \underbrace{[\beta]^{-1}}_{([i(\beta)])} = b$ (ossia $b \cdot [\alpha * i(\beta)] = b$!) !

$\Rightarrow$: $(b \cdot [\alpha]) \cdot [\beta]^{-1} \overset{ip.}{=} (b \cdot [\beta]) \cdot [\beta]^{-1} = b \cdot (\underbrace{[\beta][\beta]^{-1}}_{([1_e])}) = b$!

$\Leftarrow$: essendo anche $b = (b \cdot [\beta]) \cdot [\beta]^{-1}$, necessariamente $b \cdot [\alpha] = b \cdot [\beta]$!

---

(4) $p_\# \pi_1(E, b) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, p(b)) \mid b \cdot [\alpha] = b\}$!

$p_\# : \pi_1(E, b) \to \pi_1(X, p(b))$ e $(p(\tilde{\alpha}))_b = \tilde{\alpha}$ (che ha fine $\tilde{\alpha}(1) = b$) :
$[\tilde{\alpha}] \longmapsto [p(\tilde{\alpha})]$

($\supseteq$) : $\forall \alpha \in \Omega(X, p(b))$, se è fine $\alpha_b(1) = b$, allora $\alpha_b \in \Omega(E, b)$ tale è $p(\alpha_b) = \alpha$! ($\subseteq$) : ogni $[p(\tilde{\alpha})]$ è tale che $(p(\tilde{\alpha}))_b(1) = b$!

(5) $p : E \to X$ riv. CONNESSO $\Rightarrow$ ($\forall$) $e \in X$ ed $b \in p^{-1}(e)$,

$p^{-1}(e)$ è in biezione con l'insieme dei laterali destri di

$p_\# \pi_1(E, b)$ in $\pi_1(X, e)$!

Infatti $\pi_1(X, e) \to p^{-1}(e)$ è surgettiva e tale che
$[\alpha] \longmapsto b \cdot [\alpha]$

$b \cdot [\alpha] = b \cdot [\beta] \Leftrightarrow [\alpha][\beta]^{-1} \in p_\# \pi_1(E, b)$ ($\overset{(ovvio)}{\Leftrightarrow}$ $[\alpha], [\beta]$ stanno nel medesimo laterale destro di $p_\# \pi_1(E, b)$) : ovvio

$e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta] \overset{(\text{asso})}{\Longleftrightarrow} e \cdot ([\alpha][\beta]^{-1}) = e$, $\overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$ $[\alpha][\beta]^{-1} \in p_* \pi_1(E, e)$!

Suriettive, $\forall e' \in p^{-1}(e)$, essendo E connesso (e loc. conn. per archi) è E connesso per archi, $\Rightarrow \exists \gamma \in \Omega(E, e, e')$, tale che ovviamente $p(\gamma) \in \Omega(X, e)$; allora essendo $(p(\gamma))_e = \gamma \Rightarrow$ $e' = e \cdot [p(\gamma)]$!

$\Rightarrow \forall n \geq 2$, $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ (col +) ! [La proiezione $p: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un riv. connesso di grado 2 $\overset{(5)}{\Rightarrow}$ $p_* \pi_1(S^n)$ ha esattamente due laterali destri in $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$; ma $n \geq 2 \Rightarrow$ $\pi_1(S^n) = 0$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ $|\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))| = 2$!]

(6) $p: E \to X$ riv. connesso $\Rightarrow$ $\forall \alpha \in \Omega(X, e)$ ed $e \in p^{-1}(e)$,

$$p_* \pi_1(E, e \cdot [\alpha]) = \underset{([i(\alpha)])}{[\alpha]^{-1}} p_* \pi_1(E, e) [\alpha]$$ (ossia tutti e soli i coniugati di $p_* \pi_1(E, e)$ in $\pi_1(X, e)$ sono i $\{p_* \pi_1(E, e')\}_{e' \in p^{-1}(e)}$!)

[Basta mostrare che $[\alpha]^{-1} p_* \pi_1(E, e) [\alpha] \subseteq p_* \pi_1(E, e \cdot [\alpha])$ (perché $i(\alpha) \in \Omega(X, e)$ ha $(i(\alpha))_e = i(\alpha_e)$ $\Rightarrow$ $(i(\alpha))_e(0) = e \cdot [\alpha]$ e $e \cdot [i(\alpha)] = e$ $\Rightarrow$ $\underset{([\alpha])}{\underline{[i(\alpha)]^{-1}}}\, p_* \pi_1(E, e \cdot [\alpha])\, \underset{([\alpha]^{-1})}{\underbrace{[i(\alpha)]}} \subseteq p_* \pi_1(E, e)$!) : infatti è facilmente $i(\alpha_e)" \# \Omega(E, e) \# " \alpha_e \subseteq \Omega(E, e \cdot [\alpha])$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$

$[i(\alpha_0)]\,\pi_1(\tilde{E}, e)\,[\alpha_0] \subseteq \pi_1(E, e\cdot[\alpha])$, da cui chiaramente la tesi! $\rbrack$

---

(17)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi \text{ cont.}"] \arrow[d, "p \text{ riv.}"'] & F \arrow[d, "q \text{ riv.}"] \\ X \arrow[r, "f \text{ cont. (su)}"'] & Y \end{tikzcd}$$

$f(p) = q(\varphi) \implies$ ($\divideontimes$ $q(\varphi(e)) = f(p(e)) = f(x)$!)

$\implies \forall\, \alpha \in \Omega(X, x)$ ed $e \in p^{-1}(x)$, $\varphi(e)\cdot \underbrace{f_*([\alpha])}_{([f(\alpha)])} = \varphi(e\cdot[\alpha])$!

$\divideontimes$ $f(\alpha) \in \Omega(Y, f(x))$;

$\lbrack$ $\gamma := \varphi \circ \alpha_0$ è un cammino in F tale che $\gamma(0) = \varphi(e)$ e $q(\gamma) =$
$= q(\varphi(\alpha_0)) = f(p(\alpha_0)) = f(\alpha)$, ossia è tale che $\gamma = (f(\alpha))_{\varphi(e)}$
e in effetti $\gamma(1) = \varphi(\alpha_0(1))$! $\rbrack$

Un'azione sinistra di un gruppo G su un insieme T è un'applicazione

$$G \times T \longrightarrow T \qquad \text{tale che} \qquad \begin{cases} 1_G \cdot t = t \\ (gg') \cdot t = g \cdot (g' \cdot t) \end{cases} \quad (\forall t \in T \text{ e } \forall g, g' \in G);$$
$$(g, t) \longmapsto \text{"} g \cdot t \text{"}$$

ossia tale che resti definita, $\forall g \in G$ scelto, $L_g : \begin{matrix} T \longrightarrow T \\ t \longmapsto g \cdot t \end{matrix}$ tale

che $\begin{cases} L_{1_G} = id_T \\ L_{gg'} = L_g(L_{g'}) \end{cases}$ ($\Rightarrow$ L_g è bijettiva con $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$!).

Analogamente un'azione destra di un gruppo H su T è un'applicazione

$$T \times H \longrightarrow T \qquad \text{tale che} \qquad \begin{cases} t \cdot 1_H = t \\ t \cdot (hh') = (t \cdot h) \cdot h' \end{cases}, \text{ ossia}$$
$$(t, h) \longmapsto \text{"} t \cdot h \text{"}$$

tale che resti definita, $\forall h \in H$ scelto, $R_h : \begin{matrix} T \longrightarrow T \\ t \longmapsto t \cdot h \end{matrix}$ tale che

$\begin{cases} R_{1_H} = id_T \\ R_{hh'} = R_{h'}(R_h) \end{cases}$ ($\Rightarrow$ R_h bijettiva con $(R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$) !

($\boxed{\text{NOTA}}$: ogni azione destra (, risp. sinistra,) induce canonicamente un'azione sinistra (, risp. destra,) dello stesso gruppo H sullo stesso insieme T mediante la regola $h \cdot t := t \cdot h^{-1}$!

$\boxed{1_H \cdot t := t \cdot 1_H = t \;;\; (hh') \cdot t := t \cdot (hh')^{-1} = t \cdot (h'^{-1} h^{-1}) = \underbrace{(t \cdot h'^{-1})}_{(=: h' \cdot t)} \cdot h^{-1} =: h \cdot (h' \cdot t) \,!}$)

Un'azione sinistra di G su T e un'azione destra di H su T sono compatibili se, e solo se, $g \cdot (t \cdot h) = (g \cdot t) \cdot h$ ($\forall t \in T$ e $\forall g \in G, \forall h \in H$);

Un'azione sinistra di G su T è

(1) fedele $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall g \neq 1_G$, esiste $t \in T$ tale che $g \cdot t \neq t$ (ossia, $\forall g \neq 1_G$, $L_G \neq id_T$) ;

(2) libera $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall g \neq 1_G$, $g \cdot t \neq t$ $\forall t \in T$; ($\Rightarrow$ fedele)

(3) transitiva $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall t, s \in T$ ($t \neq s$), esiste $g \in G$ tale che $g \cdot t = s$.

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: un'azione sinistra di G su T è libera $\Leftrightarrow$ «$\forall g, h \in G$, esiste un $t \in T$ tale che $g \cdot t = h \cdot t$ (se, e) solo se, $g = h$» !

[$g \cdot t = h \cdot t \overset{\text{comp.}}{\Rightarrow} g^{-1} \cdot (g \cdot t) = g^{-1} \cdot (h \cdot t)$, cioè $t = (g^{-1}h) \cdot t$, $\overset{(2)}{\Rightarrow} g^{-1}h = 1_G$, e cioè $h = g$!]

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: un'azione sinistra di G su T è libera e transitiva $\Leftrightarrow$ $\forall t, s \in T$, $\exists!$ $g \in G$ tale che $g \cdot t = s$! ($\Rightarrow$ e $s = t$ vale soltanto solo $g = 1_G$!)

[$g \cdot t = s = g' \cdot t \overset{\text{NOTA 1}}{\Rightarrow} g = g'$!]

$\Rightarrow$ Avendo un'azione sinistra di G su T libera e transitiva, e una azione destra di H su T, possiamo definire, $\forall b \in T$ (!) scelto, l'applicazione

$$\vartheta_b : H \to G$$
$$h \mapsto \vartheta_b(h) := \text{quell'unico } g \in G \text{ tale che } g \cdot b = b \cdot h$$!

($\Rightarrow b \cdot h =: s \in T$)

($\Rightarrow \vartheta_b(h) \cdot b = b \cdot h$!)

$\rightarrow$ Se queste due azioni sono compatibili, allora $\vartheta_b : H \to G$ è omomorfismo (di gruppi), per cui $\ker(\vartheta_b) \underset{(*)}{=} \{h \in H \mid b \cdot h = b\}$ è $\triangleleft\ G$!

$\Big[\ \forall h, k \in H,\quad \vartheta_b(hk) \cdot b \doteq b \cdot (hk) = (b \cdot h) \cdot k = (\underbrace{\vartheta_b(h)}_{(\in G!)} \cdot b) \cdot k \overset{(\text{comp.})}{=}$

$= \vartheta_b(h) \cdot (b \cdot k) \doteq \vartheta_b(h) \cdot (\vartheta_b(k) \cdot b) = (\vartheta_b(h)\vartheta_b(k)) \cdot b \overset{(\text{az. libera})}{\Longrightarrow} \vartheta_b(hk) =$

$= \vartheta_b(h)\vartheta_b(k)$! $\Big]$

$\boxed{\text{NOTA}}$: ϑ_b è dipendente dalla scelta di $b \in T$; più precisamente (a meno di ...), per ogni altro $b' \in T$, se $g \in G$ è quell'unico tale che $g \cdot b = b'$, allora $\vartheta_{b'}(h) = g\,\vartheta_b(h)\,g^{-1}$ $(\forall h \in H)$ (ossia, considerato $\phi : G \to G$, $g' \mapsto g g' g^{-1}$, è $\vartheta_{b'} = \phi(\vartheta_b)$)!

$\Big[\ \forall h \in H,\ \begin{cases} b' \cdot h \doteq \vartheta_{b'}(h) \cdot b' = \vartheta_{b'}(h) \cdot (g \cdot b) = (\vartheta_{b'}(h) g) \cdot b \\ \quad\| \\ (g \cdot b) \cdot h \overset{(\text{comp.})}{=} g \cdot (b \cdot h) \doteq g \cdot (\vartheta_b(h) \cdot b) = (g\,\vartheta_b(h)) \cdot b \end{cases} \overset{(\text{az. lib.})}{\Longrightarrow}$

$\vartheta_{b'}(h)\,g = g\,\vartheta_b(h)$! $\Big]$

Siano E loc. conn. per archi, $G < \mathrm{Omeo}(E)$ che agisce in modo propriamente discontinuo (su E) e E/G connesso, cosicché (visto) $p := \pi : E \to E/G$ sia un rivestimento; indico $X := E/G$.

([NOTA]: per def. $p \circ g = p$!)

(a) $\forall e \in X$ scelto, $b \in p^{-1}(e) \Rightarrow g(b) \in p^{-1}(e)$ $\forall g \in G$!

[$\bigcup_{g \in G} \underbrace{g(\{b\})}_{(\{g(b)\})} = p^{-1}(\underbrace{p(\{b\})}_{(\{e\})})$!]

(b) $\forall e \in X$ scelto, vale che $\forall b, b' \in p^{-1}(e)$, $\exists!\, g \in G$ tale che $g(b) = b'$!

[I $g(\{b\})$ devono essere disgiunti! (az. prop. disc.!)]

$\Rightarrow$ (imm.) $\forall e \in X$ scelto, è azione sinistra di G su $p^{-1}(e)$ l'applicazione

$$\begin{aligned} G \times p^{-1}(e) &\longrightarrow p^{-1}(e) \\ (g, b) &\longmapsto g(b) \end{aligned}$$

ed è libera e transitiva!

(c) L'azione sinistra di G su $p^{-1}(e)$ e l'azione destra di monodromia di $\pi_1(X, e)$ su $p^{-1}(e)$ sono compatibili!

[Ossia, $\forall b \in p^{-1}(e)$ e $\forall g \in G$, $\forall \alpha \in \Omega(X, e)$, $g(b \cdot [\alpha]) = g(b) \cdot [\alpha]$:

ma infatti è banalmente commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{id_X} & X \end{array}$$!]

$\Rightarrow$ (visto) $\forall b \in p^{-1}(e)$ scelto, è omomorfismo

$$\begin{aligned} \theta_b : \pi_1(X, e) &\longrightarrow G \\ [\alpha] &\longmapsto \theta_b([\alpha]) := \text{quell'unico } g \in G \text{ tale che } g(b) = b \cdot [\alpha] \end{aligned}$$

(da (b))

per cui $\ker(\varphi_0) \overset{(visto)}{=} p_* \pi_1(E, e) \triangleleft \pi_1(X, e)$!

(b) E connesso $\Rightarrow \dfrac{\pi_1(X,e)}{p_*\pi_1(E,e)} \cong G$!

[Ora φ_0 è surgettiva: visto che E è in realtà conn. per archi, $\forall g \in G$ esiste $\gamma \in \Omega(E, e, g(e))$, $\Rightarrow p(\gamma) \in \Omega(X, e)$ ha esattamente $(p(\gamma))_0 = \gamma$, e effettivamente $\gamma(1) = g(e)$: $[p(\gamma)] \mapsto g$!]

($\boxed{\text{NOTA}}$: è allora $G \xrightarrow{\cong} \dfrac{\pi_1(X,e)}{p_*\pi_1(E,e)}$, $g \longmapsto$ la classe laterale che contiene $[p(\gamma)]$ con $\gamma \in \Omega(E, e, g(e))$!)

$\Rightarrow$ E semplicemente connesso (e $G < \mathrm{Omeo}(E)$ che vi agisce in modo propr. disc.) $\underset{(E/G = p(E)\ \text{conn. per archi!})}{\Rightarrow} \pi_1(E/G) \cong G$!

[$\pi_1(E) = 0 \overset{(ovvio)}{\Rightarrow} p_* \pi_1(E) = 0$, $\Rightarrow G \overset{(b)}{\cong} \dfrac{\pi_1(E/G)}{p_*\pi_1(E)} \cong \pi_1(E/G)$!]

$\pi_1(S^1) \cong \underset{(+)}{\mathbb{Z}}$! ["Intendendo" $\mathbb{Z}$ come $G = \langle x \mapsto x+1 \rangle < \mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$, (isom.)

che chiaramente agisce su $\underset{(sempl.conn.)}{\mathbb{R}}$ in modo propr. disc., da « $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow[t \mapsto e^{2\pi i t}]{\Phi} & S^1 \\ {\scriptstyle p=\pi}\downarrow & \nearrow_{\bar\Phi} & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} & & \end{array}$ » e da « Φ identificazione con fibre coincidenti con le classi di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ » deduco che

$\underset{(omeo.)}{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \overset{\bar\Phi}{\cong} S^1}$, $\Rightarrow \pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$!]

$p : E \to X$ rivestimento, Y connesso loc. conn. per archi e $f \in \mathcal{C}(Y, X)$: comunque scelti $y \in Y$ ed $e \in p^{-1}(f(y))$, esiste (unico) sollevamento $g \in \mathcal{C}(Y, E)$ di f tale che $g(y) = e$ $\Leftrightarrow$

$f_* \pi_1(Y, y) \subseteq p_* \pi_1(E, e)$!

$\boxed{(\Rightarrow)}$: $f = p(g) \overset{\text{(fun)}}{\Rightarrow} f_* = p_*(g_*)$, e in effetti $g_* : \pi_1(Y, y) \to \pi_1(E, g(y) = e)$! $(\Leftarrow)$: essendo pienamente Y conn. per archi, $\forall y' \in Y$ esiste $\alpha = \alpha_{y'} \in \Omega(Y, y, y')$, per cui $f(\alpha) \in \Omega(X, f(y), f(y'))$; posti $x := f(y)$ e $x' := f(y')$, e considerate le monodromie di p (e x, x' fissato) $\text{Mon} : \underset{(e^*)}{p^{-1}(x)} \times \underset{(f(\alpha))}{\Omega(X, x, x')} \to p^{-1}(x')$, dico che g è esattamente $g : Y \to (p^{-1}(x') \subseteq) E$:

$y' \underset{(\alpha := \alpha_{y'})}{\longmapsto} \text{Mon}(e, f(\alpha))$

Ovviamente, sarebbe ovviamente $f = p(g)$; inoltre è ben definita, ossia $\alpha, \beta \in \Omega(Y, y, y') \Rightarrow \text{Mon}(e, f(\alpha)) = \text{Mon}(e, f(\beta))$ (: ciò infatti equivale a $e \cdot [f(\alpha)] = e \cdot [f(\beta)]$, $\overset{\text{(azion)}}{\Leftrightarrow} e = (e \cdot [f(\alpha)]) \cdot [f(\beta)]^{-1}$, $\overset{(i(f(\beta)) = f(i(\beta)))}{\Leftrightarrow}$ $e = e \cdot [f(\alpha * i(\beta))]$, cioè $[f(\alpha * i(\beta))] \in p_* \pi_1(E, e)$; questo in effetti è vero in quanto $\alpha * i(\beta) \in \Omega(Y, y)$ e $f_* \pi_1(Y, y) \overset{\text{ip.}}{\subseteq} p_* \pi_1(E, e)$!)

Inoltre è continua, perché lo è in ogni punto : $\forall y' \in Y$ e

$\forall\, A \subseteq E$ intorno aperto di $g(y')$, esiste un intorno aperto $W \subseteq Y$ di y' tale che $g(W) \subseteq A$; infatti, per cominciare, visto che $g(y') \overset{p}{\mapsto} x'$, è $g(y') \in p^{-1}(V)$ essendo preso un aperto banalizzante $V \subseteq X$ di x tale che $x' \in V$: allora $g(y') \in U \subseteq p^{-1}(V)$ componente connessa $\underset{\text{(aperta!)}}{}$ in $p^{-1}(V)$, e certamente $p_{|U} : U \to p(U) = V$ è omeomorfismo; dunque $g(y') \in \underset{\text{(aperto)}}{A \cap U}$,

$\Rightarrow x' = f(y') \in \underbrace{p(A\cap U)}_{\text{(aperto!)}} \ (\overset{(A\cap U \subseteq U)}{\subseteq} V)$, $\overset{(f \text{ cont.})}{\Longrightarrow}$ esiste intorno aperto $W \subseteq Y$ e connesso per archi di y' tale che $f(W) \subseteq p(A\cap U)\ (\subseteq V)$, e effetto $g(W) \subseteq A$: scelto $\alpha \in \Omega(Y, y, \underset{(\in W)}{y'})$, $\forall\, w \in W$ esiste in effetto $\beta \in \Omega(W, y', w)$ $\underset{(\Rightarrow \alpha * \beta \in \Omega(Y, y, w))}{}$ $\Rightarrow f(\beta) \in \Omega(\underset{(\subseteq p(A\cap U))}{f(W)}, x', f(w))$, $\xrightarrow[\text{quindi}]{(p_{|A\cap U} \text{ biiezione!})}$

$\Rightarrow \left(\widetilde{f(\beta)}\right)_{g(y')} \in A \cap U \ (\forall w \in W)$, e perciò $g(y') = \mathrm{Mon}(e, f(\alpha)) \Rightarrow$

$g(w) = \mathrm{Mon}(e, \underbrace{f(\alpha * \beta)}_{(= f(\alpha) * f(\beta))}) = \mathrm{Mon}(g(y'), f(\beta)) \in U \cap A \subseteq A$!!

$\boxed{\text{NOTA}}$: è $f_* \pi_1(Y, y) \subseteq p_* \pi_1(E, e)$ certamente se $\pi_1(Y) = 0$ o se f_* è banale!

$\boxed{\text{OSS.}}$: X conn. per archi, $f: X \to Y$ continua $\underset{f(X) \text{ conn. per archi}}{}$ $\Rightarrow$ $\forall\, e, e'$ e X scelti, esiste $\gamma \in \Omega(\underset{(f(X))}{Y}, f(e), f(e'))$ tale che

$\gamma_*: \pi_1(Y, f(e)) \to \pi_1(Y, f(e'))$ sia isomorfismo (di gruppi) $_{(\text{NOTO})}$ con
$[\alpha] \longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$

$\gamma_* f_* \pi_1(X, e) = f_* \pi_1(X, e')$! (Dunque $f_* \pi_1(X, e) \vartriangleleft$

$\vartriangleleft \pi_1(Y, f(e)) \overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow} f_* \pi_1(X, e') \vartriangleleft \pi_1(Y, f(e'))$!)

[Chiaramente basta $\gamma_* f_* \pi_1(X, e) \subseteq f_* \pi_1(X, e')$ (perché simmetricamente avrei anche $\underbrace{(i(\gamma))_*}_{(=(\gamma_*)^{-1}!)} f_* \pi_1(X, e') \subseteq f_* \pi_1(X, e)$!) : ma infatti esiste

$\delta \in \Omega(X, e, e')$, per cui $\delta_*: \pi_1(X, e) \to \pi_1(X, e')$, e $\gamma :=$
$[\beta] \longmapsto [i(\delta) * \beta * \delta]$

$:= f(\delta)$ $(\in \Omega(Y, f(e), f(e')))$ è tale che $\gamma_* f_* [\beta] = \gamma_* [f(\beta)] =$

$= [i(\gamma) * f(\beta) * \gamma] = [f(i(\delta) * \beta * \delta)] = f_* \delta_* [\beta]$!]

$p: E \to X$ rivestimento : p è regolare $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ $\underset{(E)}{p}$ è connesso e, scelto $b \in E$, $p_* \pi_1(E, b) \vartriangleleft \pi_1(X, p(b))$.

$\boxed{\text{NOTE}}$: (1) è buona def. (E conn. per archi, p cont. e su $\Rightarrow$ e X conn. per archi) $_{(\text{OSS. PREC.!})}$

(2) E semplicemente connesso $\underset{(\pi_1(E)=0!)}{\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}}$ $p: E \to X$ è regolare ;

(3) $\pi_1(X)$ abeliano $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ $p: \underset{(\text{CONN.})}{E} \to X$ è regolare ;

(4) ogni riv. connesso di grado 2 è regolare ; $_{(\text{IMM.})}$

(5) E conn. loc. conn. per archi con $G < \mathrm{Omeo}(E)$ $\underset{(\Rightarrow E/G \text{ conn.})}{}$ che vi agisce in modo propr. disc. $\overset{\text{(visto)}}{\Longrightarrow}$ $p := \pi : E \to E/G$ è riv. regolare!

$p_1 : E_1 \to X$ e $p_2 : E_2 \to X$ rivestimenti, e $\varphi : E_1 \to E_2$: φ è un morfismo di p_1 e p_2 (o meglio di p_1 rispetto a p_2) $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ φ è continua e tale che $p_1 = p_2(\varphi)$ (cioè φ è un sollevamento di p_1 rispetto a p_2);

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

φ è un isomorfismo (di p_1 e p_2) $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ φ è un morfismo di p_1 e p_2, è bigettiva e $\varphi^{-1} : E_2 \to E_1$ è un morfismo di p_2 e p_1! ($\Rightarrow$ φ^{-1} isomorfismo di p_2 e p_1)

$\boxed{\text{NOTE}}$: (1) g sollevamento di f rispetto a p_1 $\Rightarrow$ $\varphi(g)$ sollevamento di f rispetto a p_2; ($p_2(\varphi(g)) = p_1(g) \overset{(1)}{=} f$)

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"] & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X & \end{tikzcd}$$

(2) E_1 connesso $\overset{\text{(visto)}}{\Longrightarrow}$ se φ, ψ sono morfismi di p_1 e p_2, allora o $\varphi \equiv \psi$ o $\varphi(e) \neq \psi(e)$ $\forall\, e \in E_1$!

(3) $\begin{cases} \varphi \text{ morf. di } p_1 \text{ e } p_2 \\ \psi \text{ morf. di } p_2 \text{ e } p_3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\psi(\varphi)$ morf. di p_1 e p_3! ($p_3(\psi(\varphi)) = p_2(\varphi) = p_1$)

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & E_2 \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "p_2"] & E_3 \arrow[dl, "p_3"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(4) $\begin{cases} \varphi \text{ isomorf. di } p_1 \text{ e } p_2 \\ \psi \text{ isomorf. di } p_2 \text{ e } p_3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\psi(\varphi)$ isomorf. di p_1 e p_3!

[$\psi(\varphi)$ è morf. (3) bigettivo con $(\psi(\varphi))^{-1} = \varphi^{-1}(\psi^{-1})$ morf. (3)!]

(5) un isomorfismo è un omeomorfismo!

È definito (???) $Aut(E,p) := \{\varphi : E \to E \mid \varphi \text{ isomorfismo di } p\} < Omeo(E)$ (cioè $p = p(\varphi)$!)

per cui (visto) $Aut(E,p)$ è tale che, $\forall e \in X$ scelto, sia azione sinistra di $Aut(E,p)$ su $p^{-1}(e)$ l'applicazione $Aut(E,p) \times p^{-1}(e) \to p^{-1}(e)$; $(\varphi, b) \mapsto \varphi(b)$

Allora, considerato

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p \text{ (identif. aperta)}"] \arrow[d, "\pi \text{ (identif.)}"'] & X \\ E/Aut(E,p) \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

, p costante sulle orbite ($\forall b, b' \in E$, $b' = \varphi(b)$ (ovvio!) $\Rightarrow p(b') = p(\varphi(b)) = p(b)$!)

$\Rightarrow$ (visto!) esiste (unica) $\tilde{p}$ identificazione aperta tale che $p = \tilde{p}(\pi)$,

e chiaramente $\tilde{p}$ è omeo $\Leftrightarrow$ l'azione di $Aut(E,p)$ sulle fibre di p è transitiva!

[$\tilde{p}$ è omeo $\overset{\text{(visto)}}{\Leftrightarrow}$ le orbite coincidono con le fibre di p $\overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow}$ comunque scelto $e \in X$, e $\forall b, b' \in p^{-1}(e)$, $\exists \varphi \in Aut(E,p)$ tale che $b' = \varphi(b)$!]

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: $\forall \varphi \in Aut(E,p)$ (in quanto $\in Omeo(E)$!) ed $b \in E$, $\varphi_* \pi_1(E,b) = \pi_1(E, \varphi(b))$!

[Se $\subseteq$ è facile, per cui vale anche per φ^{-1} e $\varphi(b) \in E$, ossia $(\varphi^{-1})_* \pi_1(E, \varphi(b)) \subseteq \pi_1(E, \underbrace{\varphi^{-1}(\varphi(b))}_{(= b!)})$: ma $(\varphi^{-1})_* \overset{\text{(ovvio)}}{=} (\varphi_*)^{-1}$!]

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: comunque scelti $e \in X$ ed $b, b' \in p^{-1}(e)$, l'azione di $Aut(E,p)$ su $p^{-1}(e)$ è transitiva $\Rightarrow$ $p_\# \pi_1(E,b) = p_\# \pi_1(E,b')$!

[Dato che esiste $\varphi \in Aut(E,p)$ con $\varphi(b) = b'$, è $p_\# \pi_1(E,b') =$

$= p_* \pi_1(E, \varphi(b)) \overset{\text{(visto ora)}}{=} p_* \varphi_* \pi_1(E,b) \overset{\text{(ovvio)}}{=} (p\varphi)_* \pi_1(E,b) \overset{\text{(!?)}}{=} p_* \pi_1(E,b)$! □

(1) E connesso, e $a \in X$, $b, b' \in p^{-1}(a)$ arbitrari : $p_* \pi_1(E,b) = p_* \pi_1(E,b') \overset{(!!)}{\iff}$ l'azione di $Aut(E,p)$ su $p^{-1}(a)$ è transitiva !

[E connesso (e loc. conn. per archi) e $p \in C(E,X)$ implicano (visto!)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

(ψ) (φ)

$$\begin{cases} p_* \pi_1(E,b') \subseteq p_* \pi_1(E,b) \ , & b \in p^{-1}(p(b')) \\ p_* \pi_1(E,b) \subseteq p_* \pi_1(E,b') \ , & b' \in p^{-1}(p(b)) \end{cases} \overset{\text{(è!)}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists!\ \psi \text{ morf. di } p \text{ tale che } \psi(b') = b \\ \exists!\ \varphi \text{ morf. di } p \text{ tale che } \varphi(b) = b' \end{cases} , \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \begin{cases} \varphi(\psi(b')) = b' \\ \psi(\varphi(b)) = b \end{cases} , \overset{(E \text{ connesso!})}{\Longrightarrow}$$

$\varphi(\psi) = \psi(\varphi) = id_E$, per cui palesemente $\varphi, \psi \in Aut(E,p)$! □

(2) E connesso $\Rightarrow$ $Aut(E,p)$ vi agisce in modo propr. discontinuo! (e $E/Aut(E,p)$ è connesso!)

$\overset{\text{(visto!)}}{\Rightarrow} \forall b \in E, \ \dfrac{\pi_1(X, p(b))}{p_* \pi_1(E,b)} \cong Aut(E,p)$! ;

[$\forall b \in E$, sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante di p tale che $p(b) \in V$, e sia quindi $b \in U$ comp. conn. $\subseteq p^{-1}(V)$ $\left(p|_U : U \to p(U) = V \text{ omeo.!}\right)$: allora $\varphi \in Aut(E,p)$ tale che $U \cap \varphi(U) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi = id_E$! Infatti, se $b' \in U \cap \varphi(U)$, e cioè se $b', \varphi^{-1}(b') \in U$, $\underset{(p!)}{p}(\varphi^{-1}(b')) = p(b') \Rightarrow$

$\overset{(p|_U \text{ iniett.})}{\Longrightarrow} \varphi^{-1}(b') = b'$, $\overset{(E \text{ conn.})}{\Longrightarrow} \varphi^{-1} = id_E$! □

(Ricordando che, $\forall a \in X$ ed $b \in p^{-1}(a)$, E connesso $\Rightarrow$ tutti e soli i coniugati di $p_* \pi_1(E,b)$ in $\pi_1(X,a)$ sono i $\{p_* \pi_1(E,b')\}_{b' \in p^{-1}(a)}$,)

$\xRightarrow{\text{(imm.)}}$ $p: E \to X$ riv. connesso : p è regolare $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Aut}(E,p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p, $\Leftrightarrow$

$E/\mathrm{Aut}(E,p) \overset{(\bar{p})}{\cong} X$!

$u: \tilde{X} \to X$ rivestimento : u è universale $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ $\tilde{X}$ è semplicemente connesso (connesso) ; allora u è regolare, per cui $\mathrm{Aut}(\tilde{X},u)$ agiscono transitivamente sulle fibre di u e $\pi_1(X) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{X},u)$!

X è semilocalmente semplicemente connesso $\overset{\text{DEF.}}{\Leftrightarrow}$ ogni punto di X ammette un intorno connesso per archi V tale che, se $i: \underset{x \longmapsto x}{V \hookrightarrow X}$, allora $i_* \pi_1(V) = 0$ in $\pi_1(X)$.

(1) $u: \tilde{X} \to X$ riv. universale $\Rightarrow$ X semiloc. sempl. conn. !

$\boxed{}$ Ogni punto di X sta in un aperto banalizzante $V \subseteq X$ di u, e dalla parte certamente esiste una sezione continua $s: V \to \tilde{X}$, per cui (se $i: V \to X$) $\forall x \in V$, $i_* \pi_1(V,x) \overset{(i = u(s)!)}{=} u_* \underbrace{s_*} \pi_1(V,x) \overset{(\text{ovvio})}{\subseteq} u_* \underbrace{\pi_1(\tilde{X}, s(x))}_{(=0!)} =$

$= 0$! $\square$

(2)
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, dashed, "\phi"] \arrow[dr, "u"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
(u riv. universale, p riv.) $\Rightarrow$ comunque scelto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ed $e \in p^{-1}(u(\tilde{x}))$, esiste (unico) morfismo ϕ di u e p tale che $\phi(\tilde{x}) = e$! $\xRightarrow{\text{(imm.)}}$ i rivestimenti universali di uno sp. top. X sono tutti "isomorfi" fra loro !

Basta osservare che $\tilde{X}$ è conn. loc. conn. per archi e $u \in \mathcal{G}(\tilde{X}, X)$ è tale che $u_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \overset{\text{s.c.}}{=} 0 \subseteq p_* \pi_1(E, e)$! ⌟

NOTA: Considerato $p: E \to X$ riv. ed $e \in X$, E connesso (per archi) $\Leftrightarrow$ l'azione destra di monodromia di $\pi_1(X, e)$ su $p^{-1}(e)$ $\quad p^{-1}(e) \times \pi_1(X,e) \to p^{-1}(e)$, $(\sigma, [\alpha]) \mapsto \sigma \cdot [\alpha]$ $(\alpha_\sigma(1))$ è transitiva !

($\Rightarrow$): Ho già visto che, $\forall \sigma \in p^{-1}(e)$, $\pi_1(X, e) \to p^{-1}(e)$, $[\alpha] \mapsto \sigma \cdot [\alpha]$ è surgettiva ! (E conn.)

($\Leftarrow$): per ipotesi, $p^{-1}(e)$ è tutta contenuta in una comp. conn. per archi; dato poi che X è conn. per archi, $\forall \sigma \in E$ esiste $\alpha \in \Omega(X, p(\sigma), e)$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ α_σ connette σ ad un punto in $p^{-1}(e)$, ossia σ giace nella medesima comp. conn. per archi contenente $p^{-1}(e)$! ⌟

Ricordando infine che, $\forall e \in X$ ed $\sigma \in p^{-1}(e)$, $p_* \pi_1(E, \sigma) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, e) \mid \sigma \cdot [\alpha] = \sigma\}$,

a) $p: E \to X$ riv. : p universale $\Leftrightarrow$ l'azione destra di monodromia è libera e transitiva !

È libera $\overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow}$ $p_* \pi_1(E, \sigma) = 0$, $\underset{\text{(in.)}}{\overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow}}$ $\pi_1(E, \sigma) = 0$! ⌟

b) $p: E \to X$ riv. : p regolare $\overset{\text{(ovvio)}}{\Leftrightarrow}$ l'azione destra di monodromia è transitiva ed i $p_* \pi_1(E, \sigma)$ sono normali !

X sp. top. ; $A, B \subseteq X$ tali che esiste $x_0 \in A \cap B$ $\Rightarrow$ considerate le inclusioni $\begin{cases} A\cap B \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A \\ A\cap B \overset{\beta}{\hookrightarrow} B \\ A \overset{f}{\hookrightarrow} X \\ B \overset{g}{\hookrightarrow} X \end{cases}$ ($\not\Rightarrow^{\text{(ovvio)}}$ $f(\alpha) = g(\beta)$!), allora è chiaramente diagramma commutativo di omomorfismi (di gruppi)

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] \arrow[rr, dotted] & & \pi_1(X, x_0) \\ & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

!

(VAN KAMPEN I) $A, B \subseteq X$ aperti tali che $X = A \cup B$ e $x_0 \in A \cap B$: A, B e $A\cap B_{(\neq \emptyset)}$ connessi per archi $\Rightarrow$ comunque considerato un gruppo G ed una coppia di omomorfismi $h, k : \pi_1(A, x_0), \pi_1(B, x_0) \to G$ risp. tali che $h(\alpha_*) = k(\beta_*)$, esiste unico omomorfismo $\varphi : \pi_1(X, x_0) \to G$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\ \pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] \arrow[r, dotted] & G & \pi_1(X, x_0) \arrow[l, dashed, "\varphi"'] \\ & \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] & \end{tikzcd}$$

! $\left(\begin{cases} h = \varphi(f_*) \\ k = \varphi(g_*) \end{cases} \right)$

($\not\Rightarrow^{\text{(ovvio)}}$ $\varphi = id_{\pi_1(X, x_0)}$ è l'unico omo. tale che $\begin{cases} f_* = \varphi(f_*) \\ g_* = \varphi(g_*) \end{cases}$!)

Idea : visto che $\forall \gamma \in \Omega(X, x_0)$ esistono $a_1, \dots, a_n \in \Omega(A, x_0)$ e $b_1, \dots, b_n \in \Omega(B, x_0)$ tali che $\gamma \sim f(a_1) * g(b_1) * \dots * f(a_n) * g(b_n)$, cioè tali che $[\gamma] = f_*[a_1] g_*[b_1] \cdots f_*[a_n] g_*[b_n]$, è naturale definire

$(\forall\, [\gamma] \in \pi_1(X,x_0))$ $\quad \varphi[\gamma] \equiv h[a_1]\,k[b_1]\cdots h[a_n]\,k[b_n]$ (EG!) : risulterebbe quindi evidente che φ sarebbe il solo omomorfismo tale che in generale $h \equiv \varphi(f_*)$ e $k \equiv \varphi(g_*)$, se però φ fosse ben definito ......]

$\boxed{\text{NOTA}}$: β_* surgettivo $\Rightarrow$ f_* surgettivo ! (Oltre che $\pi_1(B,x_0) \cong \dfrac{\pi_1(A\cap B,x_0)}{\ker \beta_*}$!)

[$[\gamma] = f_*[a_1]\,\underset{(\beta(e_1'))}{g_*[b_1]}\cdots f_*[a_n]\,\underset{(\beta(e_n'))}{g_*[b_n]} \overset{(g_*(\beta)=f_*(\alpha))}{=} f_*[a_1 * \alpha(e_1') * \ldots * a_n * \alpha(e_n')]$!]

Se H è gruppo e $S \subseteq H$, allora indichiamo con "$\langle S \rangle$" il più piccolo sgr. normale di H contenente S (cioè$_{(\text{num.})}$ $\langle S \rangle \equiv \langle \{ h s h^{-1} \mid h \in H, s \in S\} \rangle_{(\text{sgr.})}$!).

$\Rightarrow$ β_* surgettivo $\Rightarrow$ f_* surgettivo con $\ker f_* = \langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle$,

cioè$_{(\text{ovvio})}$ $\quad \pi_1(X,x_0) \cong \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle}$!

(In particolare, β_* isomorfismo $\underset{(\text{ovvio})}{\Rightarrow}$ f_* isomorfismo !)

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle} & \pi_1(X,x_0) \arrow[l, dotted, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Certamente $\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle \triangleleft \pi_1(A,x_0)$; se $h : \pi_1(A,x_0) \to \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle}$ è la proiezione al quoziente, $h(\alpha_*)_{|\ker \beta_*} \overset{(\text{ovvio})}{\equiv} 0$ $\Rightarrow$

$h(\alpha_*)$ "si fattorizza" ad un omo. $k : \pi_1(B,x_0) \cong \dfrac{\pi_1(A\cap B,x_0)}{\ker \beta_*} \to \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle}$

(ovvero $h(\alpha_*) = k(\beta_*)$!) , $\overset{(\text{V.K.})}{\Rightarrow}$ $\exists!$ omo. $\varphi : \pi_1(X,x_0) \to \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_* \ker \beta_* \rangle}$ tale che

$h = \varphi(f_*)$ e $k = \varphi(g_*)$, e inoltre φ è surgettivo (h lo è!) ;

ora, $\Lambda_*(\alpha_*) = \beta_*(\beta_*) \overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \ker\beta_* \subseteq \ker \Lambda_*(\alpha_*)$, $\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow} \alpha_*\ker\beta_* \subseteq \ker\Lambda_*$ $\left(\trianglelefteq \pi_1(A,x_0)!\right)$,

$\Rightarrow$ Λ_* si fattorizza ad un omo. $\psi: \dfrac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_*\ker\beta_*\rangle} \to \pi_1(X,x_0)$,

ossia $\Lambda_* = \psi(h)$, $\overset{h=\varphi(\Lambda_*)}{\Rightarrow} \Lambda_* = \psi\varphi(\Lambda_*)$, cioè $\underset{\text{(o v.k., o }\Lambda_*\text{ su!)}}{}$ $\psi\varphi = id_{\pi_1(X,x_0)}$

e φ è anche iniettiva! $\triangleleft$

Un gruppo libero generato da un insieme S è il dato di un gruppo F e di un'applicazione $\phi: S \to F$ (brevemente è $\phi: S \to F$) tale che, comunque considerati un gruppo H ed un'applicazione $\psi: S \to H$, esiste unico omomorfismo (di gruppi) $\eta: F \to H$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & H \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists! \eta"'] & \end{tikzcd}$$

, ossia $\psi = \eta(\phi)$.

$\overset{\text{(ovvio)}}{\Rightarrow}$ $\eta := id_F$ è il solo omo. $F \to F$ tale che $\phi = \eta(\phi)$!)

(NOTA: "il" gruppo libero generato dal $\varnothing$ è (quasi tautologicamente) quello banale!)

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: $\phi: S \to F$ gruppo libero gen. da S $\Rightarrow$ ϕ è iniettiva!

Siano $a \neq b$ arbitrari in S; considerato un qualsiasi gruppo H con $|H| \geq 2$ e una qualsiasi appl. $\psi: S \to H$ con $\psi(a) \neq \psi(b)$, sapendo che $\psi = \eta(\phi)$ è ovvio che debba essere $\phi(a) \neq \phi(b)$! $\square$

NOTA 2: Due gruppi liberi F e ϕ, F' e ϕ' generati dal medesimo insieme S sono canonicamente isomorfi: $\exists!\ \eta : F \to F'$ isomorfismo tale che $\phi' = \eta(\phi)$!

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\phi"'] & F' \arrow[dl, dashed, bend left, "\eta'"] \\ F \arrow[ur, dashed, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\ \eta : F \to F'$ omo. tale che $\phi' = \eta(\phi)$ & $\exists!\ \eta' : F' \to F$ tale che $\phi = \eta'(\phi')$, $= \underbrace{\eta'(\eta(\phi))}_{(\text{omo. } F \to F)} \overset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow} \eta'\eta = id_F$, e analog. $\eta\eta' = id_{F'}$!

NOTA 3: esiste chiaramente una biezione naturale tra le applicazioni $\psi : S \to H$ e gli omomorfismi $\eta : F \to H$ (se $\phi : S \to F$ è gr. lib. gen. da S)!

L'unica cosa è la surgettività, ma basta η omo. tale da $\psi \doteq \eta(\phi)$!

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\psi"', "\text{appl.}"] \arrow[d, "\phi"'] & H \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists!\eta \text{ omo.}"'] & \end{tikzcd}$$

con $\psi = \eta(\phi)$

(1) $\phi : S \to F$ gruppo libero gen. da $S \Longrightarrow F \underset{(S)}{=} \langle \phi(S) \rangle$!

Ossia l'omo. d'inclusione $i : \langle \phi(S) \rangle \hookrightarrow F$ è surgettivo: infatti, visto che ovviamente $\phi(S) \subseteq \langle \phi(S) \rangle_{(\subseteq F))}$, considero un'applicazione $\psi : S \to \langle \phi(S) \rangle (\subseteq F)$ tale che $\phi = i(\psi)$; dato che contemporaneamente esiste (unico) omo. $\eta : F \to \langle \phi(S) \rangle$ tale che $\psi = \eta(\phi)$, $\Longrightarrow \phi = i(\psi) = \underbrace{i(\eta(\phi))}_{(\text{omo. } F \to F)} \overset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow} i\eta = id_F$, $\overset{(\text{ovvio})}{\Longrightarrow}$ i surgettivo!

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"'] & \langle \phi(S) \rangle \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists!\eta"'] & \end{tikzcd}$$

(2) F (e ϕ) generato da S, e G (e ϕ') generato da T : $\underset{(|F|=|G|)}{F \cong G}$ e T finito $\Rightarrow |S| = |T|$!

[Certamente sono in biezione le applicazioni $\psi : S \to \mathbb{Z}_2$ e gli omomorfismi $\eta : F \to \mathbb{Z}_2$, dove il gruppo libero $\phi : S \to F$ gen. da S determina univocamente l'ordinale $2^{|F|} = 2^{|S|}$; simmetricamente $\phi' : T \to G$ determina $2^{|G|} = 2^{|T|}$, quindi $F \cong G \Rightarrow 2^{|S|} = \underset{(<\infty!)}{2^{|T|}}$!]

NOTA : il gruppo libero generato dal singoletto $\{*\}$ è $\phi : \{*\} \to \mathbb{Z}$, $* \mapsto 1$

(e, ovviamente, tutti gli insiemi aventi per gruppo libero $\mathbb{Z}$ sono singoletti !) !

(3) Per ogni insieme esiste il gruppo libero da esso generato !

$\forall S$ insieme, posso definire $F_S \doteq$ «le parole ridotte nell'alfabeto $S(\cup S^{-1})$»,

ossia mettere assieme le parole vuote, cioè "1", e tutte le espressioni finite del tipo $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \dots s_n^{a_n}$ $(n \geq 1)$ al variare degli $s_k \in S$ e con (soprattutto) $a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $s_k \neq s_{k+1}$; allora $S \underset{*}{\subsetneq} F_S$.

Definendo (su F_S)

$$(s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n})(t_1^{b_1} \dots t_m^{b_m}) \doteq \begin{cases} s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n} t_1^{b_1} \dots t_m^{b_m} & \text{se } t_1 \neq s_n \\ s_1^{a_1} \dots s_n^{a_n+b_1} t_2^{b_2} \dots t_m^{b_m} & \text{se } t_1 = s_n \text{ e } a_n + b_1 \neq 0 \\ s_1^{a_1} \dots s_{n-1}^{a_{n-1}} t_2^{b_2} \dots t_m^{b_m} & \text{se } t_1 = s_n \text{ e } a_n + b_1 = 0 \end{cases},$$

ho chiaramente un'operazione su F_S con el. neutro 1 e tale che $(s_1^{e_1}\dots s_m^{e_m})^{-1} = s_m^{-e_m}\dots s_1^{-e_1}$; inoltre, come è decisamente intuitivo, sarebbe pure associativa: pertanto F_S è un gruppo, ed è ovvio che $F_S \underset{(\leq)}{=} \langle S\rangle$! In effetti è gruppo libero gen. da S $i: S \hookrightarrow F_S$: comunque considerati un gruppo H ed un'appl. $f: S\to H$, infatti, è palese che f si estende univocamente all'omomorfismo

$$\eta: F_S \longrightarrow H \qquad s_1^{e_1}\dots s_m^{e_m} \longmapsto f(s_1)^{e_1}\cdots f(s_m)^{e_m}$$

!

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & H \\ F_S \arrow[ur, dashed, "\exists!\eta \text{ omo con } f=\eta(i)"'] & \end{tikzcd}$$

Il prodotto libero di una famiglia di gruppi $(G_s)_{s\in S}$ è il dato di un gruppo $F \doteq \ast_{s\in S} G_s$ e di una famiglia di omomorfismi $(\phi_s: G_s\to F)_{s\in S}$ tale che, comunque considerati un gruppo H ed omomorfismi $(f_s: G_s \to H)_{s\in S}$, esiste unico omomorfismo $\eta: F\to H$ tale che $f_s=\eta(\phi_s)\ \forall s\in S$.

$\Rightarrow$ (ovvio) $\eta \doteq id_F$ è il solo omo. $F\to F$ tale che $\phi_s=\eta(\phi_s)\ \forall s\in S$!

$$\begin{tikzcd} G_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, "\phi_s"'] & H \\ F \left(=\ast_{s\in S} G_s\right) \arrow[ur, dashed, "\exists!\eta"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{NOTA 1}}$: è ovvio che, $\forall s\in S$, se f_s è iniettivo allora anche ϕ_s è iniettivo; diciamo che i ϕ_s sono tutti iniettivi!

↳ Guardo, a s fissato, $H \doteq G_s$ e $f_s \doteq id_{G_s}$ (e, per esempio, $f_i = 0\ \forall i\neq s$)!

$\boxed{\text{NOTA 2}}$: in effetti, è chiaro che due prodotti liberi di una medesima famiglie di gruppi siano canonicamente isomorfi!

$\boxed{\text{NOTA 3}}$: in particolare, il prodotto libero di due gruppi G_1 e G_2 è il dato di un gruppo $F \doteq G_1 * G_2$ e di due omomorfismi $\phi_k : G_k \to G_1 * G_2$ tale che, per ogni gruppo H ed omomorfismi $\psi_k : G_k \to H$, esiste unico omomorfismo $\eta : G_1 * G_2 \to H$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] & \\ G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\,\eta"] & H \\ G_2 \arrow[u, "\phi_2"] \arrow[ur, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

, ossia $\psi_k = \eta(\phi_k)$!

Inoltre, $G_1 \cong G_1'$ e $G_2 \cong G_2'$ $\Rightarrow$ $G_1 * G_2 \cong G_1' * G_2'$!

Dimostrato

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, dashed, shift left, "\varphi_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[drr, "\psi_1"] & & G_1' \arrow[ll, shift left, "\varphi_1^{-1}"] \arrow[d, "\phi_1'"] \\ G_1 * G_2 \arrow[rr, dashed, shift left, "\exists!\,\eta"] & & G_1' * G_2' \doteq H \arrow[ll, shift left, "\exists!\,\eta'"] \\ G_2 \arrow[rr, dashed, shift left, "\varphi_2"] \arrow[u, "\phi_2"] \arrow[urr, "\psi_2"'] & & G_2' \arrow[ll, shift left, "\varphi_2^{-1}"] \arrow[u, "\phi_2'"'] \end{tikzcd}$$

dove $\begin{cases} G_k \underset{\varphi_k^{-1}}{\overset{\varphi_k}{\cong}} G_k' \\ \psi_k \doteq \phi_k'(\varphi_k) \quad \text{(omo.!)} \end{cases}$,

ho certamente che $\exists!$ omo. $\eta : G_1 * G_2 \to G_1' * G_2'$ tale che $\psi_k = \eta(\phi_k)$;
simmetricamente $\exists!$ omo. $\eta' : G_1' * G_2' \to G_1 * G_2$ tale che $\eta'(\phi_k') = \phi_k(\varphi_k^{-1})$,

$$\Rightarrow \eta'(\underbrace{\eta(\phi_k)}_{(\phi_k'(\varphi_k))}) = \phi_k(\varphi_k^{-1}(\varphi_k)) = \phi_k \quad , \text{ ossia } \eta'(\eta) = id_{G_1 * G_2} \; !$$

(I) Ogni famiglia di gruppi possiede il prodotto libero!

$\forall$ famiglia di gruppi $(G_s)_{s \in S}$, considero anzitutto le loro intersezioni immaginando $G_s \cap G_t = \{1\}$ $\underset{(\text{o più precis. } \emptyset!)}{}$ $\forall s \neq t$ (per semplicità, come richiesto lecitamente),

e quindi « $1 \sim 1$ e, $\forall g, h \in \bigcup_{s\in S} G_s \setminus \{1\}$, $g \sim h \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} g, h \in G_s$ per almeno un $s \in S$ » definisce facilmente una rel. d'eq. su $\bigcup_{s\in S} G_s$:

Considero allora $F \doteq$ le parole ridotte nell'alfabeto $\bigcup_{s\in S} G_s$, ossia la parola vuota "1" e tutte le espressioni finite del tipo $g_1 g_2 \cdots g_n$ $(n \geq 1)$ al variare di: $g_k \in \bigcup_{s\in S} G_s \setminus \{1\}$ tali che $g_i \not\sim g_{i+1}$, e così definisco

$$(g_1 \cdots g_n)(t_1 \cdots t_m) \doteq \begin{cases} g_1 \cdots g_n \cdot t_1 \cdots t_m & \text{se } g_n \not\sim t_1 \\ g_1 \cdots g_{n-1} \cdot (g_n t_1) \cdot t_2 \cdots t_m & \text{se } g_n \sim t_1 \text{ e } g_n t_1 \neq 1 \\ g_1 \cdots g_{n-1} \cdot t_2 \cdots t_m & \text{se } g_n \sim t_1 \text{ e } g_n t_1 = 1 \end{cases}$$

Ottenendo un gruppo (di el. neutro 1 e $(g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$) tale per cui canonicamente $G_s \overset{\hookrightarrow}{\subsetneq} F$ $\forall s \in S$, e così $G_s \overset{i_s}{\hookrightarrow} F$ è omomorfismo (inn.) $\forall s \in S$! In effetti $F, (i_s : G_s \to F)_{s \in S}$ è il prodotto libero dei $(G_s)_{s\in S}$: comunque considerati un gruppo H ed omomorfismi $(\varphi_s : G_s \to H)_{s \in S}$, infatti, è facile che $\forall s \in S$ φ_s si estende univocamente all'omomorfismo

$$\begin{tikzcd} G_s \arrow[r, "\varphi_s"] \arrow[d, "i_s"'] & H \\ F \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\exists!\, \eta$ omo. tale che $\varphi_s = \eta \circ i_s$ $(\forall s \in S)$

$$\eta : F \longrightarrow H$$
$$\underset{\substack{\cap \quad \cap \\ G_{s_1} \cdots G_{s_n}}}{g_1 \cdots g_n} \longmapsto \varphi_{s_1}(g_1) \cdots \varphi_{s_n}(g_n)$$

(* in effetti "$*$" tra gruppi è commutativo!) $\underset{(\text{e associativo (iso)})}{}$

$\Longrightarrow$ Con G_1 e G_2 gruppi, $G_1 * G_2$ è (gruppo) costituito, a meno di isomorfismo, dalla parola vuota e da tutte le espressioni finite del tipo

$g_1 \cdot h_1 \cdot \ldots \cdot g_n \cdot h_n$ $(n \geq 1)$ al variare dei $g_k, h_k \in G_1 \cup G_2 \setminus (G_1 \cap G_2)$ tale che $g_k \in G_1$ e $h_k \in G_2$! $\overset{(inv.)}{\Longrightarrow}$ $G_1 * 0 \cong G_1$!

$\boxed{\text{NOTA}}$: siano $(G_s)_{s \in S}$ gruppi, e $\underset{(i)}{F_S}$ il gruppo libero generato da S ;

$\forall s \in S$, $G_s \cong \mathbb{Z}$ $\Longrightarrow$ $\underset{s \in S}{*} G_s \cong F_S$!

$\forall s \in S$, G_s è il gruppo libero generato da $\{s\}$, ossia $\forall g \in G_s$ è $g \overset{\sim}{=} s^a$ per un $a \in \mathbb{Z}$: è chiaramente isomorfismo

$$\underset{s \in S}{*} G_s \longrightarrow F_S$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ s_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot s_m^{a_m}}}{g_1 \cdot \ldots \cdot g_m} \longmapsto s_1^{a_1} \ldots s_m^{a_m}$$

$(a_k \neq 0!)$

! $\overset{(inv.)}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}$!

($\boxed{\text{NOTA}}$: analogamente $\underset{s \in S}{*} F_{(T_s)} \cong F_{\bigcup_{s \in S} T_s}$!)

$\Longrightarrow$ Se $A, B \subseteq X$ tali che esiste $x_0 \in A \cap B$, allora esiste unico omomorfismo (di gruppi) h che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A, x_0) \arrow[d, "(i_1 \text{ incl.})"'] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \arrow[r, dashed, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[u, "(i_2 \text{ incl.})"] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$\begin{cases} f_* = h(i_1) \\ g_* = h(i_2) \end{cases}$

; dunque, ovviamente, $h(\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0))$ è esattamente il sgr (di $\pi_1(X,x_0)$) generato dalle immagini di f_* e g_*,

per cui A, B e $A\cap B$ (aperti) connessi per archi $\underset{(\text{con } A\cup B = X)}{}$ $\overset{(V.K.)}{\Rightarrow}$ h è surgettivo!

D'altra parte, considerati $\hat{\alpha} := i_1(\alpha_*)$ e $\hat{\beta} := i_2(\beta_*)$ e quindi il diagr. (comm.)

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"'] & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "(i_1)"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
& \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0) \arrow[r, "h"] & \pi_1(X,x_0) \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[r, "\beta_*"'] \arrow[ur, "\hat{\beta}"] & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "(i_2)"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

(dove $h(\hat{\alpha}) = h(i_1(\alpha_*))$
$= f_*(\alpha_*) = g_*(\beta_*)$, $=$
$= h(\hat{\beta})$!)

è evidentemente $\{\hat{\alpha}(\gamma)\cdot\underbrace{\hat{\beta}(\gamma^{-1})}_{(\hat{\beta}(\gamma)^{-1})} \mid \gamma \in \pi_1(A\cap B,x_0)\} \subseteq \ker h$!

$\left[\, h(\hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1})) = (h(\hat{\alpha}(\gamma)))\,(h(\hat{\beta}(\gamma)))^{-1} = 1 \,!\,\right]$

(VAN KAMPEN II) $A, B \subseteq X$ aperti tali che $X = A\cup B$ e $x_0 \in A\cap B$:

A, B e $A\cap B$ connessi per archi $\Rightarrow$ $\ker h \underset{(\subseteq)}{=} \langle \hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}) \mid \gamma\in\pi_1(A\cap B,x_0)\rangle$

$\overset{(\text{hm})}{\Rightarrow}$ $\pi_1(A\cap B) = 0 \Rightarrow \pi_1(X,x_0) \overset{(h)}{\cong} \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)$!)

$\boxed{N := \langle \hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}) \mid \gamma\in\pi_1(A\cap B,x_0)\rangle}$ $(\triangleleft\ \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0))$ è necessariamente

$N \subseteq \ker h$, e chiaramente $\underset{(\hat{\beta}(\gamma^{-1}) = \hat{\beta}(\gamma)^{-1})}{}$ $\hat{\alpha} \overset{\text{mod } N}{\sim} \hat{\beta}$, dunque è ovviamente

commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "(i_1')"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] \arrow[r, dotted] & \dfrac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N} \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[r, dashed, "h'"'] & \pi_1(X,x_0) \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "(i_2')"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

$\overset{(V.K.)}{\Rightarrow}$

$\overset{(v.i.)}{\Rightarrow} \exists!\ \varphi: \pi_1(X,x_0) \to \dfrac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N}$ omomorfismo tale che $\begin{cases} i_1' = \varphi(f_*) \\ i_2' = \varphi(g_*) \end{cases}$;

in particolare $h_* = h'(i_*) = h'(\varphi(h_*)) \Rightarrow h'\varphi = id_{\pi_1(X,x_0)}$, per cui φ è

iniettivo; ma essendo $\dfrac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{N}$ generato dalle immagini di i_1' e

i_2', è ovvio che φ sia anche suriettivo: in conclusione φ

è isomorfismo con $\varphi^{-1} = h'$, per cui ovviamente $h' \cong h$! $\square$

Più in generale, $S \subseteq \pi_1(A \cap B, x_0)$ tale che $\underset{(sgr.)}{\langle S \rangle} = \pi_1(A \cap B, x_0)$

(stessa ipotesi)

$$\Rightarrow \quad \pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0)}{\langle \hat{\alpha}(s)\cdot\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s \in S \rangle} \quad !$$

Considerato $H \doteq \langle \hat{\alpha}(s)\cdot\hat{\beta}(s^{-1}) \mid s \in S \rangle$ $(\triangleleft\ \pi_1(A,x_0) * \pi_1(B,x_0))$ e $T \doteq$

$\doteq \{\gamma \in \pi_1(A\cap B,x_0) \mid \hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}) \in H\}_{(\neq\emptyset!)}$, è chiaro che basta dimostrare

$\underset{(\supseteq)}{T = \pi_1(A\cap B,x_0)}$ $(\Rightarrow \langle \hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}) \mid \gamma \in \pi_1(A\cap B,x_0)\rangle \subseteq H$, mentre $\supseteq$ è ovvio!);

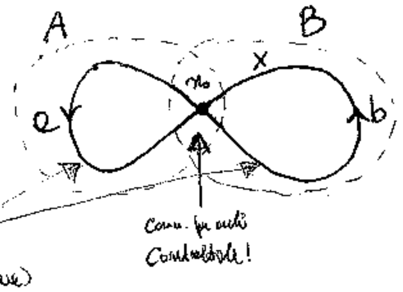
ma, d'altra parte, è banalmente $S \subseteq T$, per cui è ovvio che

basta avere $T < \pi_1(A\cap B,x_0)$, e cioè che $\forall\, \gamma,\delta \in T$,

$\gamma\delta^{-1} \in T$ (ossia $\hat{\alpha}(\gamma\delta^{-1})\cdot\hat{\beta}((\gamma\delta^{-1})^{-1}) \in H$): $\hat{\alpha}(\gamma\delta^{-1})\cdot\hat{\beta}(\delta\gamma^{-1}) =$

$= \hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\alpha}(\delta^{-1})\cdot\hat{\beta}(\delta)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}) = \underbrace{(\hat{\alpha}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\gamma^{-1}))}_{(\in H)}\cdot\underbrace{(\hat{\beta}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\delta^{-1}))\cdot\underbrace{(\hat{\beta}(\delta)\cdot\hat{\alpha}(\delta^{-1}))}_{(\in H)}\cdot(\hat{\beta}(\gamma)\cdot\hat{\beta}(\delta^{-1}))^{-1}}_{(\in H!!)}$

$\in H$! $\square$

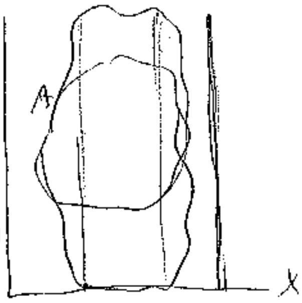
$\Rightarrow$ Considerato l'otto , è fattibile

$\pi_1(X, x_0) \overset{(V.K.)}{\cong} \pi_1(\overset{\circ}{A}, x_0) * \pi_1(\overset{\circ}{B}, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong$ «il gruppo libero sui due generatori a e b» !

$\boxed{\text{NOTA}}$: Dati G, G_1 e G_2 gruppi e $\varphi_i : G \to G_i$ omomorfismi, se $N := \langle \varphi_1(g) \cdot \varphi_2(g^{-1}) \mid g \in G \rangle$ $(\triangleleft\, G_1 * G_2)$ allora $\dfrac{G_1 * G_2}{N}$ è "il prodotto amalgamato" di G_1 e G_2 (rispetto a φ_1 e φ_2) !

---

allora aperto di Y $\left(f^{-1}(f((A:W))) = (A:W)!\right)$ $(\subseteq)$



~~[illegible]~~ tale che $(y,z) \in V \times W \subseteq U$

("così" $y \in V$; ma infatti $y = f(x)$). $\square$

(NOTA: f aperta $\Rightarrow$ $f \times id_Z$ aperta e il risultato sarebbe banale! ✓)

X sp. top. T_2, loc. compatto e a base numerabile $\Rightarrow$ esiste un'esaustione in compatti di X.

Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile della top. su X, e sia "$\mathcal{B}_c$" $\subseteq \mathcal{B}$ costituita da quegli aperti di $\mathcal{B}$ che hanno chiusura compatta; essendo X T_2 e loc. compatto, anche $\mathcal{B}_c$ è un ricoprimento (aperto) di X [loc. comp.: ogni punto x di X ammette intorno compatto K, e quindi $\exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq K$; ma K compatto e X T_2 $\Rightarrow$ K chiuso, quindi è anche $\overline{B} \subseteq K$, e $\overline{B}$ chiuso nel compatto $K \Rightarrow \overline{B}$ compatto ✓]; allora e ne segue che $\mathcal{A} := \{$le unioni finite di elem. di $\mathcal{B}_c\}$ è un ricop. (aperto) di X, e si mantiene il fatto che, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A}$ è compatto; inoltre chiaramente $\mathcal{A}$ è numerabile (al più), e, $\forall K \subseteq X$ compatto, $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che $K \subseteq A$ (ovvio perché $\mathcal{A}$ ricopre X). Ora, se $g: \mathbb{N} \to \mathcal{B}_c$ è una scelta effettiva suriettiva, definiamo una successione di compatti di X $(K_n)_{n \geq 1}$ tale che $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ che ricoprono X, è ovvio che $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1} (\subseteq K_{n+1})$ $\forall n \geq 1$,

ponendo per ricorrenza
$$\begin{cases} K_1 := \overline{f(1)} \,;\; A_{n+1} \in \mathcal{B} \text{ tale che } A_{n+1} \supseteq K_n \,; \\ K_{n+1} := \overline{A_{n+1} \cup f(n+1)} \quad \forall n \geq 1 \\ \quad (= \overline{A_{n+1}} \cup \overline{f(n+1)}) \end{cases} :$$

i K_n sono infatti chiaramente compatti e "crescenti", ricoprono X
(f su!)
$$\Big(\bigcup_{n \geq 1} K_n \supseteq \bigcup_{n \geq 1} \overline{f(n)} \supseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}_c} B = X \Big)$$
e più precisamente

$$K_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \underbrace{A_{n+1} \cup f(n+1)}_{\text{(aperto!)}} \subseteq \mathring{K}_{n+1}$$ (tutto ovvio).

~~Se A è un aperto di X, allora $A = (\overline{A})^\circ$ (è allora) ... se infatti per assurdo $\exists\, x \in (\overline{A})^\circ \setminus A$, allora ... $\overline{A}$ ... aperto U di X tale che $x \in U \subseteq \overline{A}$ ... $\overline{A} \setminus A$ è ... chiuso ... $(\overline{A} \setminus A) \setminus$ ... è ... chiuso ...~~

(NON è detto che A aperto $\Rightarrow A = (\overline{A})^\circ$, (2)

come ad esempio mostra $A := \{a\}$ in $(X := \{a, b\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\})$!)

Sia (X,d) completo ; $A \subseteq X$ è chiuso $\Leftrightarrow$ A è completo (rispetto alla metrica indotta)

~~$\Rightarrow$) : sia $(a_n)_{n\geq 1}$ succ. di Cauchy in A ; allora lo è in X, e quindi (ipotesi) $(a_n)_{n\geq 1}$ converge ad un certo $a \in X$; essendo esp. sp. metrico (primo - numerabile), in realtà $a \in \overline{A} = A$.~~

~~$\Leftarrow$) : ogni succ. in A che converge ad un certo $a (\in \overline{A})$ è ovviamente di Cauchy in A, quindi convergente anche in A ; per unicità del limite ciò accade ad $a \in A$, e in conclusione $\overline{A} \subseteq A$~~

(X,d) sp. metrico ; (X,d) è TOTALMENTE LIMITATO $\overset{d.}{\Leftrightarrow}$ $\forall$ reale $r>0$, è possibile ricoprire X con palle aperte di raggio r in numero finito.

Ogni spazio metrico completo (per successioni) è totalmente limitato.

Sia (X,d) sp. metr. completo per succ. ; se per assurdo $\exists\, r>0$ tale che non sia possibile ricoprire X con un numero finito di palle aperte di raggio r, allora definiamo una succ. $(e_n)_{n\geq 1}$ in X come segue : $e_1 \in X$ qualsiasi, mentre $\forall n>1$ $e_n \in \underbrace{X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(e_i,r)}_{\text{(chiuso!) } (\neq \emptyset)}$ qualsiasi ; $\forall\, n>m$ è $d(e_n,e_m) \geq r$, per cui $(e_n)_{n\geq 1}$ non può ammettere sottosucc. convergenti in quanto non di Cauchy.

Ogni sp. metr. totalmente limitato è a base numerabile

Sia (X,d) sp. metr. tot. lim. : basta provare che è separabile ;

insomma (X,d) tot. lim., $\forall n \geq 1$ c'è $E_n \subseteq X$ finito tale che $X = \bigcup_{b \in E_n} B(b, 2^{-n})$; ma allora $E := \bigcup_{n \geq 1} E_n$ è (numerabile e) denso in X: $\forall A$ aperto $\neq \emptyset$ di X, ~~se per assurdo~~ $A \subseteq X \setminus E$, $\forall x \in A$ ~~...~~ ~~$\forall b \in E$, allora $b \in E_n$, $d(x,b) > 0$, per cui $\exists n \geq 1$ tale che $d(x,b) < 2^{-n}$; d'altra parte c'è $k \geq 1$ tale che $B(x, 2^{-k}) \subseteq A$ e allora per $h := k \vee n$ è $b \in B(x, 2^{-h}) \subseteq A$~~

esiste certamente $n \geq 1$ tale che $B(x, 2^{-n}) \subseteq A$, ~~...~~ e per tale n certamente $x \in B(b, 2^{-n})$ per un $b \in E_n \subseteq E$; ma allora (per simmetria di d) $b \in B(x, 2^{-n}) \subseteq A$. □

Per (X,d) sp. met., sono EQUIVALENTI:

1. X è compatto;
2. Ogni succ. in X possiede punto d'acc.;
3. X è compatto per succ.;
4. X è completo e tot. limitato.

1.$\Rightarrow$2.: è vero in generale; 2.$\Rightarrow$3.: è certamente vero se X è primo-numerabile, cosa che è uno sp. metrico; 3.$\Rightarrow$4.: (X,d) compatto per succ. $\Rightarrow$ (X,d) completo è visto, e che implichi pure tot. lim. è stato ora fatto da me. ✓

(4.$\Rightarrow$1.): usiamo in realtà che (3) $\Rightarrow$ (1) per questo è presto detto (completo per succ. $\Rightarrow$ tot. lim. $\Rightarrow$ e chiuso, è completo per succ. e ben num. ($\Leftarrow$ completo!)), e dunque resta solo 4. $\Rightarrow$ 3., che certamente si ha dimostrando che

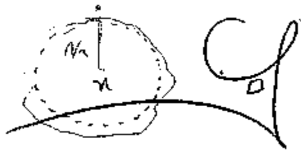
Da ogni succ. in uno sp. metr. TOT. LIM. si può estrarre una sottosucc. di Cauchy. : ma infatti, se $(e_n)_{n\geq 1}$ è una succ., e se $\forall n \geq 1$ A_n è un insieme finito di palle aperte di raggio 2^{-n} che ricopre X, allora sia $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ tale che, $\forall i \geq 1$, $f_n(i)$ sia una palla (di raggio 2^{-n}) che contiene e_i; ma allora (...) $\exists\, \rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente tale che $f_m(\rho(m)) = f_n(\rho(n))$ $\forall m \geq n$, per cui la sottosucc. $(e_{\rho(n)})_{n\geq 1}$ tale che, $\forall m > n$, $e_{\rho(m)}$ e $e_{\rho(n)}$ sono contenuti in una palla aperta di raggio 2^{-n}, da cui abbiamo subito che $(e_{\rho(n)})_{n\geq 1}$ è di Cauchy.

(X,d) sp. metr.; $A \subseteq X$ tot. lim. $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ tot. lim.

$\Leftarrow$) : $\forall r > 0$, $\exists\, e_1, \dots, e_n \in \overline{A}$ tali che $(A\subseteq)\ \overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(e_i, r/2)$; presi allora, $\forall 1 \leq i \leq n$, $b_i \in A \cap B(e_i, r/2)$, è anche $(A \subseteq)\ \overline{A}\ \subseteq\ \bigcup_{i=1}^{n} B(b_i, r)$ ($\forall x \in \overline{A}$, detto i in $B(e_i, r/2)$, è $d(b_i, x) \leq d(b_i, e_i) + d(e_i, x) < r/2 + r/2 = r$) ✓

$\Rightarrow$) : $\forall r > 0$, $\exists\, e_1, \dots, e_n \in A$ tali che $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(e_i, r/2)$;

ovvio allora che $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1} \overline{B(e_i, r_2)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(e_i, r)$ (in generale $\overline{B(x, r_2)} \subseteq \{x' \in X \mid d(x,x') \leq r_2\} \subseteq B(x, r)$:
banalmente perché $\{x' \in X \mid d(x,x') \leq r_2\}$ è un chiuso che contiene $B(x, r_2)$)



X sp. top. ; $A \subseteq X$ è RELATIVAMENTE COMPATTO $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ A è contenuto in un sottosp. compatto di X.

NOTA: se X è T_2, allora $A \subseteq X$ è rel. comp. $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ è compatto.
[Se $K \subseteq X$ è compatto tale che $A \subseteq K$, X $T_2 \Rightarrow K$ chiuso, $\Rightarrow \overline{A} \subseteq K$; ma allora $\overline{A}$ chiuso in $K \Rightarrow \overline{A}$ compatto. □]

(X, d) sp. metrico completo ($\Rightarrow T_2$!), $A \subseteq X$; A è rel. compatto $\Leftrightarrow$ A è tot. lim..

$\Leftarrow$) : A è tot. lim. e completo (così lo è $\overline{A}$), cioè A è anche chiuso, ossia $A = \overline{A}$; ma tot. lim. e completo $\Rightarrow$ compatto. ✓

$\Rightarrow$) : certamente $\overline{A}$ è compatto (oltre che completo), quindi è tot. lim., ossia lo è A. □
